Noter til kurset

Hygrotermisk Bygningssimulering

Mogens Steen-Thøde

ISSN 1901-7286
DCE Lecture Notes No. 20

AALBORG UNIVERSITET
Institut for Byggeri og Anlæg

Aalborg Universitet
Institut for Byggeri og Anlæg
Architectural Engineering

DCE Lecture Notes No. 20

Noter til kurset

Hygrotermisk Bygningssimulering

Mogens Steen-Thøde

Februar 2008

© Aalborg Universitet

Udgivet 2008 af
Aalborg Universitet
Institut for Byggeri og Anlæg
Sohngaardsholmsvej 57
9000 Aalborg

Trykt på Aalborg Universitet

ISSN 1901-7286
DCE Lecture Notes No. 20

Indhold

Indhold i
Forord ii
DET BESTEMMENDE LIGNINGSSYSTEM 1
1.1 Introduktion 1
1.2 Varmebalance 2
1.3 Opstilling af beregningsmodel 4
1.4 Randbetingelser og begyndelsesbetingelser 6
1.5 Eksempel på opstilling af det bestemmende ligningssystem 8
1.6 Eksempler på analytisk løsning 10
1.7 Numeriske løsninger 16
1.8 Tidsdiskretisering 18
1.9 Matematiske løsningsmetoder 21
KONTROLVOLUMENMETODEN 23
2.1 Opstilling af kontrolvolumenmetoden 23
2.2 Randbetingelser 26
2.3 Det samlede ligningssystem 27
2.4 Kontrolvolumenmetoden i 2 D og 3 D 33
TERMISKE RUMMODELLER 37
3.1 Grundlag 37
3.2 Opstilling af termisk rummodel 38
3.3 En forenklet termisk rummodel 44
3.4 Døgnmiddeltemperatur og maksimal udsving 48
FINITE ELEMENT METODEN 53
4.1 Element og temperaturfunktion 53
4.2 Det matematiske grundlag 57
4.3 Elementligninger 60
4.4 Samling af elementer 63
4.5 Randbetingelser 65
4.6 Beregning af kuldebro 69
APPENDIKS 74
LITTERATUR 77

Forord

Dette notat er primært skrevet til brug ved undervisningen i kurset ”Hygrotermisk Bygningssimulering” med henblik på at give en første introduktion af numeriske metoder til løsning af varmeledningsproblemer og vise eksempler på metodernes anvendelse. Formålet er at give en kort indføring i grundlaget for de beregningsmetoder, der anvendes i pc-programmer til simulering af tidsvarierende indeklimaforhold i bygninger eller ved beregning af stationær flerdimensional varmeledning, som bl.a. forekommer ved kuldebroer i bygningskonstruktioner. Det er derfor naturligt at både kontrolvolumenmetoden og finite element metoden omtales, da disse to metoder indgår i henholdsvis den termiske rummodel i programmet BSim og ved løsning af flerdimensional varmeledning med programmet COMSOL Multiphysics.

Da kurset ”Hygrotermisk Bygningssimulering” normalt afvikles før det grundlæggende kursus i ”Differentialligninger og Numeriske metoder”, giver dette visse begrænsninger i den matematiske udfoldelse og nærværende notat er derfor forsøgt skrevet, så det kan læses med udbytte, selvom læseren ikke er fortrolig med de analytiske løsningsmetoder til differentialligninger. Indføringen i de numeriske metoder er derfor holdt på et introducerende niveau, så der kun kræves elementært kendskab til differentiation og integration. Det er dog indledningsvis nødvendigt at opstille den differentialligning – varmestrømsligningen – der er grundlæggende for al beregning af varmetransport og redegøre for de dertilhørende randbetingelser, således at man altid har for øje, at det er dette ligningssystem, der skal løses, og at de numeriske løsninger altid kun er tilnærmede løsninger.

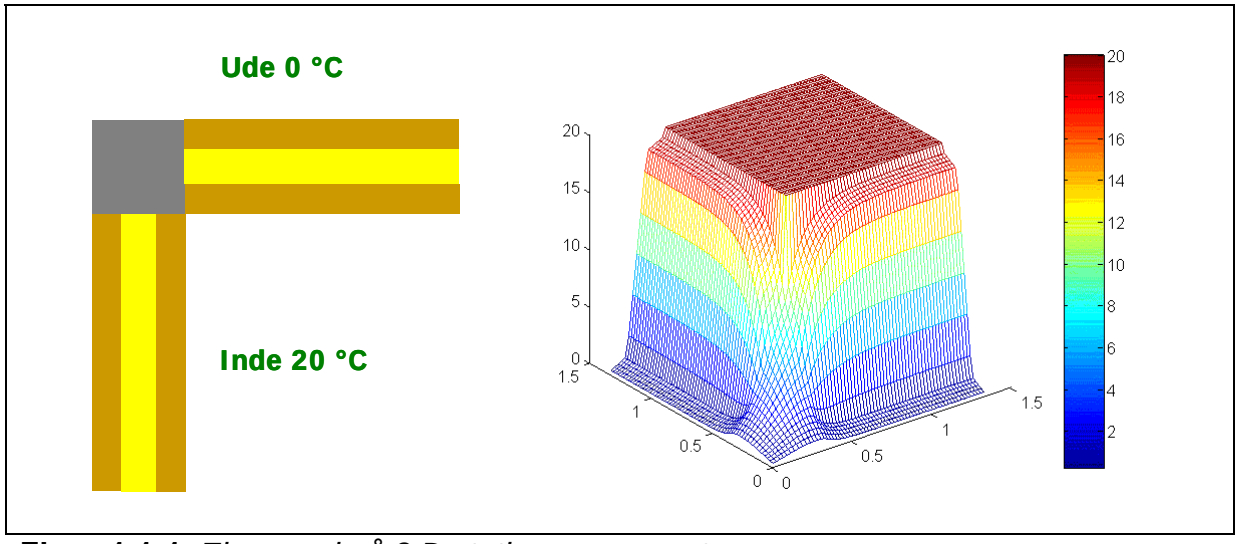
Mogens Steen-Thøde

Aalborg, februar 2008

DET BESTEMMENDE LIGNINGSSYSTEM

1.1 Introduktion

Ingeniørmæssig beregning af ”komplicerede” varmeledningsproblemer inden for bygningsteknikken er blevet hverdagskost i takt med informationsteknologiens udvikling, idet der findes et utal af færdige edb-programmer til løsning af opgaver af denne art. Der kan være behov for at undersøge, om en ny konstruktionsudformning er tilstrækkeligt isoleret, så den ikke indeholder utilladelige kuldebroer, eller der ønskes en forudsigelse af det indeklima, der kan forventes i en bygning under varierende belastningsforhold, og her vil bygningskonstruktionernes varmeakkumulerende egenskaber have en væsentlig indflydelse på temperaturforløbet. Det første eksempel vil normalt blive behandlet som et stationært flerdimensionalt varmeledningsproblem (se fig. 1.1-1), mens det andet eksempel typisk vil være baseret på sammenkobling af konstruktionselementer, hvor varmeledningen regnes endimensional og ikke-stationær (fig. 1.1-2).

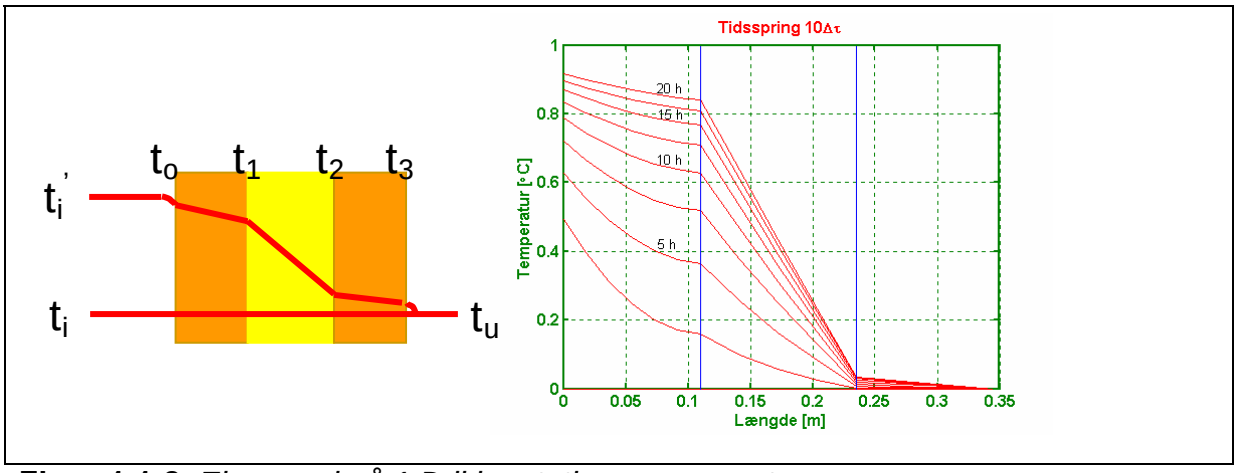


Figur 1.1-1. *Eksempel på 2 D stationær varmestrøm.*

Med et blik på det simple eksempel der er vist i fig. 1.1-1, siger det næsten sig selv, at man ikke vil (og ofte heller ikke kan) søge at få temperaturfordelingen i konstruktionen udtrykt som en analytisk funktion, men at man er henvist til at søge tilnærmede numeriske løsninger til de differentialligninger, der beskriver problemet. Tilsvarende forhold gør sig gældende i det ikke-stationære tilfælde (fig. 1.1-2), der yderligere kompliceres af, at de termiske belastninger, der påvirker konstruktionen over tid, som regel heller ikke lader sig beskrive analytisk.

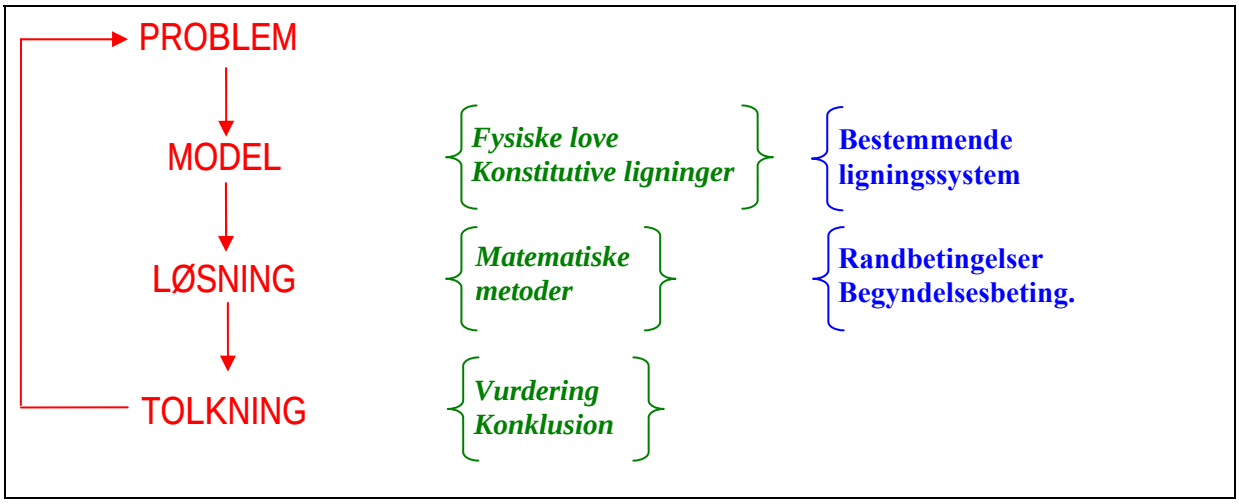
Konsekvensen af dette er, at man kun får oplysninger om fx temperaturen i udvalgte punkter, og at temperaturens eventuelle variation med tiden også kun oplyses til en række givne tidspunkter. Jo større punkttæthed geometrien opdeles i, og jo kortere tidsinterval der er mellem beregningerne, des større ”nøjagtighed” må man i almindelighed forvente, forstået på den måde at jo nærmere ville de beregnede resultater

komme på en analytisk løsnings værdier (hvis en sådan eksisterede for det givne problem).



Figur 1.1-2. *Eksempel på 1 D ikke-stationær varmestrøm.*

Løsning af varmeledningsproblemer inden for bygningsfysikken følger, i lighed med de fleste ingeniørmæssige beregningsproblemer, de faser, der er vist i fig. 1.1-3. I det følgende gives en introduktion til opstilling af en generel model for varmeledning i faste materialer, og der vil blive omtalt to numeriske løsningsmetoder: kontrolvolumenmetoden og finite element metoden, ligesom der gives eksempler på disse metoders anvendelse.



Figur 1.1-3. *Problemløsningens faser.*

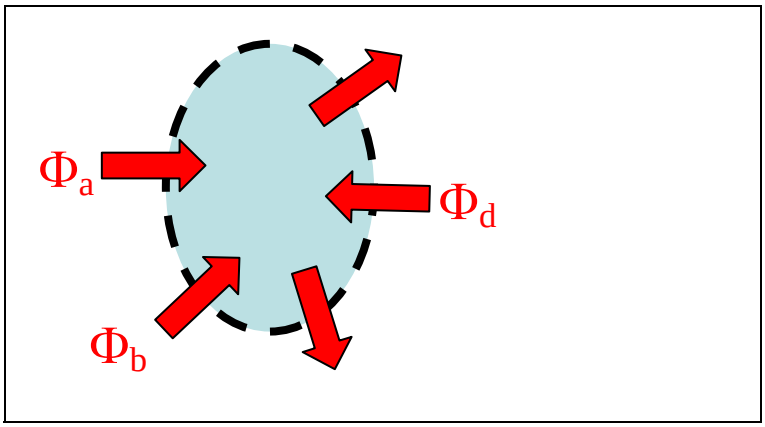
1.2 Varmebalance

Formuleringen af den idealiserede matematiske model bygger på anvendelsen af de generelle fysiske love, for varmetransport er dette termodynamikkens første hovedsætning, der er sætningen om energiens bevarelse. De generelle fysiske love er karakteriseret ved, at deres anvendelse er uafhængig af det betragtede mediums natur, men disse love er imidlertid sjældent tilstrækkelige til en fuldstændig beskrivelse af

problemet, hvorfor der må inddrages specielle love – de konstitutive ligninger – hvis anvendelse netop afhænger af det pågældende mediums natur. I det følgende bliver Fouriers lov om varmeledning anvendt, ligesom der ved beskrivelsen af randbetingelserne inddrages Stefan og Boltzmanns lov om varmestråling samt Newtons konvektionsligning.

Termodynamikkens første hovedsætning udtrykker:

> *For et afgrænset system (kontrolvolumen) er*
> *tilvæksten i energi pr. tidsenhed =*
> *summen af de tilførte varmestrømme +*
> *effekten af det arbejde, der udføres på systemet.*



Figur 1.2-1 *Et afgrænset system.*

Inden for bygningsfysikken vil der altid kunne ses bort fra sidste led, hvorfor første hovedsætning her bliver til **den generelle varmebalanceligning**:

$$\frac{dE}{d\tau} = \sum \Phi_i \qquad (1.2.1)$$

Hvor

E = energi [J]
τ = tid [sek]
Φ = varmestrøm [W] (regnet positiv når den tilføres systemet)

Tilvæksten i energi er et udtryk for, at der **akkumuleres** varme i systemet, og dette giver anledning til en temperaturændring i kontrolvolumenet:

$$\frac{dE}{d\tau} = \int_V \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dV \qquad (1.2.2)$$

Hvor

t = temperatur [°C]
ρ = massefylde [kg/m^3]
c = varmefylde [J/kgK]
V = volumen [m^3]

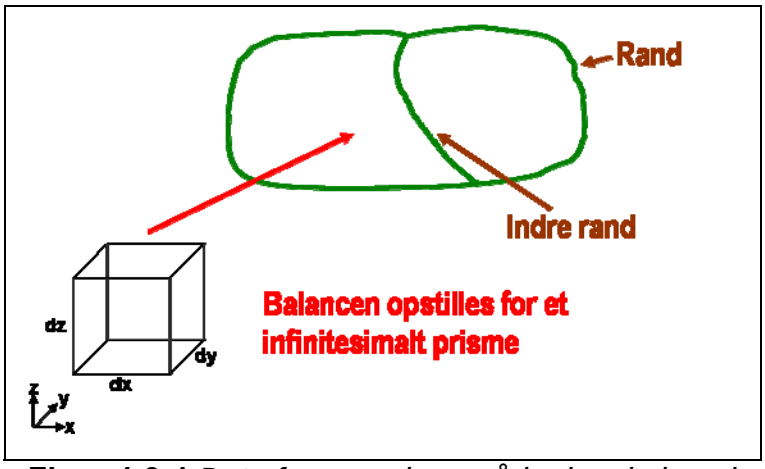
Hvis alle varmestrømme i (1.2.1) (se fig. 1.2-1) er konstante i tid og summen af dem er lig nul, så er systemet i en stationær tilstand, og varmebalancen udtrykker da:

Under stationære forhold er
summen af varmestrømme tilført til systemet =
summen af varmestrømme afgivet fra systemet.

I denne tilstand sker der ingen ændring i systemets indre energi, hvorfor $\frac{dE}{d\tau} = 0$ og dermed er også $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$, altså ingen ændring af temperaturen over tid i det betragtede system.

1.3 Opstilling af beregningsmodel

Der opstilles nu en generel model for det afgrænsede område, der skal analyseres (se fig. 1.3-1). Modellen gives differentiel form, dvs. at varmebalancen opstilles for et infinitesimalt prisme i området og skal derefter gælde ethvert sted i området.



Figur 1.3-1 *Det afgrænsede område der skal analyseres.*

Der gøres følgende forudsætninger:

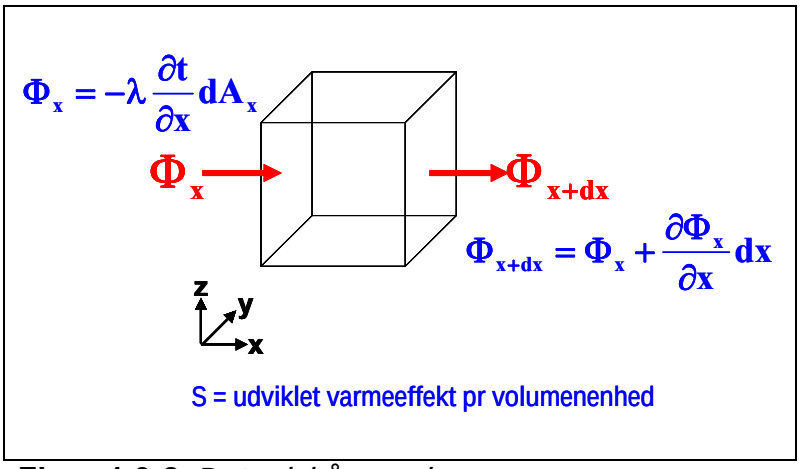
- det betragtede område består kun af faste materialer
- ved eventuelle indre rande mellem forskellige materialer er der så god kontakt, at der ikke forekommer nogen ekstra modstand mod varmeledningen fra det ene materiale til det andet
- og (af bekvemmelighedsgrunde) at materialerne er isotrope, hvilket bl.a. betyder, at varmeledningsevnen er ens i alle retninger
- samt at indgående materialeparametre er konstante

Den generelle varmebalanceligning (1.2.1) anvendes nu på det udskårne prisme, og for fuldstændighedens skyld antages det, at der også foregår en varmeudvikling i selve prismet med en effekt pr. volumenenhed på S.

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dV = \Phi_x - \Phi_{x+dx} + \Phi_y - \Phi_{y+dy} + \Phi_z - \Phi_{z+dz} + SdV \qquad (1.3.1)$$

Hvor

Φ_x = varmestrøm i x-aksens retning [W]
S = varmeudvikling [W/m^3]



Figur 1.3-2 *Det udskårne prisme.*

Den udadgående varmestrøm kan udtrykkes ved varmestrømmens ændring i aksens retning:

$$\Phi_{x+dx} = \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx \qquad (1.3.2)$$

Indføres dette i (1.3.1) fås:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dV = -\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dz + SdV \qquad (1.3.3)$$

eller

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dV = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dA_x dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dA_y dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dA_z dz + SdV \qquad (1.3.4)$$

og da volumenet indgår i alle led

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + S \qquad (1.3.5)$$

Hvor

q_x = Varmestrømsintensitet i aksens retning [W/m^2]
A_x = Areal vinkelret på aksens retning [m^2]

Det er nu ikke muligt at komme længere med den generelle varmebalanceligning, så det er her, at det er nødvendigt at sammenknytte temperatur og varmestrømsintensitet gennem Fouriers lov om varmeledning:

$$\mathbf{q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}} \tag{1.3.6}$$

Hvor

λ = materialets varmeledningsevne [W/mK]

Indsættes i (1.3.5) fås:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x}(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(-\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(-\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + S \tag{1.3.7}$$

Heraf fremkommer den generelle **varmestrømsligning**:

$$\boxed{\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + S \qquad (1.3.8)}$$

Ligning (1.3.8) er således den bestemmende ligning, der gælder ethvert sted i det afgrænsede område, der analyseres – altså er (1.3.8) den matematiske model for den fysiske proces, der optræder som ikke-stationær varmeledning i faste materialer, når der forekommer en i tid og sted kendt varmeudvikling S i området. λ, ρ og c er (efter de gjorte forudsætninger) konstante koefficienter. Det er karakteristisk, at det er nødvendigt at bestemme temperaturfordelingen i området, inden der kan ske en beregning af varmestrømmene gennem anvendelse af Fouriers lov (1.3.6).

Ligning (1.3.8) er en partiel differentialligning med temperaturen t som den afhængige variable, der er en funktion af de uafhængige variable: tid og de tre stedkoordinater, $t = t(x,y,z,\tau)$. Ligningen er lineær, da t kun optræder i første potens, men af anden orden, da den indeholder den anden afledede af t med hensyn til stedet.

For at kunne få en entydig beskrivelse af temperaturfeltet i det analyserede område er det en nødvendig men ikke tilstrækkelig betingelse, at funktionen opfylder ligning (1.3.8). Dette ligger i ligningens struktur, idet (1.3.8) angiver sammenhængen mellem den stedlige og den tidsmæssige *ændring* af temperaturen. For at kunne finde selve temperaturfordelingen er det nødvendigt at beskrive 1) hvordan der udveksles varme mellem det afgrænsede områdes ydre rande og dets omgivelser, samt hvordan varmen overføres langs eventuelle indre rande mellem forskellige materialer, og 2) hvordan temperaturfordelingen er i hele beregningsområdet til det tidspunkt, hvor beregningerne starter. De nævnte betingelser kaldes henholdsvis **rand- og begyndelsesbetingelserne**.

1.4 Randbetingelser og begyndelsesbetingelser

Som nævnt ovenfor er en beskrivelse af rand- og begyndelsesbetingelserne en nødvendighed for at få en entydig løsning til (1.3.8) og man kan ligefrem sige, at det er randbetingelserne, der definerer den konkrete opgave, idet disse kan være forskelli-

ge, men det er altid den samme ligning (1.3.8), der skal opfyldes. Det er altså randbetingelserne, der bestemmer, hvordan temperaturfordelingen bliver i beregningsområdet.

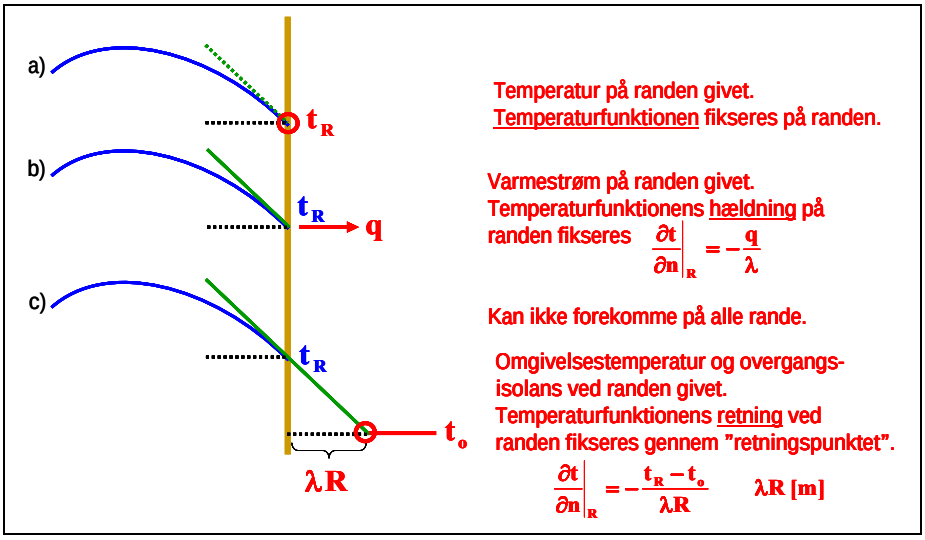
Randbetingelser

Randbetingelserne kan antage følgende former:

a) **Kendt temperatur** på hele eller dele af randen. Temperaturfunktionen kan være vilkårlig – konstant eller varierende i tid. Gennem denne randbetingelse fikseres selve løsningsfunktionen på randen, fig. 1.4-1 a). Denne randbetingelse forekommer dog ikke ret tit inden for bygningsfysikken.

b) **Kendt varmestrøm** på hele eller dele af randen. Varmestrømsintensiteten er således givet i størrelse og tidsmæssigt forløb på de dele af randen, hvor denne betingelse er gældende. Da varmestrømmen inde i materialet ved randen skal være lig den ydre påvirkning: $-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_R = q$ (her regnes varmestrømmen i materialet positiv i den udadgående fladenormals retning) betyder dette, at hældningen på temperaturfeltet fikseres på randen (se fig. 1.4-1 b)). *Da det kun er hældningen der fastlægges, kan denne randbetingelse ikke forekomme på alle rande – det er nødvendigt at have en temperatur at "hænge" løsningen op på.*

c) **Kendt omgivelsestemperatur** og overgangsisolans ved hele eller dele af randen. Varmestrømmen ved randen udtrykkes nu ved $-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_R = \frac{1}{R}(t_R - t_o)$ hvor R er overgangsisolansen og t_o omgivelsestemperaturen. Igen fikseres løsningsfunktionens hældning på randen men nu også knyttet til omgivelsestemperaturen gennem *retningspunktet* (t_o, λR) som vist i fig. 1.4-1 c).



Figur 1.4-1 *Randbetingelser.*

Ved indvendige rande er der som tidligere nævnt forudsat så god kontakt mellem materialerne, at varmen ledes direkte fra det ene materiale til det andet:

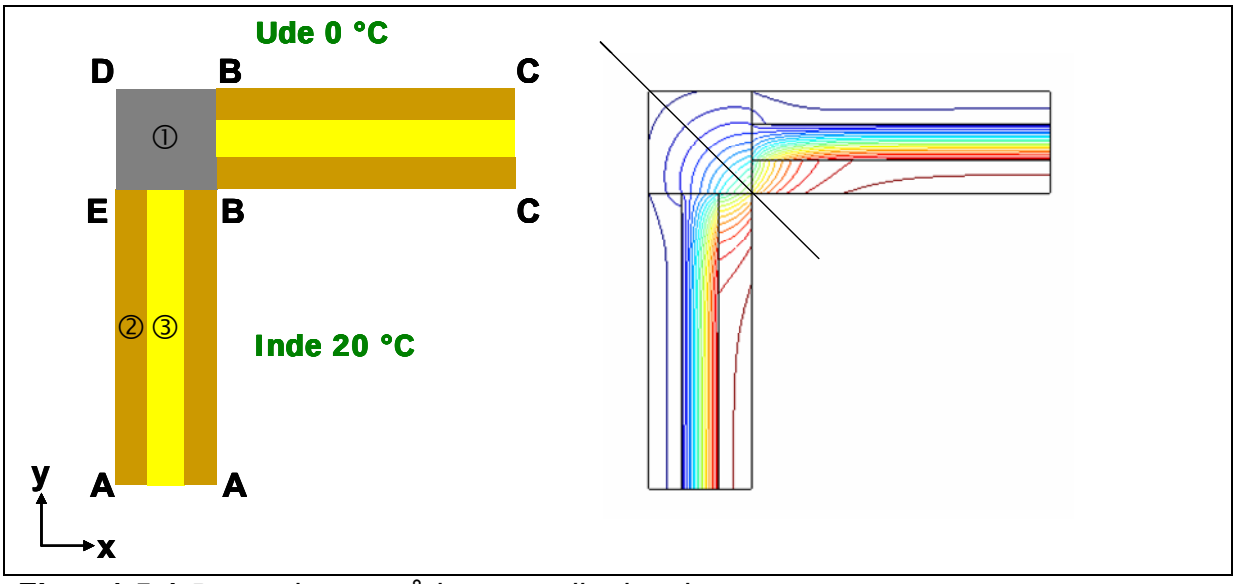
$-\lambda_1 \left.\frac{\partial t_1}{\partial n}\right|_R = -(-\lambda_2 \left.\frac{\partial t_2}{\partial n}\right|_R)$ ligesom temperaturfunktionerne t_1 og t_2 skal have samme værdi langs randen for at sikre kontinuitet. Varmestrømmene er igen regnet positive i den udadgående fladenormals retning.

Begyndelsesbetingelser

Hvis det er et ikke-stationært tilfælde, der skal løses, må temperaturfunktionen kendes til det tidspunkt hvor beregningerne startes – dette udgør begyndelsesbetingelsen. Temperaturfunktionen til begyndelsestidspunktet ($t = \psi(x,y,z,\tau=0)$) kan i princippet være en vilkårlig funktion og det vil være dette temperaturfelt, der danner udgangspunkt for de beregnede temperaturændringer til et senere tidspunkt.

1.5 Eksempel på opstilling af det bestemmende ligningssystem

På nedenstående fig. 1.5-1 er vist et plansnit af en konstruktion opbygget af tre materialer, hvor temperaturfordelingen skal bestemmes. Det forudsættes, at der er tale om et 2D stationært tilfælde, hvor omgivelsestemperaturerne inde og ude (t_i og t_u) samt de tilhørende overgangsisolanser (R_i og R_u) er kendte. Det bestemmende ligningssystem skal nu opstilles.



Figur 1.5-1 *Beregningsområde og randbetingelser.*

Varmestrømsligningen (1.3.8) skal naturligvis være gældende for hvert delområde med forskellige materialer – men nu i en stationær 2D udgave uden indre varmeudvikling. Ligningen ser da således ud for materiale 1 i delområde BDEB:

$$0 = \lambda_1 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

Ved at udskifte varmeledningsevnen (λ) fås tilsvarende udtryk for de øvrige seks delområder. Vi kan herefter vende os mod randbetingelserne.

Langs inde-randen (A-B-C) og ude-randen (A-E-D-B-C) er det randbetingelse c), der er gældende, og for randen A-B kan dette udtrykkes ved:

$$-\lambda_2 \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{y=A\to B} = \frac{1}{R_i}(t_{y=A\to B} - t_i)$$

altså at varmestrømmen, der ledes fra materiale 2 i x-aksens retning, overalt langs randen A-B (hvor y antager værdier i intervallet A-B) skal være lig varmestrømmen, der overføres til omgivelserne.

Langs ude-randen D-B haves tilsvarende:

$$-\lambda_1 \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{x=D\to B} = \frac{1}{R_u}(t_{x=D\to B} - t_u)$$

På samme måde fortsættes rundt langs de øvrige rande – men der mangler stillingtagen til, hvor randene A-A og C-C skal lægges, og af hvilken type de er.

Man må forvente, at når man bevæger sig væk fra selve hjørnet, vil 2D-effekt aftage og til sidst forsvinde. Når dette sker, vil varmen kun strømme i en retning nemlig indefra og ud, hvilket betyder, at isotermerne forløber parallelt med de indvendig og de udvendige overflader, som det også ses af højre del af fig. 1.5-1 (der selvfølgelig er fremkommet som løsning til det ligningssystem, der er ved at blive opstillet). Randene A-A og C-C må således placeres så langt væk fra hjørnet, at der ingen varmestrøm er i retning vinkelret på randen.

Denne randbetingelse er en speciel udgave af randbetingelse b), hvor varmestrømmen er nul vinkelret på randen – dette kaldes en **adiabatisk** rand. Udtrykt matematisk for rand A-A gælder for hver af de tre materialedele:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{x=A\to A} = 0$$

Hvis kanterne A-B og B-C er lige lange, er der både geometrisk materiale- og belastningsmæssig symmetri om aksen D-B, hvorfor isotermerne vil stå vinkelret på denne akse. Dette havde man kunnet udnytte som en adiabatisk randbetingelse, hvorved beregningsområdet kunne halveres. Det er ikke gjort i dette tilfælde, men ofte vil man opsøge symmetriakser, når der skal indlægges randbetingelser.

Der mangler nu kun de indvendige rande mellem de enkelte materialer – men det er ret enkelt. Som eksempel tages den indvendige rand mellem materiale 1 og 2 langs E-B:

$$-\lambda_2 \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{x=E\to(B)} = -\lambda_1 \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{x=E\to(B)}$$

Varmestrømmen fra materiale 2 fortsætter ind i materiale 1. Temperaturerne langs skillefladen i de to områder skal naturligvis også være ens. Tilsvarende forhold gælder mellem materialerne 2 og 3 i retning A-B:

$$-\lambda_2 \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{y=A\to B} = -\lambda_3 \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{y=A\to B}$$

Sammenfattende er varmestrømsligningen opstillet for hvert af de syv delområder, og der er tilknyttet i alt 12 ydre randbetingelser (langs randene A-B-C-C-B-D-E-A), hvoraf seks er af type c), og seks er adiabatiske, altså type b)). Endvidere er forholdene beskrevet ved de ti indvendige rande (skilleflader), der optræder i dette tilfælde.

Tilbage står nu ”kun” at løse det opstillede ligningssystem – hvilket i dette tilfælde vil sige at finde syv temperaturfunktioner t = ψ(x,y), der samtidigt tilfredsstiller differentialligningen (varmestrømsligningen) og de respektive randbetingelser.

Som tidligere antydet vil det næppe være muligt eller hensigtsmæssigt at søge efter en analytisk løsning til det bestemmende ligningssystem – analytiske løsninger kendes kun til nogle få, meget simple geometrier og tilsvarende rand- og begyndelsesbetingelser – der må anvendes en numerisk løsningsmetode. Temperaturfordelingen, der er vist til højre i fig. 1.5-1, er naturligvis beregnet ved hjælp af en numerisk beregningsmetode.

1.6 Eksempler på analytisk løsning

Selvom det ikke er dette notats ærinde at søge analytiske løsninger til opstillede varmestrømsproblemer, kan det dog være nyttigt at se på nogle eksempler, hvor disse kan findes. Nedenstående tre eksempler tager alle udgangspunkt i en stor plan væg, hvor varmen kun strømmer i én retning – vinkelret på overfladen – således at der er tale om et 1 D tilfælde. I første eksempel er forholdene stationære, og løsningsfunktionen er ganske enkel at bestemme, mens der i andet eksempel er tale om et ikke-stationært tilfælde med enkle rand- og begyndelsesbetingelser, men hvor løsningsfunktionen er ”kompliceret”. I tredje eksempel vises en meget enkel tilnærmet løsning til eksempel to.

Eksempel 1.6.1

Temperaturforløbet i en plan homogen væg skal beregnes under følgende forudsætninger:

stationær endimensional varmeledning
vægtykkelse L [m]
varmeledningstal λ [W/mK]
overfladetemperatur t(x=0) = TB1 [°C]
overfladetemperatur t(x=L) = TB2 [°C]
intern varmeproduktion S [W/m^3]

Med udgangspunkt i varmestrømsligningen (1.3.8) bliver det bestemmende ligningssystem:

$$0 = \lambda \frac{d^2t}{dx^2} + S \qquad \text{eller} \qquad \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{S}{\lambda}$$

med randbetingelserne: t(x=0) = TB1 og t(x=L) = TB2 idet der indlægges en x-akse med nulpunkt i den ene overflade.

Den søgte løsning er en funktion, der, differentieret to gange, giver en konstant - hvilket opfyldes af et 2. grads polynomium:

$$t(x) = Ax^2 + Bx + C$$

idet

$$\frac{dt}{dx} = 2Ax + B \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2t}{dx^2} = 2A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{S}{2\lambda}$$

De to sidste koefficienter i løsningsfunktionen findes ud fra randbetingelserne, der også skal opfyldes. For x = 0 fås:

$$t(x = 0) = TB1 = C \quad \Rightarrow \quad C = TB1$$

og for x = L

$$t(x = L) = TB2 = -\frac{S}{2\lambda}L^2 + B \cdot L + TB1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{TB2 - TB1}{L} + \frac{S}{2\lambda}L$$

hvilket giver, at temperaturforløbet er bestemt ved:

$$t(x) = -\frac{S}{2\lambda}x^2 + (\frac{TB2 - TB1}{L} + \frac{S}{2\lambda}L)x + TB1$$

Det er således ganske enkelt at finde temperaturforløbet i dette tilfælde – hvor tit man så støder på en væg med intern varmeproduktion under stationære forhold er så en anden sag – men sættes varmeproduktionen til S = 0, fås et yderst vigtigt tilfælde: stationær endimensional varmeledning, hvor det kendte retlinjede temperaturforløb er bestemt ved:

$$t(x) = \frac{TB2 - TB1}{L}x + TB1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{TB2 - TB1}{L}$$

Varmestrømsintensiteten er da bestemt af (1.3.6):

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda \frac{TB2 - TB1}{L} = \frac{TB1 - TB2}{\frac{L}{\lambda}} = \frac{TB1 - TB2}{R}$$

hvor R er materialelagets isolans.

♦ ♦ ♦

Eksempel 1.6.2

Temperaturforløbet i en plan homogen væg skal bestemmes i et tilfælde, hvor omgivelsestemperaturen på begge sider af væggen til tiden $\tau = 0$ pludseligt ændres fra t_s til t_∞. Væggen har temperaturen t_s overalt til tiden nul. Der antages følgende forudsætninger:

ikke-stationær endimensional varmeledning
vægtykkelse 2L [m]
varmeledningstal λ [W/mK]
massefylde ρ [kg/m^3]
varmefylde c [J/kgK]
termisk diffusivitet $a = \lambda/(\rho c)$ [m^2/s]
begyndelsestemperatur $t(x,\tau=0) = t_s$ [°C]
omgivelsestemperatur t_∞ [°C]
overgangsisolans R_o [m^{2}K/W]

Idet der indlægges et koordinatsystem, som vist i fig. 1.6-1, kan det bestemmende ligningssystem opstilles. Varmestrømsligningen (1.3.8) skal anvendes, og randbetingelserne er af type c):

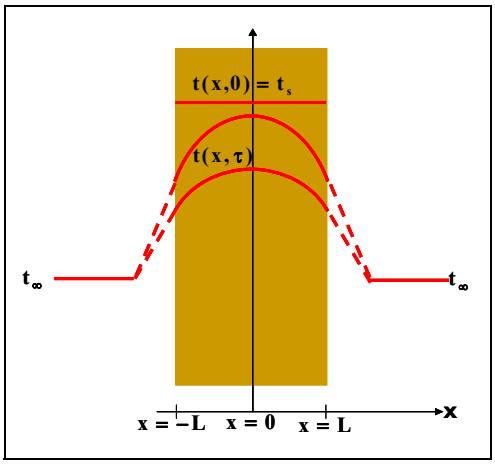
$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$-\left(-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=-L}\right) = \frac{1}{R_o}(t_{x=-L} - t_\infty)$$

$$-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=L} = \frac{1}{R_o}(t_{x=L} - t_\infty)$$

På grund af symmetri er det muligt at udskifte den ene af disse randbetingelser med en adiabatisk rand beliggende i væggens midtplan:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$



Figur 1.6-1 *Plan væg.*

Under de givne betingelser er temperaturforløbet bestemt ved:

$$t(x,\tau) = t_\infty + (t_s - t_\infty)\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\sin(\delta_n)}{\delta_n + \sin(\delta_n)\cos(\delta_n)}\exp(-\delta_n^2\frac{a\tau}{L^2})\cos(\delta_n\frac{x}{L})$$

hvor den dimensionsløse parameter δ_n er bestemt gennem de uendelig mange rødder (på den positive akse) i ligningen:

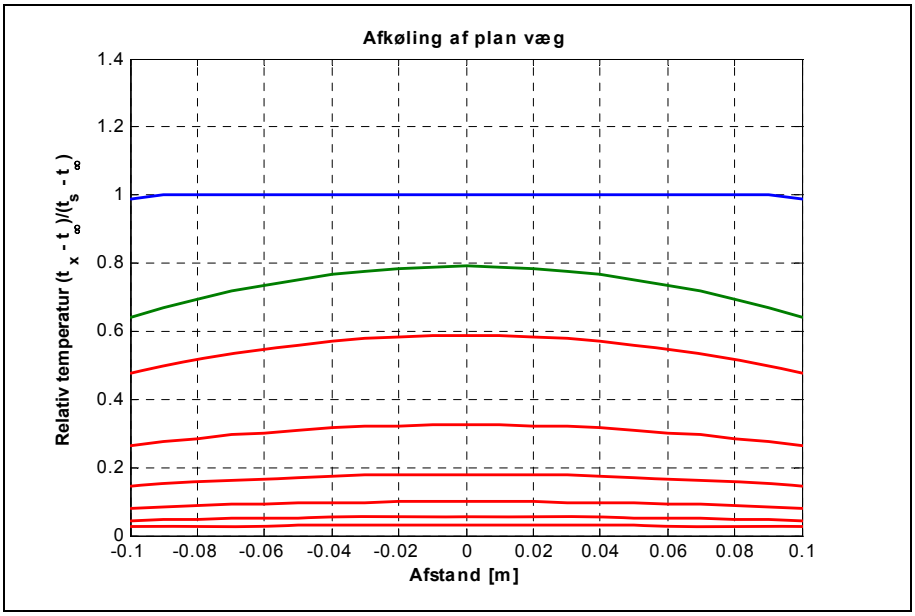
$$\delta_n \sin(\delta_n) = \frac{L}{R_o\lambda}\cos(\delta_n)$$

Da temperaturerne t_s og t_∞ er konstante, angives løsningen ofte som en relativ temperatur:

$$\frac{t(x,\tau) - t_\infty}{t_s - t_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\sin(\delta_n)}{\delta_n + \sin(\delta_n)\cos(\delta_n)}\exp(-\delta_n^2\frac{a\tau}{L^2})\cos(\delta_n\frac{x}{L})$$

Det er karakteristisk for analytiske løsninger, at de ofte udtrykkes gennem uendelige rækker, også selvom geometri og randbetingelser er så enkle som i dette tilfælde. Løsningen kan findes i de fleste lærebøger om varmetransport, bl.a. i et af hovedværkerne om analytiske løsninger: Carslaw, H.S. og Jaeger, J.C.: Conduction of Heat in Solids /1/.

Som et eksempel er temperaturforløbet vist i fig. 1.6-2 for en 0,20 m tyk betonvæg (λ = 1,7 W/mK, ρ = 2300 kg/m^3 og c = 880 J/kgK) for 1 °C ændring af omgivelsestemperaturen når, overgangsisolansen er R_o = 0,13 m^{2}K/W.



Figur 1.6-2 *Temperaturforløb i betonvæg. Øverst stationær startværdi, dernæst den relative temperatur efter 2,5 time, efter 5 timer og herefter med spring på 5 timer.*

Da tiden indgår som eksponent i løsningsfunktionens eksponentialfunktion, er det karakteristisk at temperaturforløbet ændrer sig hurtigt i den første tid for derefter at flade ud, og det tager (i princippet uendelig) lang tid, inden temperaturændringerne

dør ud, og forholdene bliver stationære. Dette er et udtryk for konstruktionens varmeakkumulerende egenskaber, der i løsningsfunktionen indgår gennem materialets termiske diffusivitet a og væggens dimension L. Ser man på størrelsen L^2/a, har den dimension af tid, og den udgør en karakteristisk tidskonstant τ_0 for konstruktionen.

$$\tau_0 = \frac{L^2}{a} = \frac{L^2}{\frac{\lambda}{\rho c}} = \frac{2\rho c L}{2\frac{\lambda}{L}} = \frac{\textit{væggens samlede varmekapacitet}}{\textit{væggens samlede varmetabsfaktor pr °C}}$$

Løsningsfunktionen kan derfor også skrives som:

$$\frac{t(x,\tau) - t_\infty}{t_s - t_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin(\delta_n)}{\delta_n + \sin(\delta_n)\cos(\delta_n)} \exp(-\delta_n^2 \frac{\tau}{\tau_0}) \cos(\delta_n \frac{x}{L})$$

Jo større varmekapaciteten er, des større er tidskonstanten, og jo langsommere foregår temperaturændringerne.

Intensiteten af varmestrømmen ud af vægoverfladen findes i dette tilfælde på enkel måde ud fra løsningsfunktionen fx:

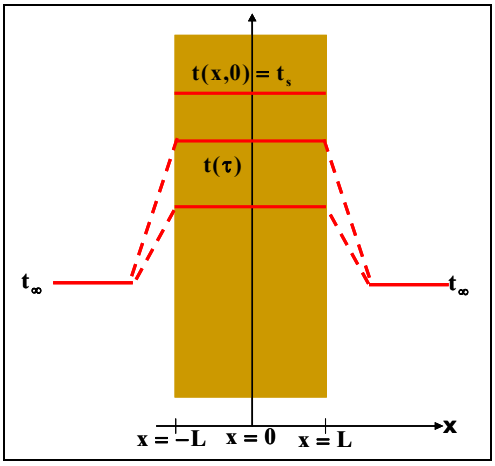
$$q(x = L, \tau) = \frac{1}{R_o}(t(x = L, \tau) - t_\infty)$$

Varmestrømsintensiteten på den modsatte overflade har naturligvis samme størrelse, ligesom anvendelse af Fouriers lov (1.3.6) havde ført til samme resultat.

♦ ♦ ♦

Eksempel 1.6.3

Der tages udgangspunkt i samme problemstilling som i eksempel 1.6.2 men nu under den forenklede antagelse, at temperaturen i materialet ikke ændrer sig i x-aksens retning. Denne situation er vist i fig. 1.6-3.



Figur 1.6-3 *Plan væg med forenklet temperaturfordeling.*

I dette tilfælde kan væggens varmebalance opstilles direkte ud fra første hovedsætning:

$$\rho c 2L \frac{dt(\tau)}{d\tau} = -2\frac{1}{R_o}(t(\tau) - t_\infty)$$

hvor venstre side udtrykker ændringen i væggens energiindhold (pr. m^2 overfladeareal) pr. tidsenhed, og højre side er intensiteten af tilført varme. Ligningen omskrives, idet der også her kan indføres en karakteristisk tidskonstant:

$$\tau_o = \frac{\rho c 2L}{2\frac{1}{R_o}} = \frac{\textit{væggens samlede varmekapacitet}}{\textit{væggens samlede varmetab til omgivelserne pr °C}}$$

Hermed fås:

$$\tau_o \frac{d(t(\tau) - t_\infty)}{d\tau} = -(t(\tau) - t_\infty)$$

Ligningen tilfredsstilles af en eksponentialfunktion, idet denne differentieret er proportional med sig selv. Løsningen har derfor formen:

$$t(\tau) - t_\infty = K \exp(-\frac{\tau}{\tau_o})$$

hvor konstanten K findes af begyndelsesbetingelsen:

$$K = t(\tau = 0) - t_\infty = t_s - t_\infty$$

Løsningsfunktionen er da:

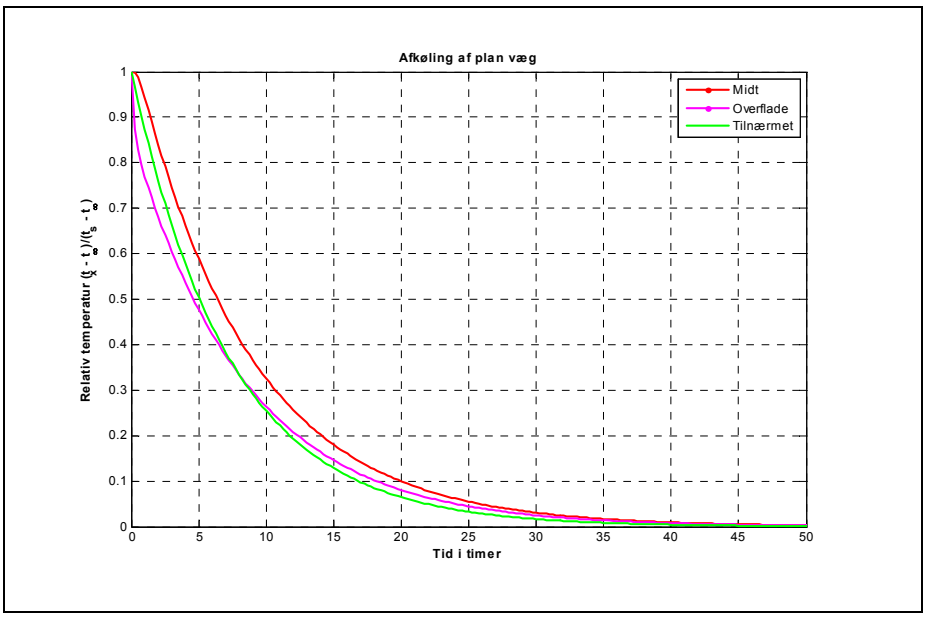
$$t(\tau) - t_\infty = (t_s - t_\infty)\exp(-\frac{\tau}{\tau_o})$$

eller udtrykt som en relativ temperatur:

$$\frac{t(\tau) - t_\infty}{t_s - t_\infty} = \exp(-\frac{\tau}{\tau_o})$$

Denne løsning er optegnet i fig. 1.6-4 for den samme betonvæg, som er anvendt i eksempel 1.6.2, og til sammenligning er den eksakte temperaturfunktion, som fremgik af det foregående eksempel, også indtegnet dels i midtplanet, dels i overfladen.

Som det fremgår af grafen, er der i dette tilfælde ganske god overensstemmelse mellem temperaturforløbene til trods for den grove tilnærmelse, der er foretaget. Det samme forhold vil gøre sig gældende, hvis varmestrømsintensiteten ved overfladen beregnes, idet denne er proportional med temperaturforskellen mellem overfladen og omgivelserne.



Figur 1.6-4 *Tilnærmet og eksakt temperaturforløb som funktion af tid.*

Løsningsfunktionen i dette eksempel er unægtelig blevet mere overskuelig end tilfældet er i eksempel 1.6.2, men der fås stadig den vigtige oplysning, at temperaturforløbet primært afhænger af en karakteristisk tidskonstant, hvori varmekapaciteten og det specifikke varmetab til omgivelserne indgår.

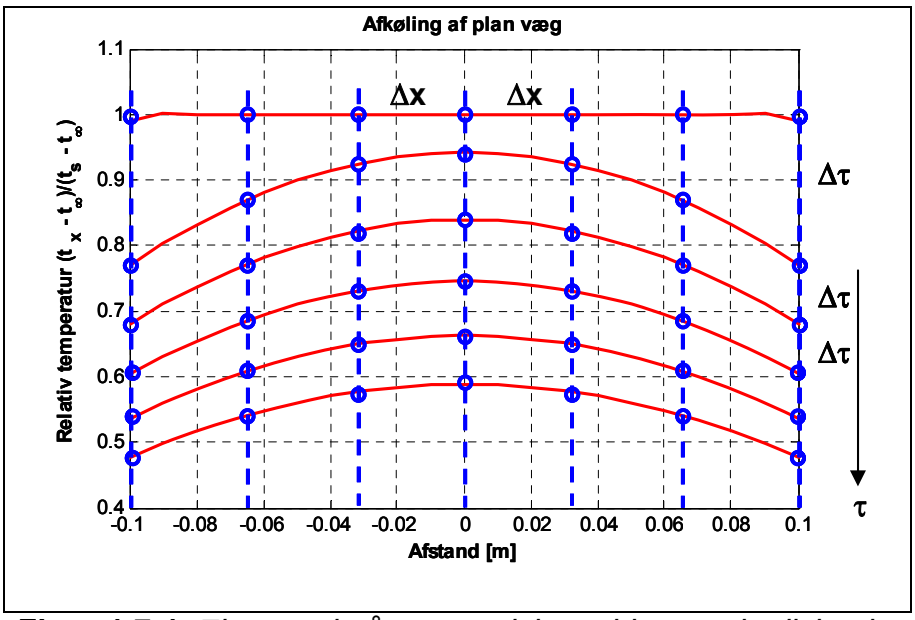
Dette eksempel skal naturligvis ikke tages til indtægt for, at der altid opnås god overensstemmelse med forenklede modeller, men vise at en forenklet model udmærket kan genspejle hovedtrækkene i en given problemstilling. Er man ikke tilfreds med løsningens nøjagtighed, kan man jo forsøge at forfine modellen ved at medtage flere detaljer og derefter tage det merarbejde, der vil være forbundet med at finde løsninger. Det er lidt denne filosofi, der ligger til grund for numeriske løsninger, samtidig med at organiseret talbehandling er blevet problemløst ved anvendelse af computere.

♦♦♦

1.7 Numeriske løsninger

Numeriske løsningsmetoder går generelt ud på at finde en tilnærmet løsning til en given differentialligning – her varmestrømsligningen (1.3.8) med tilhørende rand- og begyndelsesbetingelser. Når der er tale om tilnærmede løsninger skyldes det, at de bestemmende differentialligninger på en eller anden måde omsættes til et sæt algebraiske ligninger – som regel et sæt af samhørende lineære ligninger – der så skal løses og give løsningens funktionsværdier i udvalgte punkter til forskellig tid.

I fig. 1.7-1 er vist et eksempel på, hvordan temperaturen i udvalgte knudepunkter langs x-aksen ændres fra tidspunkt til tidspunkt. Der er foretaget en geometrisk diskretisering, der definerer knudepunkternes beliggenhed, og med kendskab til begyndelsesbetingelserne beregnes knudepunktstemperaturerne tidsskridt for tidsskridt. Der er således også foretaget en tidsmæssig diskretisering, idet tidsaksen er opdelt i intervaller ($\Delta\tau$) af kendt længde.



Figur 1.7-1 *Eksempel på geometrisk og tidsmæssig diskretisering. Tidsintervallet $\Delta\tau$ er en time.*

Ved opstilling af en numerisk beregningsmetode gives en opskrift på, hvordan sammenhængen er mellem temperaturen i et knudepunkt og temperaturerne i naboknudepunkterne, der etableres således en ***knudepunktsligning*** for hvert indgående knudepunkt, hvor der gennem knudepunkter beliggende på eller ved overfladerne inddrages sammenkoblingen med randværdierne. De enkelte numeriske metoder adskiller sig fra hinanden gennem de forudsætninger og forenklinger der gøres, når disse knudepunktsligninger skal opstilles, men fælles for de metoder, der omtales her: kontrolvolumenmetoden og finite elementmetoden, er, at de ligningsmæssigt kan udtrykkes på samme form som vist i (1.7.1).

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}}\frac{\overline{\mathbf{dt}}}{\mathbf{d}\tau} + \overline{\overline{\mathbf{K}}}\,\overline{\mathbf{t}} = \overline{\mathbf{f}_b} \qquad (1.7.1)$$

Hvor

$\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ er en kapacitetsmatrice

$\overline{\overline{\mathbf{K}}}$ er en transmissionsmatrice

$\overline{\mathbf{t}}$ er en vektor med alle knudepunktstemperaturer

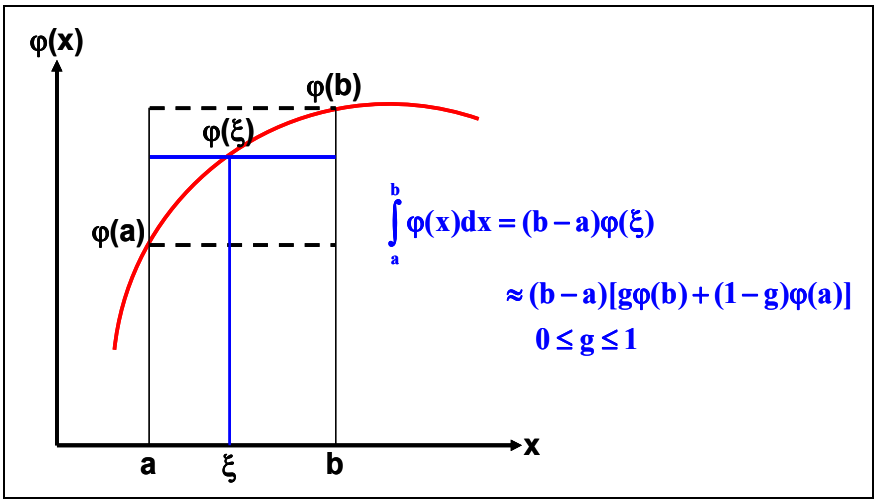
$\frac{\overline{\mathbf{dt}}}{\mathbf{d}\tau}$ er en vektor, der indeholder den tidsafledede af knudepunkts-temperaturerne

$\overline{\mathbf{f}_b}$ er en vektor, der indeholder oplysninger om randbetingelserne

Hvis der er tale om et stationært problem, falder første led i (1.7.1) væk, idet der så ikke forekommer nogen tidsmæssig variation i knudepunktstemperaturerne. I dette tilfælde er løsningen af det bestemmende ligningssystems partielle differentialligning reduceret til løsning af et almindeligt sæt (lineære) ligninger $\overline{\overline{\mathbf{K}}}\,\overline{\mathbf{t}} = \overline{\mathbf{f}_b}$.

1.8 Tidsdiskretisering

I det ikke-stationære tilfælde angiver (1.7.1) et sæt af samhørende førsteordens differentialligninger, der igen kan omskrives til et sæt af almindelige ligninger ved at tage tidsmiddelværdien af (1.7.1) over et tidsinterval $\Delta\tau$. Første led kan integreres direkte, men ved de øvrige led anvendes integralregningens middelværdisætning, se fig. 1.8-1.



Figur 1.8-1 *Integralregningens middelværdisætning.*

$$\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau=k\Delta\tau}^{\tau=(k+1)\Delta\tau} \overline{\overline{C}}\frac{d\bar{t}}{d\tau}d\tau + \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau=k\Delta\tau}^{\tau=(k+1)\Delta\tau} \overline{\overline{K}}\bar{t}d\tau = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau=k\Delta\tau}^{\tau=(k+1)\Delta\tau} \bar{f}_b d\tau \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (1.8.1)$$

Da koefficientmatricerne kun indeholder konstanter fås:

$$\frac{\overline{\overline{C}}}{\Delta\tau}(\bar{t}^{k+1} - \bar{t}^{k}) + \overline{\overline{K}}(g\bar{t}^{k+1} + (1-g)\bar{t}^{k}) = g\bar{f}_b^{k+1} + (1-g)\bar{f}_b^{k} \qquad (1.8.2)$$

Hvor

$\bar{t}^{k}$ er en vektor med knudepunktstemperaturerne til tiden $\tau = k\Delta\tau$

$\bar{f}_b^{k}$ er en vektor med randværdierne til tiden $\tau = k\Delta\tau$

g er en vægtfaktor mellem 0 og 1

Omordnes leddene i (1.8.2) fås et ligningssystem (1.8.3) til beregning af de nye knudepunktstemperaturer til tiden $\tau = (k+1)\Delta\tau$ ud fra de kendte knudepunktstemperaturer og randværdierne (der jo altid er kendt) til det foregående tidspunkt. Disse beregninger kan altid gennemføres tidsskridt for tidsskridt med udgangspunkt i begyndelsesbetingelserne til tiden $\tau = 0$.

$$\boxed{\left(\frac{\overline{\overline{C}}}{\Delta\tau} + g\overline{\overline{K}}\right)\bar{t}^{k+1} = \left(\frac{\overline{\overline{C}}}{\Delta\tau} - (1-g)\overline{\overline{K}}\right)\bar{t}^{k} + g\bar{f}_b^{k+1} + (1-g)\bar{f}_b^{k} \qquad (1.8.3)}$$

Det kan vises, at hvis vægtfaktoren vælges til g = 1, hvilket betyder at koefficienterne til $\bar{t}^{k}$ er positive, så vil beregningerne altid være numerisk stabile, dvs. give et fysisk realistisk indsvingningsforløb – dette tilfælde betegnes som den ***implicitte*** form.

Vælges derimod g = 0, der betegnes den ***eksplicitte*** form, er der risiko for numerisk ustabilitet, altså et fysisk urealistisk indsvingningsforløb (fx svingninger der bliver ved med at vokse). Dette hænger sammen med muligheden for negative værdier i diagonalleddet i koefficientmatricen til $\bar{\mathbf{t}}^{k}$ i (1.8.3). For at undgå numerisk ustabilitet er det nødvendigt at afpasse den geometriske opdeling af beregningsområdet (der har indflydelse på $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$ og $\bar{\bar{\mathbf{K}}}$) med længden af tidskridtet $\Delta\tau$, således at diagonalleddene bliver positive. Jo kortere tidsskridt der vælges, des finere skal den geometriske inddeling være dvs. at der kommer flere knudepunktstemperaturer og dermed ligninger, der skal løses.

Det foretrækkes ofte at anvende den implicitte form (g = 1), således at der undgås problemer med numerisk ustabilitet, men der skal alligevel altid anvendes en passende lille inddeling af geometri og tid for at opnå tilstrækkelig beregningsnøjagtighed. Ved kontrolvolumenmetoden, hvor $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$ er en diagonalmatrice, kan den eksplicitte form (g = 0) imidlertid ofte anvendes med fordel, idet ligning (1.8.3) så antager en let løsbar form:

$$\bar{\mathbf{t}}^{k+1} = (\bar{\bar{\mathbf{I}}} - \Delta\tau\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1}\bar{\bar{\mathbf{K}}})\bar{\mathbf{t}}^{k} + \Delta\tau\bar{\bar{\mathbf{C}}}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_{b}^{k} \qquad (1.8.4)$$

hvor

$\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ er identitetsmatricen

Her kan hver enkelt knudepunktstemperatur findes direkte (eksplicit) ud fra værdierne fra det foregående tidspunkt, men geometri og tidsskridt skal altid afpasses i forhold til hinanden, så der ikke forekommer negative værdier i diagonalen i koefficientmatricen til $\bar{\mathbf{t}}^{k}$ og dermed numerisk ustabilitet.

Eksempel 1.8.1

For at vise problemstillingen med numerisk stabilitet tages udgangspunkt i den bestemmende ligning fra Eksempel 1.6.3 i afsnit 1.6:

$$\rho c 2L\frac{dt(\tau)}{d\tau} = -2\frac{1}{R_o}(t(\tau) - t_\infty)$$

eller

$$\tau_o\frac{d(t(\tau) - t_\infty)}{d\tau} = -(t(\tau) - t_\infty)$$

Ligningen forenkles lidt ved at indføre en ny variabel $\theta = t(\tau) - t_\infty$ og dermed begyndelsesbetingelsen $\theta_s = t_s - t_\infty$. Den bestemmende ligning kan nu skrives som:

$$\tau_o\frac{d\theta}{d\tau} + \theta = 0$$

Ved sammenligning med (1.7.1) ses, at $\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \tau_0$, $\bar{\bar{\mathbf{K}}} = 1$ og $\bar{\mathbf{f}}_b = 0$, hvorefter (1.8.3) giver:

$$(\frac{\tau_0}{\Delta\tau} + g)\theta^{k+1} = (\frac{\tau_0}{\Delta\tau} - (1-g))\theta^k$$

Sættes g = 1 fås:

$$\theta^{k+1} = \frac{\frac{\tau_0}{\Delta\tau}}{\frac{\tau_0}{\Delta\tau} + 1}\theta^k = p\theta^k$$

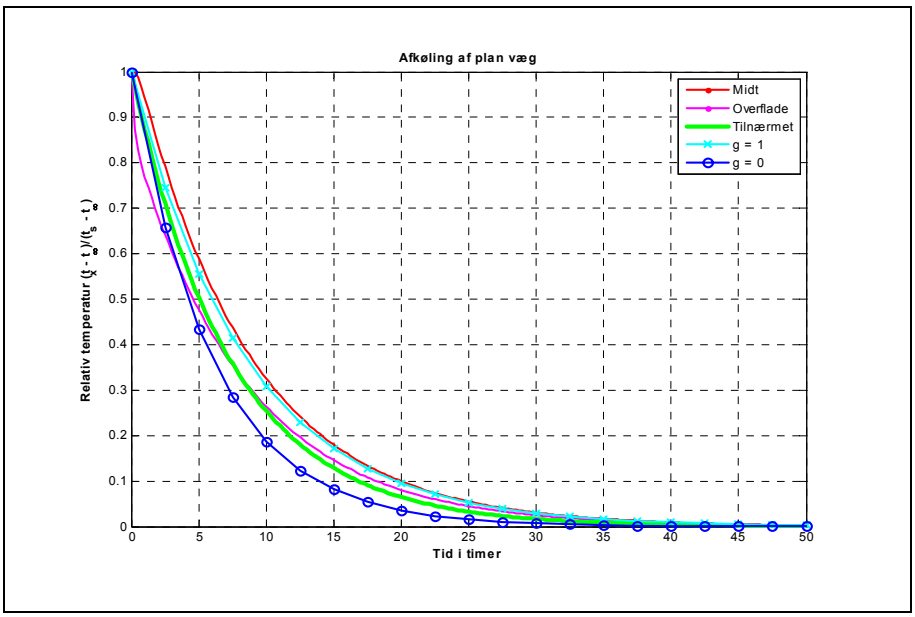
Uanset hvilken længde der vælges for tidsskridtet $\Delta\tau$, er koefficienten p på højre side positiv (og p < 1) hvorfor der med $\theta = \theta_s$ som startværdi fås et jævnt aftagende forløb af temperaturen.

Sættes derimod g = 0 fås:

$$\theta^{k+1} = \frac{\frac{\tau_0}{\Delta\tau} - 1}{\frac{\tau_0}{\Delta\tau}}\theta^k = (1 - \frac{\Delta\tau}{\tau_0})\theta^k = p\theta^k$$

Her antager koefficienten p negative værdier, hvis tidsskridtet vælges således at $\Delta\tau > \tau_0$. Hvis begyndelsesværdien θ_s er positiv, vil den først beregnede værdi af θ blive negativ, den følgende positiv og så fremdeles. Dette er ikke et fysisk realistisk indsvingningsforløb med de givne randbetingelser – heller ikke selv om svingningerne måske dør ud efterhånden (|p| < 1), og slet ikke hvis svingningerne bliver ved med at vokse (|p| > 1, numerisk ustabilitet). Beregningstidskridtet $\Delta\tau$ skal således vælges mindre end den karakteristiske tidskonstant for at opnå stabilitet, og i dette eksempel bør tidsskridtet være mindre end 1/10 af tidskonstanten τ_0 for at opnå en rimelig beregningsnøjagtighed.

I fig. 1.8-2 er vist indsvingningsforløb beregnet efter de to ovenstående udtryk med et tidsskridt på 2,5 timer i begge tilfælde og med vægtfaktor g = 1 hhv. g = 0. Der benyttes samme talværdier som i eksemplerne 1.6.2 og 1.6.3 i afsnit 1.6, og de tilsvarende temperaturforløb er ligeledes indtegnet. Den karakteristiske tidskonstant er her τ_0 = 7,31 timer, og det valgte tidsskridt på 2,5 timer er således ret stor i forhold hertil, hvilket også afspejler sig i den nøjagtighed de to numeriske løsninger tilpasses den analytiske løsning – der i dette tilfælde er kurven mærket ”tilnærmet”.



Figur 1.8-2 *Numeriske løsninger med g = 1 og g = 0, tidsskridt 2,5 time.*

♦♦♦

1.9 Matematiske løsningsmetoder

Ved opstillingen af de numeriske metoder er der ikke taget stilling til, hvilken matematisk metode der skal anvendes til løsning af det samlede system af knudepunktsligninger. Som det fremgår af (1.7.1) og (1.8.3), kan ligningssystemet, både for stationære og ikke-stationære problemer, udtrykkes som et samhørende sæt af (lineære) ligninger, der generelt kan skrives på formen:

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}}\,\overline{\mathbf{t}} = \overline{\mathbf{N}} \tag{1.9.1}$$

Hvor

$\overline{\mathbf{t}}$ er en vektor med de ukendte temperaturer

$\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ er en matrice med kendte koefficienter

$\overline{\mathbf{N}}$ er en vektor med kendte værdier

Koefficientmatricen $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ har formen (1.9.2) for henholdsvis stationære og ikke-stationære problemer, og de tilsvarende udtryk for vektor $\overline{\mathbf{N}}$ er angivet i (1.9.3).

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}} = \begin{cases} \overline{\overline{\mathbf{K}}} \\ \dfrac{\overline{\overline{\mathbf{C}}}}{\Delta\tau} + g\overline{\overline{\mathbf{K}}} \end{cases} \tag{1.9.2}$$

$$\overline{\mathbf{N}} = \begin{cases} \overline{\mathbf{f}}_b \\ (\dfrac{\overline{\overline{\mathbf{C}}}}{\Delta\tau} - (1-g)\overline{\overline{\mathbf{K}}})\overline{\mathbf{t}}^{k} + g\overline{\mathbf{f}}_b^{k+1} + (1-g)\overline{\mathbf{f}}_b^{k} \end{cases} \tag{1.9.3}$$

I det ikke-stationære tilfælde skal ligningssystemet (1.9.1) $\overline{\overline{\mathbf{M}}}\overline{\mathbf{t}}^{-k+1} = \overline{\mathbf{N}}^{k}$ løses for hvert tidsskridt, startende med at højre side er kendt til tiden nul gennem begyndelsesbetingelserne, og $\overline{\mathbf{N}}^{k}$ successivt opdateres gennem den senest beregnede værdi af $\overline{\mathbf{t}}$ og nye værdier af randbetingelserne.

I princippet kan alle de løsningsmetoder, der kendes fra den lineære algebra, anvendes til løsning af ligningssystemet (1.9.1) – det kan være direkte metoder som fx Gauss elimination eller iterative metoder som fx Gauss-Seidel. Ved den iterative metode startes med at skønne en værdi for hver knudepunktstemperatur i hele beregningsområdet, og derefter besøges hver enkelt knudepunkt, hvor knudepunktsligningen løses. Så snart der er beregnet en ny temperatur, indgår denne ved beregningen i det næste knudepunkt. Når alle knudepunkter er gennemregnet startes forfra, og på denne måde gentages proceduren, indtil konvergens opnås. Den store fordel ved iterative metoder er, at man ikke behøver at oprette store koefficientmatricer men kun lagre koefficienter forskellige fra nul – derfor anvendes løsningsprocedurer af denne art i mange kommercielle programmer.

Her skal også gøres opmærksom på, at mange ”regneprogrammer” indeholder effektive ligningsløsere, der kan anvendes direkte uden programmering – fx programmet MATLAB® /2/ hvor operatoren \ (backslash) direkte løser ligningssystemet (1.9.1). Matlab-notationen er t = M\N.

Matlab indeholder endvidere en rutine kaldet ”lsim”, der direkte kan anvendes til beregning (simulering) af (1.7.1) i det dynamiske tilfælde, men denne rutine kan/(bør) kun anvendes, når kontrolvolumenmetoden danner grundlag for opstillingen af knudepunktsligningerne. Her foretages ikke en tidsdiskretisering efter (1.8.3), og selvom der stadig er tale om løsning af ligningssystemet til diskrete tidspunkter, sker det her gennem anvendelse af matrix-eksponentialfunktionen.

Rutinen ”lsim” kræver, at ligningssystemet (1.7.1) kan bringes på formen:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathbf{dt}}}{\mathbf{d}\tau} &= \overline{\overline{\mathbf{SA}}}\,\overline{\mathbf{t}} + \overline{\overline{\mathbf{SB}}}\,\overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{t}_{res}} &= \overline{\overline{\mathbf{SC}}}\,\overline{\mathbf{t}} + \overline{\overline{\mathbf{SD}}}\,\overline{\mathbf{u}} \end{aligned} \qquad (1.9.4)$$

Hvor

$\overline{\overline{\mathbf{SA}}} = -\overline{\overline{\mathbf{C}}}^{-1}\,\overline{\overline{\mathbf{K}}}$

$\overline{\overline{\mathbf{SB}}}$ er en koefficientmatrice

$\overline{\mathbf{t}}$ er en vektor, med alle knudepunktstemperaturer

$\frac{\overline{\mathbf{dt}}}{\mathbf{d}\tau}$ er en vektor, der indeholder den tidsafledede af knudepunktstemperaturerne

$\overline{\mathbf{u}}$ er en vektor, der indeholder randværdierne

$\overline{\mathbf{t}_{res}}$ er en vektor, der indeholder de knudepunktstemperaturer der ønskes som resultat

$\overline{\overline{\mathbf{SC}}}$ er en matrice der udpeger de ønskede knudepunktstemperaturer

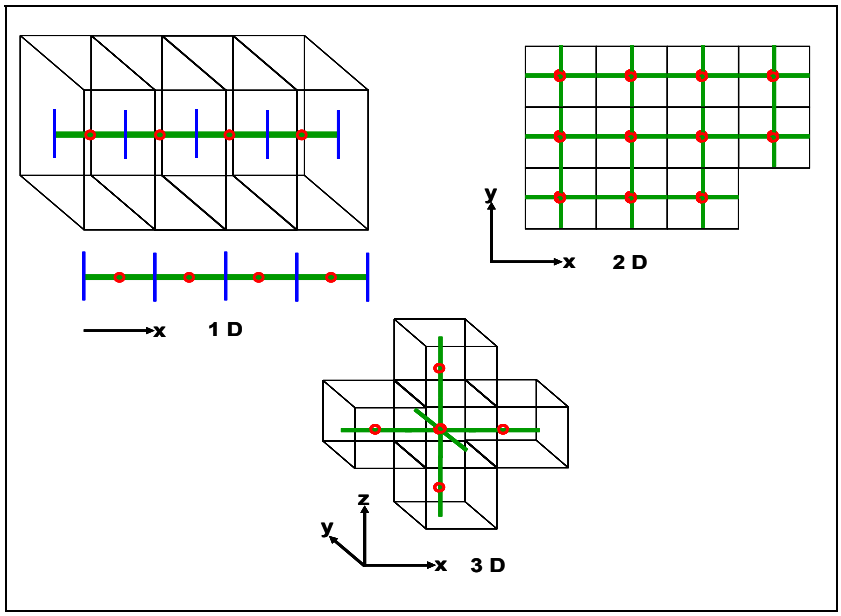
$\overline{\overline{\mathbf{SD}}}$ er altid en nul-matrice ved temperaturberegninger

KONTROLVOLUMENMETODEN

2.1 Opstilling af kontrolvolumenmetoden

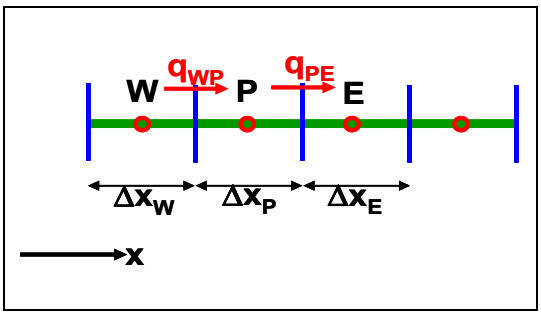
Ved kontrolvolumenmetoden opdeles beregningsområdet i et antal ikke overlappende kontrolvolumener, som hvert omslutter et knudepunkt, hvortil der knyttes en knudepunktstemperatur. Der opstilles en varmebalance for hvert kontrolvolumen som sammenknytter det aktuelle kontrolvolumen med dets nabovolumener. Når varmebalancen er opfyldt for hvert delområde, er balancen også opfyldt for hele beregningsområdet – hvilket naturligvis er en nødvendig forudsætning for at få brugbare beregningsresultater.

I fig. 2.1-1 er vist de kontrolvolumener, der anvendes ved hhv. 1 D, 2 D og 3 D beregninger. Volumenerne er i alle tilfælde retvinklede prismer.



Figur 2.1-1 *Kontrolvolumener og knudepunkter ved 1 D, 2 D og 3 D.*

Ved opstilling af knudepunktsligningerne tages der nedenstående udgangspunkt i 1 D tilfældet, hvor et udsnit af knudepunkter er vist i fig. 2.1-2. Kontrolvolumenernes udstrækning i y- og z-retningen er her uden betydning, og de antages til at være en, hvorved volumenet bliver $\Delta x \cdot 1 \cdot 1$.



Figur 2.1-2 *Knudepunktsplacering ved 1 D problem.*

Varmebalancen (1.2.1) for det kontrolvolumen, der omslutter knudepunkt P, er opstillet i (2.1.1). For fuldstændighedens skyld er det forudsat, at der sker en intern varmeproduktion med en gennemsnitlig intensitet på $\bar{S}_P$ W/m^3.

$$\frac{dE_P}{d\tau} = q_{WP} - q_{PE} + \bar{S}_P \Delta x_P \qquad (2.1.1)$$

Det antages nu, at ændringen i kontrolvolumenets energiindhold alene kan udtrykkes gennem knudepunktstemperaturen $t_P(\tau)$ og kontrolvolumenets varmekapacitet:

$$\rho_P c_P \Delta x_P \frac{dt_P(\tau)}{d\tau} = q_{WP} - q_{PE} + \bar{S}_P \Delta x_P \qquad (2.1.2)$$

Det bemærkes, at denne fremgangsmåde er helt analog med den fremgangsmåde, der anvendtes ved opstillingen af det tilnærmede beregningsudtryk for den plane væg i Eksempel 1.6.3.

Varmestrømmene (q_{WP} og q_{PE}), der passerer skillefladerne mellem det aktuelle kontrolvolumen og dets nabovolumener, regnes proportional med forskellen mellem knudepunktstemperaturerne. Som proportionalitetsfaktor anvendes den reciprokke af isolansen mellem knudepunkterne som vist i (2.1.3):

$$\rho_P c_P \Delta x_P \frac{dt_P(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{R_{PW}}(t_W(\tau) - t_P(\tau)) - \frac{1}{R_{PE}}(t_P(\tau) - t_E(\tau)) + \bar{S}_P \Delta x_P \qquad (2.1.3)$$

Knudepunktsligningen (2.1.3) i kontrolvolumenmetoden udmærker sig ved, at den kan opstilles direkte, og at den fysiske tolkning og forståelse af ligningen bevares: *ændringen i den indre energi pr. tid er lig summen af de tilførte varmestrømme*.

Isolanserne i ligning (2.1.3) er bestemt ved:

$$R_{PW} = \frac{\delta x_{PW}}{\lambda_P} + \frac{\delta x_{WP}}{\lambda_W} = R_{WP}$$
$$R_{PE} = \frac{\delta x_{PE}}{\lambda_P} + \frac{\delta x_{EP}}{\lambda_E} = R_{EP} \qquad \text{hvor } \delta x_{PW} + \delta x_{PE} = \Delta x_P \qquad (2.1.4)$$

Ordnes leddene i (2.1.3) fås den generelle knudepunktsligning i det 1 D ikke-stationære tilfælde:

$$\rho_P c_P \Delta x_P \frac{dt_P(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{R_{PW}} t_W(\tau) - (\frac{1}{R_{PW}} + \frac{1}{R_{PE}}) t_P(\tau) + \frac{1}{R_{PE}} t_E(\tau) + \bar{S}_P \Delta x_P \qquad (2.1.5)$$

Eller hvis de ubekendte knudepunktstemperaturer samles på ligningens venstre side:

$$\boxed{\rho_P c_P \Delta x_P \frac{dt_P(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{R_{PW}} t_W(\tau) + (\frac{1}{R_{PW}} + \frac{1}{R_{PE}}) t_P(\tau) - \frac{1}{R_{PE}} t_E(\tau) = \bar{S}_P \Delta x_P \qquad (2.1.6)}$$

Hvis der ingen varmeudvikling sker i volumenet sættes højre side lig nul, og hvis problemet er stationært, så sættes differentialkvotienten lig nul.

Eksempel 2.1.1

Temperaturfunktionen i et materiale med 1 D varmetransport er givet som en kontinuert funktion $t(x,\tau)$. Med udgangspunkt i en koordinat x_P foretages en Taylorudvikling af funktionen til nabopunkter, der er beliggende i en afstand Δx (mod E) hhv. $-\Delta x$ (mod W) fra P. Funktionsværdierne kan da udtrykkes på følgende måde:

$$t(x_P+\Delta x,\tau)=t(x_P,\tau)+\Delta x\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_P+\frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_P+O(\Delta x^3)$$

$$t(x_P-\Delta x,\tau)=t(x_P,\tau)-\Delta x\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_P+\frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_P+O(\Delta x^3)$$

hvor $O(\Delta x^3)$ angiver led, der er små af tredje og højere orden af Δx.

Adderes de to ligninger, og bortkastes led af typen $O(\Delta x^3)$, fås:

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_P=\frac{t(x_P+\Delta x,\tau)+t(x_P-\Delta x,\tau)-2t(x_P,\tau)}{\Delta x^2}$$

der multipliceres igennem med materialets varmeledningsevne λ, og leddene omarrangeres:

$$\lambda\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_P=\lambda\frac{t(x_P+\Delta x,\tau)+t(x_P-\Delta x,\tau)-2t(x_P,\tau)}{\Delta x^2}=$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\lambda}{\Delta x}(t_W(\tau)-t_P(\tau))-\frac{\lambda}{\Delta x}(t_P(\tau)-t_E(\tau))\right]=$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{R_{PW}}(t_W(\tau)-t_P(\tau))-\frac{1}{R_{PE}}(t_P(\tau)-t_E(\tau))\right]$$

Det bemærkes, at udtrykket i den kantede parentes ovenfor er identisk med højre side i ligning (2.1.3), hvorfor (2.1.3)' s højre side vil konvergere mod den anden ordens afledede med hensyn til stedet, hvis afstanden mellem knudepunkterne gøres tilstrækkelig lille.

Kontrolvolumenmetodens knudepunktsligninger vil for $\Delta\tau$ og Δx gående mod nul gå mod varmestrømsligningen (1.3.8) i 1 D udgaven:

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+S$$

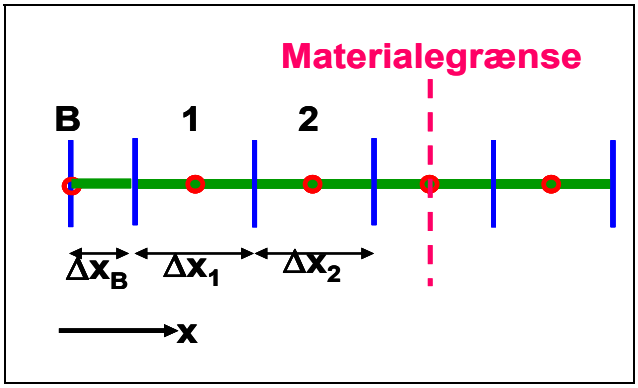
$$\rho c\Delta x\frac{\partial t}{\partial \tau}=\lambda\Delta x\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+S\Delta x$$

$$\rho c\Delta x_P\frac{dt_P(\tau)}{d\tau}=\frac{1}{R_{PW}}(t_W(\tau)-t_P(\tau))-\frac{1}{R_{PE}}(t_P(\tau)-t_E(\tau))+\bar{S}_P\Delta x_P$$

♦ ♦ ♦

2.2 Randbetingelser

Ved opstilling af randbetingelserne benyttes ofte ”halve kontrolvolumener” ved randen som vist i fig. 2.2-1. På figuren er kun vist venstre rand, men tilsvarende forhold gør sig naturligvis gældende ved den modsatte rand. Samme teknik anvendes også ved skilleflader mellem materialelag (indre rande), hvis man ønsker at beregne temperaturen her – det vil så være nødvendigt at sammensætte kontrolvolumenets varmekapacitet af de to delvolumeners kapaciteter.



Figur 2.2-1 *Halvt kontrolvolumen ved rand.*

Kendt overfladetemperatur

Hvis temperaturen på randen (B) er kendt (randbetingelse type a)), kan knudepunktsligning (2.1.5) direkte anvendes. Her er det vist for det første beregningspunkt mod venstre – knudepunkt 1 – et analogt udtryk fås for sidste beregningspunkt (knudepunkt n), hvis denne type randbetingelse er gældende for højre rand.

$$\rho_1 c_1 \Delta x_1 \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{R_{1B}} t_B(\tau) - \left(\frac{1}{R_{1B}} + \frac{1}{R_{12}}\right) t_1(\tau) + \frac{1}{R_{12}} t_2(\tau) + \bar{S}_1 \Delta x_1 \qquad (2.2.1)$$

Leddene ordnes, så kendte størrelser samles på højre side:

$$\boxed{\rho_1 c_1 \Delta x_1 \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{1}{R_{1B}} + \frac{1}{R_{12}}\right) t_1(\tau) - \frac{1}{R_{12}} t_2(\tau) = \frac{1}{R_{1B}} t_B(\tau) + \bar{S}_1 \Delta x_1 \qquad (2.2.2)}$$

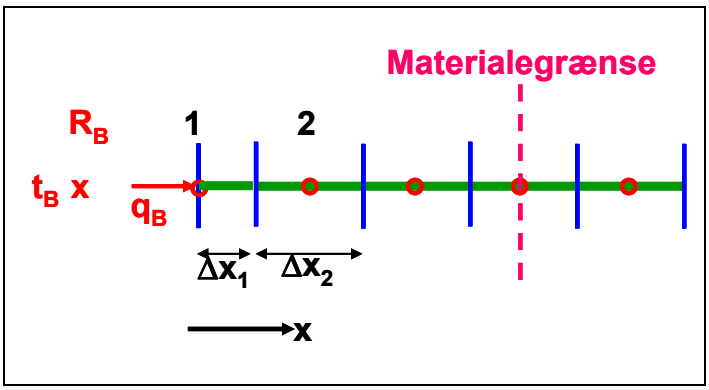
Det skal bemærkes, at Δx_B uden problemer kan sættes lig nul, således at første kontrolvolumens ene rand bliver sammenfaldende med den ydre overflade.

Kendt varmestrøm og/eller kendt omgivelsestemperatur

Disse to randbetingelser – type b) og type c) – behandles under et med udgangspunkt i fig. 2.2-2. Her vist for venstre rand:

$$\rho_1 c_1 \Delta x_1 \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{R_B}(t_B(\tau) - t_1(\tau)) - \frac{1}{R_{12}}(t_1(\tau) - t_2(\tau)) + q_B + \bar{S}_1 \Delta x_1 \qquad (2.2.3)$$

hvor den kendte omgivelsestemperatur er t_B, overgangsisolansen ved randen R_B, og den kendte varmestrøm q_B.



Figur 2.2-2 *Randbetingelse type b) og c).*

Leddene omordnes igen, så kendte størrelser samles på højre side (2.2.4):

$$\rho_1 c_1 \Delta x_1 \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_{12}}\right) t_1(\tau) - \frac{1}{R_{12}} t_2(\tau) = \frac{1}{R_B} t_B(\tau) + q_B + \bar{S}_1 \Delta x_1 \qquad (2.2.4)$$

Hvis randbetingelsen er type b), hvor varmestrømmen q_B direkte er givet, fjernes led der indeholder faktoren R_B (denne type randbetingelse kan dog ikke forekomme ved begge rande), og hvis randbetingelsen er type c), fjernes leddet q_B. Ligning (2.2.4) er gældende uden ændringer, hvis randbetingelsen er en kombination af type b) og type c).

2.3 Det samlede ligningssystem

Alle indre knudepunkter i beregningsområdet er beskrevet ved den generelle knudepunktsligning (2.1.6) og ved randene gælder enten (2.2.2) eller/og (2.2.4). Alle knudepunkter nummereres fortløbende, således at første beregningspunkt mod venstre rand (retning W) gives nr. 1, og sidste beregningspunkt mod højre rand (retning E) gives nr. n. Hele dette system af samhørende knudepunktsligninger kan skrives på kort form ved anvendelse af matrixnotation:

$$\bar{\bar{C}} \frac{\overline{dt}}{d\tau} + \bar{\bar{K}} \bar{t} = \overline{f_b} \qquad (2.3.1)$$

Hvor

- $\bar{\bar{C}}$ er en kapacitetsmatrice
- $\bar{\bar{K}}$ er en transmissionsmatrice
- $\bar{t}$ er en vektor, med alle knudepunktstemperaturer
- $\frac{\overline{dt}}{d\tau}$ er en vektor, der indeholder den tidsafledede af knudepunktstemperaturerne
- $\overline{f_b}$ er en vektor der indeholder oplysninger om belastninger og randbetingelser

Ved kontrolvolumenmetoden er kapacitetsmatricen $\bar{\bar{C}}$ en diagonalmatrice, der indeholder de enkelte kontrolvolumeners varmekapacitet i diagonalen. Det typiske led vil

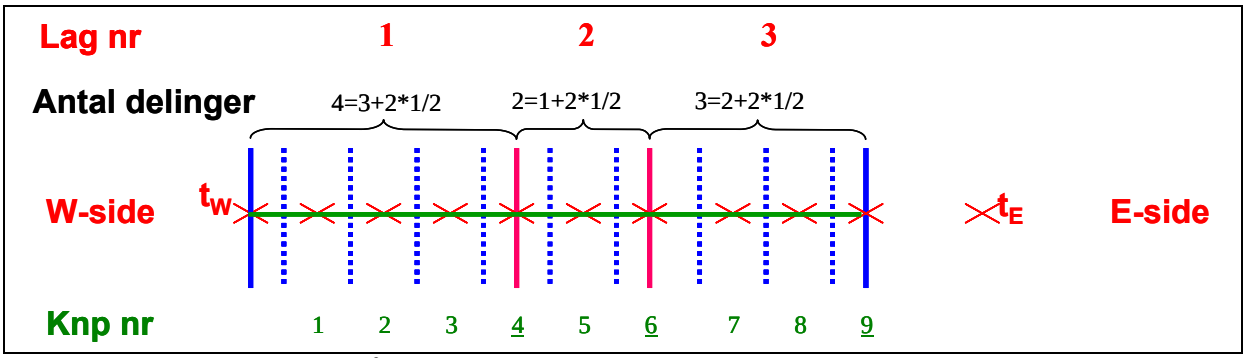
have formen: $C_j = \rho_{jw} c_{jw} \delta x_{jw} + \rho_{je} c_{je} \delta x_{je}$, hvor j er knudepunktets nummer, og der er taget hensyn til, at der kan være forskellige materialer på hver side af knudepunktet i det pågældende kontrolvolumen.

Transmissionsmatricen $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$ er en tri-diagonalmatrice, hvor koefficienter i hoveddiagonalen knytter et givet knudepunkt (j) sammen med dets to naboknuder gennem isolansen mellem knudepunkterne (se (2.1.6)). Koefficienter i den øvre diagonal sammenknytter knudepunktet (j) med det næstfølgende (j+1), mens den nedre diagonal sammenknytter knude j med det foregående knudepunkt (j-1).

Randværdivektoren $\overline{\mathbf{f}_b}$ afhænger af de aktuelle randbetingelser og vil altid have et bidrag fra randbetingelserne i første og sidste element, men hvis der ikke forekommer indre varmeudvikling, er alle mellemliggende elementer nul.

Eksempel 2.3.1

I fig. 2.3-1 er vist et eksempel på, hvordan en plan væg kan opdeles i kontrolvolumener, og dermed hvordan knudepunkterne kan placeres. Væggen består af tre materialelag, og knudepunkterne er placeret, så temperaturerne i skillefladerne kan bestemmes. Randbetingelserne er kendt overfladetemperatur (t_W) på W-siden (randbetingelse type a)) og kendt omgivelsestemperatur (t_E) på E-siden, hvor overgangsisolansen er R_E (randbetingelse type c)).



Figur 2.3-1 *Eksempel på knudepunktsinddeling i plan væg.*

Det samlede ligningssystem skal nu opstilles – og det består i princippet kun af tre forskellige ligninger:

1) ligningen for 1. knudepunkt der inddrager randbetingelsen for W-side, (2.2.2)

$$C_1 \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{1}{R_{1W}} + \frac{1}{R_{12}}\right) t_1(\tau) - \frac{1}{R_{12}} t_2(\tau) = \frac{1}{R_{1W}} t_W(\tau)$$

2) ligningen for et indre knudepunkt j, (2.1.6)

$$C_j \frac{dt_j(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{R_{j,j-1}} t_{j-1}(\tau) + \left(\frac{1}{R_{j,j-1}} + \frac{1}{R_{j,j+1}}\right) t_j(\tau) - \frac{1}{R_{j,j+1}} t_{j+1}(\tau) = 0$$

3) ligningen for sidste knudepunkt n (her vist som n = 9) der inddrager randbetingelsen for E-side, (2.2.4):

$$C_n \frac{dt_n(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{R_{n,n-1}} t_{n-1}(\tau) + \left(\frac{1}{R_{n,n-1}} + \frac{1}{R_E}\right) t_n(\tau) = \frac{1}{R_E} t_E(\tau)$$

Samles ligningssystemet som angivet i (2.3.1) fås:

Kapacitetsmatricen:

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_n \end{bmatrix} \qquad C_j = \rho_{jw} c_{jw} \delta x_{jw} + \rho_{je} c_{je} \delta x_{je} \qquad \delta x_{jw} + \delta x_{je} = \Delta x_j$$

Transmissionsmatricen:

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_{1W}} + \frac{1}{R_{1,2}}\right) & -\frac{1}{R_{1,2}} & & & \\ & \ddots & & & \\ & -\frac{1}{R_{j,j-1}} & \left(\frac{1}{R_{j,j-1}} + \frac{1}{R_{j,j+1}}\right) & -\frac{1}{R_{j,j+1}} & \\ & & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{R_{n,n-1}} & \left(\frac{1}{R_{n,n-1}} + \frac{1}{R_E}\right) \end{bmatrix} \qquad R_{j,j-1} = \frac{\delta x_{j-1,j}}{\lambda_{j-1}} + \frac{\delta x_{j,j-1}}{\lambda_j} = R_{j-1,j}$$

Randværdivektoren:

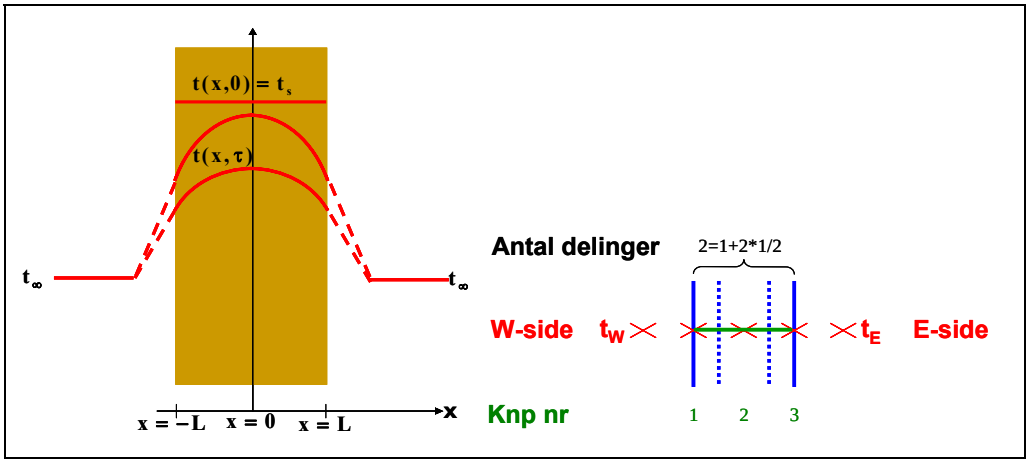
$$\overline{f_b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{1W}} t_W(\tau) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{R_E} t_E(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{1W}} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_W(\tau) \\ t_E(\tau) \end{bmatrix}$$

Som eksemplet viser, er der en god del systematik i opstillingen af ligningskoefficienter i (2.3.1), og det er naturligvis oplagt at udarbejde programmer til behandling af denne slags beregningsopgaver.

♦ ♦ ♦

Eksempel 2.3.2

Eksempel 1.6.2 fra afsnit 1.6 skal nu løses ved hjælp af kontrolvolumenmetoden. I fig. 2.3-2 er knudepunktsinddelingen vist, og af hensyn til overskueligheden i opstillingen af beregningsgrundlaget er der kun valgt tre knudepunkter.



Figur 2.3-2 *Plan væg opdelt i kontrolvolumener.*

For den 0,20 m tykke betonvæg er der følgende materialekonstanter: λ = 1,7 W/mK, ρ = 2300 kg/m^3 og c = 880 J/kgK. Begyndelsesbetingelse er, konstant temperatur gennem tværsnittet t_s = 1°C, og randbetingelserne for begge sider er at omgivelsestemperaturen t_∞ = 0 °C for $\tau \geq 0$, og overgangsisolansen er R_o = 0,13 m^{2}K/W. Med den viste knudepunktsinddeling bliver tykkelsen af et kontrolvolumen Δx = 0,10 m.

Først opstilles de tre knudepunktsligninger:

$$C_1 \frac{dt_1}{d\tau} = \frac{1}{R_W}(t_W - t_1) - \frac{1}{R_{1,2}}(t_1 - t_2)$$

$$C_2 \frac{dt_2}{d\tau} = \frac{1}{R_{2,1}}(t_1 - t_2) - \frac{1}{R_{2,3}}(t_2 - t_3) \qquad t_W = t_E = t_\infty$$

$$C_3 \frac{dt_3}{d\tau} = \frac{1}{R_{3,2}}(t_2 - t_3) - \frac{1}{R_E}(t_3 - t_E)$$

Herefter ordnes ligningssystemet, og der indsættes at $R_W = R_E = R_o$, endvidere bemærkes at alle isolanser, der forbinder knudepunkterne inde i materialet, er ens (R), samt at der for kapaciteterne gælder at $C_1 = C_3 = ½C_2 = ½C$.

$$\frac{1}{2}C\frac{dt_1}{d\tau} = -(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R})t_1 + \frac{1}{R}t_2 + \frac{1}{R_o}t_W$$

$$C\frac{dt_2}{d\tau} = \frac{1}{R}t_1 - \frac{2}{R}t_2 + \frac{1}{R}t_3$$

$$\frac{1}{2}C\frac{dt_3}{d\tau} = \frac{1}{R}t_2 - (\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o})t_3 + \frac{1}{R_o}t_E$$

Ligningssystemet har nu formen (2.3.1) $\overline{\overline{\mathbf{C}}}\dfrac{\overline{\mathbf{dt}}}{\mathbf{d\tau}} = -\overline{\overline{\mathbf{K}}}\,\overline{\mathbf{t}} + \overline{\mathbf{f_b}}$. Randværdivektoren $\overline{\mathbf{f_b}} = \overline{\overline{\mathbf{F_b}}}[\mathbf{t_W}\ \mathbf{t_E}]^{\mathbf{T}}$ skrives som produktet af en koefficientmatrice og en ***belastningsvektor***, der indeholder de kendte omgivelsestemperaturer:

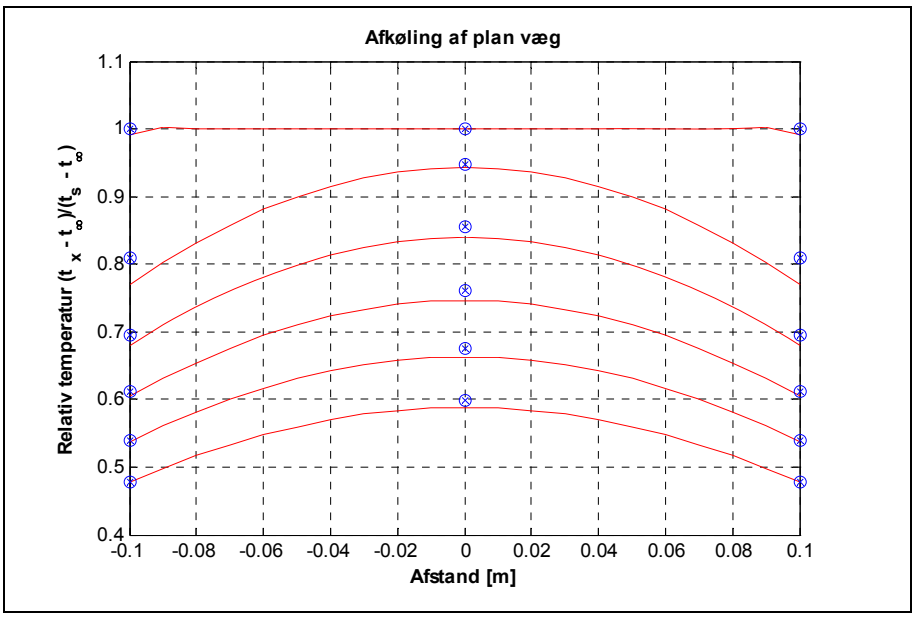
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{dt_1}}{\mathbf{d\tau}} \\ \frac{\mathbf{dt_2}}{\mathbf{d\tau}} \\ \frac{\mathbf{dt_3}}{\mathbf{d\tau}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (\frac{1}{\mathbf{R_o}} + \frac{1}{\mathbf{R}}) & -\frac{1}{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\mathbf{R}} & \frac{2}{\mathbf{R}} & -\frac{1}{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\mathbf{R}} & (\frac{1}{\mathbf{R}} + \frac{1}{\mathbf{R_o}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t_1} \\ \mathbf{t_2} \\ \mathbf{t_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{R_o}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\mathbf{R_o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t_W} \\ \mathbf{t_E} \end{bmatrix}$$

Der skal foretages en simulering af systemet over fem timer med et tidsskridt på en time ved anvendelse af MATLAB-rutinen ”lsim” som omtalt i (1.9.4). De numeriske beregninger gennemføres, som vist nedenfor, som en MATLAB-seance:

```
% Opgivne data
lam = 1.7;
rho = 2300;
c = 880;
Ro = 0.13;
dx = 0.10;

% Kontrolvolumenets varmekapacitet (sættes så tiden kan regnes i timer)
CL = rho*c*dx/3600;
% Kontrolvolumenets isolans
RL = dx/lam;

% Kapacitetsmatricen
C(1,1) = 0.5*CL;
C(2,2) = CL;
C(3,3) = 0.5*CL;
C =

   28.1111         0         0
         0   56.2222         0
         0         0   28.1111

% Transmissionsmatricen
K(1,1) = 1/Ro + 1/RL;
K(1,2) = -1/RL;
K(2,1) = K(1,2);
K(2,3) = K(2,1);
K(2,2) = 2/RL;
K(3,2) = K(2,3);
K(3,3) = 1/RL + 1/Ro;
K =

   24.6923  -17.0000         0
  -17.0000   34.0000  -17.0000
    0        -17.0000   24.6923

% Randværdimatricen
Fb(1,1) = 1/Ro;
Fb(3,2) = 1/Ro;
```

```
Fb =

   7.6923         0
        0         0
        0    7.6923

% Omskrivning til tilstandsbeskrivelse (1.9.4)
SA = inv(C)*(-K)

SA =

  -0.8784    0.6047         0
   0.3024   -0.6047    0.3024
        0    0.6047   -0.8784

SB = inv(C)*Fb

SB =

   0.2736         0
        0         0
        0    0.2736

% Udpegning af resultat, her alle knudepunktstemperaturer
SC = eye(3,3)

SC =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

SD = zeros(size(SB));

% Begyndelsestilstand
ts = [1 1 1]';
% Belastning
tw = [0 0 0 0 0 0]';
u = [tw tw];
% Tidsakse fem timer med tidsskridt på en time
z = [0:1:5]';

% Simulering
tres = lsim(SA,SB,SC,SD,u,z,ts);
plot([-0.1 0 0.1],tres,'xb'), grid
```

I nedenstående fig. 2.3-3 er resultatet optegnet sammen med den eksakte analytiske løsning fra eksempel 1.6.2. Til trods for den grove knudepunkts- og tidsinddeling er der opnået et rimeligt resultat – men beregningerne kan naturligvis gøres langt bedre med en finere inddeling af såvel beregningsområdet som af tiden.

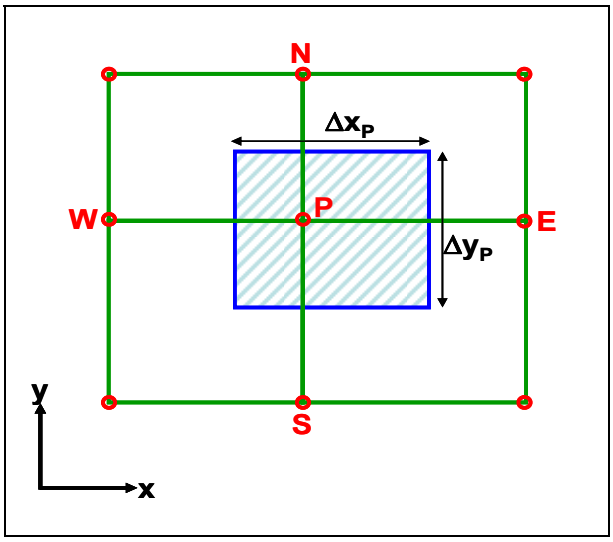


Figur 2.3-3 *Beregning med tre knudepunkter og eksakt løsning.*

♦♦♦

2.4 Kontrolvolumenmetoden i 2 D og 3 D

Opstillingen af det diskretiserede ligningssystem i 2 D og 3 D tilfældet følger samme princip som angivet i afsnit 2.1. I fig. 2.4-1 er vist et udsnit af et 2 D knudepunktsnet, hvor der er indført to nye naboknudepunkter N og S omkring det aktuelle knudepunkt P. I 3 D tilfældet står knudepunkt P i forbindelse med yderligere to knudepunkter: T (top, ud af tegneplanet) og B (bund, ind i tegneplanet).



Figur 2.4-1 *Kontrolvolumen i 2 D tilfældet.*

I 2 D tilfældet er dimensionen i z-aksens retning uden betydning og kan derfor sættes til en, hvorfor volumenet omkring et knudepunkt er $\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$.

Balanceligningen for kontrolvolumenet omkring knudepunkt P kan opstilles direkte ud fra (2.1.3) som vist i (2.4.1):

$$\rho_P c_P \Delta x_P \Delta y_P \frac{dt_P(\tau)}{d\tau} = \frac{\Delta y_P}{R_{PW}}(t_W(\tau) - t_P(\tau)) - \frac{\Delta y_P}{R_{PE}}(t_P(\tau) - t_E(\tau))$$
$$+ \frac{\Delta x_P}{R_{PS}}(t_S(\tau) - t_P(\tau)) - \frac{\Delta x_P}{R_{PN}}(t_P(\tau) - t_N(\tau)) + \bar{S}_P \Delta x_P \Delta y_P \qquad (2.4.1)$$

Den tilsvarende knudepunktsligning for 3 D tilfældet, hvor volumenet omkring et knudepunkt er $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, er angivet i (2.4.2):

$$\rho_P c_P \Delta x_P \Delta y_P \Delta z_P \frac{dt_P(\tau)}{d\tau} = \frac{\Delta y_P \Delta z_P}{R_{PW}}(t_W(\tau) - t_P(\tau)) - \frac{\Delta y_P \Delta z_P}{R_{PE}}(t_P(\tau) - t_E(\tau))$$
$$+ \frac{\Delta x_P \Delta z_P}{R_{PS}}(t_S(\tau) - t_P(\tau)) - \frac{\Delta x_P \Delta z_P}{R_{PN}}(t_P(\tau) - t_N(\tau))$$
$$+ \frac{\Delta x_P \Delta y_P}{R_{PB}}(t_B(\tau) - t_P(\tau)) - \frac{\Delta x_P \Delta y_P}{R_{PT}}(t_P(\tau) - t_T(\tau)) + \bar{S}_P \Delta x_P \Delta y_P \Delta z_P \qquad (2.4.2)$$

Ligningerne, der indeholder randbetingelserne, er under alle omstændigheder helt analoge med dem, der er opstillet i afsnit 2.2, og det ses umiddelbart, at ligningssystemet også i 2 D og 3 D tilfældet lader sig ordne på samme standardiserede måde som angivet i (2.3.1).

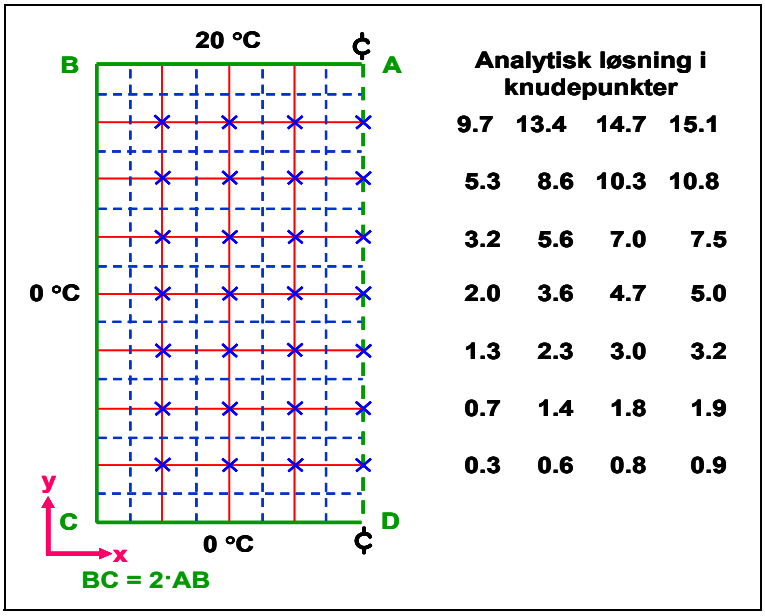
Eksempel 2.4.1

Kontrolvolumenmetoden i 2D er bl.a. velegnet til beregning af linjetab for kuldebroer i konstruktioner efter metoder angivet i DS 418 Beregning af bygningers varmetab /3/. Programmer, der anvendes til disse beregninger, skal dog have en vis kvalitet, som bl.a. valideres gennem to testeksempler angivet i Annex A i DS/EN ISO 10211-1 /4/.

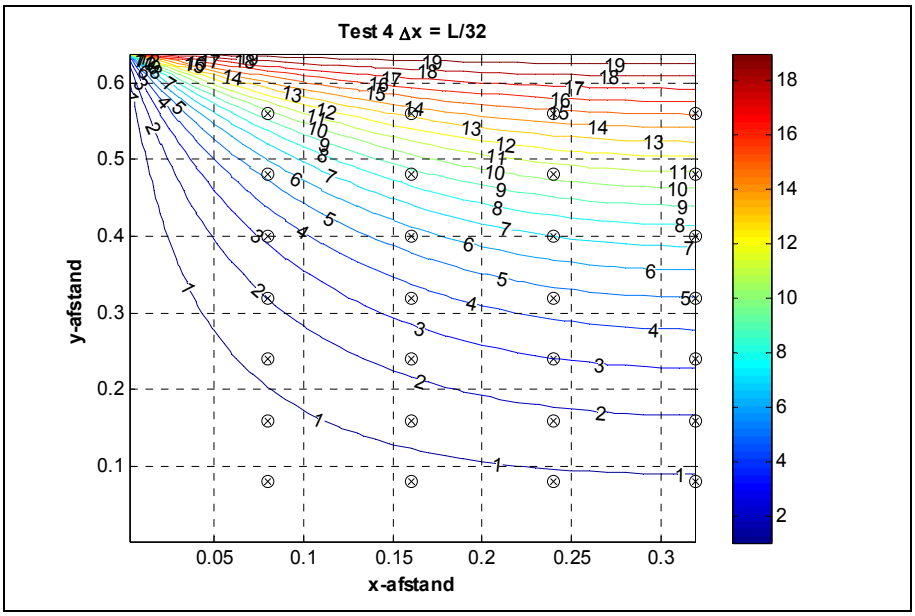
Det ene testeksempel går ud på at eftervise at beregningsprogrammet, med en afvigelse der er mindre end 0,1 °C fra de eksakte værdier, kan beregne temperaturerne i 28 punkter i en kvadratisk søjle som vist i fig. 2.4-2. Randbetingelserne er kendte temperaturer på overfladerne, og da der er symmetri om midteraksen AD, udgør denne en adiabatisk rand.

I fig. 2.4-2 er vist et eksempel på opdeling af beregningsområdet i kontrolvolumener, der for hovedpartens vedkommende er valgt kvadratiske med en kantlængde på Δx = L/4 (= AB/4), hvilket også er afstanden mellem referencepunkterne med de kendte temperaturer. Hele vejen langs kanten af beregningsområdet er der dog volumener med kantlængder $\frac{1}{2}\Delta x \cdot \Delta x$ og i de fire hjørner med $\frac{1}{2}\Delta x \cdot \frac{1}{2}\Delta x$. Knudepunkterne ligger i det geometriske midtpunkt i alle kontrolvolumener. Hvis der opdeles på denne måde, fås der altid beregningsknudepunkter sammenfaldende med referencepunkterne når Δx = L/4, L/8, L/16, L/32 osv.

Ovenstående testeksempel er afprøvet i et simpelt beregningsprogram temp2d /5/, der er programmeret i MATLAB. Kontrolvolumenerne er inddelt efter den omtalte strategi, og der er gennemregnet fire tilfælde, startende med Δx = L/4. Resultaterne fra gennemregningen med Δx = L/32 er vist i fig. 2.4-3 i form af konturkurver (isotermer), der er optegnet efter interpolation mellem de beregnede knudepunktstemperaturer (standardfunktion contour.m i MATLAB). Referencepunkternes placering er ligeledes markeret.



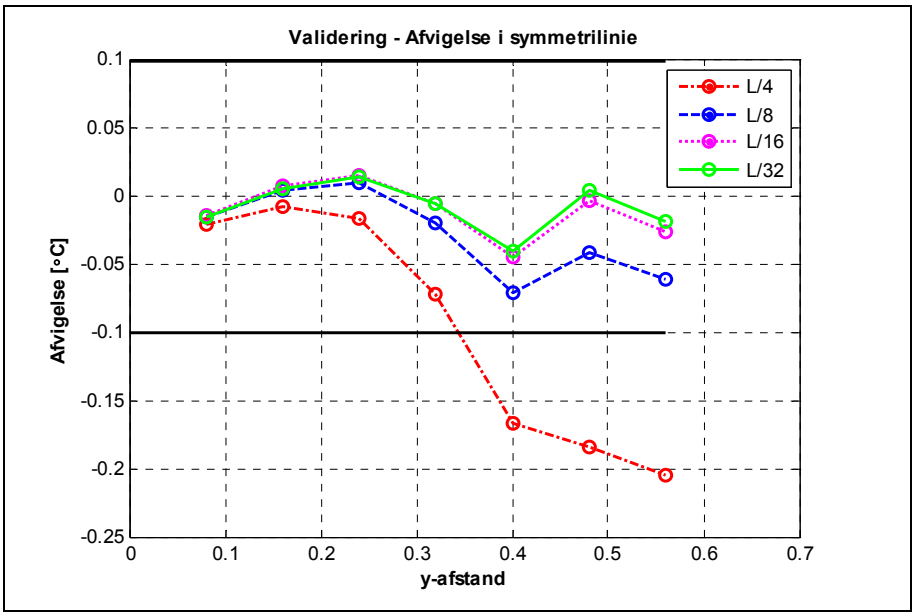
Figur 2.4-2 *"Test reference case 1". Det viste eksempel på kontrolvolumeninddeling har en kantlængde på L/4, hvilket også er afstanden mellem referencepunkterne.*



Figur 2.4-3 *Isotermer beregnet med temp2d i "Test reference case 1".*

Forskellen mellem de beregnede temperaturer i referencepunkterne og de tilsvarende analytisk bestemte temperaturer (fig. 2.4-2) beregnes, og denne skal være mindre end 0,1 °C for at opfylde valideringskriteriet i /4/. I fig. 2.4-4 er disse afvigelser optegnet for referencepunkterne beliggende i symmetrilinjen (AD i fig. 2.4-2) for alle de fire gennemregnede tilfælde. I de øvrige referencepunkter er de største afvigelser, for de her gennemførte beregninger med temp2d, altid mindre end de største afvigelser i symmetrilinjen, og det ses, at programmet temp2d således opfylder valideringskriteriet undtagen for den groveste inddeling med Δx = L/4. Det ses også, at der ikke vindes meget i "nøjagtighed" ved at gå fra en inddeling med Δx = L/16 til Δx = L/32. Ved

praktiske beregninger bør opdelingen af beregningsområdet fortsætte, indtil to på hinanden følgende gennemregninger giver resultater, der ikke afviger fra hinanden med mere end den ønskede beregningsnøjagtighed.



Figur 2.4-4 *Afvigelse mellem beregnet og eksakt temperatur.*

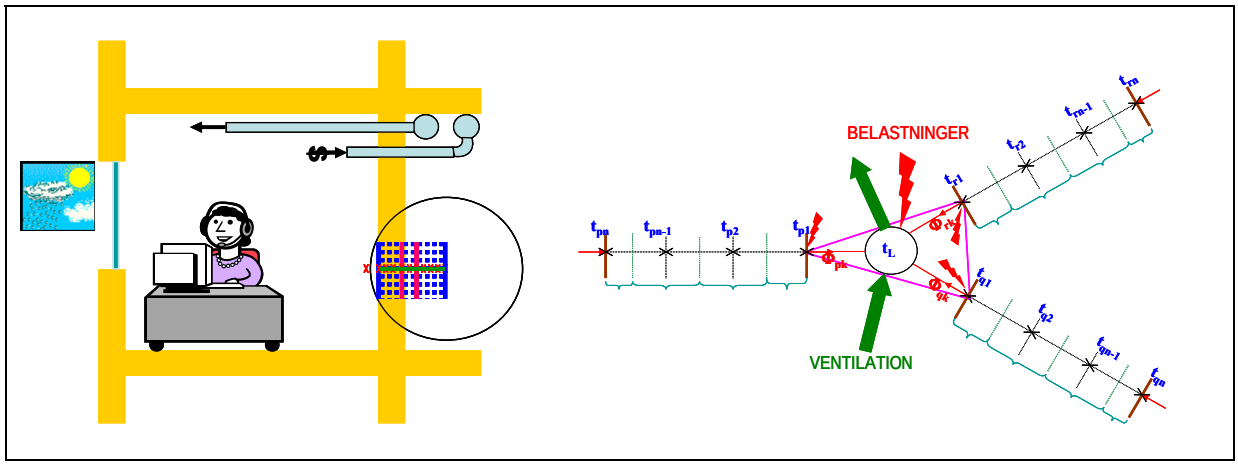
♦ ♦ ♦

TERMISKE RUMMODELLER

3.1 Grundlag

I det foregående er det vist, hvordan der kan opstilles et beregningsgrundlag til bestemmelse af temperaturer og varmestrømme i en vægkonstruktion, og denne teknik kan med stor fordel anvendes ved opstilling af matematiske modeller, der beskriver de termiske forhold i et helt rum eller en bygning. Modeller af denne art anvendes til at undersøge, hvordan indeklimaet i et rum udvikler sig i afhængighed af interne og eksterne belastningers samt klimatiseringsanlæggets varierende påvirkninger. Simuleringer over fx et år med realistiske driftsbetingelser og udeklimatiske påvirkninger kan dermed afgøre, om det projekterede klimatiseringsanlæg kan opfylde givne komfortkrav, eller hvilke resultater der kan opnås ved at gennemføre forslag til energibesparende foranstaltninger.

Termiske rummodeller til praktisk brug opbygges næsten altid ud fra den forudsætning, at varmestrømme regnes endimensionale i alle rumafgrænsende konstruktionsdele, ligesom det forudsættes, at rumluften er fuldstændigt opblandet, så den kan repræsenteres ved én temperatur (et knudepunkt), fig. 3.1-1.



Figur 3.1-1 *Termisk rummodel.*

Alle de indvendige vægoverflader (ind mod det betragtede rum) ”kobles sammen” gennem den gensidige strålingsudveksling, ligesom de udveksler varme ved konvektion med rumluften, herudover kan der forekomme direkte strålingstilført varme til disse fx fra solindfald. Randbetingelserne ved de indvendige flader er således af typen b+c (”kendt varmestrøm og kendte omgivelsestemperaturer”, fig. 1.4-1), men dette er dog kun rent formelt, idet både lufttemperaturen og alle de indvendige overfladetemperaturer indgår som ubekendte, der skal bestemmes gennem det samlede ligningssystem, der udgør rummodellen.

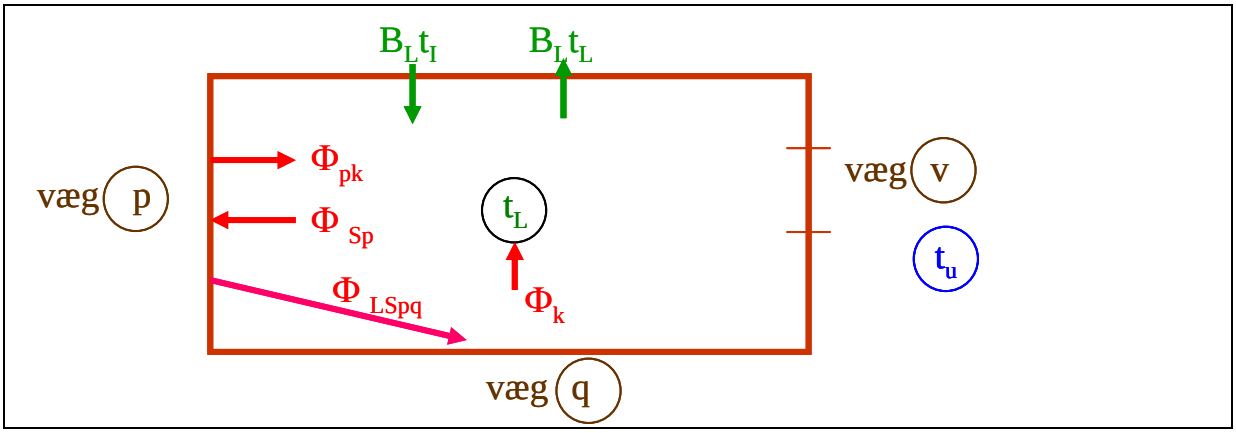
På den ”udvendige” side vil det ofte være udeklimaet, der giver randbetingelserne (det må nødvendigvis være kendte påvirkninger), men det kan fx også være en konstruktion, der vender mod jord, og så må man naturligvis kunne foreskrive jordtemperaturen og dennes tidsmæssige variation. Hvis den betragtede konstruktion er adskillelse til et naborum, må dette rums temperatur enten forudsættes kendt, eller model-

len må udbygges, så der indgår flere rum, der til sidst grænser mod kendte omgivelser (udeklima/jord e.l.) – flerrumsmodeller.

For rumluften kan modellen umiddelbart udvides til også at omfatte en fugtbalance og/eller andre forureningsbalancer (fx CO_2). Der kan envidere opstilles beregningsrutiner (der bygger på kontrolvolumenmetoden), til beregning af fugttransport ved diffusion gennem de rumafgrænsende konstruktioner. Disse forhold falder dog uden for rammerne af denne fremstilling, men de indgår og beskrives fx i programmet BSim /6/.

3.2 Opstilling af termisk rummodel

I fig. 3.2-1 er vist de varmestrømme, der medtages ved opstillingen af den termiske rummodel, og som i princip indgår i ”randbetingelserne” ved de indvendige overflader samt i balancen for rumluften.

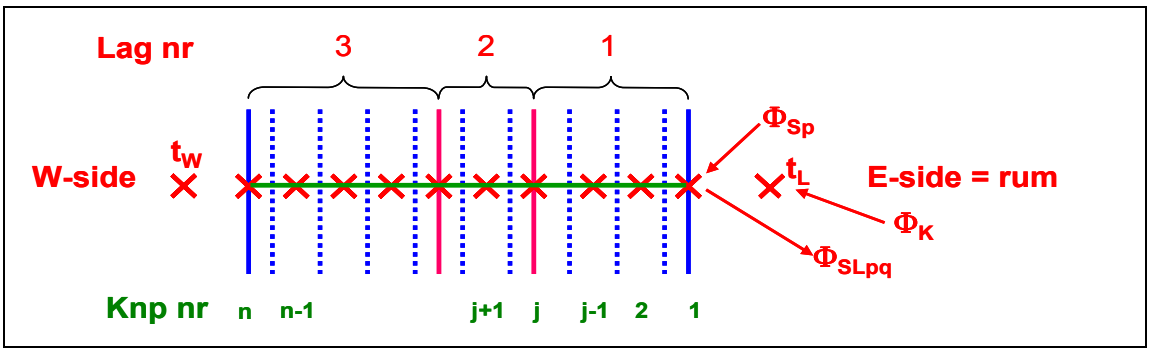


Figur 3.2-1 *Belastninger der medtages i rummodellen.*

De angivne varmestrømme er:

Φ_{pk}	konvektiv varmeudveksling mellem væg p’s overflade og rumluften
Φ_{Sp}	strålingstilført varme til væg p’s overflade
Φ_{LSpq}	langbølget strålingsudveksling mellem væg p og q
Φ_k	konvektiv varmetilførsel til rumluften
B_L	det specifikke ventilationstab [W/K]
t_I	ventilationsluftens indblæsningstemperatur [°C]
t_L	rumluftens temperatur [°C]

Væggene opdeles i kontrolvolumener som vist i fig. 3.2-2, hvorefter knudepunktsligningerne kan opstilles. For hver konstruktion bliver der tre forskellige typer af knudepunktsligninger: en for hver overflade (rand) og en for de indre knudepunkter. Opstillingen vises her for en vilkårlig konstruktion ”p”.



Figur 3.2-2 *Konstruktion opdelt i kontrolvolumener og vist med randbetingelser.*

For det første knudepunkt beliggende på den indre rand fås:

$$C_{p1}\frac{dt_{p1}}{d\tau} = \frac{A_p}{R_{p12}}(t_{p2} - t_{p1}) - \Phi_{pk} - \sum_q \Phi_{LSpq} + \Phi_{Sp} \qquad (3.2.1)$$

hvor

$C_{p1} = \rho_{p1}c_{p1}\Delta x_{p1}A_p$ er lagets varmekapacitet [J/K]

Den konvektive varmeudveksling mellem overflade p og rumluften kan bestemmes ved:

$$\Phi_{pk} = \alpha_{pk}A_p(t_{p1} - t_L) = B_{op}(t_{p1} - t_L) \qquad (3.2.2)$$

hvor

α_{pk} er det konvektive varmeovergangstal [W/m^{2}K]

Ved anvendelse af den sædvanlige formel for gråstrålere bestemmes den langbølgede nettoudstråling fra p til q ved:

$$\Phi_{LSpq} = \psi_{pq}f_{Ep}f_{Eq}\sigma_s A_p[T_{p1}^4 - T_{q1}^4] \qquad (3.2.3)$$

hvor

ψ_{pq} er vinkelforholdet mellem flade p og q [-]
f_E er fladens emissionsevne [-]
σ_s er Stefan-Boltzmanns konstant [W/m^{2}K^4]
T er fladens absolutte temperatur [K]

Det er imidlertid uhensigtsmæssigt at have ulineære led, der indgår i balanceligningerne, hvorfor strålingsleddet i (3.2.3) lineariseres omkring en passende middeltemperatur T_o. Herved fås:

$$\Phi_{LSpq} = \psi_{pq}f_{Ep}f_{Eq}\sigma_s A_p(4T_o^3)(t_{p1} - t_{q1}) = B_{LSpq}(t_{p1} - t_{q1}) \qquad (3.2.4)$$

Det bemærkes, at der på grund af vekselvirkningssætningen gælder, at strålingskoefficienten $B_{LSpq} = B_{LSqp}$.

Varmebalancen for knudepunkt 1 (overfladebalancen) kan herefter skrives som:

$$C_{p1}\frac{dt_{p1}}{d\tau}=\frac{A_p}{R_{p12}}(t_{p2}-t_{p1})-B_{op}(t_{p1}-t_L)-\sum_q B_{LSpq}(t_{p1}-t_{q1})+\Phi_{Sp} \qquad (3.2.5)$$

hvorefter leddene kan ordnes til:

$$C_{p1}\frac{dt_{p1}}{d\tau}+(\frac{A_p}{R_{p12}}+B_{op}+\sum_q B_{LSpq})t_{p1}-\frac{A_p}{R_{p12}}t_{p2}-\sum_q B_{LSpq}t_{q1}-B_{op}t_L=\Phi_{Sp} \qquad (3.2.6)$$

For et vilkårligt knudepunkt j i konstruktion p giver (2.1.3) direkte:

$$C_{pj}\frac{dt_{pj}}{d\tau}=\frac{A_p}{R_{pj,j-1}}(t_{p,j-1}-t_{p,j})+\frac{A_p}{R_{pj,j+1}}(t_{p,j+1}-t_{p,j}) \qquad (3.2.7)$$

Efter omordning af led fås:

$$C_{pj}\frac{dt_{pj}}{d\tau}-\frac{A_p}{R_{pj,j-1}}t_{p,j-1}+(\frac{A_p}{R_{pj,j-1}}+\frac{A_p}{R_{pj,j+1}})t_{p,j}-\frac{A_p}{R_{pj,j+1}}t_{p,j+1}=0 \qquad (3.2.8)$$

For den ”udvendige” side er der som tidligere omtalt flere muligheder for randbetingelser – her vælges blot tilfældet med kendt omgivelsestemperatur t_W (altså randbetingelse type c) for at vise princippet. Balanceligningen bliver nu:

$$C_{pn}\frac{dt_{pn}}{d\tau}=\frac{A_p}{R_{pn,n-1}}(t_{p,n-1}-t_{p,n})+\frac{A_p}{R_{pW}}(t_{p,W}-t_{p,n}) \qquad (3.2.9)$$

hvor ukendte led igen samles på venstre side, hvilket giver:

$$C_{pn}\frac{dt_{pn}}{d\tau}-\frac{A_p}{R_{pn,n-1}}t_{p,n-1}+(\frac{A_p}{R_{pn,n-1}}+\frac{A_p}{R_{pW}})t_{p,n}=\frac{A_p}{R_{pW}}t_{p,W} \qquad (3.2.10)$$

De tre typer af knudepunktsligninger for en konstruktion kan sammenfattes til:

Indvendig overflade:

$$C_{p1}\frac{dt_{p1}}{d\tau}+(\frac{A_p}{R_{p12}}+B_{op}+\sum_q B_{LSpq})t_{p1}-\frac{A_p}{R_{p12}}t_{p2}-\sum_q B_{LSpq}t_{q1}-B_{op}t_L=\Phi_{Sp} \qquad (3.2.6)$$

indre knudepunkter:

$$C_{pj}\frac{dt_{pj}}{d\tau}-\frac{A_p}{R_{pj,j-1}}t_{p,j-1}+(\frac{A_p}{R_{pj,j-1}}+\frac{A_p}{R_{pj,j+1}})t_{p,j}-\frac{A_p}{R_{pj,j+1}}t_{p,j+1}=0 \qquad (3.2.8)$$

udvendig overflade:

$$C_{pn}\frac{dt_{pn}}{d\tau}-\frac{A_p}{R_{pn,n-1}}t_{p,n-1}+(\frac{A_p}{R_{pn,n-1}}+\frac{A_p}{R_{pW}})t_{p,n}=\frac{A_p}{R_{pW}}t_{p,W} \qquad (3.2.10)$$

Der opstilles et tilsvarende ligningssystem for alle de øvrige konstruktioner der indgår i rummet med undtagelse af vinduer. Der udarbejdes normalt specielle modeller til beregning af vinduerne da, varmestrømsforholdene her er mere komplicerede end

ved en massiv konstruktion, bl.a. på grund af absorption af solvarme i vinduets glasskiver, ligesom det, på grund af glasskivernes ringe tykkelse, kan være uhensigtsmæssigt med en yderligere opdeling i kontrolvolumener.

Under de givne forudsætninger behandles rummets luftvolumen som et kontrolvolumen med et knudepunkt, der repræsenterer lufttemperaturen. Rumluftens varmebalance opstilles ud fra fig. 3.2-1:

$$\mathbf{C_L \frac{dt_L}{d\tau} = \sum_p B_{op}(t_{p1} - t_L) - B_L(t_L - t_I) + \Phi_K} \qquad (3.2.11)$$

hvor

$\mathbf{C_L = \rho_L c_L V_R}$ er rumluftens varmekapacitet [J/K]

$\mathbf{B_L = \rho_L c_L V_L}$ er ventilationsluftens kapacitetsstrøm [W/K]

ρ_L er luftens densitet [kg/m^3]

c_L er luftens varmefylde [J/kgK]

V_R er rumvolumen [m^3]

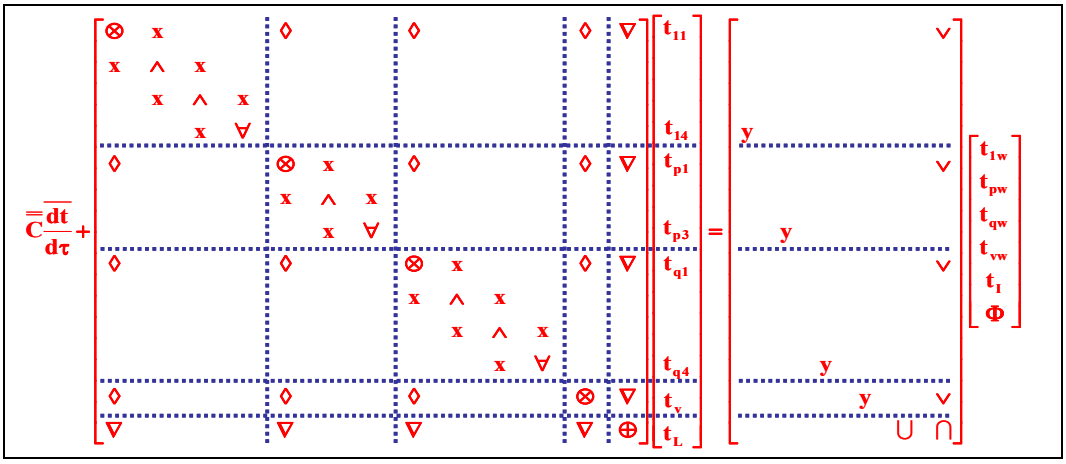
V_L er luftstrømmen [m^3/s]

De ukendte temperaturer samles på venstre side, hvorefter rumluftens balanceligning er:

$$\boxed{\mathbf{C_L \frac{dt_L}{d\tau} + (B_L + \sum_p B_{op})t_L - \sum_p B_{op} t_{p1} = B_L t_I + \Phi_K} \qquad (3.2.12)}$$

Ventilationsleddet i (3.2.11) kan suppleres med led, der fx tager højde for infiltration og eksfiltration, luftskifte fra udluftning gennem vinduer, luftoverføring mellem forskellige rum eller andre ventilationsbidrag (svarende til infiltration, venting og mixing i BSim). Varmebalancerne må i så fald suppleres med en luftbalance, så der sørges for, at der tilføres og fjernes lige store luftstrømme til rummet.

Alle de opstillede balanceligninger kan herefter samles i et stort ligningssystem af formen (1.7.1) $\mathbf{\overline{\overline{C}}\frac{\overline{dt}}{d\tau} + \overline{\overline{K}}\,\overline{t} = \overline{f_b}}$, hvor kapacitetsmatricen er en diagonalmatrice, og hvor transmissionsmatricen har en struktur som vist i fig. 3.2-3.



Figur 3.2-3 *Ligningssystemets struktur.*

De tre første ligningssæt repræsenterer tre almindelige konstruktioner, der hver er opdelt i et antal kontrolvolumener, mens fjerde ligning skal symbolisere et vindue, der her kun omfatter et knudepunkt placeret på den indvendige overflade. Den sidste ligning er rumluftens balanceligning.

Af fig. 3.2-3 fremgår det tydeligt, hvordan alle de indvendige overflader (ligninger med $\otimes$ i diagonalen) sammenknyttes indbyrdes gennem strålingsled ($\Diamond$) og med rumluften ($\oplus$) ved konvektionsled (∇).

I fig. 3.2-3 er randvektoren $\overline{\mathbf{f_b}} = \overline{\overline{\mathbf{F_b}}}\,\overline{\mathbf{u}}$ udtrykt ved en koefficientmatrice og en belastningsvektor $\overline{\mathbf{u}}$, der indeholder de kendte belastninger. Al varmetilførsel er symbolsk udtrykt ved én enkelt størrelse Φ i belastningsvektoren, hvoraf de indvendige overflader tilføres en strålingsandel ($\vee$), mens luften får konvektionsdelen ($\cap$) samt et bidrag fra indblæsningstemperaturen ($\cup$). Alle de udvendige flader ($\forall$ i diagonalen i $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$) har fat i den ”omgivelsestemperatur”, der hersker ved den pågældende yderside (y).

Ved løsningen af ligningssystemet foretages en tidsdiskretisering som angivet i (1.8.3), og for at undgå numeriske stabilitetsproblemer anvendes ofte den eksplicitte form (dette er fx tilfældet i BSim). Ved anvendelse af (1.9.2) og (1.9.3) med vægtfaktoren g = 1 vil det samlede ligningssystem få formen:

$$(\frac{\overline{\overline{\mathbf{C}}}}{\Delta\tau} + \overline{\overline{\mathbf{K}}})\overline{\mathbf{t}}^{k+1} = (\frac{\overline{\overline{\mathbf{C}}}}{\Delta\tau})\overline{\mathbf{t}}^{k} + \overline{\overline{\mathbf{F_b}}}\,\overline{\mathbf{u}}^{k+1} \qquad (3.2.13)$$

eller

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}}\overline{\mathbf{t}}^{k+1} = \overline{\mathbf{N}}^{k}$$

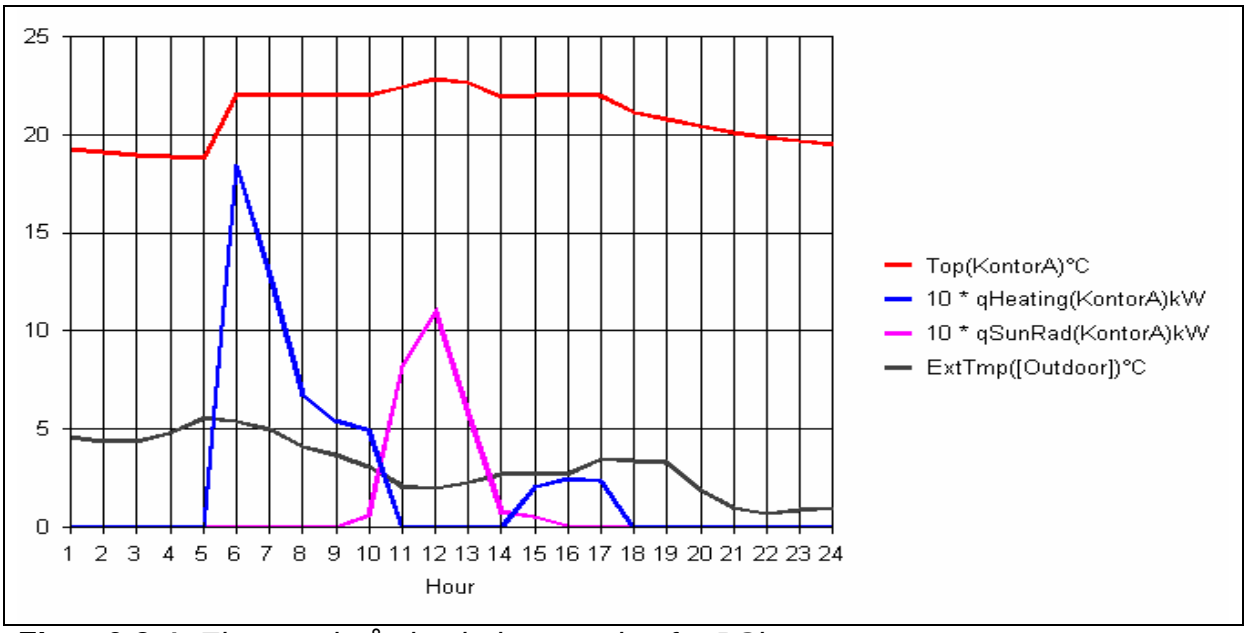
Ligningssystemet løses nu tidsskridt for tidsskridt, idet højresiden i princippet altid er kendt, og de senest beregnede værdier af temperaturerne bliver kendte (”gamle”) værdier på højre side i det næste tidsinterval. Alle påvirkninger i belastningsvektoren $\overline{\mathbf{u}}$ skal for hele beregningsperioden beskrives ved deres størrelse og tidsmæssige forekomst samt, for varmestrømmenes vedkommende, desuden ved fordelingen mellem konvektion og stråling. Udeklimaparametre kan fx hentes fra databasen DRY /7/, der indeholder timeværdier for udetemperatur, solintensitet, skydække, m.v.

Begyndelsesbetingelsen, der skal anvendes til at igangsætte løsningen af (3.2.13), omfatter som altid ved løsning af ikke stationære balancer kendskab til temperaturerne i alle knudepunkter til tiden nul. En måde at løse dette problem på (som det gøres i BSim) er at gennemregne det første døgn i simuleringsperioden et vist antal gange, indtil knudetemperaturerne gentager sig selv periodisk.

Når der gennemføres simuleringer under realistiske driftsbetingelser vil der være påvirkninger i belastningsvektoren $\overline{\mathbf{u}}$, der, gennem en regulering, afhænger af temperaturforholdene i rummet (lufttemperaturen og/eller overfladetemperaturerne). Et typisk eksempel er, at en radiators varmeafgivelse skal afpasses, så der opnås en ønsket rumtemperatur (referencetemperatur), og dette må beregningsmæssigt ske ved, at der inden for det pågældende tidsinterval foretages en iterativ bestemmelse af radiatorens ydelse (der ovenfor symbolsk indgår i den samlede varmetilførsel Φ), indtil

den ønskede rumtilstand opnås. På denne måde bestemmes den tidsmæssige variation af radiatorens ydelse, så givne funktionskrav opfyldes og summeret op over beregningsperioden fås ligeledes den samlede energitilførsel fra varmeanlægget.

Et eksempel på en sådan regulering er vist i fig. 3.2-4, der omfatter et udvalgt døgn fra en simulering i programmet BSim. Referencetemperaturen for radiatoren er 22 °C fra time 6 til time 17 og uden for dette tidsrum 18 °C. Det ses, at der ikke er behov for varmetilførsel om natten da rumtemperaturen ikke når ned på referenceværdien, før varmeanlægget starter ved time 6 (tidsstyring). Herefter reguleres radiatoreffekten afhængig af de belastninger, der påvirker rummet, således at den ønskede referencetemperatur holdes. Midt på dagen er der så stort et solindfald, at radiatoren er helt lukket, men alligevel sker der en lille temperaturstigning i rummet, idet der ikke er iværksat foranstaltninger til at "fjerne" varme fra rummet. Efter endt arbejdstid overgår varmeanlægget til natdrift ved time 17 (tidsstyring), hvorefter rumtemperaturen gradvis falder, dog uden at komme under referencetemperaturen 18 °C.



Figur 3.2-4 *Eksempel på simuleringsresultat fra BSim.*

Det omtalte eksempel med radiatorydelsens regulering efter rumtemperaturen er kun en af mange reguleringer/styringer, der indgår i programmer som BSim. Ofte vil der være flere tiltag, der sættes i gang for enten at tilføre eller fjerne varme fra rummet, så rumtemperaturen kan holdes inden for ønskede grænser. Disse styringer må så kobles ind i en prioriteret rækkefølge, så der "anvendes" så meget af det enkelte tiltag, som det er nødvendigt, inden det næste sættes i værk. Et eksempel kan være, at solafskærmningen aktiveres, inden der udluftes ekstra ved vinduesåbning, som iværksættes før indblæsningsluften fra ventilationsanlægget køles, og belysningen måske slukkes. Hvis der ændres i ventilationens størrelse, vil det have konsekvenser for de koefficienter i (3.2.13), der omfatter luftstrømmene (luftens varmebalance), og disse må således opdateres, inden beregningerne kan genoptages.

I kommercielle programmer foregår opdelingen af konstruktionerne i kontrolvolumener automatisk efter programspecifikke regler. I BSim inddeles hvert materialelag i et antal lige store stykker på en sådan måde, at knudepunktsafstanden ikke overstiger 0,05 m, og ved overfladerne indgår "halve" kontrolvolumener, idet der altid lægges et

knudepunkt på overfladen (jf. knudepunkterne 1 og n i fig. 3.2-2). Simuleringstidsskridtet er grundlæggende én time, idet vejrdata indlæses med en times intervaller, men for at opnå en rimelig beregningsnøjagtighed gennemføres der ofte flere beregninger pr. simuleringstidsskridt. I BSim er der valgt at sætte en øvre grænse for beregningstidsskridtet bestemt ved:

$$(\Delta\tau)_{max} = \min_{\substack{\text{alle} \\ \text{konstruktioner}}} \left(1{,}25 \frac{\rho c}{\lambda} \Delta x^2 \right)$$

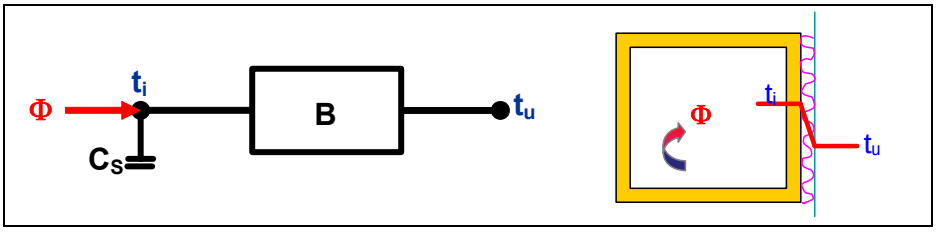
På grund af den kvadratiske afhængighed af lagtykkelsen vil specielt tynde materialelag give anledning til et lille beregningstidsskridt (flere gennemregninger pr. time), og det bør måske overvejes, om det "kritiske" lag kan udelades af den pågældende konstruktion, uden at nøjagtigheden ved simuleringen lider skade.

Som det fremgår af dette afsnit, er det forholdsvis enkelt at opstille selve den termiske rummodel men for at kunne gennemføre realistiske simuleringer af rummets eller bygningens drift under varierende belastningsforhold, skal der endvidere indgå en matematisk beskrivelse af de komponenter og klimatekniske installationer, der gennem deres tidsstyring og regulering har indflydelse på indeklimaet. For en nærmere beskrivelse af muligheder og begrænsninger for simulering af indeklima og energiforbrug i programpakken BSim henvises til brugervejledningen til dette program /6/.

3.3 En forenklet termisk rummodel

Detaljerede termiske simuleringsprogrammer, som beskrevet i det foregående, kræver også mange og detaljerede inddata – data som i almindelighed ikke kendes i den allertidligste projekteringsfase. Der kan derfor være god grund til at have forenklede arbejdsredskaber, der med et minimum af data kan give et første realistisk svar på, hvordan indeklimaforholdene vil blive ved forskellige valg af konstruktioner og klimatekniske løsninger.

Den mest simple termiske rummodel, der overhovedet kan opstilles, hvor der stadig tages hensyn til den varmeakkumulerende virkning i konstruktionerne, er også en form for kontrolvolumenmodel, men med kun ét knudepunkt. I dette knudepunkt samles al den termisk masse (varmekapacitet), der formodes at have indflydelse på indetemperaturen, og derefter regnes al varmetransmission gennem de rumafgrænsende konstruktioner uafhængig af varmeakkumuleringen. Modellen er symbolsk vist i fig. 3.3-1.



Figur 3.3-1 *Forenklet termisk rummodel.*

Rummets varmebalance kan nu udtrykkes ved:

$$C_S \frac{dt_i(\tau)}{d\tau} = \Phi(\tau) - B(t_i(\tau) - t_u(\tau)) \tag{3.3.1}$$

hvor

C_s er rummets beregningsmæssige varmekapacitet [J/K]
Φ er den samlede varmetilførsel fra interne og eksterne kilder [W]
B er det samlede specifikke varmetab ved transmission og ventilation [W/K]
t_i er rumtemperaturen [°C]
t_u er udetemperaturen [°C]

Ved ovenstående opstilling af modellen er det forudsat, at al varmetab sker til udeluften, men der er naturligvis ikke noget til hinder for, at der kan regnes transmission gennem de indvendige konstruktioner til tilgrænsende rum med andre temperaturer, eller at ventilationsluften kan have en anden indblæsningstemperatur.

Det bemærkes endvidere, at når der er stationære forhold, dvs. at alle størrelser i (3.3.1) er konstante i tiden, så overgår differentialligningen (3.3.1) til en almindelig stationær balanceligning:

$$\Phi = B(t_i - t_u) \tag{3.3.2}$$

Balanceligningen (3.3.1) omskrives til:

$$\frac{dt_i(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{T} t_i(\tau) + \frac{1}{T}(t_u(\tau) + \frac{1}{B}\Phi(\tau)) \tag{3.3.3}$$

hvor

$T = C_s/B$ er rummets karakteristiske tidskonstant [sec].

Den forenklede rumbalance har nu samme form som (1.9.4), altså en tilstandsbeskrivelse der kan simuleres med Matlab-funktionen ”lsim”.

$$\begin{aligned} \frac{dt_i}{d\tau} &= \overline{\overline{SA}}\, t_i + \overline{\overline{SB}}\, \bar{u} \\ t_i &= \overline{\overline{SC}}\, t_i + \overline{\overline{SD}}\, \bar{u} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

hvor

$$\overline{\overline{SA}} = -\frac{1}{T} \qquad \overline{\overline{SB}} = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{B} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} t_u \\ \Phi \end{bmatrix}$$ er belastningsvektoren

$$\overline{\overline{SC}} = 1 \qquad \overline{\overline{SD}} = [0 \quad 0]$$

Eksempel 3.3.1

Det vises let, at den analytiske løsning til den forenklede rumbalance (3.3.3) er bestemt ved:

$$t_i(\tau) = (t_u + \frac{1}{B}\Phi)(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}) + t_{io}e^{-\frac{\tau}{T}} \tag{3.3.5}$$

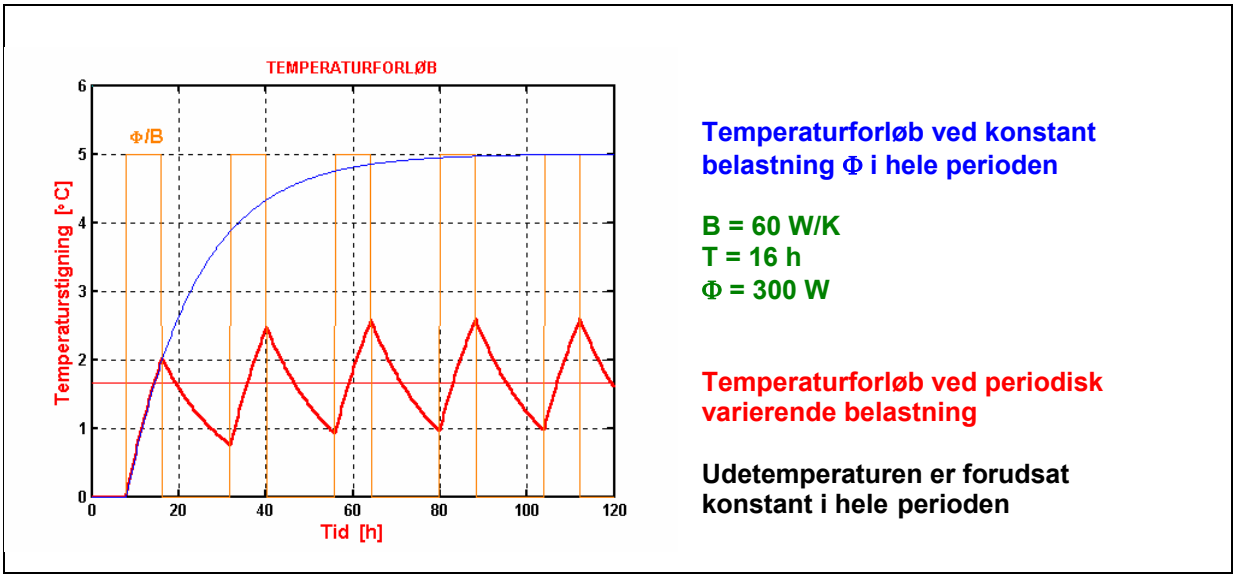
hvis begyndelsestilstanden er t_{io}, og belastningerne (t_u og Φ) er konstante for $\tau \geq 0$. Det ses endvidere af (3.3.5), at tidskonstanten T spiller en væsentlig rolle i forbindelse med de analytiske løsninger.

Ligning (3.3.5) omskrives således, at rummets temperaturstigning ud fra begyndelsesværdien kan bestemmes:

$$\Delta t_i(\tau) = t_i(\tau) - t_{io} = (t_u + \frac{1}{B}\Phi - t_{io})(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}) \tag{3.3.6}$$

Denne funktion er optegnet i fig. 3.3-2 for to forskellige belastningstilfælde:

a) der påføres en konstant varmebelastning Φ til tiden 0 (der her er sat til time 8)
b) tilsvarende påføres en belastning af samme størrelse i 8 timer, hvorefter belastningen er nul i 16 timer. Dette gentages over en række døgn.



Figur 3.3-2 *To forskellige temperaturforløb.*

I tilfælde a) vil temperaturstigningen efterhånden nå en fast værdi bestemt ved at lade tiden gå mod uendelig i (3.3.6):

$$\Delta t_i(\tau \to \infty) = t_i(\tau \to \infty) - t_{io} = t_u + \frac{1}{B}\Phi - t_{io} \tag{3.3.7}$$

eller

$$t_i(\tau \to \infty) = t_u + \frac{1}{B}\Phi \tag{3.3.8}$$

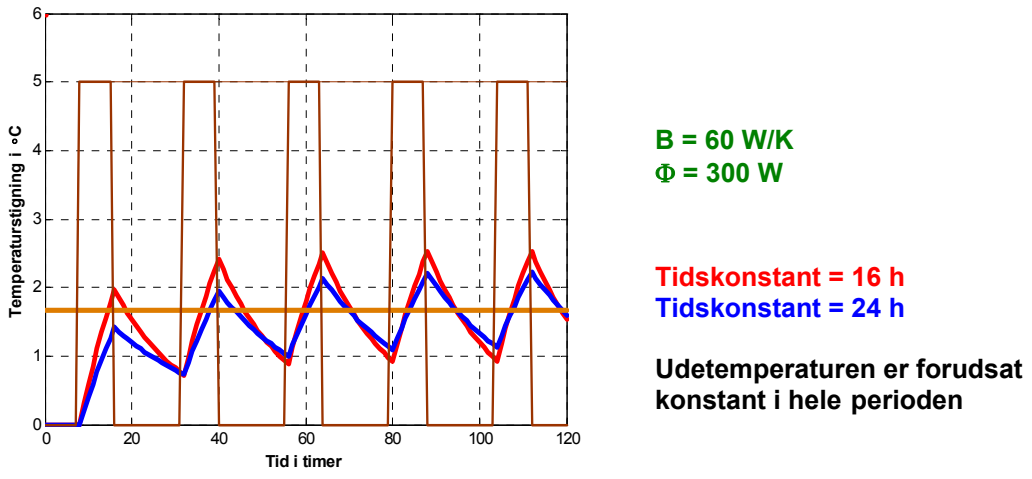
Resultatet i (3.3.8) ville man ligeledes få, hvis den stationære balance (3.3.2) anvendes, men som det ses af fig. 3.3-2, går der ret lang tid, inden denne tilstand opnås (mindst 5 gange tidskonstanten!). Det kan dog næppe forventes, at en belastning holder sig konstant over så lang en periode, så her er tilfælde b) nok mere realistisk.

Temperaturforløbet i tilfælde b) kan beregnes ved gentagen anvendelse af (3.3.6) ved skiftevis at sætte belastningen til Φ i 8 timer og derefter til nul i 16 timer med den senest beregnede værdi af rumtemperaturen som begyndelsesværdi i den næste periode. Men beregningerne kan naturligvis også simuleres i MATLAB ved anvendelse af (3.3.4).

I tilfælde b) indstiller rumtemperaturen sig efter nogen tid til at svinge periodisk omkring en middelværdi. Denne middelværdi kan beregnes af den stationære balance (3.3.2), hvis ***belastningernes middelværdier*** anvendes. I det viste tilfælde er belastningens døgnmiddelværdi 8/24 = 1/3 af belastning i tilfælde a), og følgelig er den gennemsnitlige temperaturstigning også kun 1/3 af stigningen i tilfælde a).

Dette eksempel viser med al tydelighed, at hvis der anvendes stationære varmebalancer, så skal der anvendes middelværdier for alle de indgående belastninger taget over en passende lang periode, og aldrig en periode der er kortere end et døgn. Hvis dette ikke overholdes, vil der forekomme meget misvisende resultater ved anvendelse af en stationær varmebalance.

I fig. 3.3-3 er vist, hvad der sker med rumtemperaturen, hvis belastningstilfælde b) simuleres med en større tidskonstant, mens alle øvrige forhold er uændrede. Igen konstateres det, at rumtemperaturen efter nogen tid svinger periodisk omkring en middelværdi, men at udsvingene er blevet mindre end før.



Figur 3.3-3 *Periodisk temperaturforløb ved to forskellige tidskonstanter.*

Den større varmekapacitet bevirker, at det tager længere tid, inden den ***periodestationære*** tilstand indtræder, samt at udsvingene fra middelværdien bliver mindre. Middelværdien er uændret og dermed selvfølgelig uafhængig af rummets varmekapacitet.

Dette eksempel lægger op til en meget enkel beregningsmetode til bestemmelse af et rums periodestationære døgnmiddeltemperatur samt den forventede maksimaltemperatur kun ud fra nogle ganske få oplysninger om rummet og de termiske påvirkninger. Betingelsen er dog, at belastningerne gentages periodisk og gennem så lang tid, at den periodestationære tilstand er indtrådt, og derfor er metoden særligt egnet til en første undersøgelse af det termiske indeklima i en varm sommerperiode.

♦♦♦

3.4 Døgnmiddeltemperatur og maksimal udsving

Med udgangspunkt i de overvejelser der fremgår af eksemplet i foregående afsnit, er der i /8/ angivet en simpel metode til beregning af et rums døgnmiddeltemperatur og temperaturens maksimale udsving fra middelværdien. Metodens grundtrin beskrives kort i det følgende.

Rummets døgnmiddeltemperatur beregnes ud fra en stationær varmebalance for fri varme, hvor der anvendes døgnmiddelværdier af alle indgående påvirkninger:

$$\sum \Phi_{fri} = B_u(t_i - t_u) + \sum B_r(t_i - t_r) + B_L(t_i - t_L) \qquad (3.4.1)$$

hvor

- t_i er døgnmiddelværdien af rumtemperaturen [°C]
- B_u er det specifikke varmetab ved transmission til udeluften [W/°C]
- t_u er døgnmiddelværdien af udelufttemperaturen [°C]
- B_r er det specifikke varmetab til naborum med anden temperatur [W/°C]
- t_r er døgnmiddelværdien af naborummets temperatur [°C]
- B_L er det specifikke varmetab ved ventilation [W/°C]
- t_L er døgnmiddelværdien af ventilationsluftens indblæsningstemperatur [°C]
- Φ_{fri} er døgnmiddelværdien af varmetilførsel [W]

$B_u = \Sigma U_u A_u$ [W/°C]
$B_r = \Sigma U_r A_r$ [W/°C]
$B_L = c_L m_L = c_L \rho_L V_L = 0{,}34 n V_R$ [W/°C]

hvor

- U er konstruktionens transmissionskoefficient [W/m^2°C]
- A er konstruktionens areal [m^2]
- c_L er luftens varmefylde [J/kg °C]
- m_L er ventilationsluftens massestrøm [kg/s]
- V_L er ventilationsluftens volumenstrøm [m^3/s]
- n er luftskiftet [h^{-1}]
- V_R er rummets volumen [m^3]

Det er ved opstillingen af (3.4.1) forudsat, at ventilationen er konstant over døgnet. Hvis et naborum forventes at have samme temperatur, som det rum der regnes på, sættes den pågældende varmetabsfaktor $B_r = 0$.

Løses (3.4.1) med hensyn til rumtemperaturen fås:

$$\mathbf{t_i = \frac{B_u t_u + \sum B_r t_r + B_L t_L + \sum \Phi_{fri}}{B_u + \sum B_r + B_L}} \qquad (3.4.2)$$

Hvis der ikke tages hensyn til varmeudveksling med naborum, og hvis ventilationen udelukkende sker med udeluft, kan (3.4.2) forenkles til:

$$\mathbf{t_i = t_u + \frac{\sum \Phi_{fri}}{B_u + B_L}} \qquad (3.4.3)$$

Ligning (3.4.3) angiver, hvor meget de tilførte belastninger hæver rumtemperaturen over udetemperaturen.

I mange tilfælde kendes varmetilførslen i form af døgnsummer af de forskellige påvirkninger, og effekten kan da findes af:

$$\mathbf{\sum \Phi_{fri} = \frac{Q_i + Q_s}{24}} \qquad (3.4.4)$$

hvor

Q_i er den samlede varmetilførsel over døgnet fra interne kilder [Wh/døgn]

Q_s er den samlede varmetilførsel over døgnet fra solindfald [Wh/døgn]

Hvis rummets døgnmiddeltemperatur beregnet efter (3.4.2) eller (3.4.3) ikke opfylder givne krav til det termiske indeklima, må der foretages ændring af en eller flere af de indgående størrelser. Dette kan fx være en reduktion af varmetilførslen ved at anvende afskærmning for solen, en forøgelse af ventilationen (B_L større) eller måske at afkøle ventilationsluften under udetemperaturen.

I appendiks findes en række oplysninger om udeklimaparametre og andre udvalgte belastninger til brug ved beregningerne.

Når døgnmiddeltemperaturen efter (3.4.2) er på plads, kan der være behov for at foretage en overslagsmæssig vurdering af temperaturvariationen over døgnet. Rumtemperaturens udsving dæmpes dels gennem rummets varmetab, dels gennem rummets evne til at akkumulerer varme og afhænger endvidere af hvor stor variation, der er i belastningerne over døgnet.

Forskellen mellem den maksimale og den minimale rumtemperatur kan bestemmes af:

$$\Delta t_i = t_{i\,max} - t_{i\,min} = \frac{\Delta\Phi_K}{B_u + \sum B_r + B_L + B_{akk}} = \frac{\Delta\Phi_{K,i+s} + \Delta\Phi_{K,tu}}{B_u + \sum B_r + B_L + B_{akk}} \qquad (3.4.5)$$

hvor

$\Delta\Phi_K$ er forskellen mellem største og mindste konvektive varmebelastning (timeværdier) [W]

$\Delta\Phi_{K,i+s}$ er forskellen mellem største og mindste konvektive varmebelastning fra interne varmekilder og solindfald (timeværdier) [W]

$\Delta\Phi_{K,tu}$ er variationen i den konvektive varmebelastning som følge af udelufttemperaturvariationen (timeværdier) [W]

B_{akk} er rummets varmeakkumuleringsevne [W/°C]

De enkelte bidrag til varmebelastningerne kan erfaringsmæssigt bestemmes på følgende måde:

$$\Delta\Phi_{K,i+s} = \frac{2}{3}[(\Phi_i + \Phi_{sol})_{max} - \Phi_{i,min}] \qquad (3.4.6)$$

$$\Delta\Phi_{K,tu} = \Delta t_u B_{u,vin} + \Delta t_L B_L \qquad (3.4.7)$$

hvor

Φ_i er summen af varmebelastninger fra personer, belysning og udstyr [W]

Φ_{sol} er solindfaldet gennem glasflader [W]

Δt_u er forskellen mellem største og mindste udetemperatur [°C]

$B_{u,vin}$ er det specifikke transmissionstab gennem vinduerne [W/°C]

Δt_L er forskellen mellem største og mindste indblæsningstemperatur [°C]

B_L er det specifikke varmetab ved ventilation [W/°C]

Hvis der ventileres med udeluft er $\Delta t_L = \Delta t_u$.

Rummets varmeakkumuleringsevne B_{akk} omfatter den samlede varmekapacitet af inventar og dele af de inderste materialelag af alle bygningsdele, der vender ind mod rummet. Overslagsmæssige værdier kan tages fra nedenstående tabel.

Tabel 3.4.1 *Vejledende værdier for varmeakkumuleringsevnen B_{akk} pr. m^2 gulvareal for forskellige typer rum.*
Der er forudsat maksimalt 12 timers varmebelastning pr. døgn. /8/.

Betegnelse	Beskrivelse	Akkumuleringsevne W/°C m^2
Ekstra let	Rum med lette skillevægge, fx skelet med beklædningsplader, og helt uden tunge konstruktionsdele.	5-6
Middel let	Rum med indvendige vægge af letbeton og kun uvæsentlige tunge konstruktionsdele.	7-9
Middel tungt	Rum med én tung, dominerende konstruktion, fx betonloft eller 2-3 konstruktioner af tegl	10-12
Ekstra tungt	Rum med flere tunge konstruktioner, fx betondæk og –loft samt skillevægge af tegl eller letbeton.	13-15

Eksempel 3.4.1

Der foreligger en første skitse til et kontorbyggeri, hvor der regnes med at vinduesarealet udgør 20 % af gulvarealet, hvorved resten af ydervægsarealet udgør 45 % af gulvarealet. Der skal gives et overslag over døgnmiddeltemperaturen en varm sommerdag, når der ventileres med udeluft, og der ses bort fra varmeudveksling med naborum. Med de givne forudsætninger kan ligning (3.4.3) anvendes.

Følgende størrelser beregnes overslagsmæssigt:

Varmetab	Beregning	W/°C pr. m^2 gulvareal
Specifikt varmetab gennem vinduer med U = 1,5 W/m^2°C	0,2·1,5	0,30
Specifikt varmetab gennem ydervæg med U = 0,2 W/m^2°C	0,45·0,2	0,09
Samlet		B_u = 0,39
Specifikt varmetab ved ventilation med en luftstrøm på 1,4 l/s pr. m^2 gulvareal (normalt nødvendigt for at opretholde en god luftkvalitet)	$1{,}2 \cdot 1006 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ (3.4.1)	B_L = 1,7

I kontorer regnes med en persontæthed på 0,1 person pr. m^2 gulvareal, og der vil derfor forekomme et **døgngennemsnit** for intern varmetilførsel fra personer, eludstyr og belysning på 6 W pr. m^2 gulvareal hvoraf belysningen udgør 1,5 W pr. m^2 gulvareal.

Solindfald gennem vinduer beregnes af (formel A.3), (se appendiks):

$$\Phi_{sol} = g \cdot f_\beta \cdot f_{afsk} \cdot f_{skyg} \cdot f_{glas} \cdot A_{vin} \cdot I_{sol} = f_{afsk} \cdot f_S \cdot A_{vin} \cdot I_{sol}$$

hvor f_s overslagsmæssigt sættes til 0,5.

Beregningerne gennemføres for et døgn i august måned hvor, døgnmiddelværdien af udetemperaturen er 20,5 °C (tabel A.1), og døgnsummen af solindstråling for et sydvendt vindue er 4800 Wh/ m^2 (tabel A.2) svarende til 4800/24 = 200 W/m^2 i døgngennemsnit.

Rumtemperaturen beregnes uden belysningsvarme og uden solafskærmning (f_{afsk} = 1).

$$t_i = t_u + \frac{\sum \Phi_{fri}}{B_u + B_L} = 20{,}5 + \frac{4{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 200}{0{,}39 + 1{,}7} = 20{,}5 + 11{,}7 = 32{,}2\,°C$$

Gennemsnitstemperaturen bliver således alt for høj, så der forsøges med solafskærmning med udvendige rullegardiner, hvor solafskærmningsfaktoren er f_{afsk} = 0,2 (tabel A.4). Det anses dog for nødvendigt med tændt belysning, når der afskærmes for solen. Døgnmiddeltemperaturen bliver nu:

$$t_i = t_u + \frac{\sum \Phi_{fri}}{B_u + B_L} = 20{,}5 + \frac{4{,}5 + 1{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 200}{0{,}39 + 1{,}7} = 20{,}5 + 4{,}8 = 25{,}3\,°C$$

Den opnåede gennemsnitstemperatur svarer nogenlunde til komforttemperaturen for personer med let sommerbeklædning, så i gennemsnit er temperaturforholdene acceptable, men det må erindres, at rumtemperaturen altid vil være højere i arbejdstiden. Da belastningerne næppe kan nedbringes yderligere, må det i den videre projektering overvejes, om ventilationen kan øges så døgnmiddeltemperaturen sænkes.

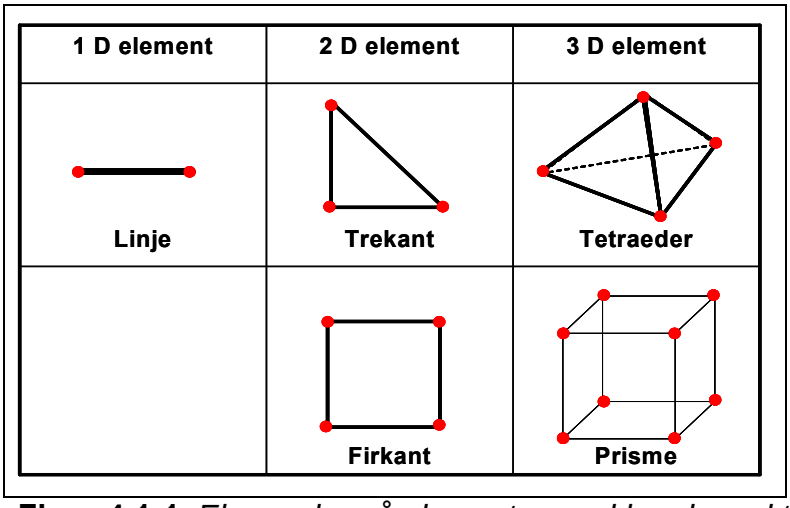
♦ ♦ ♦

FINITE ELEMENT METODEN

4.1 Element og temperaturfunktion

Ved elementmetoden opdeles beregningsområdet geometrisk i mindre delområder – der kaldes elementer – hvortil der knyttes et antal knudepunkter med tilhørende knudepunktstemperaturer. Men i modsætning til kontrolvolumenmetoden, hvor der kun opnås kendskab til én temperatur pr. kontrolvolumen, vedtager man på forhånd, hvordan temperaturfordelingen hen over elementet skal forløbe. På denne måde opnås i princippet kendskab til en kontinuert temperaturfordeling over hvert element og dermed over hele beregningsområdet.

Der er ret stor frihed med hensyn til elementernes geometri, og nogle eksempler er vist i fig. 4.1-1. Der placeres knudepunkter i hver ende af et linjeelement og i hvert hjørne af to- og tredimensionale elementer. Der kan dog indlægges flere knudepunkter i alle de viste elementer, hvis det kræves til bestemmelse af den temperaturfunktion der vælges for elementet – dette vil dog ikke blive berørt nærmere i denne introduktion til elementmetoden.



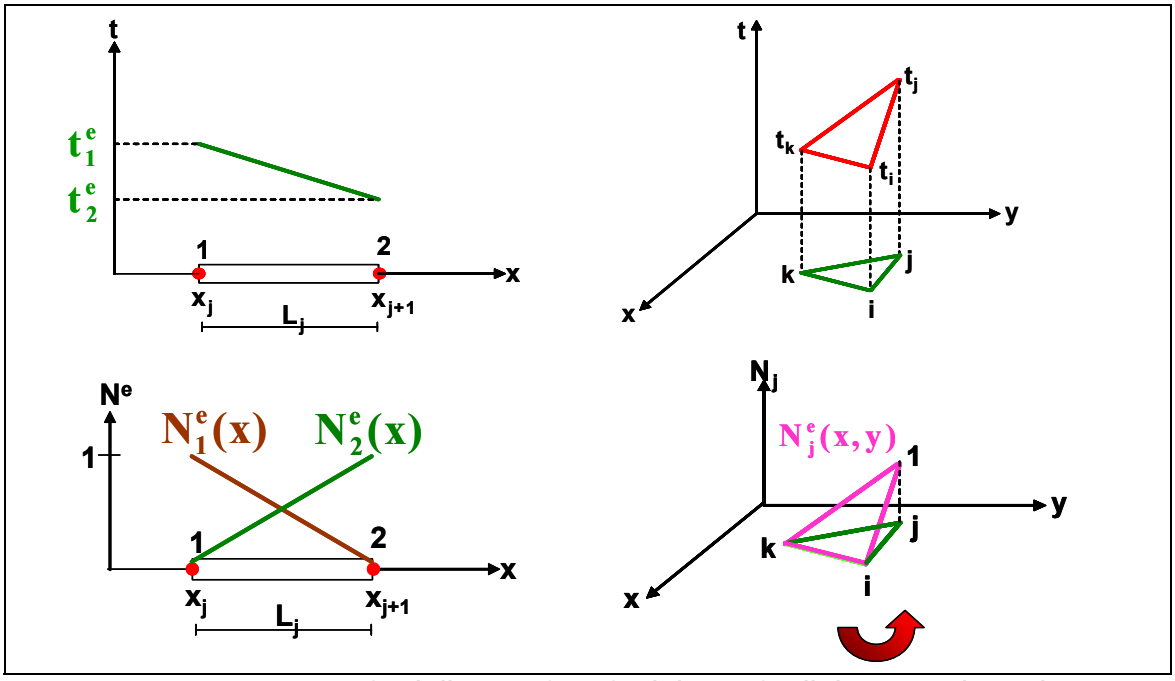
Figur 4.1-1 *Eksempler på elementer med knudepunkter.*

Linjeelementet er naturligvis selvskrevet, når der regnes på endimensionale forhold. Ved 2D beregninger er trekantelementet meget populært, idet der kan opnås en god udfyldning af alle geometrier, også når der optræder krumme rande.

Den temperaturfordeling, der vælges hen over elementet, skal entydigt kunne udtrykkes ved elementets knudepunktstemperaturer. Det betyder fx, at for linjeelementet med to knudepunkter, som vist i fig. 4.1-1, er det kun muligt at have et lineært forløb af temperaturen mellem de to knudepunkter – der skal netop to punkter til at bestemme en ret linje. Tilsvarende gælder for det viste trekantelement, at temperaturfordelingen udgør en plan flade udspændt af de tre knudepunktstemperaturer. De omtalte temperaturfordelinger er vist i fig. 4.1-2 øverst.

For at karakterisere temperaturforløbet hen over elementet defineres en **formfunktion** eller **interpolationsfunktion** for elementet, og der knyttes en funktion til hvert knudepunkt som vist nederst i fig. 4.1-2. Interpolationsfunktionen viser, hvor meget af den pågældende knudepunktstemperatur der medregnes et givet sted på elementet,

og derfor har interpolationsfunktionen altid værdien én i et knudepunkt og værdien nul i elementets øvrige knudepunkter.



Figur 4.1-2 *Temperaturfordeling og formfunktioner for linje- og trekantelement.*

For linjeelementet kan elementets formfunktion udtrykkes på følgende måde:

$$N_1^e(x) = -\frac{1}{L_j}(x - x_{j+1})$$
$$N_2^e(x) = \frac{1}{L_j}(x - x_j) \qquad (4.1.1)$$

hvor

- N^e er elementets formfunktion (i fig. 4.1-2 er e = element j)
- L_j er elementets længde [m]
- x_j er en knudepunktskoordinat [m]
- x er løbende koordinat [m]

Med (4.1.1) kan temperaturen hen over elementet udtrykkes ved:

$$t^e(x) = N_1^e(x)t_1^e + N_2^e(x)t_2^e \qquad (4.1.2)$$

hvor

- $t^e(x)$ er temperaturfordelingen over elementet [°C]
- t^e_1 er temperaturen i elementets knudepunkt 1 [°C]

Indsættes (4.1.1) i (4.1.2) fremgår den retlinjede temperaturfordeling over elementet tydeligt:

$$t^e(x) = -\frac{x - x_{j+1}}{L_j}t_1^e + \frac{x - x_j}{L_j}t_2^e = \frac{t_2^e - t_1^e}{L_j}(x - x_j) + t_1^e \qquad (4.1.3)$$

Af (4.1.3) fremgår det umiddelbart, at temperaturfunktionens hældningskoefficient er:

$$\frac{d(t^e(x))}{dx} = \frac{t_2^e - t_1^e}{L_j} = -\frac{1}{L_j}t_1^e + \frac{1}{L_j}t_2^e = \frac{d(N_1^e(x))}{dx}t_1^e + \frac{d(N_2^e(x))}{dx}t_2^e \tag{4.1.4}$$

Da varmestrømmen gennem elementet er proportional med temperaturgradienten, kan varmestrømmen altså også udtrykkes gennem knudepunktstemperaturerne og den afledede af formfunktionen.

Ligning (4.1.2) lader sig hensigtsmæssigt udtrykke ved følgende matrix-skrivemåde:

$$t^e(x) = \overline{\overline{N}}^e \overline{t}^e = N_1^e(x)t_1^e + N_2^e(x)t_2^e \tag{4.1.5}$$

hvor

$$\overline{\overline{N}}^e = [N_1^e(x) \quad N_2^e(x)] = [-\frac{x - x_{j+1}}{L_j} \quad \frac{x - x_j}{L_j}]$$

$$\overline{t}^e = [t_1^e \quad t_2^e]^T$$

På tilsvarende måde udtrykkes temperaturgradienten ved:

$$\frac{d(t^e(x))}{dx} = \overline{\overline{B}}^e \overline{t}^e = B_1^e(x)t_1^e + B_2^e(x)t_2^e = \frac{d(N_1^e(x))}{dx}t_1^e + \frac{d(N_2^e(x))}{dx}t_2^e \tag{4.1.6}$$

hvor

$$\overline{\overline{B}}^e = [B_1^e(x) \quad B_2^e(x)] = [-\frac{1}{L_j} \quad \frac{1}{L_j}]$$

Det er værd at bemærke, at både temperaturfordelingen og temperaturgradienten udtrykkes gennem to ”led”, nemlig formfunktionen $\overline{\overline{N}}^e$ og differentialkvotienten af formfunktionen $\overline{\overline{B}}^e$, der begge kun afhænger af elementets geometri samt knudepunktstemperaturerne $\overline{t}^e$.

Eksempel 4.1.1

For trekantelementet vist i fig. 4.1-2 gælder tilsvarende følgende generelle udtryk, når knudepunkterne nummereres med i, j og k i retning mod uret:

$$t^e(x,y) = \overline{\overline{N}}^e \overline{t}^e = N_i^e(x,y)t_i^e + N_j^e(x,y)t_j^e + N_k^e(x,y)t_k^e \tag{4.1.7}$$

hvor

$$\overline{\overline{N}}^e = \begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_k^e \end{bmatrix}$$

$$N_i^e = \frac{1}{2A^e}[x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y]$$

$$N_j^e = \frac{1}{2A^e}[x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y]$$

$$N_k^e = \frac{1}{2A^e}[x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y]$$

A^e er trekantelementets areal [m^2]

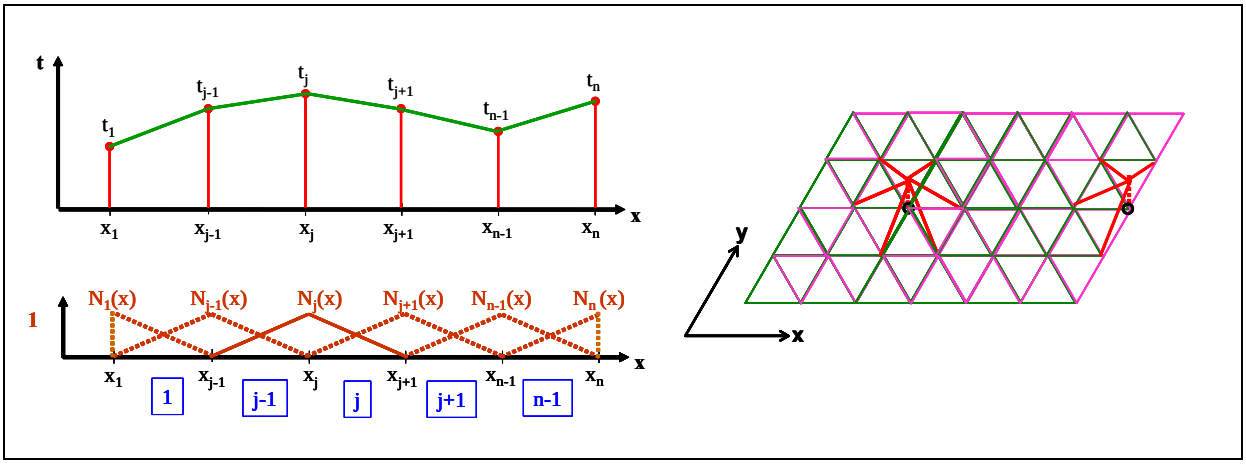
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial(t^e(x,y))}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(t^e(x,y))}{\partial y} \end{bmatrix} = \overline{\overline{B}}^e \overline{t}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \overline{\overline{N}}^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \overline{\overline{N}}^e}{\partial y} \end{bmatrix} \overline{t}^e \tag{4.1.8}$$

hvor

$$\overline{\overline{B}}^e = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix}$$

♦♦♦

Temperaturfordelingen over hele beregningsområdet fås ved at sammenstykke elementernes formfunktion til en global formfunktion. Dette er vist for et 1D tilfælde i fig. 4.1-3, hvor beregningsområdet er opdelt i n-1 elementer, hvorved der opstår n knudepunkter. Endvidere er forholdene antydet for 2D tilfældet med trekantelementer.



Figur 4.1-3 *Den globale formfunktion ved linje- og trekantelementer.*

Temperaturen over hele beregningsområdet kan herefter udtrykkes ved:

$$t = \overline{\overline{N}}\overline{t} = [N_1 \ldots N_j \ldots N_n] \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \tag{4.1.9}$$

hvor

j angiver knudepunktsnummer over hele beregningsområdet

$\overline{t}$ indeholder alle knudepunktstemperaturer i hele beregningsområdet

Det er karakteristisk for elementerne N_j i den globale formfunktionsmatrice, at de antager værdien en, i det knudepunkt de tilhører, og værdien nul i alle andre knudepunkter. N_j er således kun forskelligt fra nul i de elementer, hvor knudepunkt j indgår. For linjeelementet kan dette udtrykkes på følgende måde:

$$N_j(x) = \begin{cases} N_2^{j-1}(x) & \textit{for} \quad x_{j-1} \le x \le x_j \\ N_1^j(x) & \textit{for} \quad x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0 & \textit{for alle andre værdier af } x \end{cases} \tag{4.1.10}$$

Under ikke-stationære forhold vil knudepunktstemperaturerne afhænge af tiden, og det er da muligt at bestemme den tidsafledede af temperaturfunktionen:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \overline{\overline{N}} \frac{d\overline{t(\tau)}}{d\tau} = [N_1 ... N_j ... N_n] \begin{bmatrix} \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} \\ \vdots \\ \frac{dt_j(\tau)}{d\tau} \\ \vdots \\ \frac{dt_n(\tau)}{d\tau} \end{bmatrix} \tag{4.1.11}$$

Efter disse indledende overvejelser om elementgeometri og temperaturfordeling over elementerne står nu tilbage at fastlægge en metode til bestemmelse af de ukendte knudepunktstemperaturer.

4.2 Det matematiske grundlag

For at vise princippet i opstillingen af finite element metoden tages der udgangspunkt i den generelle varmestrømsligning (1.3.8) i den endimensionale udgave med hertil hørende rand- og begyndelsesbetingelser. Beregningsområdet opdeles i n-1 linje-elementer som vist i fig. 4.1-3 med n knudepunkter således at den lineære formfunktion (4.1.5) er gældende. Opdelingen foretages på en sådan måde, at hvert element kun indeholder et materiale. Den tilnærmede temperaturfunktion kan nu udtrykkes ved (4.1.9) som:

$$t(x,\tau) = \overline{\overline{N}}\overline{t(\tau)} = [N_1(x) ... N_j(x) ... N_n(x)] \begin{bmatrix} t_1(\tau) \\ \vdots \\ t_j(\tau) \\ \vdots \\ t_n(\tau) \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

Da denne funktion kun er en tilnærmelse, vil den ikke tilfredsstille (1.3.8) eksakt, så derfor vil der fremkomme en residual $R(x,\tau)$:

$$r(x,\tau) = \rho(x)c(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}) - S(x,\tau) \tag{4.2.2}$$

Da der er n ukendte knudepunktstemperaturer, kan denne ligning ikke direkte anvendes til deres bestemmelse. I stedet bestemmes knudepunktstemperaturerne således at:

$$\int_a^b v_j(x)\underbrace{[\rho(x)c(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}) - S(x,\tau)]}_{\text{RESIDUAL}}dx = 0 \qquad (4.2.3)$$

hvor

$v_j(x)$ er en **vægtfunktion** j = 1, 2, …, n
a og b er beregningsområdets begrænsning

Ligning (4.2.3) kræver således, at en vægtet værdi af residualerne bliver nul. Den eksakte løsning vil naturligvis altid gøre dette integral til nul, uanset hvilken vægtfunktion der anvendes.

I det følgende sættes vægtfunktionen lig med den globale formfunktion – Galerkins metode (opkaldt efter Boris Grigoryevich Galerkin , 1871-1945, russisk matematiker og ingeniør) – hvorved der fremkommer de nødvendige n ligninger til bestemmelse af de n ukendte knudepunktstemperaturer.

$$v_j(x) = N_j(x)$$

$$\overline{v(x)} = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_j(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{bmatrix} = \overline{\overline{N(x)}}^T \qquad (4.2.4)$$

(4.2.4) indsættes i (4.2.3) og integralet opdeles:

$$\int_a^b \overline{\overline{N(x)}}^T \rho(x)c(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau}dx - \int_a^b \overline{\overline{N(x)}}^T \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x})dx - \int_a^b \overline{\overline{N(x)}}^T S(x,\tau)dx = 0$$

Der foretages en delvis integration af andet led:

$$\int_a^b \rho(x)c(x)\overline{\overline{N(x)}}^T \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau}dx - ([\overline{\overline{N(x)}}^T \lambda(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}]_a^b - \int_a^b \frac{\partial \overline{\overline{N(x)}}^T}{\partial x}(\lambda(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x})dx) - \int_a^b \overline{\overline{N(x)}}^T S(x,\tau)dx = 0$$

Andet led udregnes:

$$-[\overline{\overline{N(x)}}^T \lambda(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}]_a^b = -(\overline{\overline{N(b)}}^T \lambda(b)\frac{\partial t(b,\tau)}{\partial x} - \overline{\overline{N(a)}}^T \lambda(a)\frac{\partial t(a,\tau)}{\partial x}) = \overline{\overline{N(b)}}^T q(b,\tau) - \overline{\overline{N(a)}}^T q(a,\tau)$$

hvor

q(a) er varmestrømsintensiteten [W/m^2] i x-retning ved a
q(b) er varmestrømsintensiteten [W/m^2] i x-retning ved b

Dette overflyttes til ligningens højre side sammen med det sidste integral, hvorved randbetingelserne automatisk indgår i ligningerne.

$$\int_a^b \rho(x)c(x)\overline{\overline{N(x)}}^T \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau}dx + \int_a^b \frac{\partial \overline{\overline{N(x)}}^T}{\partial x}(\lambda(x)\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x})dx = [-\overline{\overline{N(b)}}^T q(b,\tau) + \overline{\overline{N(a)}}^T q(a,\tau)] + \int_a^b \overline{\overline{N(x)}}^T S(x,\tau)dx$$

Af (4.2.1) fås:

$$\mathbf{t(x,\tau) = \overline{\overline{N(x)}}\,\overline{t(\tau)}}$$

$$\mathbf{\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = \overline{\overline{N(x)}}\frac{d\overline{t(\tau)}}{d\tau}}$$

$$\mathbf{\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x} = \frac{d\overline{\overline{N(x)}}}{dx}\overline{t(\tau)} = \overline{\overline{B(x)}}\,\overline{t(\tau)}}$$

$$\mathbf{\frac{\partial \overline{\overline{N(x)}}^{T}}{\partial x} = \overline{\overline{B(x)}}^{T}}$$

Som indsat giver:

$$\mathbf{\int_a^b \rho c \overline{\overline{N}}^{T}\,\overline{\overline{N}}\frac{d\overline{t(\tau)}}{d\tau}dx + \int_a^b \overline{\overline{B}}^{T}\lambda\,\overline{\overline{B}}\,\overline{t(\tau)}dx = -(\overline{\overline{N(b)}}^{T}q(b)) + (\overline{\overline{N(a)}}^{T}q(a)) + \int_a^b \overline{\overline{N}}^{T}Sdx}$$

Da temperaturvektoren ikke afhænger af x, og når materialeparametrene er konstante inden for hvert element fås:

$$\mathbf{\underbrace{(\int_a^b \rho c \overline{\overline{N}}^{T}\,\overline{\overline{N}}dx)\frac{d\overline{t(\tau)}}{d\tau}}_{\overline{\overline{C}}\frac{d\overline{t(\tau)}}{d\tau}} + \underbrace{(\int_a^b \overline{\overline{B}}^{T}\lambda\,\overline{\overline{B}}dx)\overline{t(\tau)}}_{\overline{\overline{K}}\overline{t(\tau)}} = \underbrace{-(\overline{\overline{N(b)}}^{T}q(b)) + (\overline{\overline{N(a)}}^{T}q(a))}_{\overline{f_b}} + \underbrace{\int_a^b \overline{\overline{N}}^{T}Sdx}_{\overline{f_l}}} \qquad (4.2.5)$$

hvor

$\mathbf{\overline{\overline{C}} = \int_a^b \rho c \overline{\overline{N}}^{T}\,\overline{\overline{N}}dx}$ er kapacitetsmatricen

$\mathbf{\overline{\overline{K}} = \int_a^b \overline{\overline{B}}^{T}\lambda\,\overline{\overline{B}}dx}$ er transmissionsmatricen

$$\mathbf{\overline{f_b} = \begin{bmatrix} q(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q(b) \end{bmatrix}}$$ er randværdivektoren

$\mathbf{\overline{f_l} = \int_a^b \overline{\overline{N}}^{T}Sdx}$ er lastvektoren

Finite element ligningssystemet (4.2.5) er nu bragt på den generelle løsningsform som angivet i (1.7.1) og det bemærkes, at matricernes elementer udelukkende er bestemt gennem den valgte formfunktion og naturligvis de indgående materialeparametre.

Opstillingen af elementmetoden i det to- eller tredimensionale tilfælde følger helt den samme procedure, og også her vil de indgående koefficientmatricer være bestemt gennem den valgte formfunktion.

$$\left(\int_{\text{Område}} \rho c \overline{\overline{N}}^T \overline{\overline{N}} d\Omega\right)\frac{\overline{dt}}{d\tau} + \left(\int_{\text{Område}} \overline{\overline{B}}^T \lambda \overline{\overline{B}} d\Omega\right)\overline{t} = -\int_{\text{Rand}} \overline{\overline{N}}^T q_n d\Psi + \int_{\text{Område}} \overline{\overline{N}}^T S d\Omega \qquad (4.2.6)$$

hvor

- område Ω er beregningsområdet (2D fladeintegral, 3D volumenintegral)
- rand Ψ er beregningsområdets rand (2D linjeintegral, 3D fladeintegral)
- q_n er den udadgående varmestrømsintensitet vinkelret på randen

Beregningsudtrykkene for 2 og 3D skal ikke forfølges nærmere her, men der kan fx henvises til /10/.

4.3 Elementligninger

I (4.2.6) er angivet det samlede ligningssystem for hele beregningsområdet, men integrationen kan opdeles, så hvert integral kun indeholder et element, hvorved elementligningerne fremkommer.

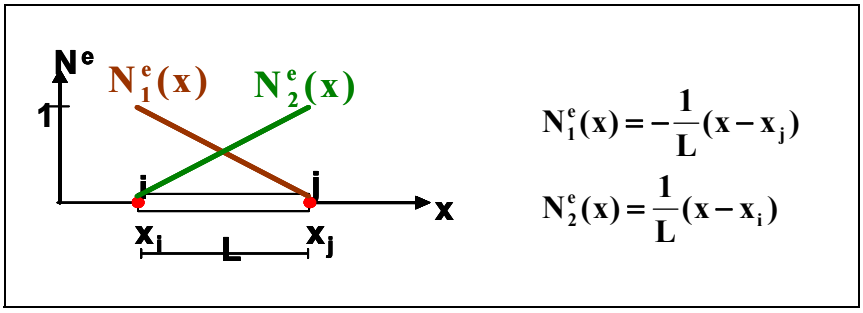
For det endimensionale linjeelement fås af (4.2.5):

$$\left(\int_{x_i}^{x_j} \rho c \overline{\overline{N^e}}^T \overline{\overline{N^e}} dx\right)\frac{\overline{dt^e(\tau)}}{d\tau} + \left(\int_{x_i}^{x_j} \overline{\overline{B^e}}^T \lambda \overline{\overline{B^e}} dx\right)\overline{t^e(\tau)} = -\left(\overline{\overline{N^e(x_j)}}^T q_2^e\right) + \left(\overline{\overline{N^e(x_i)}}^T q_1^e\right) + \int_{x_i}^{x_j} \overline{\overline{N^e}}^T S_e dx \qquad (4.3.1)$$

eller

$$\overline{\overline{C^e}}\frac{\overline{dt^e(\tau)}}{d\tau} + \overline{\overline{K^e}}\,\overline{t^e} = \overline{f_b^e} + \overline{f_l^e} \qquad (4.3.2)$$

Formfunktionen og øvrige betegnelser fremgår af fig. 4.3-1.



Figur 4.3-1 *Formfunktion for det lineære linjeelement.*

Herefter kan de enkelte led i (4.3.1) beregnes. For kapacitetsmatricen fås:

$$\overline{\overline{C^e}} = \int_{x_i}^{x_j} \rho c \overline{\overline{N^e}}^T \overline{\overline{N^e}} dx = \rho c \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(x - x_j) \\ \frac{1}{L}(x - x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(x - x_j) & \frac{1}{L}(x - x_i) \end{bmatrix} dx$$

$$\overline{\overline{C^e}} = \rho c \frac{1}{L^2} \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} (x-x_j)^2 & -(x-x_j)(x-x_i) \\ -(x-x_j)(x-x_i) & (x-x_i)^2 \end{bmatrix} dx$$

$$\overline{\overline{C^e}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\rho cL & \frac{1}{6}\rho cL \\ \frac{1}{6}\rho cL & \frac{1}{3}\rho cL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}C_e & \frac{1}{6}C_e \\ \frac{1}{6}C_e & \frac{1}{3}C_e \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

Transmissionsmatricen fås ved hjælp af (4.1.6):

$$\overline{\overline{K^e}} = \int_{x_i}^{x_j} \overline{\overline{B^e}}^T \lambda \overline{\overline{B^e}} dx = \lambda \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_{x_i}^{x_j} dx$$

$$\overline{\overline{K^e}} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{L} & -\frac{\lambda}{L} \\ -\frac{\lambda}{L} & \frac{\lambda}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_e} & -\frac{1}{R_e} \\ -\frac{1}{R_e} & \frac{1}{R_e} \end{bmatrix} \tag{4.3.4}$$

Randværdivektoren bliver:

$$\overline{f_b^e} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} q_2^e + \begin{bmatrix} -(-1) \\ 0 \end{bmatrix} q_1^e$$

$$\overline{f_b^e} = \begin{bmatrix} q_1^e \\ -q_2^e \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

Sluttelig fås lastvektoren under forudsætning af, at varmeproduktionen S_e er konstant over elementet:

$$\overline{f_l^e} = \int_{x_i}^{x_j} \overline{\overline{N^e}}^T S_e dx = S_e \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(x-x_j) \\ \frac{1}{L}(x-x_i) \end{bmatrix} dx = S_e \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L \\ \frac{1}{2}L \end{bmatrix}$$

$$\overline{f_l^e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}LS_e \\ \frac{1}{2}LS_e \end{bmatrix} \tag{4.3.6}$$

Sammenfattende haves følgende matricer for det lineære linjeelement:

$$\overline{\overline{C}}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}C_e & \frac{1}{6}C_e \\ \frac{1}{6}C_e & \frac{1}{3}C_e \end{bmatrix} \qquad C_e = \rho c L_e \tag{4.3.3}$$

$$\overline{\overline{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_e} & -\frac{1}{R_e} \\ -\frac{1}{R_e} & \frac{1}{R_e} \end{bmatrix} \qquad R_e = \frac{L_e}{\lambda} \tag{4.3.4}$$

$$\overline{f_b^e} = \begin{bmatrix} q_1^e \\ -q_2^e \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

$$\overline{f_l^e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}LS_e \\ \frac{1}{2}LS_e \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

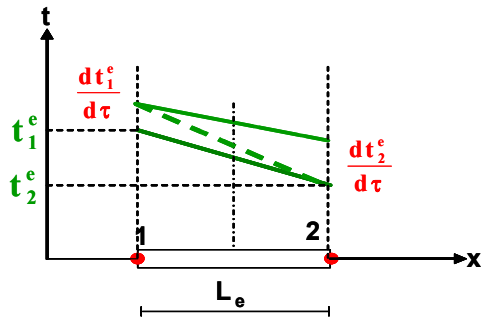
Elementligningerne kan nu sammenfattes til:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}C_e & \frac{1}{6}C_e \\ \frac{1}{6}C_e & \frac{1}{3}C_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt_1^e}{d\tau} \\ \frac{dt_2^e}{d\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_e} & -\frac{1}{R_e} \\ -\frac{1}{R_e} & \frac{1}{R_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^e \\ t_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^e \\ -q_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_eL_e \\ \frac{1}{2}S_eL_e \end{bmatrix} \tag{4.3.7}$$

Lægges de to ligninger i (4.3.7) sammen fås:

$$\frac{1}{2}C_e\frac{dt_1^e}{d\tau} + \frac{1}{2}C_e\frac{dt_2^e}{d\tau} = q_1^e - q_2^e + S_eL_e$$

Eller udtrykt i ord: *den samlede ændring af elementets varmeindhold er lig summen af de tilførte varmestrømme*. Første hovedsætning er således opfyldt.



Den samlede ændring af akkumuleret varme i elementet er:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{1}{2}L_e\left(\frac{dt_1^e}{d\tau} + \frac{dt_2^e}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}C_e\left(\frac{dt_1^e}{d\tau} + \frac{dt_2^e}{d\tau}\right)$$

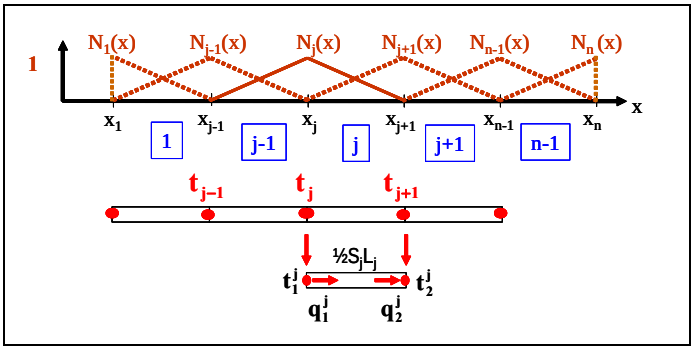
Figur 4.3-2 *Varmeakkumulering i element.*

4.4 Samling af elementer

Alle oplysninger om geometri og fysik er nu samlet i elementligningerne, hvorefter disse skal samles for hele beregningsområdet. Samlingen skal foregå på en sådan måde, at den fysiske kontinuitet bevares, og med udgangspunkt i fig. 4.4-1 ses det, at der for element j gælder:

$$t_2^{j-1} = t_1^j = t_j \qquad t_2^j = t_1^{j+1} = t_{j+1} \tag{4.4.1}$$

$$\begin{aligned} q_2^{j-1} = q_1^j \quad &\Rightarrow \quad -q_2^{j-1} + q_1^j = 0 \\ q_2^j = q_1^{j+1} \quad &\Rightarrow \quad -q_2^j + q_1^{j+1} = 0 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$



Figur 4.4-1 *Samling af elementer.*

Samleproceduren vises her for samlingen af element j-1 og j i fig. 4.4-1 hvortil er knyttet elementligningen (4.3.7). Elementligningen opskrives for hvert element:

For element j-1:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}C_{j-1} & \frac{1}{6}C_{j-1} \\ \frac{1}{6}C_{j-1} & \frac{1}{3}C_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt_1^{j-1}}{d\tau} \\ \frac{dt_2^{j-1}}{d\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{j-1}} & -\frac{1}{R_{j-1}} \\ -\frac{1}{R_{j-1}} & \frac{1}{R_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^{j-1} \\ t_2^{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{j-1} \\ -q_2^{j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_{j-1}L_{j-1} \\ \frac{1}{2}S_{j-1}L_{j-1} \end{bmatrix}$$

og for element j:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}C_j & \frac{1}{6}C_j \\ \frac{1}{6}C_j & \frac{1}{3}C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt_1^j}{d\tau} \\ \frac{dt_2^j}{d\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_j} & -\frac{1}{R_j} \\ -\frac{1}{R_j} & \frac{1}{R_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^j \\ t_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^j \\ -q_2^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_jL_j \\ \frac{1}{2}S_jL_j \end{bmatrix}$$

De lokale knudepunktstemperaturer erstattes nu af de globale efter (4.4.1) og samtidigt udvides de to ligningssystemer, så alle tre involverede globale knudepunktstemperaturer indgår i begge ligninger:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}C_{j-1} & \frac{1}{6}C_{j-1} & 0 \\ \frac{1}{6}C_{j-1} & \frac{1}{3}C_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt_{j-1}}{d\tau} \\ \frac{dt_j}{d\tau} \\ \frac{dt_{j+1}}{d\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{j-1}} & -\frac{1}{R_{j-1}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{j-1}} & \frac{1}{R_{j-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{j-1} \\ t_j \\ t_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{j-1} \\ -q_2^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_{j-1}L_{j-1} \\ \frac{1}{2}S_{j-1}L_{j-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}C_j & \frac{1}{6}C_j \\ 0 & \frac{1}{6}C_j & \frac{1}{3}C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt_{j-1}}{d\tau} \\ \frac{dt_j}{d\tau} \\ \frac{dt_{j+1}}{d\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_j} & -\frac{1}{R_j} \\ 0 & -\frac{1}{R_j} & \frac{1}{R_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{j-1} \\ t_j \\ t_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1^j \\ -q_2^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}S_jL_j \\ \frac{1}{2}S_jL_j \end{bmatrix}$$

De to ligninger kan nu lægges sammen, og der tages hensyn til (4.4.2) i knudepunkt j, hvor varmestrømmen ud af element j-1 er lig varmestrømmen ind i element j.

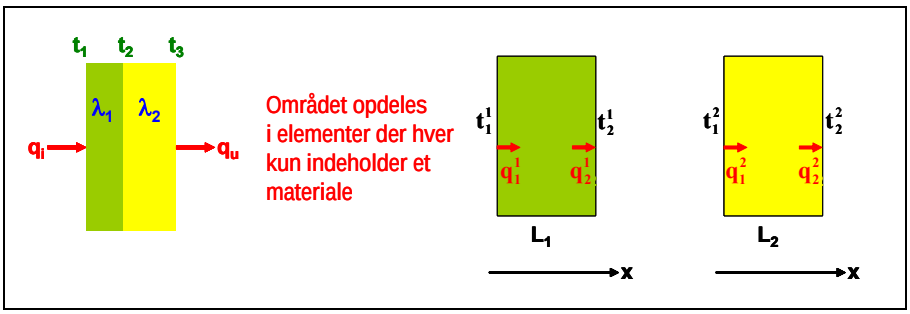
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}C_{j-1} & \frac{1}{6}C_{j-1} & 0 \\ \frac{1}{6}C_{j-1} & \frac{1}{3}(C_{j-1}+C_j) & \frac{1}{6}C_j \\ 0 & \frac{1}{6}C_j & \frac{1}{3}C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dt_{j-1}}{d\tau} \\ \frac{dt_j}{d\tau} \\ \frac{dt_{j+1}}{d\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{j-1}} & -\frac{1}{R_{j-1}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{j-1}} & \frac{1}{R_{j-1}}+\frac{1}{R_j} & -\frac{1}{R_j} \\ 0 & -\frac{1}{R_j} & \frac{1}{R_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{j-1} \\ t_j \\ t_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{j-1} \\ 0 \\ -q_2^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_{j-1}L_{j-1} \\ \frac{1}{2}S_{j-1}L_{j-1}+\frac{1}{2}S_jL_j \\ \frac{1}{2}S_jL_j \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

Der fortsættes efter samme recept, indtil alle elementer i beregningsområdet er samlet. I det endimensionale tilfælde, der her er anvendt for at illustrere samleproceduren, bliver både kapacitets- og transmissionsmatricen båndmatricer, hvilket ikke er tilfældet ved flerdimensionale problemer. En ting gælder dog altid, nemlig at randværdivektoren kun indeholder elementer forskelligt fra nul i randknudepunkterne, som det også fremgår af (4.4.3).

Det endelige ligningssystem, der fremkommer efter denne samleprocedure, er naturligvis identisk med det, der fremkommer af (4.2.5), hvor integrationen udstrækker sig over hele beregningsområdet og derfor bestemmer de ”samlede” matricer. Samleproceduren foretrækkes dog ofte ved maskinel behandling af beregningerne, da der kan opstilles enkle regler for samleproceduren, og elementligningerne kan genbruges fra beregning til beregning.

Eksempel 4.4.1

Det samlede elementligningssystem skal opstilles for en plan væg bestående af to materialelag som vist i fig. 4.4-2. Det antages, at beregningerne skal foretages under stationære forhold, samt at der ikke foregår varmeudvikling i væggen. Af hensyn til overskueligheden opdeles beregningsområdet kun i to elementer.



Figur 4.4-2 *Plan væg opdelt i to lineære linjeelementer.*

Kontinuitetsbetingelserne er:

$$t_1^1 = t_1 \quad t_2^1 = t_1^2 = t_2 \quad t_2^2 = t_3$$
$$q_1^1 = q_i \quad q_2^1 = q_1^2 \quad q_2^2 = q_u$$

Ligning (4.4.3) kan direkte anvendes i dette tilfælde (med j = 2), og der fås:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ -q_u \end{bmatrix} \qquad \text{med} \quad R_e = \frac{L_e}{\lambda_e} \tag{4.4.4}$$

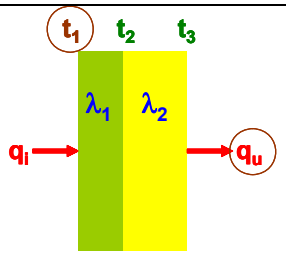
Ligningssystemet kan dog ikke løses, før randbetingelserne er klarlagt og som tidligere nævnt, skal der altid indgå mindst én temperatur i randbetingelserne. Behandlingen af randbetingelser fremgår af næste afsnit.

♦♦♦

4.5 Randbetingelser

Som det fremgår af det generelle ligningssystem (4.2.6/4.2.5) eller af elementligningen (4.3.7), så indgår randbetingelserne direkte i randværdivektoren og de skal derfor specificeres i hvert konkret beregningstilfælde. Som tidligere vil det endimensionale tilfælde blive brugt til at anskueliggøre den generelle fremgangsmåde for behandling af randbetingelser, og for overskuelighedens skyld gennemføres overvejelserne i det stationære tilfælde uden indre varmeudvikling.

Der tages udgangspunkt i det tilfælde, der er vist i fig. 4.5-1, hvor der er en kendt overfladetemperatur på den ene rand (randbetingelse type a) og en kendt varmestrøm på den anden rand, dog givet som en kombination af kendt omgivelsestemperatur og isolans, samt en kendt varmestrøm (type b+c). Ligning (4.4.4) anvendes som udgangspunkt.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ -q_u \end{bmatrix}$$

Figur 4.5-1 *Randbetingelser og ligningssystem.*

Randbetingelserne er som følger:

Kendt temperatur på rand 1:

$$t_1 = t_{o1} \tag{4.5.1}$$

Kendt varmestrøm ved rand 3:

$$q_u = \frac{1}{R_u}(t_3 - t_u) - q_s \tag{4.5.2}$$

Dette indføres i systemligningen (4.4.4):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{o1} \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ -(\frac{1}{R_u}(t_3 - t_u) - q_s) \end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

Når der indgår en kendt randtemperatur, skal knudepunktsligningen for denne rand naturligvis ikke anvendes til bestemmelse af temperaturen, og ligningen skal derfor fjernes fra det samlede ligningssystem. Ligningen kan, når de ukendte temperaturer er beregnet, anvendes til bestemmelse af varmestrømmen q_i. Randtemperaturen indgår imidlertid også i ligning nr. to (gennem første matrixelement), men da dette er kendte størrelser, skal leddet flyttes over på ligningens højre side.

I sidste ligning optræder den ukendte knudepunktstemperatur t_3 på højre side og den skal flyttes over på venstre side. Efter disse operationer ser det færdige ligningssystem således ud:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} t_{o1} \\ \frac{1}{R_u} t_u + q_s \end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

Eksempel 4.5.1

I en plan homogen væg med tykkelsen L og varmeledningsevnen λ foregår en intern varmeudvikling S. Beregn temperaturfordelingen gennem væggen samt varme-

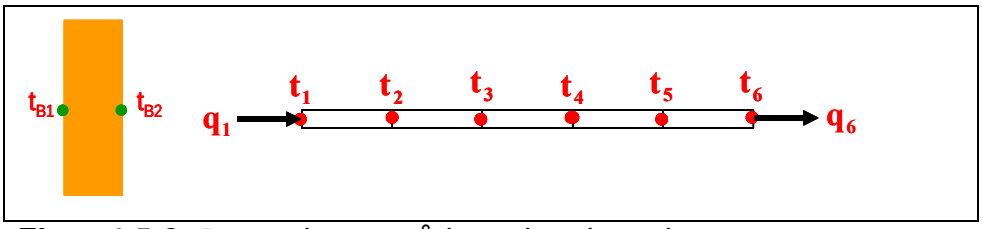
strømmene ved randene når randtemperaturerne er kendt, og væggen opdeles i fem elementer med længden L_e. Forholdene er stationære.

Der anvendes følgende talværdier:

$L_e = 0{,}5$ $\lambda = 1$ $S = 2$ og $t_1 = t_{B1} = t_6 = t_{B2} = 10$ (alle med afstemte enheder).

Elementopdelingen ses af fig. 4.5-2. Elementligningen fremgår af (4.3.7):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_e} & -\frac{1}{R_e} \\ -\frac{1}{R_e} & \frac{1}{R_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^e \\ t_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^e \\ -q_2^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_e L_e \\ \frac{1}{2} S_e L_e \end{bmatrix}$$



Figur 4.5-2 *Beregningsområde og knudepunktstemperaturer.*

De indgående konstanter beregnes:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{\lambda}{L_e} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \qquad \frac{1}{2} S_e L_e = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

Heraf fås elementligningerne der er ens for alle elementer:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^e \\ t_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^e \\ -q_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Herefter samles de fem elementer, idet der er følgende kontinuitetsbetingelser:

$$t_1^1 = t_1 = t_{B1}, t_2^1 = t_1^2 = t_2, t_2^2 = t_1^3 = t_3, t_2^3 = t_1^4 = t_4, t_2^4 = t_1^5 = t_5, t_2^5 = t_6 = t_{B2} \quad \text{og}$$
$$q_1^1 = q_1, q_2^1 = q_1^2, q_2^2 = q_1^3, q_2^3 = q_1^4, q_2^4 = q_1^5, q_2^5 = q_6$$

Det samlede ligningssystem er:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{B1} \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Da der er kendte temperaturer på randene, skal første og sidste ligning ”fjernes”, hvilket kan gøres gennem den viste opdeling af ligningssystemet. Det opdelte ligningssystem kan symbolsk skrives som følger:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \overline{\mathbf{V1}}^{\mathbf{T}} & \mathbf{M2} \\ \overline{\mathbf{V1}} & \underset{\leftrightarrow}{\overline{\overline{\mathbf{K}}}} & \overline{\mathbf{V2}} \\ \mathbf{M3} & \overline{\mathbf{V2}}^{\mathbf{T}} & \mathbf{M4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t_{B1}} \\ \underset{\updownarrow}{\overline{\mathbf{t}}} \\ \mathbf{t_{B2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} \\ \overline{\mathbf{0}} \\ -\mathbf{q_6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N1} \\ \underset{\leftrightarrow}{\overline{\mathbf{f}}_1} \\ \mathbf{N2} \end{bmatrix}$$

Ganges ud fås:

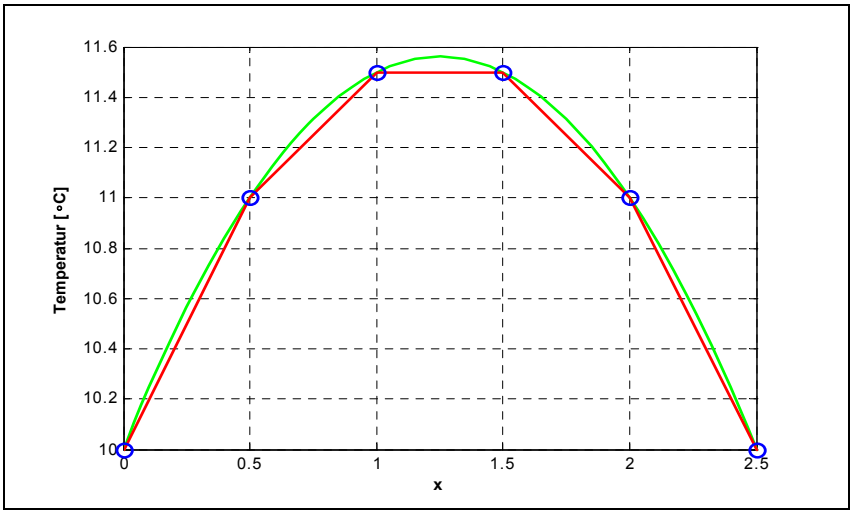
$$\overline{\mathbf{V1}} \cdot \mathbf{t_{B1}} + \underset{\leftrightarrow}{\overline{\overline{\mathbf{K}}}} \underset{\updownarrow}{\overline{\mathbf{t}}} + \overline{\mathbf{V2}} \cdot \mathbf{t_{B2}} = \underset{\leftrightarrow}{\overline{\mathbf{f}}_1}$$

$$\underset{\leftrightarrow}{\overline{\overline{\mathbf{K}}}} \underset{\updownarrow}{\overline{\mathbf{t}}} = \underset{\leftrightarrow}{\overline{\mathbf{f}}_1} - (\overline{\mathbf{V1}} \cdot \mathbf{t_{B1}} + \overline{\mathbf{V2}} \cdot \mathbf{t_{B2}})$$

Hvorefter ligningssystemet kan løses for de ukendte knudepunktstemperaturer. Med indsatte talværdier fås:

$$\mathbf{t} = [\mathbf{11{,}0} \quad \mathbf{11{,}5} \quad \mathbf{11{,}5} \quad \mathbf{11{,}0}]^{\mathbf{T}}$$

Knudepunktstemperaturerne og den tilnærmede temperaturfunktion er optegnet i fig. 4.5-3 sammen med den eksakte løsning (se eksempel 1.6.1). Da problemet er symmetrisk om væggens midterakse, vil der opnås bedre resultater, hvis der anvendes et lige antal elementer, således at der lægges et knudepunkt i midten af væggen.



Figur 4.5-3 *Knudepunktstemperaturer og eksakt løsning.*

Varmestrømmene beregnes nu af første og sidste ligning, der giver:

$$\mathbf{M1} \cdot \mathbf{t_{B1}} + \overline{\mathbf{V1}}^{\mathbf{T}} \underset{\updownarrow}{\overline{\mathbf{t}}} + \mathbf{M2} \cdot \mathbf{t_{B2}} = \mathbf{q_1} + \mathbf{N1}$$

$$\mathbf{q_1} = \mathbf{M1} \cdot \mathbf{t_{B1}} + \overline{\mathbf{V1}}^{\mathbf{T}} \underset{\updownarrow}{\overline{\mathbf{t}}} + \mathbf{M2} \cdot \mathbf{t_{B2}} - \mathbf{N1} = -\mathbf{2{,}5}$$

og

$$\mathbf{M3} \cdot \mathbf{t_{B1}} + \overline{\mathbf{V2}}^{\mathbf{T}} \underset{\updownarrow}{\overline{\mathbf{t}}} + \mathbf{M4} \cdot \mathbf{t_{B2}} = -\mathbf{q_6} + \mathbf{N2}$$

$$\mathbf{q_6} = -(\mathbf{M3} \cdot \mathbf{t_{B1}} + \overline{\mathbf{V2}}^{\mathbf{T}} \underset{\updownarrow}{\overline{\mathbf{t}}} + \mathbf{M4} \cdot \mathbf{t_{B2}}) + \mathbf{N2} = \mathbf{2{,}5}$$

Varmestrømmene er naturligvis lige store og begge har retning ud fra væggen. Den numeriske sum af de to varmestrømme er lig den samlede varmeproduktion i væggen ($5 \cdot S_e \cdot L_e = 5$).

♦♦♦

4.6 Beregning af kuldebro

I bygningskonstruktioner findes uundgåeligt en lang række kuldebroer – *del af konstruktion med markant dårligere isolans end resten af konstruktionen* – hvor varmestrømmen udbreder sig i to- eller tre dimensioner, hvorfor varmestrømmen ikke lader sig beregne på enkel måde. Ved sådanne problemstillinger er det oplagt at anvende finite element metoden til at gennemføre en analyse af temperatur- og varmestrømsforhold.

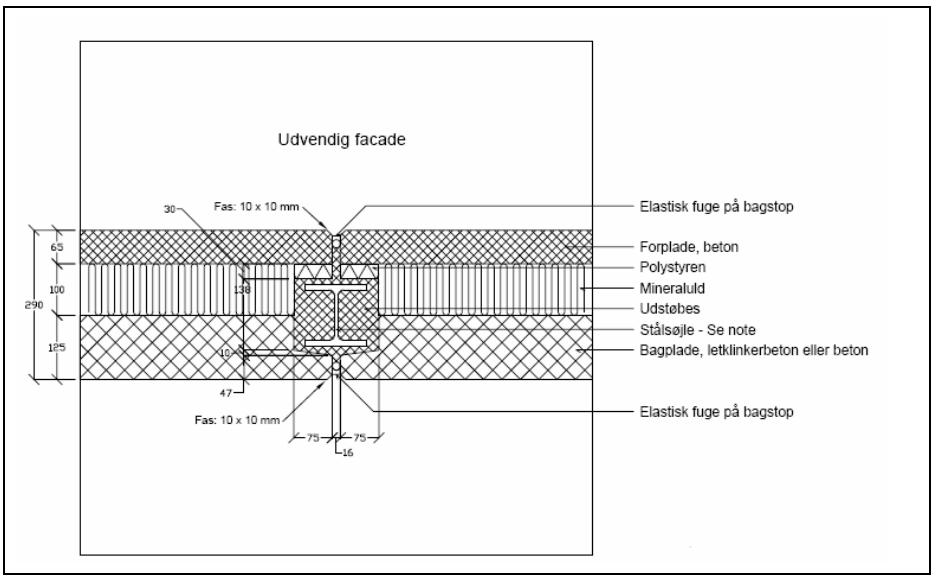
Der findes et stort udvalg af beregningsprogrammer, der bygger på finite element metoden som en generel løsningsmetode til partielle differentialligninger. Men der findes også programmer, der indrettes til løsning af fagspecifikke områder – i dette tilfælde altså varmeledningsproblemer. Programmerne opbyggespå en måde, så der stort set kun skal gøres rede for geometri, materialeegenskaber og randbetingelser (og evt. begyndelsesbetingelser), hvorefter elementopdeling og løsning foregår automatisk. Her skal blot nævnes nogle få eksempler på sådanne programmer:

Programmet CALFEM® /11/ består af et udvalg af elementligninger, en samleprocedure og en ligningsløser i form af MATLAB-rutiner (m-filer), og programmet skal derfor afvikles under MATLAB. Programpakken er primært udviklet til undervisningsbrug, idet der manuelt skal udarbejdes en programstump med de nødvendige procedurekald, ligesom geometrien skal opbygges manuelt.

Programmet THERM /12/ er et fuldt færdigt program til beregning af 2 D stationær varmeledning med grafisk input af geometri og automatisk netgenerering. Programmet har den særhed, at der ikke direkte beregnes varmestrømme men at disse fås som en *ækvivalent transmissionskoefficient* U_{2D}, hvorefter varmestrømmen må beregnes ud fra den temperaturforskel, der er anvendt ved beregningen.

Sluttelig skal nævnes programmet COMSOL Multiphysics™ /13/, der, som navnet antyder, kan anvendes på stort set alle fysiske problemer der beskrives ved partielle differentialligninger – herunder også varmeledning i en, to og tre dimensioner såvel stationært som ikke-stationært. Her er også grafisk input af geometri og automatisk elementgenerering, samt en funktion der kan forfine den geometriske opdeling af beregningsområdet, hvis der er behov for dette af hensyn til beregningsnøjagtigheden. I nedenstående analyse af en kuldebro er dette program anvendt.

Som udgangspunkt for en analyse af en kuldebro ses der på samlingen af to betonsandwichelementer i en facade som vist i fig. 4.6-1. I samlingen indgår en omstøbt stålsøjle som en del af bygningens bærende system, og her er konstruktionen markant dårligere isoleret end den øvrige konstruktion.



Figur 4.6-1 *Kuldebro i betonsandwichelement.*

Inden beregningerne foretages der en række forenklinger:

- der ses bort fra alle affasninger
- den viste elastiske fuge erstattes af hhv. beton og isolering i de respektive materialelag
- der regnes med samme varmeledningsevne for beton i for- og bagplade (2,5 W/mK)
- der regnes med samme varmeledningsevne for de to indgående isoleringsmaterialer (0,037 W/mK)
- stålsøjlen (HE 120 B) regnes at have en varmeledningsevne på 55 W/mK
- der regnes stationært, og forholdene anses for todimensionale.

Først skal randbetingelserne fastlægges, og da beregningsresultatet skal anvendes i forbindelse med en varmetabsberegning for bygningen, overholdes reglerne fra DS 418.

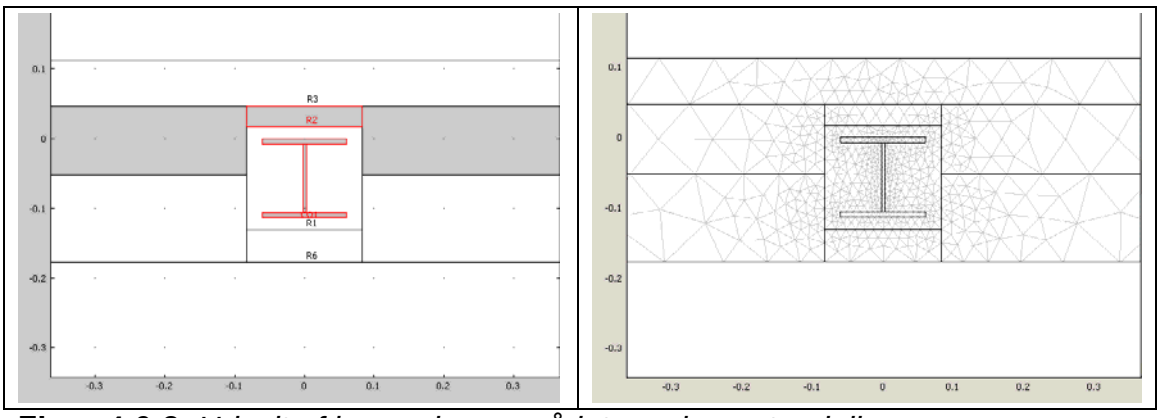
Indvendig temperatur t_i = 20 °C, og overgangsisolans R_{si} = 0,13 m^2K/W (i COMSOL skal angives den absolutte temperatur 273,15 + 20 = 293,15 K samt varmeovergangstallet 7,69 W/ m^2K).

Udvendig temperatur t_u = 0 °C, og overgangsisolans R_{se} = 0,04 m^2K/W (273,15 K og 25 W/ m^2K).

Afgrænsning af beregningsområdet i væggens længderetning må foretages så langt væk fra kuldebroen, at varmestrømmen er blevet endimensional – dette anses for opfyldt i en afstand af 1,00 m fra HE-profilets midterakse – hvor der så er tale om en adiabatisk randbetingelse. Da der er symmetri, kunne det vælges at lægge en adiabatisk grænseflade gennem midteraksen, men her vælges at lægge grænsefladerne 1,00 m på hver side af midteraksen.

Det er nu muligt at foretage inddatering i COMSOL, først optegning af beregningsområdet, derefter tilknytning af materialeparametre og endelig tildeling af randværdier.

Et udsnit af beregningsområdet kan ses i fig. 4.6-2.

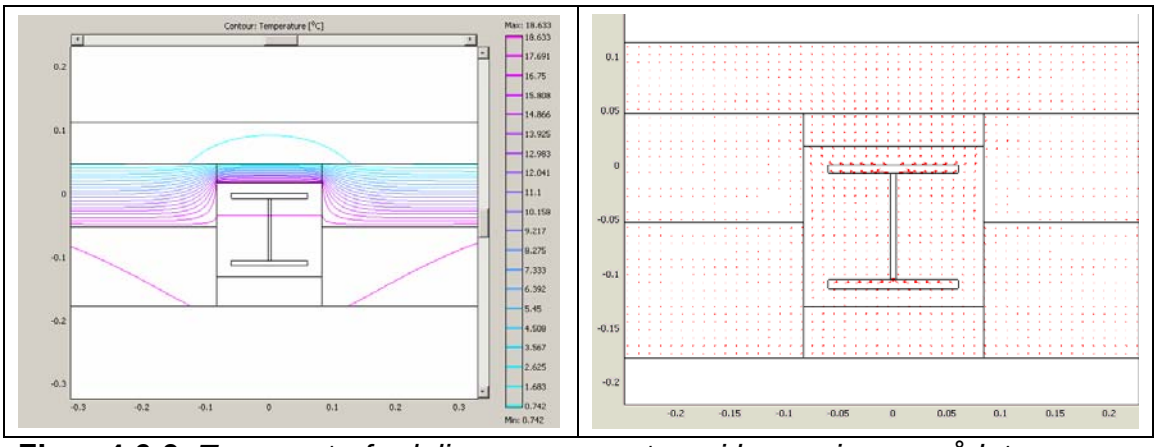


Figur 4.6-2 *Udsnit af beregningsområdet og elementopdeling.*

Der skal være en stor knudepunktstæthed i og omkring stålprofilet, hvilket den automatiske elementopdeling også har sørget for, som det fremgår af fig. 4.6-2.

Beregningsresultater fremgår af fig. 4.6-3, der viser hhv. isotermernes forløb og varmestrømmens retning i beregningsområdet.

Varmestrømmene gennem hhv. udvendig og indvendig rand (hver med længden 2 m) beregnes i programmet og er angivet i tabel 4.6.1, sammen med det antal elementer området er opdelt i. Her er også vist, hvilken indflydelse antallet af elementer har på den beregnede varmestrøm, ligesom der er angivet resultater fra to andre beregninger: samme geometri men uden stålprofil (omstøbningen udgør her en ribbe), og samme geometri men uden stålprofil og ribbe (altså som en væg med tre ubrudte materialelag).



Figur 4.6-3 *Temperaturfordeling og varmestrøm i beregningsområdet.*

Tabel 4.6.1 *Beregnede varmestrømme.*

	Samling med omstøbt stålsøjle	
Antal elementer	**1464**	**5856**
Varmestrøm ud W/m	**16,291**	**16,274**
Varmestrøm ind W/m	**16,286**	**16,275**
	Samling med betonribbe	
Antal elementer	**452**	**1808**
Varmestrøm ud W/m	**16,222**	**16,202**
Varmestrøm ind W/m	**16,232**	**16,205**
	Uden samling	
Antal elementer	**452**	
Varmestrøm ud W/m	**13,565**	
Varmestrøm ind W/m	**13,565**	

Det ses af tabel 4.6.1, at tilstedeværelsen af stålsøjlen har en ret beskeden indflydelse på varmestrømmen i forhold til betonribben (0,07 W pr. løbende meter længde af søjlen ved 20 °C temperaturforskel), men i forhold til den ubrudte væg udgør mertabet hhv. 2,71 og 2,64 W/m ved 20 °C temperaturforskel.

Ifølge DS 418 skal virkningen af kuldebroen indregnes i konstruktionens transmissionskoefficient gennem et linjetab – den lineære transmissionskoefficient – ψ_k, der dækker forøgelsen af varmetabet gennem kuldebroen på grund af todimensional varmetab i forhold til varmetabet beregnet ved endimensional varmestrøm.

Konstruktionens transmissionskoefficient beregnet efter DS 418 fremgår af tabel 4.6.2.

Tabel 4.6.2 *Beregning af transmissionskoefficienter efter DS 418.*

			Væg	Ribbe
	d [m]	λ [W/mK]	R [m²K/W]	R [m²K/W]
Udv. isolans			**0,04**	**0,04**
Forplade	**0,065**	**2,5**	**0,026**	**0,026**
Isolering	**0,10/0,03**	**0,037**	**2,703**	**0,811**
Bagplade/ribbe	**0,125/0,195**	**2,5**	**0,050**	**0,098**
Indv. isolans			**0,13**	**0,13**
Sum			**2,949**	**1,105**
U [W/m²K]			**0,339**	**0,905**

Varmetabet gennem to m ubrudt væg er således:

$$\Phi_{1D1} = U \cdot B \cdot L \cdot \Delta t = 0{,}339 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20 = 13{,}56 \text{ W/m}$$

hvilket er det samme som beregnet i COMSOL, forskellen skyldes afrunding ved beregning af transmissionskoefficienten. Da dette er den eneste endimensionale varmestrøm, der kan beregnes efter DS 418, når samlingen indeholder den omstøbte stålsøjle, bliver linjetabsfaktoren:

$$\psi_k = \frac{\Phi_{2D} - \Phi_{1D1}}{L \cdot \Delta t} = \frac{16{,}275 - 13{,}565}{1 \cdot 20} = 0{,}14 \text{ W/m}$$

Hvis der ses bort fra stålsøjlen, så kuldebroen alene udgøres af betonribben, er der to bidrag til den endimensionale varmestrøm: gennem den ubrudt væg og gennem ribben.

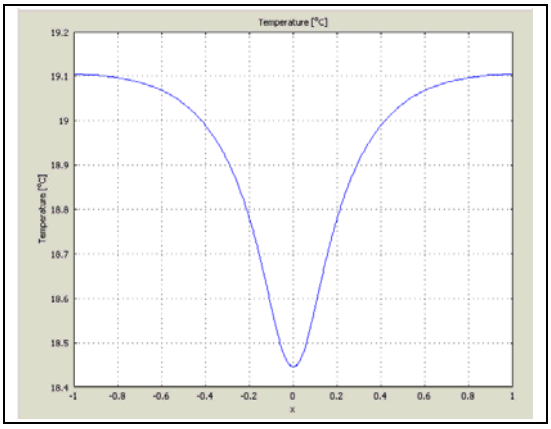
$$\Phi_{1D2} = (U_1 \cdot B_1 + U_2 \cdot B_2) \cdot L \cdot \Delta t = (0{,}339 \cdot (2{,}000 - 0{,}166) + 0{,}905 \cdot 0{,}166) \cdot 1 \cdot 20 = 15{,}44 \text{ W/m}$$

Linjetabsfaktoren ved ribben udgør da pr. spring i isoleringstykkelsen:

$$\psi_k = \frac{1}{2} \frac{\Phi_{2D} - \Phi_{1D2}}{L \cdot \Delta t} = \frac{16{,}203 - 15{,}44}{1 \cdot 20} = 0{,}019 \text{ W/m}$$

Den beregnede værdi er i overensstemmelse med DS 418 figur 6.10. Der skal i øvrigt gøres opmærksom på, at betonelementet vil indeholde andre ribber end den her omtalte, samt at der indgår stritter og stropper, som der ikke er taget hensyn til i dette beregningseksempel.

For at afrunde denne analyse af kuldebroen optegnes forløbet af den indvendige overfladetemperatur i fig. 4.6-4, således at der kan foretages en vurdering af risikoen for kondens.



Figur 4.6-4 *Overfladetemperaturen på indvendig side.*

Da overfladetemperaturen ligger over 18,4 °C, er der i praksis næppe risiko for dannelse af overfladekondens.

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

APPENDIKS

Udetemperatur

Udelufttemperaturens variation over året kan ses i tabel A.1. Tabellen viser middeltemperaturen for de enkelte måneders middel- og maksimumsdøgn. Desuden viser tabellen typiske temperaturvariationer over døgnet på klare dage.

Tabel A.1. *Udetemperaturer måned for måned ifølge 15 års vejrdata samt typisk temperaturvariation over døgnet på klare dage. /9/.*

Måned	Middeltemperatur for middeldøgn, °C	Middeltemperatur for maksimumsdøgn °C	Typisk temperaturvariation over døgnet °C
Januar	-1,0	3,9	5,0
Februar	-0,5	4,2	6,0
Marts	1,9	6,3	7,5
April	5,9	11,2	9,0
Maj	10,9	15,9	11,5
Juni	15,2	20,0	12,0
Juli	16,1	21,0	12,0
August	15,9	20,5	11,0
September	12,9	16,9	9,0
Oktober	8,9	13,7	7,0
November	4,5	10,0	5,0
December	0,8	6,0	5,0

Solindstråling

Solindfaldet på en udvendig bygningsflade omfatter den direkte, den diffuse og den reflekterede solstråling. Tabel A.2 viser måned for måned maksimal timeværdi, maksimal døgnværdi og middel døgnværdi for solindfaldet på udvendige flader med forskellig orientering.

Tabel A.2. *Maksimale timeværdier, maksimale døgnværdier og middel døgnværdier for solindfaldet på udvendige flader med forskellig orientering ifølge DRY og beregnet med BSim2000. /9/.*

Måned	Maksimal timeværdi, W/m²					Maksimal døgnværdi, Wh/m² døgn					Middel døgnværdi, Wh/m² døgn			
	Lodret			Vandret		Lodret			Vandret		Lodret			Vandret
	N	Ø/V	S			N	Ø/V	S			N	Ø/V	S	
Januar	78	388	848	260		288	1152	4464	1224		168	372	1104	480
Februar	183	597	992	478		744	2112	4848	2760		384	768	1824	1128
Marts	173	612	1004	655		912	2868	5976	4128		672	1380	2328	2064
April	204	814	895	825		1680	4500	5184	6576		1224	2436	3024	3792
Maj	316	834	763	880		2040	4644	5400	7896		1824	3240	3432	5232
Juni	277	904	697	913		2616	5100	4752	8016		2112	3300	3192	5472
Juli	270	874	686	892		2328	4716	4848	8016		1920	3132	3096	5136
August	211	733	862	792		1560	4092	4800	6335		1368	2568	3312	4296
September	187	743	854	687		1296	3036	4512	4728		864	1812	2712	2688
Oktober	114	572	900	500		648	2040	5064	2832		432	912	1944	1368
November	84	372	861	310		360	1140	3984	1488		216	420	1224	624
December	57	247	760	203		216	696	3192	768		120	228	744	336

Solindfald

Solindfaldet gennem et vindue bestemmes af:

$$\Phi_{sol} = g \cdot f_{\beta} \cdot f_{afsk} \cdot f_{skyg} \cdot f_{glas} \cdot A_{vin} \cdot I_{sol} \qquad \text{(A.3)}$$

hvor

Φ_{sol} er solindfaldet [W] eller [Wh]
g er rudens g-værdi
f_{β} er vinkelfaktoren
f_{afsk} er afskærmningsfaktoren
f_{skyg} er skyggefaktoren
f_{glas} er vinduesarealets glasandel
A_{vin} er vinduesarealet [m^2]
I_{sol} er det samlede udvendige solstråling på glasfladen fra den direkte, indirekte og reflekterede solstråling [W/m^2] eller [Wh/m^2]

f_{β} er en faktoren der korrigerer for g-værdiens afhængighed af indfaldsvinklen og den kan normalt sættes til 0,9.

Tabel A.3. *U- og g-værdier for forskellige rudetyper. /9/.*

Type	U-værdi, W/K m^2	g-værdi
Ét-lagsrude med almindeligt glas	5,9	0,86
To-lags rude med almindeligt glas	2,9	0,76
To-lags rude med ét lag energiglas type 2	1,4	0,66
To-lags rude med ét lag energiglas type 3	1,1	0,60
Tre-lags rude med almindeligt glas	1,9	0,65
Tre-lags rude med ét lag energiglas type 3	0,9	0,48
Solafskærmende energiruder	1,1-1,4	0,2-0,5

Type 2: Softcoated f_E = 0,1. Type 3: Softcoated f_E = 0,04.

Tabel A.4. *Vejledende afskærmningsfaktorer f_{afsk} for to forskellige rudetyper i afhængighed af afskærmningens type og farver. /9/.*

Afskærmningstype	Afskærmningsfaktor						
	To-lags rude med almindeligt glas				To-lags rude med ét lag energiglas type 3		
	lys	middel	mørk		lys	middel	mørk
Udvendig afskærmning							
Rullegardin	0,35	0,20	0,20		0,35	0,20	0,15
Persienne 30°	0,30	0,20	0,15		0,30	0,15	0,10
Persienne 60°	0,15	0,15	0,10		0,15	0,15	0,05
Afskærmning mellem termorude udvendigt og ét lag alm. glas indvendigt							
Persienne 30°	0,45	0,45	0,50		0,55	0,70	0,80
Persienne 60°	0,30	0,40	0,50		0,40	0,60	0,75
Gardin, åben vævning	0,65	0,65	0,65		0,70	0,75	0,80
Gardin, tæt vævning	0,45	0,45	0,50		0,50	0,60	0,75
Indvendig afskærmning							
Persienne 30°	0,60	0,70	0,80		0,70	0,80	0,90
Persienne 60°	0,45	0,60	0,75		0,60	0,75	0,85
Gardin, åben vævning	0,70	0,75	0,80		0,80	0,85	0,90
Gardin, tæt vævning	0,55	0,65	0,75		0,65	0,75	0,85

Tabel A.5. *Skyggefaktoren f_{skyg} for normalt indbyggede vinduer uden udhæng eller andre skyggende konstruktioner. /9/*

Omgivelser	Vinduesorientering	
	NV og NØ	Ø, S og V
0° højdevinkel (fri horisont)	0,9	0,9
10° højdevinkel	0,9	0,8
30° højdevinkel	0,8	0,5

Tabel A.6. *Korrektioner til skyggefaktoren i afhængighed af udhæng og skyggende konstruktioner. /9/*

	Korrektion til skyggefaktor
Indbygning	
Uafskærmet (glasflade flugter med ydervægsflade)	+0,1
Dybt murhul	- 0,1
Udhæng	
Lille udhæng	- 0,1
Stort udhæng	- 0,2
Konstruktion på siderne	
Lille skygge	- 0,1
Stor skygge	- 0,2

LITTERATUR

1. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. (1976) Conduction of Heat in Solids. The Clarendon Press, ISBN 0198533039.
2. MATLAB®, The MathWorks Inc.
3. DS 418: 2002 Beregning af bygningers varmetab, 6. udgave. Dansk Standard, København.
4. DS/EN ISO 10211-1:1997 Kuldebroer i bygningskonstruktioner. Varmestrømme og overfladetemperaturer. Del 1: Generelle bestemmelser. Dansk Standard, København.
5. Steen-Thøde, M. (1992) Numerisk beregning af to-dimensional varmeledning under stationære forhold. Instituttet for Bygningsteknik, AUC. R9220, ISSN 0902-7513.
6. BSim - Brugervejledning. Version 5.7.1.19. (2007). Statens Byggeforskningsinstitut, København.
7. Jensen, J. M. og Lund H. (1995). Design reference year, DRY - et nyt dansk referenceår. Meddelelse nr. 281. Laboratoriet for Varmeisolering, (nu BYG*DTU) Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby.
8. SBI-anvisning 196: Indeklimahåndbogen, (2000). Statens Byggeforskningsinstitut, København, ISBN 8756310412.
9. SBI-anvisning 202: Naturlig ventilation i erhvervsbygninger. Beregning og dimensionering, (2002). Statens Byggeforskningsinstitut, København, ISBN 8756311281.
10. Saabye Ottosen, N. and Petersson H. (1992): Introduction to the finite element method. Prentice Hall, ISBN 0134738772.
11. CALFEM - A finite element toolbox to MATLAB. Version 3.3, (1999). Structural Mechanics, LTH. Sweden. ISSN 0281-6679.
12. THERM 5.2 Simulation Manual (2006). Lawrence Berkeley National Laboratory, University of California.
13. COMSOL Multiphysics. COMSOL AB, Sweden.