Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer

Teori og Anvendelser

Brincker, Rune

Publication date:
1984

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Link to publication from Aalborg University

Citation for published version (APA):
Brincker, R. (1984). *Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer: Teori og Anvendelser*. Afdelingen for Bærende Konstruktioner : Danmarks Tekniske Højskole. ABK : Serie R Nr. 133

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from vbn.aau.dk on: April 19, 2024

Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer

Brincker, Rune

Publication date:
1984

Link to publication from Aalborg University

Citation for pulished version (APA):
Brincker, R. (1984). Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer: Teori og Anvendelser. Afdelingen for Bærende Konstruktioner : Danmarks Tekniske Højskole. (ABK : Serie R; Nr. 133).

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from vbn.aau.dk on: December 02, 2013

ABK Serie R No 133

ISSN 0108-0768
ISBN 87-87336-32-4

ABK Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Department of Structural Engineering
Danmarks Tekniske Højskole · Technical University of Denmark

Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer

Teori og Anvendelser

Rune Brincker

Serie R No 133 1984

PLANE REVNEUDBREDELSESPROBLEMER I LINEÆRT VISCOELASTISKE MATERIALER.

Teori og anvendelser.

Rune Brincker

Serie R No. 133 1984

Plane Revneudbredelsesproblemer i Lineært Viscoelastiske Materialer. Teori og Anvendelse.
Copyright © by Rune Brincker 1984
Tryk:
Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Danmarks Tekniske Højskole
Lyngby
ISBN 87-87336-32-4

INDHOLD

FORORD

SYMBOLLISTE

RESUME

SUMMARY

KAPITEL 1		side
Teoretisk grundlag		1
1.1	Indledning	1
1.2	Lineært viscoelastiske randværdiproblemer	1
1.3	Karakterisering af revnespidstilstanden	3
1.4	Revnespidsparametre for løbende revner	6
1.5	Eksempel på beregning af revnespids-parametre. Spændingsrandværdiproblem med balanceret krybning	9
1.6	Forskellige gættede kriterier	11
1.7	Termodynamiske betingelser	13
1.8	Udbredelseskriterier baseret på global energibalance	15

KAPITEL 2		
Revneudbredelsesteori		19
2.1	Teori for statiske laste	19
2.2	Sammenligning med forsøg fra litteraturen	23
2.3	Andre forsøg	30
2.4	Andre teorier	31

KAPITEL 3		
Forskellige anvendelser og resultater		37
3.1	Indledning	37
3.2	Makroskopiske brudkriterier	38
3.3	Model for arbejdslinieforløb	39
3.4	Langtidsstyrker, konstant last	43
3.5	Langtidsstyrker, rampelast	49

KONKLUSION		57

APPENDIX A		
Udbredelseskriterier baseret på global energibalance		61
A.1	Udledelse af kriterier	61
A.2	Matrixrepresentationer	65

side

APPENDIX B
Dugdale-Barenblatt-modeller 67

B.1 Generelt 67
B.2 Dugdale modellen 72

APPENDIX C
Levetidsanalyse for simple viscoelastiske modeller 75

C.1 Indledning 75
C.2 Hookematerialet 76
C.3 Newtonmaterialet 76
C.4 Maxwellmaterialet 76
C.5 Kelvinmaterialet 77
C.6 Thomsonmaterialet 78
C.7 Lethersichmaterialet 79
C.8 Burgermaterialet 79

REFERENCER 81

STIKORDSREGISTER 84

Forord.

Denne rapport udgør den sidste af en planlagt serie på 3 rapporter om plane revneudbredelsesproblemer for lineært viscoelastiske materialer.

I rapportens kapitel 1 resumeres de vigtigste resultater fra de to tidligere rapporter [17] og [18] , og i kapitel 2 samles disse til en færdig teori hvoraf revneudbredelseshistorien kan bestemmes for et vilkårligt statisk problem, d.v.s. vilkårlig geometri ,vilkårlige materialeegenskaber (krybningsfunktioner) og vilkårlige randbetingelser.

En sådan teori kan benyttes til undersøgelse af om revner (defekter) i lineært viscoelastiske faststoffer vil udbrede sig, d.v.s. om der vil udvikles brud, og til at bestemme udbredelsesforløbet for revner som udbreder sig, d.v.s. den tidsmæssige udvikling af bruddet.

I kapitel 3 vises det hvorledes teorien kan udnyttes til undersøgelse af forskellige klassiske tidsafhængige styrkeproblemer.

Jeg vil gerne rette en tak til dem som jeg i tidens løb har diskuteret disse problemer med, og som har været med til at inspirere og kritisere arbejdet, jeg tænker her især på professor Bent Erik Pedersen, som påtog sig at være hovedvejleder ved mit licentiatstudium, og til lektor Svend Gravesen, som i tidens løb har hjulpet med mange gode råd. Endvidere en tak til lektor L.F. Nielsen og civilingeniør H.J. Krebs, Laboratoriet for Bygningsmaterialer, DtH, som jeg har haft mange gode samtaler med om vores fælles interesser for revnemekanik og viscoelasticitetsteori.

Endelig en tak til Bente Kjølhede Petersen som har arbejdet med maskinskrivningen af manuskriptet og til Esther Martens, som har udført rapportens tegninger.

Marts 1984

Rune Brincker

SYMBOLLISTE

Gruppe	symbol, betydning		henvisning, formel
Indices	$i,j,k,\ell = 1,2,3$		
	$\alpha,\beta,\gamma = 1,2$		
Flytninger	$\underset{\sim}{u}$	flytningsvektor	(1.1)
	u_i	kartesiske komposanter	(1.1)
	Δu	revneåbning	(2.18)
Tøjninger	$\underset{\sim}{E}$	tøjningstensoren	(1.2)
	ε_{ij}	kartesiske komponenter	(1.1)
Spændinger	$\underset{\sim}{\Sigma}$	spændingstensoren	(1.2)
	σ_{ij}	kartesiske komponenter	(1.1)
Koordinater	$\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{r}$	stedvektor	
	r,θ	modulus, argument	(1.7)
	ξ	dimensionsløs stedkoordinat	(B.15)
	s	buekoordinat	
Tid	t	tidskoordinat	
	Δt	tidsdifferens	
	t_c,T	levetid	(2.15),(3.15),(3.46)
	t_s	tid til beg. revnevækst	
	t_o	relaxationstid	(3.8),(3.30)
Fysiske størrelser	$K_1(\cdot),K_2(\cdot)$	krybningsfunktioner	(1.25),(1.45)
	$R_1(\cdot),R_2(\cdot)$	relaxationsfunktioner	(1.1),(1.43)
	φ	krybetal	(3.8)
	$\mu,\eta,\gamma,\beta,t_o$	krybeparametre	(3.8),(C.7),(C.10)
	$E_o,E_\infty,R_o,R_\infty,K_o,K_\infty$	grænseværdier	
	ρ	massetæthed	(1.44)
Revnespids-parametre	k_1,k_2	spændingsintensitetsfaktorer	(1,7),(1.11),(1.13)
	c_1,c_2,d_1,d_2	deformationsfaktorer	(1.8),(1.11),1.16)
	Σ	spændingsstørrelse	(B.2)
	χ	deformationsstørrelse	(B.4)
	J	J-integralet	(1.41),(A.8)

Gruppe	symbol, betydning		henvisning, formel
Energi, arbejde	P	ydre kræfters effekt	(1.33), (1.34)
	Ψ	Helmholtz fri energi	(1.33), (1.34)
	ψ	energitæthed	(1.44), (1.46)
	Λ	dissipation	(1.33), (1.34)
	K	kinetisk energi	(1.33), (1.44)
Geometriske størrelser	a	revnelængde	
	a_{cr}, a_{max}	kritisk revnelængde	(3.16)
	a_o	initial revnelængde	
	δs	længde af flydezone	(B.5), (B.10)
	δ	skridlængde i skridtmodel	(2.6)
	h	højde	(2.10)
Last	σ	ydre last	(2.14), (3.13)
	θ	lastniveau	(3.11), (3.34)
Styrke-parametre	Γ	overfladeenergi	(1.36)
	ϕ	styrkeniveau	(3.11)
	σ_f, σ_F	sammenhængsspænding	(2.18)
	J_c	kritisk værdi af J-integrale	(B.9)
	σ_o	korttidsstyrke	(3.10)
	σ_∞		(3.26)
Hjælpe-størrelser	$\underset{\sim}{n}, \underset{\sim}{e}$	enhedsvektorer	
	$\tau\ \eta$	integrationsparametre	
	c, C	koefficienter	
	δ_{ij}	Kroneckers delta	
Hjælpefunk-tioner	f, g, h	vinkelfunktioner	(1.10)
	a, b		(1.12), (1.19
	$\Delta(\cdot)$	Heavisides enhedsfunktion	
	$\delta(\cdot)$	Diracs deltafunktion	
	$\psi(\cdot), \chi(\cdot), A(\cdot), G(\cdot), H(\cdot)$	tidsfunktioner	
	$\rho(\nu)$		(1.24)
Lineære operatorer	$\mathscr{A}, \mathscr{B},$	Stieltjesfoldninger	
	$\mathscr{L}$	Laplacetransformationen	

RESUME

Resultaterne fra to tidligere rapporter samles og resumeres. Det drejer sig om karakterisering af revnespidstilstanden, d.v.s.definition af revnespidsparametre, angivelse af generelle løsninger for revnespidsparametrene for løbende revner, samt angivelse af forskellige kriterier for revnevækst, herunder kriterier som opfylder de termodynamiske betingelser.

Det viser sig imidlertid at være umuligt at opstille en brugbar teori på dette grundlag alene, idet der opstår et paradoks - i visse situationer tillader teorien hverken revnen at være stationær eller at udbrede sig. Dette problem løses ved at indføre en revnemodel som lægger visse bånd på revnevæksten. Det antages at revneudbredelsen sker i skridt med længden δ, som antages at være en materialekonstant.

Teorien viser sig at være i god overensstemmelse med forsøgsresultater fra litteraturen.

Til sidst vises det hvorledes en sådan teori kan udnyttes til analyse af brudproblemer hvor den tidsmæssige udvikling af brudet spiller en afgørende rolle, såsom tidsafhængig arbejdslinie-krumning, og langtidsstyrker af konstruktioner udsat for konstant last og rampelast (konstant spændingshastighed).

SUMMARY

A short exposition is given of some earlier results concerning crack tip parameter solutions (including running cracks) and formulation of the crack extension criterion.

Even with proper solutions to these problems (including crack extension criterion that satisfy the thermodynamical equations), difficulties arise because of a paradox - under certain circumstances the theory does not allow the crack tip neither to be stationary nor to move. This problem is overcome by introducing a crack model which impose some constraints on the crack growth; it is assumed that the growth takes place in steps of the length δ which is assumed to be a material constant.

The theory turns out to be in good agreement with test results from the literature.

Last it is shown how such a theory can be used for the analysis of different kinds of time dependent fracture - time dependent stress-strain relationships and long term strength of structures under dead and ramp load conditions.

KAPITEL 1

Teoretisk grundlag.

1.1. Indledning.

Dette første kapitel er hovedsagelig et sammendrag af resultaterne fra de to tidligere rapporter [17] og [18] . Læsere, som finder fremstillingen for kort og for ribbet for argumenter henvises derfor til de nævnte tidligere rapporter hvor emnerne er behandlet noget mere detaljeret. Med hensyn til referencer henvises der ligeledes til de to rapporter.

Selv om den fremstilling, der er givet i det følgende, hovedsagelig er begrænset til at omfatte plane problemer, så er de forskellige feltligninger af bekvemmelighedsgrunde udelukkende angivet på tredimensional form. Dette bør ikke give anledning til forvirring. Af bekvemmelighedsgrunde er der ligeledes nogle steder benyttet konstitutive ligninger for det isotrope tilfælde og andre steder for det generelle anisotrope tilfælde.

1.2. Lineært viscoelastiske randværdiproblemer.

Vi betragter et isotropt lineært viscoelastisk legeme over et vilkårligt område Ω i det tredimensionale rum.

Der ses bort fra dynamiske effekter og temperatureffekter. Til bestemmelse af spændingsfeltet $\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\Sigma}(\underset{\sim}{x},t)$, tøjningsfeltet $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{x},t)$ og flytningsfeltet $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$, $\underset{\sim}{x} \in \Omega$, har vi da følgende ligninger

$$\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\underset{\sim}{x},t) + u_{j,i}(\underset{\sim}{x},t))$$

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \sigma_{ji}(\underset{\sim}{x},t) \quad , \quad \sigma_{ij,j}(\underset{\sim}{x},t) + F_i(\underset{\sim}{x},t) = 0 \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \mathcal{R}_1 \varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t) + \frac{1}{3}\left(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1\right) \delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\underset{\sim}{x},t)$$

$$i,j,k = 1,2,3$$

hvor F_i er komponenterne af legemskræfterne og hvor $\mathscr{R}_1$ og $\mathscr{R}_2$ er stieltjesfoldninger med kernerne $R_1(\cdot)$, henholdsvis $R_2(\cdot)$ som karakteriserer materialet. Ligningerne (1.1) definerer sammen med de givne randbetingelser vores randværdiproblem. Bortset fra visse få meget lidt restriktive krav, se [17], kan randbetingelserne vælges vilkårligt.

Løsning af et lineært viscoelastisk randværdiproblem vil vi basere på korrespondensprincippet som vi vil formulere på følgende måde.

Vi har altså et randværdiproblem som angivet i (1.1) hvortil løsningen

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\Sigma}(\underset{\sim}{x},t)$$

$$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{x},t) \qquad (1.2)$$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$$

søges. Ud fra randværdiproblemet (1.1) konstrueres nu et hertil svarende (korresponderende) elastisk randværdiproblem ved at erstatte den fysiske betingelse for lineært viscoelastisk materiale

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \mathscr{R}_1\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t) + \frac{1}{3}\left(\mathscr{R}_2 - \mathscr{R}_1\right)\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\underset{\sim}{x},t) \qquad (1.3)$$

med den fysiske betingelse for lineært elastisk materiale

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t) + \frac{1}{3}(3\kappa-2\mu)\ \delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\underset{\sim}{x},t) \qquad (1.4)$$

hvor μ er forskydningsmodulen og κ er kompressionsmodulen. Løsningen til det herved fremkomne korresponderende elastiske problem betegnes $\underset{\sim}{\Sigma}^e$, $\underset{\sim}{E}^e$, $\underset{\sim}{u}^e$, og kaldes den til den viscoelastiske løsning $\underset{\sim}{\Sigma}$, $\underset{\sim}{E}$, $\underset{\sim}{u}$ korresponderende elastiske løsning. Den elastiske løsning er en funktion af tid og sted, samt af de elastiske konstanter μ og κ

$$\underset{\sim}{\Sigma}^e = \underset{\sim}{\Sigma}^e(2\mu,3\kappa,\underset{\sim}{x},t)$$

$$\underset{\sim}{E}^e = \underset{\sim}{E}^e(2\mu,3\kappa,\underset{\sim}{x},t) \qquad (1.5)$$

$$\underset{\sim}{u}^e = \underset{\sim}{u}^e(2\mu,3\kappa,\underset{\sim}{x},t)$$

Korrespondensprincippet siger da, at hvis den elastiske løsning $\underset{\sim}{\Sigma}^e$, $\underset{\sim}{E}^e$, $\underset{\sim}{u}^e$ er løsningen for det faste materielle punkt $\underset{\sim}{x}$, så bestemmes den viscoelastiske løsning af

$$\underset{\sim}{\Sigma}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{p\rightsquigarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\underset{\sim}{\Sigma}^{e*}(pR_1^*(p),\ pR_2^*(p),\ \underset{\sim}{x},p)$$

$$\underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{p\rightsquigarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\ \underset{\sim}{E}^{e*}(pR_1^*(p)\ ,\ pR_2^*(p)\ ,\ \underset{\sim}{x},p) \qquad (1.6)$$

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{p\rightsquigarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\ \underset{\sim}{u}^{e*}(pR_1(p)\ ,\ pR_2(p)\ ,\ \underset{\sim}{x},p)$$

hvor $\underset{\sim}{\Sigma}^{e*}(2\mu,3\kappa,\underset{\sim}{x},p) = \underset{t\rightsquigarrow p}{\mathscr{L}}\ \underset{\sim}{\Sigma}^e(2\mu,3\kappa,\underset{\sim}{x},t)$, o.s.v. og hvor $R_1^*(p)$ og $R_2^*(p)$ betegner de laplacetransformerede relaxationsfunktioner. Operatorerne $\mathscr{L}$ og $\mathscr{L}^{-1}$ betegner laplacetransformationen henholdsvis den inverse lapacetransofrmation.

En omhyggelig redegørelse for korrespondenprincippets gyldighed specielt i forbindelse med revneudbredelsesproblemer er givet i [17] .

1.3. Karakterisering af revnespidstilstande.

Lad os nu antage plan tilstand. I revnemekanikken for lineært elastiske materialer karakteriseres tilstande ved revnespidsen ved de to såkaldte spændingsintensitetsfaktorer k_γ^e , $\gamma = 1,2$.

Spændingerne $\sigma_{\alpha\beta}^e$, tøjningerne $\varepsilon_{\alpha\beta}^e$ og flytningerne omkring en revnespids i et lineært elastisk materiale givet ved de kartesiske komponenter i det lokale x_1,x_2 koordinatsystem som funk-

tion af r,θ, se figur 1.1, vil nemlig altid have formen

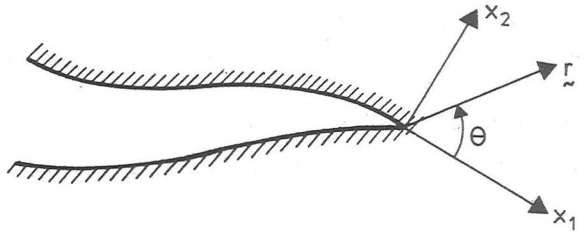
$$\sigma^e_{\alpha\beta} = \frac{k^e_\gamma}{\sqrt{2r}} f_{\alpha\beta\gamma}$$

$$\varepsilon^e_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(f_{\alpha\beta\gamma} c^e_\gamma + \left(\frac{1}{2} d^e_\gamma - c^e_\gamma \right) f_{\lambda\lambda\gamma} \right) \qquad (1.7)$$

$$u^e_\alpha = \sqrt{2r} \left(g_{\alpha\beta} d^e_\beta + h_{\alpha\beta} c^e_\beta \right)$$

$$\alpha,\beta,\gamma,\lambda = 1,2$$

hvor k^e_γ , c^e_γ , d^e_γ er funktioner af tiden og de elastiske konstanter alene, og hvor størrelserne $f_{\alpha\beta\gamma}$, $g_{\alpha\beta}$ og $h_{\alpha\beta}$ er funktioner af vinklen θ alene.



Figur 1.1. Lokalt koordinatsystem.

Der gælder

$$k^e_\gamma = k^e_\gamma(2\mu, 3\kappa, t)$$

$$c^e_\gamma = \frac{1}{2\mu} k^e_\gamma(2\mu, 3\kappa, t) \qquad (1.8)$$

$$d^e_\gamma = \frac{\alpha+1}{4\mu} k^e_\gamma(2\mu, 3\kappa, t)$$

hvor

$$\frac{\alpha+1}{4\mu} = \begin{cases} \dfrac{3\kappa+4\mu}{2\mu(3\kappa+\mu)} = 2\,\dfrac{1-\nu^2}{E} & \text{plan tøjn.} \\ \\ 2\,\dfrac{3\kappa+\mu}{3\kappa\mu} = \dfrac{2}{E} & \text{plan spænd.} \end{cases} \qquad (1.9)$$

og for vinkelfunktionerne gælder

$$\{f_{\alpha\beta1}\} = \cos\frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\,,\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\,,\ 1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{\alpha\beta2}\} = \cos\frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} -\tan\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right), & 1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \\ 1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\,, & \tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,,\ \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,,\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \qquad (1.10)$$

$$\{h_{\alpha\beta}\} = \cos\frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} -\cos^2\frac{\theta}{2}\,, & \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,, & 1+\sin\frac{\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

Så vidt for et elastisk materiale. Som det ses er både spændingsfeltet, tøjningsfeltet og flytningsfeltet fuldstændigt fastlagt ved de to spændingsintensitetsfaktorer alene.

Hvis den betragtede revnespids antages at være stationær, så kan spændings- og deformationsfeltet omkring en revnespids i et lineært viscoelastisk materiale let bestemmes. Ved hjælp af korrespondensprincippet fås let, at spændingsfeltet $\sigma_{\alpha\beta}$, tøjningsfeltet $\varepsilon_{\alpha\beta}$ og flytningsfeltet u_α er givet ved de respektive højresider i (1.7) blot de elastiske konstanter k_γ^e , c_γ^e og d_γ^e udskiftes med de tilsvarende viscoelastiske konstanter k_γ , c_γ og d_γ givet ved

$$
\begin{aligned}
k_\gamma(t) &= \underset{p\rightarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\, k_\gamma^{e*}(pR_1^*(p),\, pR_2^*(p),\, p) \\
c_\gamma(t) &= \underset{p\rightarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\, c_\gamma^{e*}(pR_1^*(p),\, pR_2^*(p),\, p) \qquad (1.11) \\
d_\gamma(t) &= \underset{p\rightarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\, d_\gamma^{e*}(pR_1^*(p),\, pR_2^*(p),\, p)
\end{aligned}
$$

Som det fremgår, er der ikke nogen entydig sammenhæng mellem intensitetsfaktorerne k_γ og størrelserne c_γ og d_γ til et fast tidspunkt som i det elastiske tilfælde. En revnespidstilstand i et lineært viscoelastisk materiale kan derfor ikke i det generelle tilfælde beskrives ved de to spændingsintensitetsfaktorer alene som i det elastiske tilfælde, men må nødvendigvis beskrives ved alle de seks størrelser k_γ , c_γ og d_γ . Størrelserne k_γ betegnes de viscoelastiske spændingsintensitetsfaktorer og størrelserne c_γ og d_γ de viscoelastiske deformationsfaktorer, og betegnes under ét de seks viscoelastiske revnespidsparametre.

1.4. Revnespidsparametre for løbende revner.

For at kunne analysere vilkårlige plane revneudbredelsesproblemer, er det nødvendigt at have en metode til bestemmelse af revnespidsparametrene for en revne som udbreder sig på en kendt måde i et vilkårligt lineært viscoelastisk legeme.

Ved anvendelse af korrespondensprincippet kan det vises, at de viscoelastiske revnespidsparametre for en revne i bevægelse, kan bestemmes på følgende måde.

Lad bidraget til intensitetsfaktoren k^e for det korresponderende elastiske tilfælde for belastningerne på revneranden alene være k^{ie} , og bidraget fra belastningerne på den resterende rand alene være k^{ye} . Lad os endvidere antage, at disse bidrag kan faktoriseres på en simpel måde således at

$$
\begin{aligned}
k^{ie} &= a^{ki}(2\mu, 3\kappa)\; b^{ki}(t) \\
k^{ye} &= a^{ky}(2\mu, 3\kappa)\; b^{ky}(t)
\end{aligned}
\qquad (1.12)
$$

hvor a^{ki} og a^{ky} er funktioner af de elastiske konstanter alene, og hvor b^{ki} og b^{ky} er funktioner af tiden alene. Så bestemmes den viscoelastiske intensitetsfaktor k til tidspunktet $t = t'$ af

$$
k(t') = \lim_{t\rightarrow t'} \left(\mathscr{A}^{ky}\, b^{ky}(t) + \mathscr{A}^{ki}\, b^{ki}(t) \right), \quad t > t' \qquad (1.13)
$$

og såfremt revnen går i stå til tidspunktet $t = t'$, så bestemmes den tidslige udvikling af k for $t \geq t'$ af

$$
k(t,t') = \Delta(t-t') \left(\mathscr{A}^{ky}\, b^{ky}(t) + \mathscr{A}^{ki}\, b^{ki}(t) \right) \qquad (1.14)
$$

hvor $\Delta(\cdot)$ er Heavisides enhedsfunktion. Størrelserne $\mathscr{A}^{ky}$ og $\mathscr{A}^{ki}$ er Stieltjesfoldninger med kernerne $A^{ky}(\cdot)$ h.h.v. $A^{ki}(\cdot)$ defineret ved

$$
\begin{aligned}
A^{ki}(t) &= \underset{p\rightarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\, \frac{1}{p}\, a^{ki}(pR_1^*(p)\;,\; pR_2^*(p)) \\
A^{ky}(t) &= \underset{p\rightarrow t}{\mathscr{L}^{-1}}\, \frac{1}{p}\, a^{ky}(pR_1^*(p)\;,\; pR_2^*(p))
\end{aligned}
\qquad (1.15)
$$

Der skal knyttes en yderligere kommentar til bestemmelse af bidragene k^{ie} og k^{ye} fra revneranden henholdsvis den ydre rand. Hvis

der på begge rande er tale om rene spændingsbetingelser, så er der ingen problemer. Men hvis betingelserne f.eks. på den ydre rand involverer flytningsbetingelser, så kan man ikke uden videre superponere, og så må man være opmærksom på at bidraget fra den indre rand skal være bestemt samtidig med at flytningsbetingelserne på den ydre rand er opfyldt. Tilsvarende hvis der er tale om flytningsbetingelser på revneranden.

De til k svarende deformationsfaktorer c og d til tiden t = t' findes af

$$c(t') = \lim_{t \to t'} \mathcal{A}^c\, k(t,t') \quad , \; t > t'$$
$$d(t') = \lim_{t \to t'} \mathcal{A}^d\, k(t,t') \quad , \; t > t' \tag{1.16}$$

og hvis revnen går i stå til tiden t = t' , så bestemmes den tidslige udvikling af c og d for $t \geq t'$ af

$$c(t,t') = \mathcal{A}^c\, k(t,t')$$
$$d(t,t') = \mathcal{A}^d\, k(t,t') \tag{1.17}$$

hvor Stieltjesfoldningerne her har kernerne $A^c(\cdot)$ og $A^d(\cdot)$ defineret ved

$$A^c(t) = \mathcal{L}^{-1}_{p \to t} \frac{1}{p}\, a^c(pR_1^*(p) \; , \; pR_2^*(p))$$
$$A^d(t) = \mathcal{L}^{-1}_{p \to t} \frac{1}{p}\, a^e(pR_1^*(p) \; , \; pR_1^*(p)) \tag{1.18}$$

Funktionerne $a^c(\cdot,\cdot)$ og $a^d(\cdot,\cdot)$ angiver sammenhængen mellem deformationsfaktorer og intensitetsfaktor for det elastiske tilfælde på følgende måde

$$c^e = a^c(2\mu, 3\kappa)\; k^e$$
$$d^e = a^d(2\mu, 3\kappa)\; k^e \tag{1.19}$$

og kan i øvrigt bestemmes af (1.8) og (1.9).

I det tilfælde at de elastiske bidrag k^{ie} og k^{ye} ikke kan faktoriseres på den simple måde som angivet ved (1.12) , kan der alligevel angives udtryk til bestemmelse af de viscoelastiske revnespidsparametre. Bestemmelsen af disse bliver dog i dette tilfælde noget mere kompliceret.

Af den måde de viscoelastiske revnespidsparametre bestemmes på fremgår det, at de ikke på nogen måde afhænger eksplicit af hastigheden af revnespidsen. Denne egenskab ved løsningen til et lineært viscoelastisk revneudbredelsesproblem skal illustreres ved det efterfølgende eksempel.

1.5. Eksempel på beregning af revnespidsparametre. Spændingsrandværdiproblem med balanceret krybning.

Vi vil betragte et vilkårligt plant legeme, hvori der udbreder sig en revne. Der er tale om rene spændingsbetingelser, og vi vil desuden antage, at der er tale om balanceret krybning, d.v.s. at Poissons forhold regnes konstant. Den fysiske betingelse kan da skrives på formen

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{1+\nu}\, \mathcal{R}\, (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\, \sigma_{ij}\, \varepsilon_{kk}) \tag{1.20}$$

hvor $\mathcal{R}$ er en Stieltjesfoldning med kernen $R(\cdot)$. Funktionen $R(\cdot)$ er den til E-modulen E svarende relaxationsfuntkion. Den tilsvarende krybningsfunktion betegnes $K(\cdot)$.

Vi vil først bestemme spændingsintensitetsfaktoren $k = k_\gamma$, $\gamma = 1,2$ for den betragtede revnespids. I dette tilfælde kan bidragene k^{ie} og k^{yc} altid skrives på formen (1.12), da de elastiske intensitetsfaktorer i dette tilfælde, hvor der er tale om et rent spændingsrandværdiproblem, slet ikke afhænger af de elastiske konstanter. Den viscoelastiske spændingsintensitetsfaktor findes da for det tilfælde, at revnen stopper til tiden t = t' til

$$k(t,t') = \Delta(t - t')k^e(t,t') \tag{1.21}$$

hvor

$$k^e(t,t') = a^{ky}\, b^{ky}(t) + a^{ki}\, b^{ki}(t) \tag{1.22}$$

Det ses heraf, at spændingsintensitetsfaktorerne for et viscoelastisk revneudbredelsesproblem af den her betragtede type - uafhængig af revneudbredelsesforløb og belastningshistorie - altid har samme værdi som spændingsintensitetsfaktorerne for det korresponderende elastiske revneudbredelsesproblem.

De til k svarende deformationsfaktorer c og d findes nu. Af (1.8) og (1.9) fås

$$\begin{aligned} c^e &= a^c(E,\nu)k^e = \frac{\rho^c(\nu)}{E}\, k^e \\ d^e &= a^d(E,\nu)k^e = \frac{\rho^d(\nu)}{E}\, k^e \end{aligned} \tag{1.23}$$

hvor

$$\rho^c(\nu) = 1 + \nu$$

$$\rho^d(\nu) = \begin{cases} 2(1 - \nu^2) & \text{for plan tøjningstilstand} \\ 2 & \text{for plan spændingstilstand} \end{cases} \tag{1.24}$$

Af (1.17) fås da

$$\begin{aligned} c(t,t') &= \rho^c(\nu)\, \mathcal{K}\, \Delta(t - t')k^e(t,t') \\ d(t,t') &= \rho^d(\nu)\, \mathcal{K}\, \Delta(t - t')k^e(t,t') \end{aligned} \tag{1.25}$$

hvor $\mathcal{K}$ er en Stieltjesfoldning med kernen $K(\cdot)$.

Det ses, at c og d for samme mode og samme tidspunkt er direkte proportionale. Det vil altså sige, at løsningsfeltets asymptotiske egenskaber i dette tilfælde (ν = konstant) for hver mode kan

beskrives ved kun to faktorer, f.eks. k og d, altså i alt 4 af hinanden uafhængige parametre.

Hvis revnen løber kan tilstanden ved revnespidsen altså beskrives ved parametrene

$$\begin{aligned} k(t) &= k^e(t) \\ d(t) &= \rho^d\, K(0^+)k^e(t) \end{aligned} \tag{1.26}$$

og hvis den går i stå til $t = t'$, så kan tilstanden beskrives ved parametrene

$$\begin{aligned} k(t,t') &= \Delta(t - t')k^e(t,t') \\ d(t,t') &= \rho^d\, \mathcal{K}\, \Delta(t - t')k^e(t,t') \end{aligned} \tag{1.27}$$

1.6. Forskellige gættede udbredelseskriterier.

Som det er vist i afsnit 1.3 resulterer de lineært viscoelastiske materialeegenskaber i løsninger, som er singulære ved revnespidsen.

Vi vil senere diskutere mulighederne for at benytte en beskrivelse, som giver endelige spændinger ved revnespidsen, men foreløbig vil vi holde fast ved den simple lineære beskrivelse. I dette tilfælde er tilstanden ved en given revnespids beskrevet ved de 6 parametre k_1 , k_2 , c_1 , c_2 , d_1 og d_2 som omtalt i afsnit 1.3.

Et udbredelseskriterium må derfor antages at have formen

$$F(k_1, k_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \geq F_{kr} \tag{1.28}$$

hvor F_{kr} er en materialeparameter, en såkaldt kritisk værdi. Hvis (1.28) ikke er opfyldt, vil revnen være stationær, og omvendt hvis (1.28) er opfyldt, så vil revnen udbrede sig. Med hvilken hastighed dette eventuelt vil ske vil vi ikke bekymre os om endnu, men blot om hvorvidt revnen overhovedet vil udbre-

de sig fra den indtil nu stationære position. Afhængigheden af revnespidsparametre givet ved $F(\cdot,\cdot,\cdots,\cdot)$ er muligvis for flere vedkommende en funktionalafhængighed og da der er tale om seks parametre, så er det klart, at det ikke er nogen let sag at give relevante gæt i det generelle tilfælde.

Lad os derfor antage at der er tale om et enkeltmode problem med balanceret krybning. I dette tilfælde er revnespidstilstanden fuldstændigt beskrevet ved den aktuelle spændingsintensitetsfaktor k og en af de hertil svarende deformationsfaktorer, lad os sige d.

Udbredelseskriteriet har da formen

$$F(k,d) \geqq F_{kr} \tag{1.29}$$

Hvis vi antager en simpel funktionsafhængighed af k og d, så kan man som simple gæt på funktionen $F(\cdot,\cdot)$ angive f.eks.

$$\begin{aligned} F(k,d) &= d \\ F(k,d) &= k \\ F(k,d) &= kd \\ F(k,d) &= k^2 + ad^2 \quad , \; a > 0 \end{aligned} \tag{1.30}$$

osv, osv, læseren kan selv gøre listen længere. Der er mange muligheder selv i dette simple tilfælde, og man kan ikke på forhånd sige hvilket af dem det vil være rimeligst at anvende.

Et gæt på en funktionalafhængighed kunne f.eks. være

$$F(k,d) = \int_{o-}^{t} k(t-\tau)\, \frac{d(d(t))}{d\tau}\, d\tau \tag{1.31}$$

Det er klart, at med alle de muligheder for gæt der eksisterer, er det nødvendigt med noget mere information om hvorledes et korrekt kriterium for revneudbredelse bør formuleres.

Griffith's kriterium gældende for elastiske materialer udtrykker i virkeligheden en betingelse om global energibalance, d.v.s.

udtrykker at revneudbredelsen skal opfylde en termodynamisk betingelse.

Det er derfor nærliggende også i det lineært viscoelastiske tilfælde at søge information om hvorledes et udbredelseskriterium skal formuleres i termodynamikken, og det vil vi derfor gøre.

1.7. Termodynamiske betingelser.

Vi betragter nu et vilkårligt legeme (vilkårlige materialeegenskaber) hvori der forekommer udbredelse af en revne. Vi vil antage, at udbredelsen sker så passende langsomt, at legemet til et hvert tidspunkt er i termisk ligevægt med omgivelserne, som har den konstante absolutte temperatur θ. Revneudbredelsen kan da betragtes som en isoterm proces.

Ved en termodynamisk beskrivelse af en revneudbredelsesproces har man det specielle problem, at hverken legemets overflade eller dets indre punkter udgør nogen konstant punktmængde hver for sig, og kan derfor heller ikke hver for sig betragtes som et termodynamisk system. Legemets indre og dets overflade må betragtes som et hele. Det vil sige, at de termodynamiske betingelser kun kan udtrykkes ved globale ligninger hvori også alle overfladebidrag er medtaget.

Lad de ydre kræfters effekt på legemet være P, den totale kinesiske energi være K, den totale Helmholz fri energi være Ψ og den totale dissipationshastighed være Λ. Både P, Ψ og Λ består af to bidrag, et indre bidrag P^i, ψ^i , Λ^i og et overfladebidrag P^o , ψ^o , Λ^o , hvorimod den kinetiske energi kun består af ét (indre) bidrag da massen af en overflade er nul, d.v.s.

$$\begin{aligned} P &= P^i + P^o \\ \Psi &= \psi^i + \psi^o \\ \Lambda &= \Lambda^i + \Lambda^o \end{aligned} \tag{1.32}$$

Energibevarelsessætningen og dissipationsuligheden for hele legemet inclusive overflade kan da skrives

$$P - \dot{K} - \dot{\Psi} - \Lambda = 0 \tag{1.33}$$

$$P - \dot{K} - \dot{\Psi} \geqq 0 \tag{1.34}$$

hvor "$\cdot$" står for differentiation med hensyn til tiden.

For at komme frem til noget nyttigt gør vi den antagelse at overfladedissipationen er identisk nul, altså

$$\Lambda^{o} \equiv 0 \tag{1.35}$$

Under denne antagelse vil det for en hver fast delmængde af en overflade gælde at $P^{o} - \dot{\Psi}^{o} \equiv 0$. Derfor må størrelsen $P^{o} - \dot{\psi}^{o}$ for et legeme hvori der foregår revneudbredelse, være proportional med tilvæksthastigheden af overflade for det betragtede legeme, og hvis revnen udbreder sig med hastigheden v fås derfor

$$P^{o} - \dot{\Psi}^{o} = - 2v\Gamma \tag{1.36}$$

Størrelsen Γ betegnes normalt overfladeenergien*) . Det viser sig at være en positiv størrelse, $\Gamma > 0$. Af dette resultat fås da umiddelbart at betingelserne (1.33) og (1.34) får formen

$$P^{i} - \dot{K} - \dot{\Psi}^{i} - \Lambda^{i} = 2v\Gamma \tag{1.37}$$

$$P^{i} - \dot{K} - \dot{\Psi}^{i} \geqq 2v\Gamma \tag{1.38}$$

Da den konstitutive ligning for materialet opfylder betingelsen $\Lambda^{i} \geq 0$, så ses det, at (1.38) automatisk er opfyldt hvis blot (1.37) er det. Vi kan altså nøjes med at opfylde betingelsen om global energibalance (1.37).

*) hvis der ikke er tale om en plant problem skal der multipliceres med revnefrontens længde.

1.8. Udbredelseskriterier baseret på global energibalance.

Den information, der kan hentes ud af termodynamikken kan for en isoterm revneudbredelsesproces altså alene udtrykkes ved ligningen

$$P^{i} - \dot{K} - \dot{\Psi}^{i} - \Lambda^{i} = 2v\Gamma \ , \ \Gamma > 0 \tag{1.39}$$

som udtrykker global energibevarelse. Lad os nu antage at der er tale om et plant problem. Hvis der for det pågældende materiale kan formuleres en bevarelseslov af formen

$$\underset{\sim}{e} \cdot \oint_{\Gamma} (\rho\psi^{i} - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds = 0 \tag{1.40}$$

gældende for en hver lukket kurve Γ , som forløber i legemet , hvor ρ er massetætheden, ψ^{i} er den indre fri energitæthed, $\underset{\sim}{n}$ er enhedsnormal til Γ og $\underset{\sim}{e}$ er en vilkårlig fast vektor, så kan den globale energibalanceligning udtrykkes ved et J-integrale

$$J = \underset{\sim}{e} \cdot \int_{\Gamma_c} (\rho\psi^{i} - f)\, \underset{\sim}{n}\, ds \tag{1.41}$$

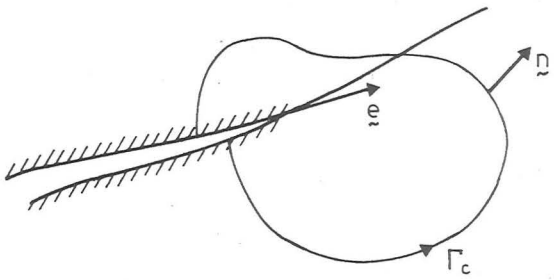
idet den globale energibalancebetingelse så kan skrives

$$J = 2\Gamma \tag{1.42}$$

J-integralet beregnes langs en kurve Γ_c , som løber fra et punkt på den ene side af revnen rundt om den betragtede revnespids til et punkt på den anden side af revnen. Vektoren $\underset{\sim}{e}$ er her en enhedsvektor i revneudbredelsesretningen, se figur 1.2.

Reduktionen af (1.39) til (1.42) forudsætter foruden bevarelsesloven (1.40) at størrelsen f er identisk nul på revneranden.

Det er vigtigt at bemærke, at J-integralet er uafhængigt af integrationsvejen, og at det derfor må være en størrelse som er



Figur 1.2. Integrationsvejen Γ_c for J-integralet.

karakteristisk for revnespidsstanden og som derfor i det lineært viscoelastiske tilfælde må kunne udtrykkes ved revnespidsparametrene k_α , c_α og d_α . Vi har derfor nu opnået et revneudbredelseskriterium givet ved (1.42) og (1.41) som netop er af formen (1.28).

Kriteriet givet ved (1.42) og (1.41) gælder for et hvilket som helst materiale, forudsat at dannelsen af ny overflade kan beskrives termodynamisk ved (1.36), og at der kan formuleres en bevarelseslov af formen (1.40), hvor den indgående størrelse f er nul på revneranden.

Vi vil nu antage lineært viscoelastisk materiale og vise at der i hvert fald for en bred klasse af belastningstilfælde kan formuleres en bevarelseslov af formen (1.40).

I det generelle anisotrope tilfælde er spændingerne og den Helmholz fri energi givet ved tøjningerne på følgende måde

$$\sigma_{ij} = \int_{o-}^{t} R_{ijk\ell}(t-\tau)\frac{d\varepsilon_{k\ell}(\tau)}{d\tau}\,d\tau \tag{1.43}$$

$$\rho\psi^i = \frac{1}{2}\int_{o-}^{t}\int_{o-}^{t} R_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta)\,\frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\eta}\,\frac{d\varepsilon_{k\ell}(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta \tag{1.44}$$

hvor $R_{ijk\ell}(\cdot)$ er de anisotrope relaxationsfunktioner. Tøjningerne og den fri energi er tilsvarende givet ved spændingerne på følgende måde

$$\varepsilon_{ij} = \int_{o-}^{t} K_{ijk\ell}(t-\tau)\,\frac{d\sigma_{k\ell}(\tau)}{d\tau}\,d\tau \tag{1.45}$$

$$\rho\psi^i = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\int_{o-}^{t}\int_{o-}^{t} K_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta)\,\frac{d\sigma_{ij}(\tau)}{d\tau}\,\frac{d\sigma_{k\ell}(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta \tag{1.46}$$

hvor $K_{ijk\ell}(\cdot)$ er de anisotrope krybningsfunktioner. I Appendix A er det vist, at hvis spændingsfeltet omkring revnespidsen kan skrives

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \sigma^o_{ij}(\underset{\sim}{x})\ f(t) \tag{1.47}$$

så kan der formuleres en bevarelseslov af formen (1.40) hvor

$$(f\underset{\sim}{n})_k = u'_{i,k}\ \sigma^o_{ij}\ n_j \tag{1.48}$$

Flytningsfeltet u'_i er her et felt, som er bestemt for det korresponderende elastiske problem med de elastiske konstanter $C_{ijk\ell} = C_{ijk\ell}(t)$ defineret ved

$$C_{ijk\ell}(t) = 2f(t)\int_{o-}^{t} K_{ijk\ell}(t-\tau)\,\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \\ - \int_{o-}^{t}\int_{o-}^{t} K_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta)\,\frac{df(\tau)}{d\tau}\,\frac{df(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta \tag{1.49}$$

Dette resulterer i udbredelsesbetingelsen (1.41) som igen kan omskrives til

$$k^o_\alpha\, d'_\alpha = \frac{4}{\pi}\,\Gamma \tag{1.50}$$

hvor k^o_α og d'_α er de til spændingerne σ^o_{ij} henholdsvis flytnings-

feltet u_i' svarende spændingsintensitetsfaktorer og deformationsfaktorer.

For det isotrope tilfælde med balanceret krybning fås udbredelsesbetingelsen

$$2k_\alpha(t)d_\alpha(t) - \rho(\nu) \int_{o-}^{t}\int_{o-}^{t} K(2t-\tau-\eta) \frac{dk_\alpha(\tau)}{d\tau} \frac{dk_\alpha(\eta)}{d\eta} d\tau d\eta = \frac{4}{\pi}\Gamma \tag{1.51}$$

hvor $k_\alpha(t) = k_\alpha^o f(t)$

og $$d_\alpha(t) = \rho(\nu) \int_{o-}^{t} K(t-\tau) \frac{dk_\alpha(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{1.52}$$

For en enhedslast $k_\alpha(t) = k_\alpha^o \Delta(t)$ fås kriteriet

$$k_\alpha^o(2d_\alpha(t) - d_\alpha(2t)) = \frac{4}{\pi}\Gamma \tag{1.53}$$

og for en rampelast $k_\alpha(t) = k_\alpha^o \beta t \Delta(t)$ fås

$$k_\alpha(t)\ (2d_\alpha(t) - \rho(\nu)\ k_\alpha(t)\ G(t)) = \frac{4}{\pi}\Gamma \tag{1.54}$$

hvor

$$G(t) = \frac{1}{t^2} \int_{o}^{t}\int_{o}^{t} K(\tau+\eta)\, d\tau d\eta \tag{1.55}$$

I appendix A.1 er angivet nogle andre formuleringer af revneudbredelsesbetingelsen (1.42) hvor der i stedet er taget udgangspunkt i ligningerne (1.43), (1.44) hvorved materialeegenskaberne bliver udtrykt ved relaxationsfunktionerne i modsætning til udtrykkene ovenfor, hvor materialeegenskaberne er udtrykt ved krybningsfunktionerne.

I appendix A.2 er det desuden omtalt hvorledes udbredelseskriterierne kan matrixformuleres så de er velegnede til edb-analyser.

KAPITEL 2

Revneudbredelsesteori.

2.1. Teori for statiske laste.

I det følgende vil vi etablere en teori for tilfælde hvor problemets randbetingelser giver anledning til spændingstilstande som er hvad man normalt betegner "statiske", d.v.s. ikke-pulserende og så rimelig langsomt varierende at dynamiske effekter kan negligeres.

I forrige kapitel har vi vist, at revnespidstilstanden for et vilkårligt lineært viscoelastisk revneproblem må udtrykkes ved 6 revnespidsparametre. Vi har desuden formuleret et termodynamisk korrekt udbredelseskriterium og udtrykt dette alene ved de definerede revnespidsparametre samt en kritisk værdi.

Hele denne analyse er foretaget på et normalt kontinuummekanisk grundlag uden andre væsentlige antagelser end at der er tale om

1) kontinuum, små tøjninger.
2) lineær materialeegenskaber.
3) overfladedissipationen = 0.

Som det er vist i Brincker [18] fører disse resultater imidlertid til et paradoks, idet der teoretisk set vil være tilfælde, hvor teorien hverken tillader en revne at være stationær eller at udbrede sig. Dette revneudbredelsesparadoks skal kort illustreres ved følgende eksempel.

Lad os betragte et spændingsrandværdiproblem med balanceret krybning og med konstante ydre laste. Vi vil desuden antage at der er tale om et enkeltmode problem således at revnespidstilstanden kan karakteriseres ved spændingsintensitetsfaktoren k og deformationsfaktoren d.

Vi vil nu antage, at revnespidsen er ankommet *) til en position s_o på sin udbredelseskurve til tiden t = 0. Herefter er revnespidsen stationær et stykke tid. I denne position er revnespidstilstanden beskrevet ved parametrene k_o og d_o hvor spændingsintensitetsfaktoren k_o er konstant og hvor deformationsfaktoren d_o er en voksende funktion af tiden $d_o = d_o(t)$, jvnf. afsnit 1.5.

Af resultaterne i afsnit 1.8 fås da at betingelsen for revneudbredelse er

$$k_o(2d_o(t) - d_o(2t)) \geq \frac{4}{\pi} \Gamma \qquad (2.1)$$

Hvis der er tale om et lineært viscoelastisk faststof, så vil faktoren i parentesen være en ikke aftagende funktion af tiden. Vi kan derfor antage at kriteriet (2.1) er opfyldt til et vist tidspunkt $t_o > 0$, d.v.s.

*)
Vi kan også antage at revnen har været stationær for alle $t < 0$, og at de ydre laste sættes på til tiden t = 0.

$$k_o(2d_o(t_o) - d(2t_o)) = \frac{4}{\pi} \Gamma \qquad (2.2)$$

Hvis betingelsen om global energibalance skal bruges til bestemmelse af om revnen vil løbe , så må den altså starte med at løbe til tidspunktet t_o . Umiddelbart efter at revnen er startet med at løbe, d.v.s. til tidspunktet t_o^+ antager revnespidsparametrene imidlertid værdierne k_1^+ og d_o^+ for hvilke der gælder

$$\begin{aligned} k_o^+ &= k_o \\ d_o^+ &= d_o(0) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

jvnf. resultaterne i afsnit 1.5, d.v.s. at revneudbredelseskriteriet ikke længere er opfyldt.

Dette er revneudbredelsesparadokset, hvis udbredelseskriteriet er opfyldt til et tidspunkt t_o , og revnen derfor vil udbrede sig, så vil revnespidsparametrene på grund af bevægelsen straks antage sådanne værdier, at udbredelseskriteriet ikke længere er opfyldt, og revnen vil derfor gå i stå igen. D.v.s. at revnen ikke vil udbrede sig, men vil være stationær. Dette er imidlertid i strid med at udbredelseskriteriet rent faktisk er opfyldt til tiden $t = t_o$.

Selvmodsigelsen opstår fordi det er nødvendigt at have en bedre tilnærmelse til den fysiske virkelighed end kontinuumbeskrivelsen med den lineært viscoelastiske konstitutive ligning og de de perfekt skarpe revner giver.

Man kan opfatte revneudbredelsesparadokset som en følge af den singulære spændings- og tøjningstilstand ved revnespidsen. Man kunne derfor komme om ved problemet ved at antaget ét af to

- flydning ved revnespidsen (2.4)

- krumningsradius større end nul ved revnespidsen (2.5)

Det første er ensbetydende med at antage en lineærviscoelastisk - idealplastisk konstitutiv ligning, hvilket vil give en art

Dugdale model. Det andet svarer til at regne med en begyndelsesværdi for krumningsradius ved revnespidsen som altid er større end nul. I begge tilfælde får man endelige spændinger ved revnespidsen og i begge tilfælde vil antagelsen introducere en ekstra materialekonstant. Se i øvrigt diskussionen herom i afsnit 2.4.

En antagelse om forholdene ved revnespidsen af denne art, som afhjælper problemet med revneudbredelsesparadokset, kaldes for en revnemodel.

Benyttelse af revnemodeller som de ovenfor omtalte, har imidlertid den kedelige følge, at de simple løsninger, som er angivet i afsnit 1.4, og som er bestemt under antagelse af singulære spændings- og tøjningsfelter, ikke længere kan bruges direkte. Det samme gælder formuleringen af udbredelseskriteriet baseret på betingelsen om global energibalance omtalt i afsnit 1.8.

Det vil derfor være en fordel at antage en revnemodel hvor den singulære beskrivelse var bibeholdt. En sådan model får man ved at bryde delvis med kontinuumopfattelsen ved at antage at

- den mindste strækning forskellig fra nul som en revne kan løbe er strækningen δ. Strækningen δ er en materialekonstant. (2.6)

Herved opnår man, at revneudbredelsesparadokset ikke længere giver anledning til nogen modstrid, men tværtimod kommer til at indgå som en del af modellen for revneudbredelse. Hvis revnen nemlig har været stationær i et stykke tid, men vil løbe på tidspunktet t_o fordi udbredelseskriteriet er opfyldt til dette tidspunkt, så vil revnen ganske vidst gå i stå igen til tidspunktet t_o^+, men først efter i henhold til (2.6) at have løbet stykket δ. Her vil revnen være stationær et stykke tid indtil udbredelseskriteriet er opfyldt, hvorefter den igen vil løbe stykket δ, o.s.v.

Der er altså hermed etableret en model for revneudbredelsen. Modelprocessen er en trinvis proces, hvor revnespidsens position s_m på udbredelseskurven kan beskrives ved trappefunktionen

$$s_m = s_{mo} + \delta \cdot (\Delta(t-t_1) + \Delta(t-t_2) + \cdots) \tag{2.7}$$

hvor $\Delta(\cdot)$ er Heavisides enhedsfunktion, og hvor tidspunkterne $t_1, t_2, \cdots$ betegner de tidspunkter, hvor der sker en fremrykning af revnen. Modelprocessen (2.7), som giver anledning til modeludbredelseshastigheden

$$v_m = \frac{ds_m}{dt} = \delta \cdot (\delta(t-t_1) + \delta(t-t_2) + \cdots) \tag{2.8}$$

hvor $\delta(\cdot)$ er Diracs δ-funktion, har egentlig ingen interesse i sig selv, men den giver mulighed for bestemmelse af den makroskopiske proces, som man observerer ved et forsøg. Den makroskopiske revneudbredelseshastighed til tidspunktet $t \in [t_n; t_{n+1}]$ beregnes som

$$v = \frac{\delta}{\Delta t_n} \quad , \quad \Delta t_n = t_{n+1} - t_n \tag{2.9}$$

Hermed er teorien færdig. Modelprocessen bestemmes ud fra randbetingelserne og begyndelsesbetingelserne af formlerne i afsnit 1.4, udbredelseskriteriet baseret på betingelsen om global energibalance omtalt i afsnit 1.8 og revnemodellen (1.6). Herefter bestemmes den makroskopiske udbredelseshistorie af (2.9).

Med hensyn til eksempler på teoriens anvendelse henvises der til det næste afsnit hvor der drages sammenligning med forsøgsresultater fra litteraturen og til kapitel 3 hvor en række anvendelser for teorien er omtalt.

2.2. Sammenligning med forsøg fra litteraturen.

Der findes en del litteratur vedrørende måling af krybning og ligeledes en del litteratur vedrørende brudforhold for materialer med krybning, se f.eks. Bartenev og Zuyev [1]. Det er desværre blot yderst sjældendt at krybeegenskaber og revneudbredelsesegenskaber er bestemt for det samme materia-

le, hvilket er en forudsætning for at man kan drage sammenligning mellem teori og forsøg.

Nogle af de eneste tilgængelige forsøg og nok de mest kendte er Knauss' forsøg med Solithan 113, som er en polyurethan gummi. Knauss bestemte materialets krybeegenskaber [5] og lavede "dead-load" forsøg med skiver forsynet med en central revne [5] og forsøg med konstant revnevækst i en "uendelig" stribe [9]. Det er næsten blevet en tradition at sammenligne teorier for revnevækst i lineært viscoelastiske materialer med disse forsøgsresultater. Det gælder udover Knauss & Mueller [9] således både Schapery [15], Christensen [2], [3] og Nielsen [11].

Lad os først betragte eksemplet med revnevækst i den "uendelige" stribe. Forsøgene blev udført med en stribe af den omtalte polyurethan gummi i en tykkelse på 1/32in, en højde på 2h = 1 3/8 in og en længde på 10 in. Hver af striberne blev så ved hver rand påsat en flytning u_o (d.v.s. toal flytning $2u_o$) og efter fuldstændig relaxering blev revnevæksten startet og revnehastigheden v målt.

Vedrørende bestemmelse af problemets revnespidsparametre henvises til Brincker [17]. Ved at anvende de her angivne resultater og det i dette tilfælde korrekte kriterium (1.53) sammen med modellen (2.6), fås da let under antagelse om balanceret*) krybning med poisson forholdet ν og idet det antages at flytningen u_o påføres til tiden t = 0 følgende ligning til bestemmelse af revnehastigheden

*) faktoren $1-\nu^2$, som skyldes antagelsen om plan tøjningstilstand, er medtaget ikke for at tage hensyn til plan tøjningstilstand i normal forstand, men for at kompensere for at striben er indspændt langs de to rande og derfor ikke frit kan forkorte sig når flytningen påføres.

$$\frac{u_o^2}{h(1-\nu^2)} R^2(t)\, F\left(\frac{\delta}{v}\right) = \Gamma \qquad (2.10)$$

hvor funktionen F(·) er givet ved

$$F(t) = 2K(t) - K(2t) \qquad (2.11)$$

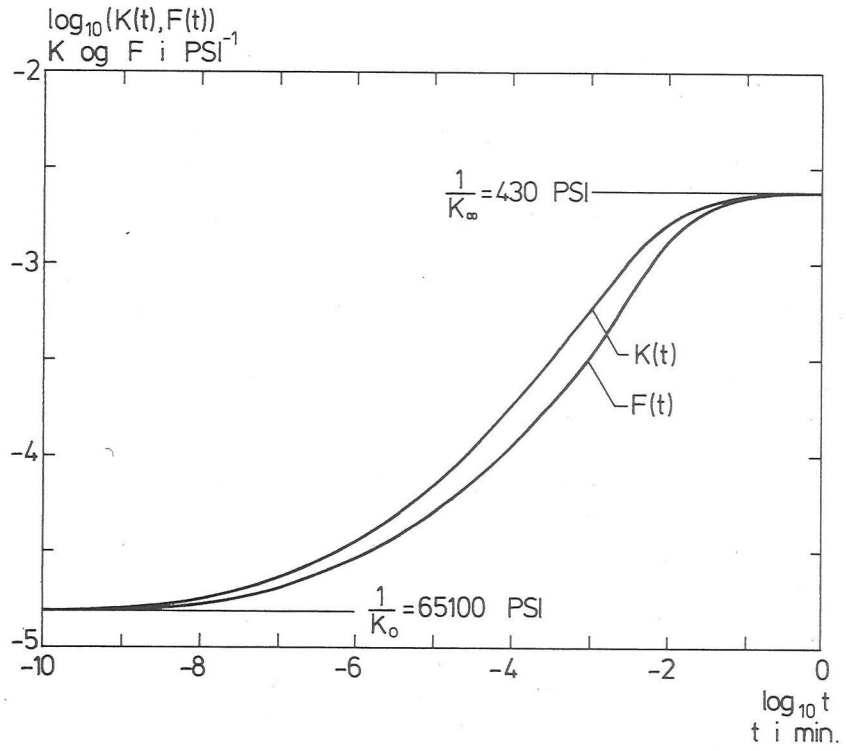
og hvor R(·) og K(·) er materialets relaxationsfunktion henholdsvis krybningfunktion. Lader vi nu $t \to \infty$ og indfører $R_\infty = R(\infty)$. $\varepsilon_o = u_o/h$ og antager $\nu = 1/2$ fås ligningen

$$\frac{2}{3} \varepsilon_o^2\, h\, R_\infty^2\, F\left(\frac{\delta}{v}\right) = \Gamma \qquad (2.12)$$

hvilket er det samme udtryk som Knauss og Mueller [9] kommer til blot med en anden funktion G(t) istedet for F(t). Knauss og Muellers G-funktion afviger fra funktionen F(·) da der er anvendt et tilnærmet kriterium. Ved sammenligning vil man dog se at afvigelserne er små. Et tilsvarende udtryk er også fundet af Christensen [3].

Krybningsfunktionen K(t) og funktionen F(t) er vist på figur 2.1. De målte revnehastigheder v's afhængighed af tøjningen ε_o er angivet i figur 2.2 sammen med den teoretiske sammenhæng givet ved (2.12). Revnehastighederne blev målt af Knauss og Mueller ved gennemførelse af forsøgsserier ved forskellige temperaturer. De i figur 2.2 angivne målepunkter er alle reduceret *) til 0^oC ved hjælp af de forskydningsfaktorer, som er angivet i Knauss og Mueller [9] . Den teoretiske kurve er angivet for

* Det fremgår af (2.12) og (2.11) at hvis materialet er termoheologisk simpelt, d.v.s. hvis det kan beskrives i så henseende ved forskydningsreglen, så kan et punkt i figur 2.2, som er bestemt ved én temperatur reduceres til en lavere temperatur ved forskydning af punktet mod venstre langs log v aksen. Det fremgår desuden at der skal anvendes den samme forskydningsfaktor til reducering af målte revnehastigheder som til reducering af krybedata.

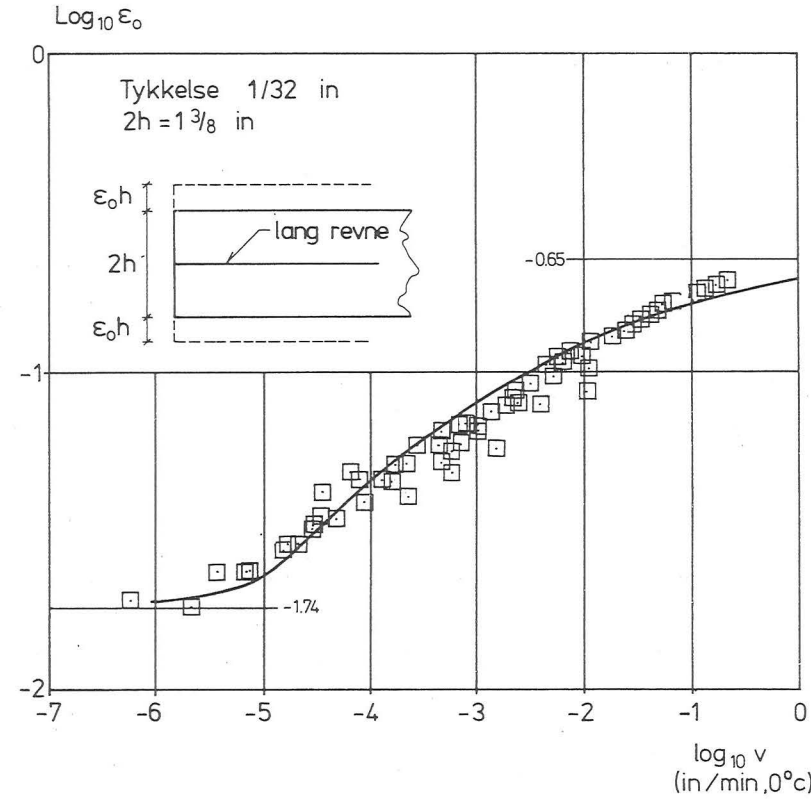


Figur 2.1. Krybningsfunktionen K(t), samt funktionen F(t) for den anvendte polyurethan gummi.

$\delta = 30$ Å (2.13)

Som det fremgår af (2.12) giver ændringen i δ kun anledning til forskydninger af den teoretiske kurve langs logv-aksen.

De "deadload" forsøg, som Knauss udførte med det samme materiale blev udført med kvadratiske prøver med en sidelængde på 4 in, en tykkelse på 1/32 in og med en central revne begyndelsesrevne på 0.25 in. Prøverne blev belastet med en konstant normalspænding vinkelret på revnen, og levetiden t_c (tid til endeligt brud)



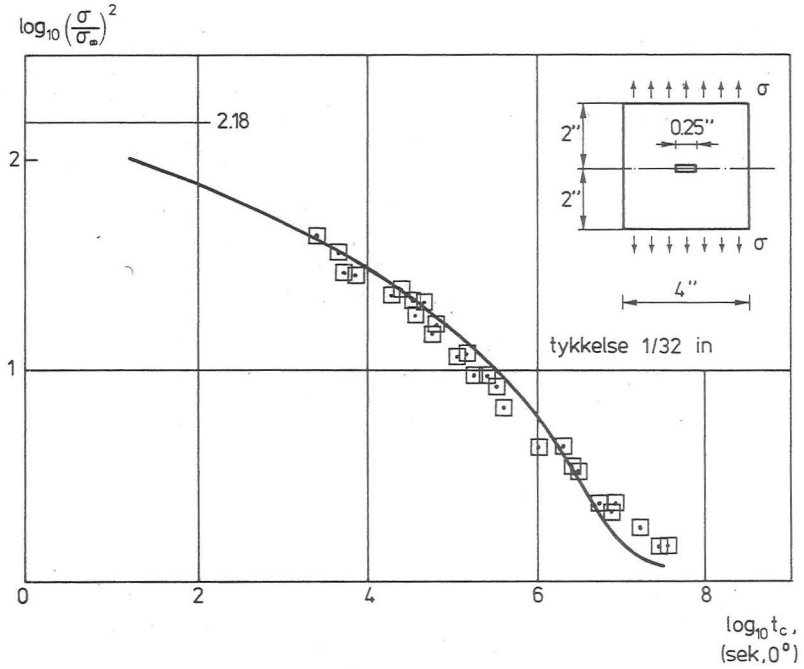
Figur 2.2. Forsøg med konstant revneudbredelseshastighed i en lang stribe af solithane 113, en polyrethan gummi. Eksperimentelle værdier efter [9]. Den teoretiske kurve er baseret på skridtmodellen og angivet for δ = 30 Å.

blev målt *) . Den målte sammenhæng mellem levetiden t_c og den påsatte spænding σ er angivet i figur 2.3. Den teoretiske kurve,

*) Også her blev forsøgene gennemført ved forskellige temperaturer og resultaterne bagefter reduceret til 0°C.

som også er angivet på figuren er bestemt på følgende måde.

De aktuelle revnespidsparametre **) indsættes i kriteriet (1.53), og benyttes skridtmodellen (2.6) fås følgende ligning til bestemmelse af hastigheden v ved den aktuelle halve revnelængde a



Figur 2.3. Tid til fuldstændigt brud t_c for solithane 113, en polyurethan gummi. Eksperimentelle værdier efter [9]. Den teoretiske kurve er baseret på skridt modellen og angivet for δ = 4 Å.

**) Der er for simpelheds skyld benyttet revnespidsparametrene for den uendelige skive. Dette giver ikke anledning til nogen fejl af betydning i denne sammenhæng.

$$2K\left(\frac{\delta}{v}\right) - K\left(2\,\frac{\delta}{v}\right) = K_\infty \frac{a_o}{a}\left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma}\right)^2 \qquad (2.14)$$

hvor $K_\infty = K(\infty)$, $a_o = a(t=0)$ og σ_∞ er den spænding for hvilken hastigheden $v \to 0$.

Levetiden *) t_c bestemmes da af

$$t_c = \int_{a_o}^{a_{max}} \frac{1}{v}\, da \qquad (2.15)$$

hvor a_{max} er den kritiske revnelængde **) , d.v.s. den revnelængde hvor revnens hastighed ifølge teorien går mod uendelig.

Herved får man levetiden t_c givet ved et udtryk af formen

$$t_c = t_o\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right) \cdot \frac{a_o}{\delta} \qquad (2.16)$$

hvor sammenhængen $t_o\left(\frac{\sigma}{\sigma_\infty}\right)$ er bestemt ved numerisk integration af (2.15). Den i figur 2.3 viste teoretiske kurve er tegnet for

$$\delta = 4 \text{ Å} \qquad (2.17)$$

*) Hvorvidt der ved bestemmelsen af t_c skal medtages et bidrag svarende til den tid revnen står stille i begyndelsespositionen er et spørgsmål om hvordan modeludbredelsesforløbet skal fortolkes. I dette tilfælde er det imidlertid ligegyldigt om bidraget medtages, da det er forsvindende lille sammenlignet med integralet (2.15).

**) Da vi har benyttet revnespidsparametrene for den uendelige skive er a_{max} sat lig med skivens halve bredde i de tilfælde hvor den kritiske revnelængde er større end denne. Denne tilnærmelse giver kun anledning til ubetydelige fejl.

Som det fremgår af (2.16) giver ændringer i δ udelukkende anledning til forskydninger af den teoretiske kurve langs $\log t_c$-aksen. Den her funde værdi for δ er noget mindre end den værdi som blev bestemt ved stripforsøgene omend de er af samme størrelsesorden. De to forsøgsrækker er imidlertid ikke udført på helt det samme materiale, idet der er tale om forskellige batches (støbninger). Dette kan give anledning til mindre ændringer af materialets relaxationstider, overfladeenergi og skridtparameter δ, som kan forklare forskellen på de målte δ-værdier ved de to forsøgsrækker. Knauss angiver således at have målt overfladeenergier for materialet anvendt ved de to forsøgsrækker, som afviger med en faktor 3.

Set på baggrund heraf og på baggrund af mulige forsøgstekniske ufuldkommenheder, synes afvigelsen mellem de bestemte δ-værdier at være acceptabel, og sammenhængen mellem de målte revnehastigheders og levetiders afhængighed af de ydre laste at være godt beskrevet ved teorien.

2.3 Andre forsøg.

Sammenligning mellem teorien og forsøgene med solithan 113 omtalt i forrige afsnit godtgør , at revneudbredelsesfænomener i amorfe polymerer i gummitilstanden lader sig beskrive ganske godt ved hjælp af en revnemekanisk teori for lineært viscoelastiske materialer.

For det materiale som blev anvendt, var det krybetal, som styrer revnevæksten, af størrelsesorden 10-100. For typiske byggematerialer som træ og beton og for lim, som anvendes til limede samlinger i bærende konstruktioner vil de krybetal, som styrer revnevæksten så der opstår brud inden for en overskuelig tid d.v.s. 1-10 år, typisk være af størrelsesorden 2-5.

Der er en principiel forskel på revneudbredelsesforsøg ved store krybetal, hvor begyndelsesværdien på krybingsfunktionen kan negligeres og ved små krybetal, hvor begyndelsesdeformationen udgør en betragtelig del af den totale deformation. Det ville derfor være ønskeligt, om der kunne tilvejebringes nogle resultater fra revneudbredelsesforsøg ved de krybetal, som er typiske for byggematerialer og strukturelle lime.

Det er imidlertid vanskeligt at udføre udbredelsesforsøg, hvor revnevæksten er styret af små krybetal, idet det stiller store krav til homogenitet og reproducerbarhed af de styrende materialeegebskaber som krybning og styrkeparametre.

Da det af denne grund er næsten umuligt direkte at benytte byggematerialer som træ og beton til sådanne forsøg, idet disse materialer udviser alt for stor spredning, er det en nærliggende mulighed at udvikle et passende modelmateriale, som reflekterer byggematerialernes egenskaber i krybemæssig henseende, og som kan fremstilles med en høj grad af homogenitet med små tolerancer på de styrende materialeparametre.

Et sådant epoxybaseret modelmateriale er med støtte fra Statens tekniskvidenskablige Forskningsråd (STVF) under udvikling og afprøvning på Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DTH. Der henvises til Brincker [19].

Det forventes at dette arbejde resulterer i en forsøgsrække, som kan afklare om en revnemekanisk teori for lineært viscoelastiske materialer også er egnet til at beskrive revneudbredelsesfænomener, som er styret af små krybetal.

2.4 Andre teorier.

Singulære spændingsfordelinger er kun benyttet af andre forfattere i ganske få tilfælde. Knauss og Mueller [9] benytter de singulære spændingsfelter ved opstilling af en teori til anvendelse på eksemplet med revnevækst i den uendelige stribe, som er omtalt i afsnit 2.2, og Nuismer [12] benytter de singulære spændingsfelter ved udledelsen af et kriterium for revnevækst baseret på global energibalance.

Knauss og Mueller benytter ganske vidst betingelsen for global energibalance som grundlag for deres teori, men begår som anført af Christensen [2] en fejl ved anvendelsen af betingelsen. Nuismer begår en tilsvarende fejl ved anvendelse af betingelsen om global energibalance og kommer til den konklusion, at betingelsen ikke kan benyttes til fastlæggelsen af revneudbredelseshastigheder i lineært viscoelastiske materialer.

Det mest almindelige i forbindelse med teorier for revneudbredelse i lineært viscoelastiske materialer er imidlertid at benytte sig af revnemodeller, som ved nogle antagelser om spændingerne ved revnespidsen giver endelige spændinger her.

De fleste forfattere baserer deres teorier på nogle antagelser om spændingerne i en zone (frontzonen, flydezonen) umiddelbart omkring revnespidsen. Herved fremkommer de kendte Dugdale-Barenblatt modeller. Blandt de vigtigste referencer skal i denne forbindelse nævnes Knauss[5], Wnuk [16], Shapery [15], McCartney [8] og Nielsen [10], [11] og [20].

Disse modeller benyttes blandt andet for at indbygge en større grad af generalitet i teorien så en bredere klasse af problemer kan behandles (visco - elasto - plastiske revneproblemer) og for at drage nytte af de mange resultater fra brudmekanikken for tidsuafhængige materialer, hvor der er udviklet avancerede metoder så der kan tages hensyn til flydning, tøjningshærdning og store flydezoner, d.v.s. "large scale yielding" problemer.

I appendix B er der givet en kort omtale af idéerne bag anvendelser af disse Dugdale - Barenblatt modeller i de lineært viscoelastiske revneudbredelsesteorier. Som det fremgår her udgør disse ideer en udmærket basis for formulering af velfungerende teorier for revneudbredelsesfænomener i lineært viscoelastiske materialer.

Der kan imidlertid fremføres en vis kritik mod betragtningsmåden. Følgende skal nævnes

1) analysen besværliggøres

2) valg af model er ikke underbygget

3) korrekt udbredelseskriterium kan ikke formuleres.

Ad 1. Som det fremtår af appendix B kan de singulære generelle løsninger, som er angivet i Brincker [17] ikke direkte benyttes. Tilstanden ved revnespidsen må karakteriseres ved spændingsstørrelser og tøjningsstørrelser, som er valgt med baggrund i den enkelte specifikke model. De endelige spændinger medfører også at tilstanden ved revnespidsen kommer til at afhænge af revne-

udbredelseshistorien *), specielt af hastigheden omkring det tidspunkt, hvor tilstanden ønsker bestemt, hvorved løsningerne kompliceres.

Problemerne er imidlertid ikke større end, at de kan accepteres, hvis man dermed fik indbygget en større generalitet i teorien. Spørgsmålet er blot om dette nu også er tilfældet.

Ad.2. Man er nødt til at vælge en model, d.v.s. en specifik antagelse om spændingsforløbet i frontzonen. I brudmekanikken for de tidsuahængige materialer er sådanne antagelser blevet vel underbygget både ved forsøg, Dugdale [14] og ved plasticitetsteoretiske analyser, Rice [13] . Noget tilsvarende er ikke tilfældet for de viscoelastiske materialer, og man kan f.eks. have sine tvivl om berettigelsen af en konstant tidsuafhængig sammenhængsspænding for et viscoelastisk materiale som det forudsættes i Dugdale modellen, og som det benyttes i de fleste teorier for revneudbredelse i lineært viscoelastiske materialer.

Dette er imidlertid nok ikke det værste.

Ad. 3. Det værste er efter forfatterens vurdering, at der ikke hidtil har kunnet formuleres noget korrekt revneudbredelseskriterium for disse modeller.

Nogle af de tidligere omtalte forfattere synes imidlertid at mene at kunne formulere et udbredelseskriterium for Dugdale modellen baseret på en betingelse om energibalance. Det gælder bl.a. Knauss [5], Wnuk [16], Shapery [15] og McCartney [8].

For Dugdale modellen angiver de kriterier af typen

$$2\Gamma v = \int_0^{\delta s} \sigma_f \frac{\partial \Delta u(x,t)}{\partial t}\, dx \qquad (2.18)$$

hvor Γ er overfladeenergien, som forudsættes at være en materialekonstant, v er udbredelseshastigheden, σ_f er sammenhængsspændingen, Δu er revneåbningen for revnen i det viscoelasti-

*) Dette kan dog også opfattes som en fordel ved disse modeller, idet det medfører at det tidligere omtalte (afsnit 2.1) revneudbredelsesparadoks, som optræder i forbindelse med de singulære løsninger, ikke længere eksisterer.

ske materiale, og δ_s er størrelsen af frontzonen, hvorover der integreres.

Udtrykket (2.18) er analogt til kriteriet (B.16) i appendix B og udtrykker ikke energibalance. Der er tale om et gæt analogt til udtrykkene (1.30) i afsnit 1.6, hvis eneste kvalitet er at være sammenfaldende med de kendte og velunderbyggede elastoplastiske kriterier i det tilfælde, hvor de viscoelastiske (tidsafhængige) egenskaber kan negligeres. Ligningen (2.18) udtrykker altså kun energibalance såfremt, der var tale om et materiale med en "stored energy function", hvilket der ikke er tale om her. Dissipationsleddet mangler delvis. Der skal her nævnes et ofte citeret arbejde, nemlig Kostrov og Nikitins analyse [7] som har været med til at introducerede denne fejl i litteraturen som påpeget af Christensen [2], [4].

Hvis kriteriet skal baseres på en betingelse om global energibalance, så skal der medtages et ekstra led, som tager højde for dissipationen, og så bliver tingene langt mere komplicerede, hvilket fremgår med al ønskelig tydelighed af Christensens analyser [2], [3]. Disse analyser må i øvrigt fremhæves som nogle af de få læseværdige referencer vedrørende revneudbredelseskriterier for lineært viscoelastiske revneproblemer.

Alt i alt synes der i hvert fald på nuværende tidspunkt at være for mange uafklarede punkter omkring teorier baseret på Dugdale - Barenblatt modeller til at man med rette kan føle sig overbevist om, at en teori for revnevækst i et lineært viscoelastisk materiale ved anvendelse af en sådan model får indbygget en større grad af generalitet eller skulle give en mere "korrekt" beskrivelse.

Der er dog andre muligheder for at formulere teorier baseret på modeller med endelige spændinger ved revnespidsen. Christensen [2], [3] antager, at spændingstilstanden er ikke-singulær og kan beskrives ved en passende valgt tilladelig spændingsfordeling. Denne spændingsfordeling forudsættes i [3] at have en spændingskoncentration i revnespidsen som klinger af efter faktoren $e^{-\beta x}$.

Der kan mod denne teori rettes den samme kritik som anført ovenfor under 1) og 2), men da den valgte spændingsfordeling udelukkende tjener som grundlag for bestemmelse af størrelsesordenen af en indre dissipation (en størrelse som der normalt slet ikke gøres forsøg på at bestemme jvnf. ligning (2.18)), hvorefter revneudbredelsen kan bestemmes på grundlag af betingelsen om global energibalance, så synes det at være en rimelig angrebsvinkel.

Analysen er imidlertid vanskelig og er kun gennemført for et relativt simpelt eksempel, nemlig revneudbredelse i den uendelige stribe, se afsnit 2.2.

Det er imidlertid interessant at bemærke at afklingningsfaktoren β kommer til at indgå i teorien som en materialeparameter analogt til størrelsen δ i skridtmodellen, og at Christensens analyse [3] resulterer i en ligning til bestemmelse af udbredelseshastigheden i den uendelige stribe, som er helt analog til ligning (2.12).

Til slut nogle få kommentarer vedrørende det centrale ved formuleringen af teorier for revnevækst i lineært viscoelastiske materialer, nemlig revnemodeller og udbredelseskriterier. Al erfaring godtgør, at man er nødt til at vælge en model. Herefter kan man, hvis modellen er valgt tilstrækkeligt hensigtmæssigt, muligvis formulere et korrekt kriterium (global energibalance) for revneudbredelse baseret på den valgte model eller, hvis dette ikke kan lade sig gøre da vælge et passende kriterium. Det fremgår af Brincker [18] og den ovenfor omtalte litteratur, og nok særlig klart at diskussionen mellem Christensen og McCartney [4] at problemstillingen er særdeles vanskelig.

Lad os som eksempel betragte Nuismers analyse [12] af mulighederne for langsom revnevækst i et lineært viscoelastisk materiale. Han kommer på grundlag af de singulære løsninger og anvendelse af et energikriterium til det resultat, at man ikke på grundlag heraf kan fastlægge revnehastigheder. Man må være enig i, at det ikke kan ske på det grundlag alene, og det er der egentlig ikke noget mærkeligt ved.

Alle de ovenfor nævnte teorier, som giver mulighed for bestemmelse af revnehastigheder indfører to materialeparametre. Knauss indfører en overfladeenergi og en geometrisk størrelse, som karakteriserer størrelsen af flydezonen, Shapery gør det samme, McCartney indfører en overfladeenergi og en karakteristisk spænding (sammenhængspændingen), Wnuk og Nielsen gør stort set det samme, Christensen indfører en overfladeenergi og en afklingningsfaktor, og skridtteorien, som er beskrevet i afsnit 2.1 indfører en overfladeenergi og en karakteristisk skridtlængde. Alle disse teorier kan betragtes som teorier, der definerer en overfladeenergi plus en ekstra materialekonstant, som introduceres af den valgte revnemodel.

Overfladeenergien alene kan kun danne grundlag for en vurdering af, om revnevækst vil finde sted eller ej, præcis som for et elastisk materiale. Materialets viscoelastiske egenskaber definerer et "indre ur", men der er egentlig ikke noget underligt ved, at man må tilføje en ekstra karakteristisk størrelse (karakteristisk længde) for, at der er basis for at bestemme hastigheder.

Nuismers resultat er en følge af, at denne ekstra konstant mangler, og er således en analog til revneudbredelsesparadokset, som er omtalt i afsnit 2.1, og er dermed en demonstration af nødvendigheden af at indføre en eller anden form for revnemodel.

KAPITEL 3

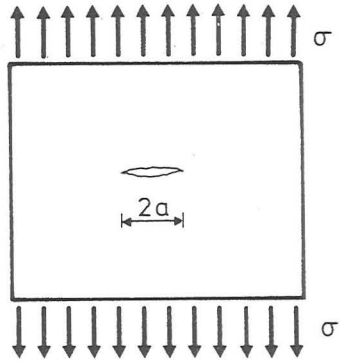
Forskellige anvendelser og resultater.

3.1 Indledning.

Der er i de to tidligere kapitler udledt en teori for revnevækst i lineært viscoelastiske materialer.

Der skal i dette kapitel redegøres for nogle af de anvendelser der er for en sådan teori og for nogle af dens hovedresultater.

Udledelsen af hovedresultaterne er knyttet til betragtning af et specielt simpelt problem, nemlig vækst af én eller flere lineære revner i den uendelige skive belastet i det uendeligt fjerne af en trækspænding, som virker vinkelret på revnen, se figur 3.1.



Figur 3.1. Revne i den uendelige skive.

Materialet antages desuden at udvise balanceret krybning med poissontallet ν og krybningsfunktionen

$$K(t) = \frac{1}{E}\varphi(t) \quad ; \quad \varphi(0+) = 1 \qquad (3.1)$$

Problemet beskrives da for hver fast værdi af den halve revnelængde a ved revnespidsparametrene (mode 1)

$$k(t) = \sigma(t)\ \sqrt{a} \qquad (3.2)$$

$$d(t) = \rho(\nu)\ \sigma(t)\ \sqrt{a}\ K(t-t')$$

hvor t' er det tidspunkt hvor den betragtede revnespids ankommer til positionen på udbredelseslinien svarende til revnelængden 2a.

3.2 Makroskopiske brudkriterier.

Lad os antage, at den påsatte spænding σ er konstant i tid. Det tidsrum t der hengår fra belastningen påsættes til den første fremrykning af revnen finder sted findes ved indsættelse i udbredelseskriteriet (1.53)

$$\sigma^2 a\ \rho(\nu)\ (2K(t) - K(2t)) = \frac{4}{\pi}\ \Gamma \qquad (3.3)$$

Antages det nu at revneåbningens bidrag til legemets tøjning ε er forsvindende, kan betingelsen udtrykkes i spændinger og tøjninger

$$\sigma(2\varepsilon(t) - \varepsilon(2t)) = \frac{4}{\pi}\ \frac{\Gamma}{\rho(\nu)a} \qquad (3.4)$$

For et korttidsforsøg, d.v.s. for et tilfælde hvor $2\varepsilon(t) - \varepsilon(2t) \cong \varepsilon(t)$, fås

$$\sigma_p \varepsilon_p = \frac{4}{\pi}\ \frac{\Gamma}{\rho(\nu)a} \qquad (3.5)$$

hvorved (3.4) kan skrives

$$\sigma(2\varepsilon(t) - \varepsilon(2t)) = \sigma_p \varepsilon_p \qquad (3.6)$$

Dette udtryk giver en mulighed for at vurdere hvornår en længere varende belastning σ vil give de første brud i materialet, hvis tøjningerne måles løbende, og hvis den tilsvarende *) spænding σ_p og tøjning ε_p er bestemt ved et korttidsforsøg. Ved

* Den spænding og tøjning som svarer til de første brud i materialet; kan opfattes som proportionalitetsgrænser.

Ved bestemmelsen af $\varepsilon(2t)$ kan man ofte udnytte, at mange materialers krybning med god tilnærmelse vil være en lineær funktion af logaritmen til tiden.

Størrelserne σ og ε kan her opfattes som generaliserede spændinger og tøjninger, f.eks. kan det være momentet og krumningen M, κ for en bjælke, eller det kan være en kraft og den tilhørende flytning. Det skal dog understreges at konstruktionen skal være passende homogen (homogene krybningsegenskaber) for at betragtningsmåden kan anvendes.

3.3 Model for arbejdslinieforløb.

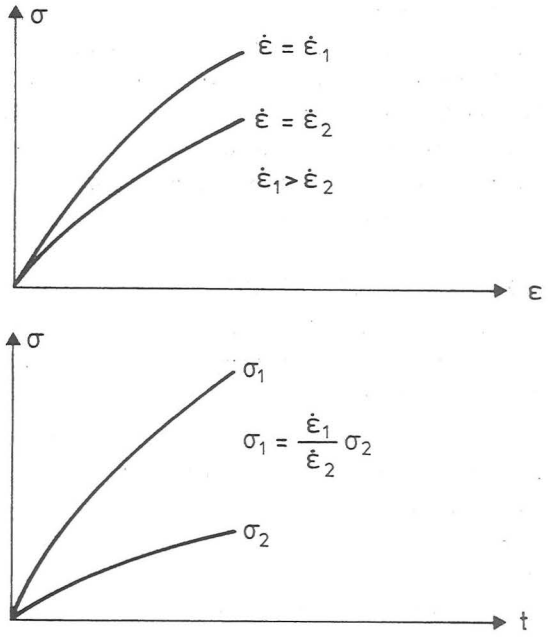
I det følgende vil vi se på hvordan man kan formulere en beregningsmodel for krumme, tidsafhængige arbejdslinieforløb med udgangspunkt i revnemekanikken.

Materialet antages at være sprødt og lineært (lineært viscoelastisk eller specielt blot lineært elastisk), samt at være forsynet med en mængde mikrorevner hvorfra et eventuelt brud vil udvikles ved vækst af én eller flere af disse revner. Et eventuelt ulineært forløb af arbejdskurven i nærheden af brud antages at være forårsaget af revnevæksten.

Indledningsvis skal det bemærkes, at tilstedeværelsen af en krumning på en ε,σ arbejdskurve ikke nødvendigvis betyder at der er tale om ikke lineære fænomener.

Et lineært viscoelastisk materiale vil f.eks. hvis det udsættes for en konstant tøjningshastighed give et krumt arbejdslinieforløb. Det karakteristiske for arbejdsliniekrumninger, som er forårsaget af lineært viscoelastiske deformationsegenskaber er, at krumningen er fordelt over hele kurven (kurven krummer helt fra nul) og at sammenhænge mellem spændinger og tid ved forskellige tøjningshastigheder føres over i hinanden ved multiplikation med forholdet mellem tøjningshastighederne, se figur 3.2.

De ikke lineære bidrag til krumningen af arbejdskurven optræder derimod først over et vist spændingsniveau (i almindelighed afhængigt af tøjningshastigheden) - proportionalitetsgrænsen - og vil være kraftigt tiltagende med voksende spændinger.



Figur 3.2. Lineære bidrag til krumning af arbejdskurver.

Set fra et revnemekanisk synspunkt er ulineære tidsafhængige krumningsbidrag forårsaget af to ting. Dels et stokastisk og tidsuafhængigt fænomen som er knyttet til forekomsten af inhomogeniteter, og dels et tidsafhængigt fænomen, som skyldes materialets viscoelastiske deformationsegeskaber.*)

Hvis man tænkte sig at man havde et fuldstændig homogent **) materiale med lineært elastiske deformationsegenskaber til sin

* Spændingskorosionsfænomener kan også give anledning til tidsafhængige bidrag til arbejdsliniekrumningen, men det vil vi se bort fra her.

** Men stadigvæk forsynet med mikrorevner.

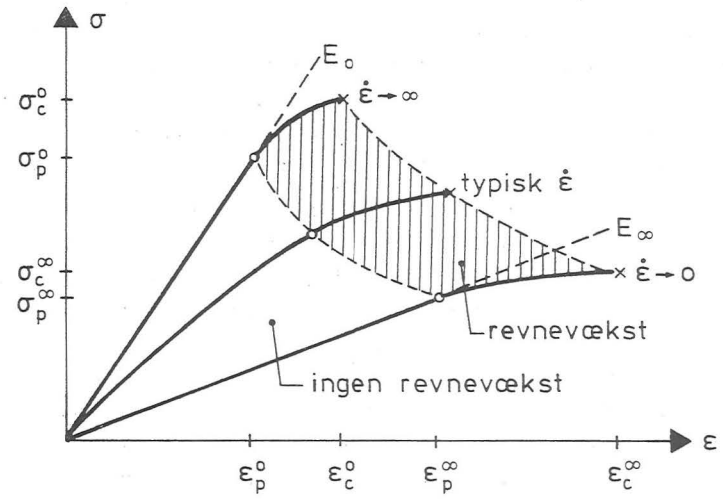
rådighed, så ville man virkelig måle arbejdslinier, som var lineære helt til brud. Tilføjer man imidlertid nogle inhomogeniteter, man kunne f.eks. antage at overfladeenergien Γ (se ligning 3.3) var et stokastisk felt, så ville man straks tilføre materialet en tilsyneladende ikke lineær opførsel, som vil vise sig ved et ulineært bidrag til krumningen på arbejdskurven.

Forklaringen er enkel. En del af materialets mikrorevner vil befinde sig i områder hvor overfladeenergien er lille, og de vil derfor starte med at løbe ved et relativt lavt spændingsniveau. De vil imidlertid typisk kune løbe et begrænset stykke, idet de vil stoppe igen når de løber ind i et område hvor overfladeenergien er så stor, at udbredelseskriteriet ikke længere er opfyldt. Revnerne er imidlertid blevet længere, de vil derfor åbne sig lidt noget mere, og væksten vil således give et bidrag til de målte tøjninger. Dette bidrag vil blive større i takt med at spændingerne øges da flere og flere revner ved et givet spændingsniveau vil være tilbøjelige til at udbrede sig. Til sidst vil spændingerne nå et niveau hvor en af revnerne udbreder sig uden at løbe ind i områder hvor overfladeenergien er stor nok til at de standses, og det endelige brud opstår.

Denne betragtningsmåde rummer i sig selv en mængde muligheder for at modellere fænomener som f.eks. spændingstilstandens og prøvelegemestørrelsens indflydelse på proportionalitetsgrænse og brudstyrke, men rummer til gengæld ingen muligheder for at modellere tidens indflydelse på disse størrelser.

Tidens indflydelse kan modelleres ved at antage lineært viscoelastiske egenskaber. Lægges denne beskrivelse til den anden ovenfor omtalte stokastiske model, så er det klart, at proportionalitetsgrænsen såvel som brudstyrken vil øges med tiltagende tøjningshastigheder medens de absolutte ulineære bidrag til tøjningerne vil øges med aftagende tøjningshastighed. Forholdene er illustreret i figur 3.3.

Figuren viser σ,ε sammenhænge for tilfældene $\dot{\varepsilon} \to 0$ og $\dot{\varepsilon} \to \infty$ samt for en typisk tøjningshastighed $\dot{\varepsilon}$. De to ekstremkurver



Figur 3.3 Arbejdskurvens afhængighed af tøjningshastigheden.

vil være retlinede op til proportionalitetspunkterne $(\varepsilon_p^0,\sigma_p^0)$, $(\varepsilon_p^\infty,\sigma_p^\infty)$ med hældningerne E_0 henholdsvis E_∞ som er grænseværdierne for relaxationsfunktionen for $t \to 0$ henholdsvis $t \to \infty$. Alle andre sammenhænge vil derimod vise mere eller mindre lineær krumning under proportionalitetspunktet.

Hvis materialet er isotropt og krybningen er balanceret, så kan det ved anvendelse af kriteriet (1.53), samt den konstitutive sammenhæng mellem ε og σ relativt let udledes, at der med anvendelse af betegnelserne fra figur 3.3 gælder

$$\frac{\sigma_p^0}{\sigma_p^\infty} = \sqrt{\frac{E_0}{E_\infty}} \qquad \frac{\varepsilon_p^0}{\varepsilon_p^\infty} = \sqrt{\frac{E_\infty}{E_0}} \tag{3.7.a}$$

Hvis vi endvidere antager at krybningsegenskaberne er homogene,

d.v.s. ikke varierer fra punkt til punkt i materialet, så vil alle revneudbredelseskurver være ens i de to ekstremtilfælde $\dot{\varepsilon} \to 0$ og $\dot{\varepsilon} \to \infty$, og der gælder da tillige

$$\frac{\sigma_c^0}{\sigma_c^\infty} = \sqrt{\frac{E_0}{E_\infty}} \qquad \frac{\varepsilon_c^0}{\varepsilon_c^\infty} = \sqrt{\frac{E_\infty}{E_0}} \tag{3.7.b}$$

3.4 Langtidsstyrker, konstant last.

Vi vil kun se på hvorledes levetiden for det i afsnit 3.1 omtalte problem med en enkelt revne afhænger af den påsatte last σ, af startrevnens størrelse $2a_0$, samt af materialets krybeegenskaber når den påsatte last antages at være konstant i tid. Levetiden bestemmes ved anvendelse af den i kapitel 2 omtalte teori baseret på skridtmodellen.

Når man skal se på hvorledes krybningsegenskaberne ifølge teorien kan influere på levetiden af et langtidsbelastet legeme, er det formålstjenligt at vælge en model for krybningen som er passende simpel, d.v.s. med nogle få hovedparametre som kan varieres, og som med god tilnærmelse kan tilpasses de fleste materialer. En sådan model vælges ved at antage balanceret krybning med krybefunktionen

$$K(t) = \frac{1}{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}(t/t_0)^\beta}\right) = \frac{1}{E}\,\varphi(t) \tag{3.8}$$

hvor $t_0 > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \beta < 1$ og hvor $\varphi(\cdot)$ betegnes krybetallet. D.v.s. at deformationsegenskaberne beskrives ved det tidsuafhængige Youngmodul E, samt ved det ovenfor angivne krybetal. Udtrykket for krybetallet følger den kendte potenslov

$$\varphi(t) = 1 + (t/t_0)^\beta \tag{3.9}$$

for små tider $t << t_o$ og går mod en konstant værdi $1 + \gamma$ for $t \to \infty$.

Ved indsættelse af revnespidsparametrene (3.2) i kriteriet (1.53) findes korttidsstyrken σ_o , d.v.s. den mindste last for hvilken levetiden T = 0, til

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{4E\Gamma}{\pi\rho a_o}} \tag{3.10}$$

Desuden indføres de dimensionsløse størrelser spændingsniveau θ og styrkeniveau ϕ ved

$$\theta = \frac{\sigma}{\sigma_o}$$

$$\phi = \sqrt{\frac{\delta}{2a_o}} \tag{3.11}$$

hvor δ er skridtparameteren, se (2.6). Herved kan korttidsstyrken skrives

for et legeme kurve

$k = \sigma\sqrt{a}\, f(a/b)$

$f(a/b)\cdot$

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{8E\Gamma}{\pi\rho\delta}} \cdot \phi \tag{3.12}$$

Vi vil nu undersøge hvorledes levetiden ifølge teorien afhænger af de indførte parametre γ , β , t_o , θ og ϕ .

Revnespidsparametrene (3.2) indsættes i udbredelseskriteriet (1.53), og vi får følgende ligning til bestemmelse af det tidsrum Δt som revnen står stille i en position svarende til længden 2a

$$\sigma^2 a \frac{\rho}{E}(2\varphi(\Delta t) - \varphi(2\Delta t)) = \frac{4}{\pi}\Gamma \tag{3.13}$$

Ved anvendelse af (3.10) reduceres ligningen til

$$\theta^2 \frac{a}{a_o}(2\varphi(\Delta t) - \varphi(2\Delta t)) = 1 \tag{3.14}$$

Ligningen må generelt løses numerisk for alle revnepositioner a_i , $a_{i+1} = a_i + \delta$, og levetiden T bestemmes ved addition

$$T = \sum_i \Delta t\left(\theta, \frac{a_i}{a_o}\right) , \quad a_i \le a_{kr} \tag{3.15}$$

hvor den kritiske revnelængde a_{kr} (den revnelængde hvor løsningen til (3.14) $\Delta t \to 0$) er givet ved

$$a_{kr} = \frac{a_o}{\theta^2} \tag{3.16}$$

Visse analytiske resultater kan dog udledes. Hvis revneudbredelsen fordrer passende mange skridt δ, så kan levetiden T appoximeres ved integralet

$$T' = \int_{a_o}^{a_{kr}} \frac{1}{v(a)}\, da \tag{3.17}$$

hvor hastigheden v bestemmes af

$$v(a) = \frac{\delta}{\Delta t\left(\theta, \frac{a}{a_o}\right)} \tag{3.18}$$

Indføres nu $\xi = a/a_o$, så fås af de to ovenstående ligninger, at

$$T' = \frac{a_o}{\delta} \int_1^{1/\theta^2} \Delta t(\theta, \xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f(\theta)}{\phi^2} \tag{3.19}$$

hvilket er et påfaldende simpelt resultat. Funktionen $f(\cdot)$ afhænger som det fremgår af (3.14) og (3.19) kun af θ og af formen af den normerede krybningsfunktion $\varphi(\cdot)$.

Udtrykket (3.19) er imidlertid en dårlig tilnærmelse for store ϕ. En anden tilnærmelse, som er rimeligt god for alle ϕ, θ er

$$T = t_s(\theta) + \frac{1}{2} \frac{f(\theta)}{\phi^2} \tag{3.20}$$

hvor t_s , tiden til begyndende revneudbredelse findes af

$$\theta^2(2\varphi(t_s) - \varphi(2t_s)) = 1 \qquad (3.21)$$

Forenkler vi udtrykket for krybetallet (3.8) lidt ved at lade $\gamma \to \infty$ så kan (3.14) løses med resultatet

$$\Delta t = c_o t_o \left(\frac{1}{\theta^2 \frac{a}{a_o}} - 1\right)^{1/\beta} \qquad (3.22)$$

hvor $c_o = \frac{1}{(2-2^{\beta})^{1/\beta}}$ (3.23)

For $\beta = 1/2$ fås ved indsættelse i (3.19)

$$f(\theta) = \frac{c_o t_o}{\theta^2}\left(\frac{1}{\theta^2} + 2\ell n\theta^2 - \theta^2\right) \qquad (3.24)$$

$$c_o = 2.91$$

Tilsvarende fås for $\beta = 1/4$

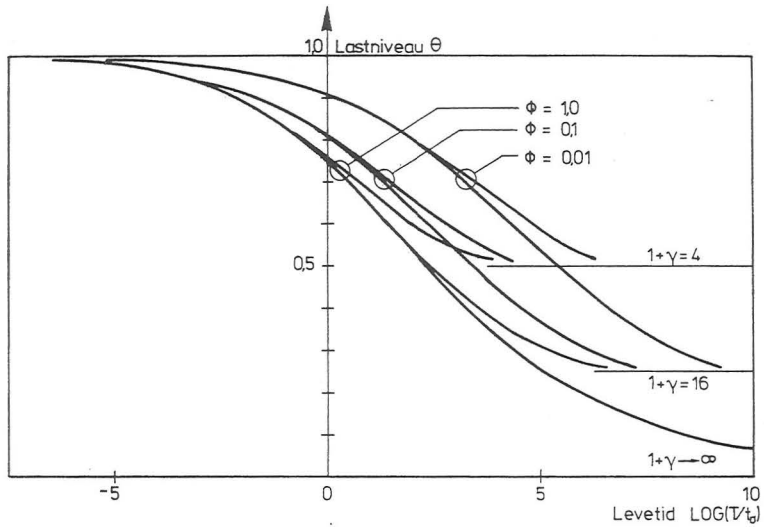
$$f(\theta) = \frac{c_o t_o}{\theta^2}\left(\frac{1}{3\theta^6} - \frac{2}{\theta^4} + \frac{6}{\theta^2} + 4\ell n\theta^2 - \theta^2 - \frac{10}{3}\right)$$

$$c_o = 2.31 \qquad (3.25)$$

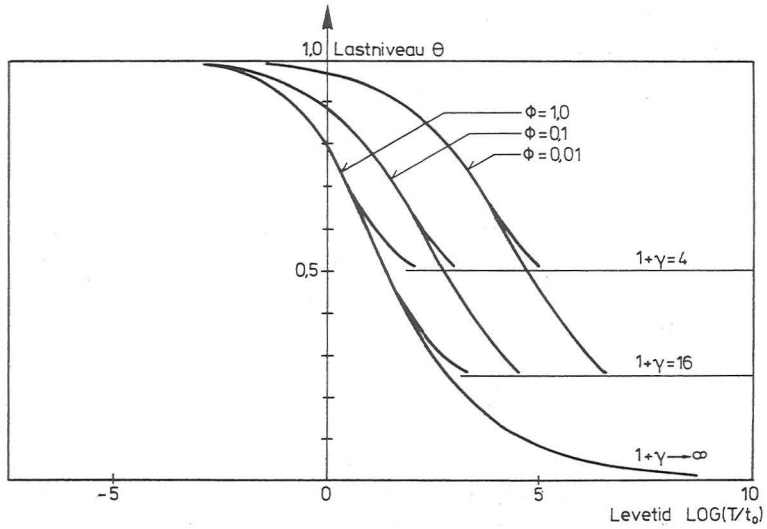
Levetiden bestemt af (3.14) og (3.15) er for $\beta = 1/2$ og $\beta = 1/4$ for forskellige værdier af ϕ og γ tegnet op i figur 3.4 og 3.5 som funktion af lastniveau'et θ.

Som det ses går levetiden $T \to 0$ for $\theta \to 1$ og vokser med aftagende θ. Levetiden T er endvidere proportional med relaxationstiden t_o .

Som man ser definerer $1 + \gamma$ en asymptoteværdi for lastniveauet,



Figur 3.4. Levetidskurver for $\beta = 0.25$



Figur 3.5. Levetidskurver for $\beta = 0.5$.

idet levetiden $T \to \infty$ for $\theta \to \theta_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}$. Dette er hvad man ville forvente, da styrken σ_∞ , den største last der kan virke uendeligt længde uden at afstedkomme revnevækst, kan findes af (3.10) ved erstatning af E med $E/1+\gamma$

$$\sigma_\infty = \frac{\sigma_o}{\sqrt{1+\gamma}}$$

$$\theta_\infty = \frac{\sigma_\infty}{\sigma_o} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} \tag{3.26}$$

Det ses at $\beta = 1/2$ giver stejlere levetidskurver end $\beta = 1/4$. Vi vil se på hvorledes det går for tilfældet $\gamma = \infty$ i grænserne $\beta \to 0$ og $\beta \to 1$. Dette gøres ved at analysere (3.22) for $a = a_o$. Ved at tage logaritmen findes let

$$\frac{1}{\theta^2} - 1 < 1 : \Delta t \to 0 \quad \text{for} \quad \beta \to 0$$

$$\frac{1}{\theta^2} - 1 > 1 : \Delta t \to \infty \quad \text{for} \quad \beta \to 0 \tag{3.27}$$

d.v.s. at levetidskurven bliver en vandret linie gennem $\theta = \sqrt{2}/2$. Dette skyldes at $\beta \to 0$ svarer til et elastisk materiale med Youngmodulen E/2.

For $\beta \to 1$ fås at $c_o \to \infty$, hvorfor

$$T \to \infty \quad \text{for} \quad \beta \to 1 \tag{3.28}$$

d.v.s. at levetidskurven bliver en vandret linie gennem $\theta = 1$. Grænsetilfældet $\beta \to 1$ svarer til et Maxwellmateriale med Youngmodulen E og viscositeten t_o/E, d.v.s. at materialet med krybningsfunktionen

$$K(t) = \frac{1}{E}(1 + t/t_o) \tag{3.29}$$

En af kvaliteterne ved det korrekte kriterium (1.53) er netop at ren Maxwellkrybning ikke kan give anledning til langsom revnevækst, materialet er ganske vist viscoelastisk, men det har ingen hukommelse, d.v.s. kan ikke huske sin udeformerede

tilstand.

Det mest interessante ved resultaterne i figur 3.5 og 3.6, samt det teoretiske resultat (3.19) - i hvert fald fra et anvendelsespunkt - er nok levetidens afhængighed af styrkeniveau'et ϕ . Som det fremgår vil et stærkt materiale (i denne forbindelse opfattet som et materiale med små startrevner) have kortere levetid for et givet lastniveau end et svagt materiale (d.v.s. med større fejl).

Øger man altså materialets styrkeniveau ϕ , så øger man ganske vist korttidsstyrken σ_o proportionalt hermed som angivet i formel (3.12), men samtidlig afkortes materialets levetid for et givet lastniveau θ approximativt med faktoren $1/\phi^2$ som angivet i (3.19). Det samlede resultat er, at man ved de lavere lastniveau'er, som jo er dem materialet udsættes for i praksis, kun opnår en beskeden effekt på langtidsstyrken ved at forøge korttidsstyrken gennem større styrkeniveau, d.v.s. tilstræbe mindre begyndelsesfejl i materialet.

Tilsvarende resultater kan findes af andre teorier, se f.eks. L.F. Nielsen [20], men er vist nok endnu ikke eftervist eksperimentelt.

I stedet for at antage en krybningsfunktion af formen (3.8) kunne det være nærliggende at antage at materialets krybningsegenskaber kunne beskrives ved en kombination af Hookeelementer og Newtonelementer, d.v.s. ved et diskret spektrum, se Brincker [17], appendix C. De syv simpleste kombinationer er analyseret i appendix C.

3.5 Langtidsstyrker, rampelast.

Vi vil nu analysere det i forrige afsnit betragtede levetidsproblem under antagelse af at den påsatte last σ er en lineær funktion af tiden. Desuden vil vi for simpelheds skyld nøjes med at betragte en krybefunktion af formen

$$K(t) = \frac{1}{E}\varphi(t) \tag{3.30}$$

hvor $\varphi(t) = 1 + (t/t_o)^\beta$, $0 < \beta < 1$

d.v.s. udtrykket givet ved (3.8) for $\gamma \to \infty$. Vi indfører som tidligere styrkeniveau'et

$$\phi = \sqrt{\frac{\delta}{2a_o}} \tag{3.31}$$

og korttidsstyrken

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{4E\Gamma}{\pi\rho a_o}} = \sqrt{\frac{8E\Gamma}{\pi\rho\delta}} \cdot \phi \tag{3.32}$$

Den påsatte spænding $\sigma = \sigma(t)$ antages som

$$\sigma(t) = \sigma_o \mu t \tag{3.33}$$

og vi definerer det tidsafhængige lastniveau

$$\theta(t) = \frac{\sigma(t)}{\sigma_o} = \mu t \tag{3.34}$$

Spændingsintensitetsfaktoren (mode 1) for begyndelseskonfigurationen $a = a_o$ er da

$$k(t) = \sigma_o \theta(t) \sqrt{a_o} \tag{3.35}$$

Den hertil svarende deformationsfaktor findes af (1.52)

$$d(t) = \frac{\rho}{E} \sigma_o \theta(t) \sqrt{a_o}\, \psi(t) \tag{3.36}$$

hvor $$\psi(t) = \frac{1}{t} \int_o^t \varphi(\tau)\, d\tau \tag{3.37}$$

Ved anvendelse af kriteriet (1.54), samt ligning (1.55) fås følgende ligning til bestemmelse af tidspunktet t_s til begyndende revneudbredelse

$$\theta(t_s)^2 \, (2\psi(t_s) - \chi(t_s)) = 1 \tag{3.38}$$

hvor $$\chi(t) = \frac{1}{t^2} \int_o^t \int_o^t \varphi(\tau+\eta)\, d\tau d\eta \tag{3.39}$$

Det bemærkes at ligning (3.35) og (3.36) kun gælder for begyndelseskonfigurationen $a = a_o$, og at en ligning svarende til (3.38) for revnepositioner hvor $a > a_o$ ikke umiddelbart kan udledes. Ønsker man imidlertid at opstille udtryk som gælder for alle revnepositioner vil det være formålstjenligt at benytte tilnærmede metoder af den art som er omtalt i appendix A, afsnit 2.

Indsættes (3.30) i (3.37) og (3.39) fås

$$\psi(t) = 1 + f_\chi(\beta) \, (t/t_o)^\beta \tag{3.40}$$

og $$\chi(t) = 1 + f_\psi(\beta) \, (t/t_o)^\beta \tag{3.41}$$

hvor $$f_\psi(\beta) = \frac{1}{1+\beta}$$

og $$f_\chi(\beta) = \frac{4(2^\beta - \frac{1}{2})}{(\beta+1)(\beta+2)} \tag{3.42}$$

Faktoren $f_\chi(\beta)$ afviger imidlertid kun ganske lidt fra 1 (maximalt 2.5 % i intervallet $\beta \in [0;1]$ og vi sætter derfor $f_\chi = 1$.

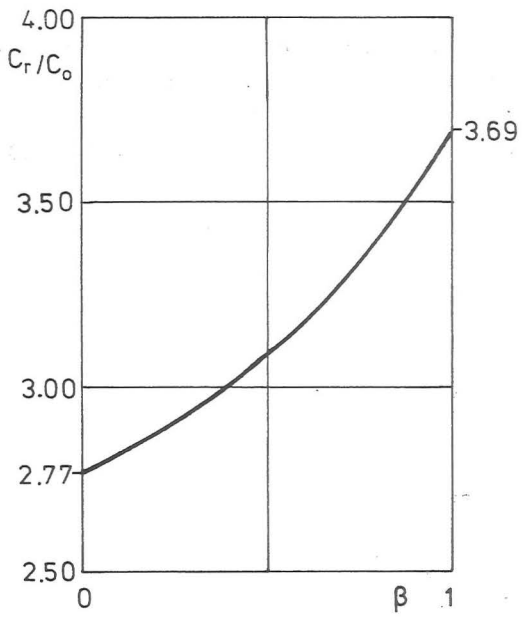
Indsættes (3.40) og (3.41) med $f_\chi = 1$ i (3.38) fås løsningen

$$t_s = c_r t_o \left(\frac{1}{\theta^2} - 1\right)^{1/\beta} \tag{3.43}$$

hvor $$c_r = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/\beta}$$

hvilket er præcis det samme resultat som for tilfældet med konstant last, jævnfør ligning (3.22), blot med konstanten c_o udskiftet med c_r . Kvotienten c_r/c_o er afbildet i figur 3.6.

Som det ses kan forholdet c_r/c_o med tilnærmelse sættes lig med 3. Et tilsvarende resultat er angivet i Nielsen [10] .



Figur 3.6. Kvotienten c_r/c_o som funktion af potensen β .

De totale levetider T er bestemt på følgende måde. For større værdier af θ end $\theta_s = \mu t_s$ er $\theta(t)$ tilnærmet med to trappekurver

$$\theta_{\phi}(t) = \theta_s + \sum_i \Delta\theta_i^{\phi}\, \Delta(t-t_i^{\phi})$$

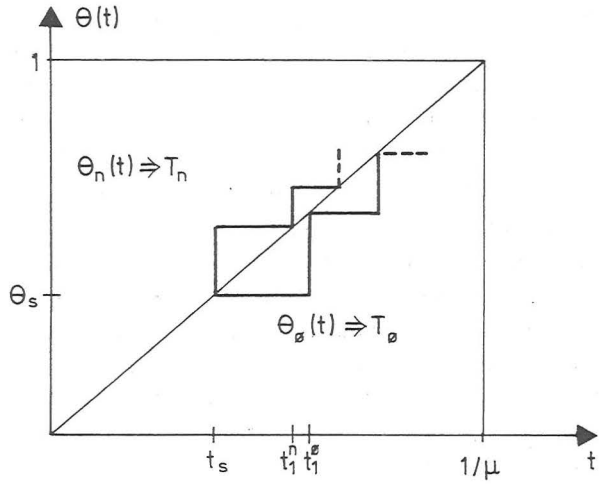
$$\theta_n(t) = \theta_s + \sum_i \Delta\theta_i^{n}\, \Delta(t-t_i^{n}) \qquad (3.44)$$

som giver anledning til hver sin revneudbredelsesproces med fremrykning af revespidserne til tidspunkterne $\{t_i^{\phi}\}$, henholdsvis $\{t_i^{n}\}$. Springene $\Delta\theta_i^{\phi}$ og $\Delta\theta_i^{n}$ er bestemt således at det for alle i gælder at

$$\lim_{t\to t_i^{\phi}} \theta_{\phi}(t) = \mu t_i^{\phi} \quad ; \quad t > t_i^{\phi}$$

$$\lim_{t\to t_i^{n}} \theta_n(t) = \mu t_i^{n} \quad ; \quad t < t_i^{n} \qquad (3.45)$$

se figur 3.7.



Figur 3.7. Trappetilnærmelser til det lineært voksende lastniveau for $t > t_s$.

De hertil svarende tidsrum Δt_i^{ϕ} henholdsvis Δt_i^{n} hvor revnen står stille i en given position, kan da findes af udtrykket for konstant last (3.22), og en øvreværdi T_{ϕ} henholdsvis en nedreværdi T_n for levetiden kan den bestemmes af

$$T_{\phi} = t_s + \sum_i \Delta t_i^{\phi}$$

$$T_n = t_s + \sum_i \Delta t_i^{n} \qquad (3.46)$$

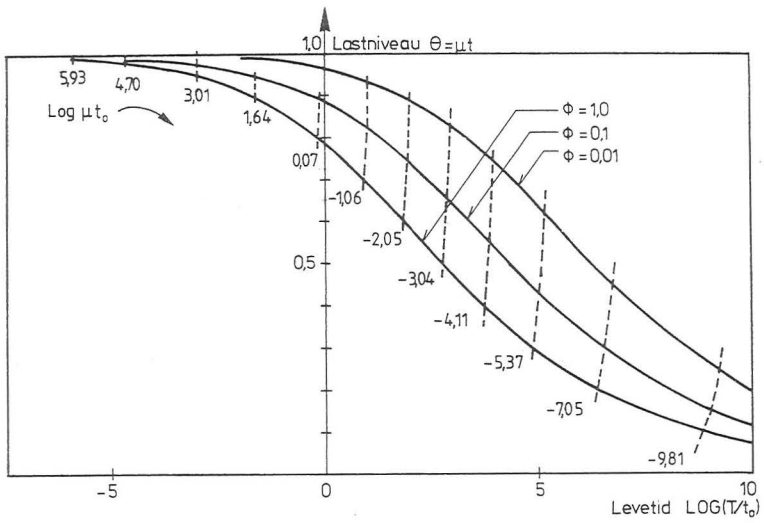
Metoden kan betragtes som en kombination af eksakt analyse (bestemmelse af t_s) og en tilnærmelsesmetode af den art som er

omtalt i appendix A, afsnit 2, hvor den tidslige variation af spændingsintensitetsfaktoren for hver position af revnen a > a_o er tilnærmet med en enkelt enhedsfunktion. Resultaterne er rimeligt nøjagtige bortset fra høje lastniveau'er hvor der er få skridt i revneudbredelsesprocessen.

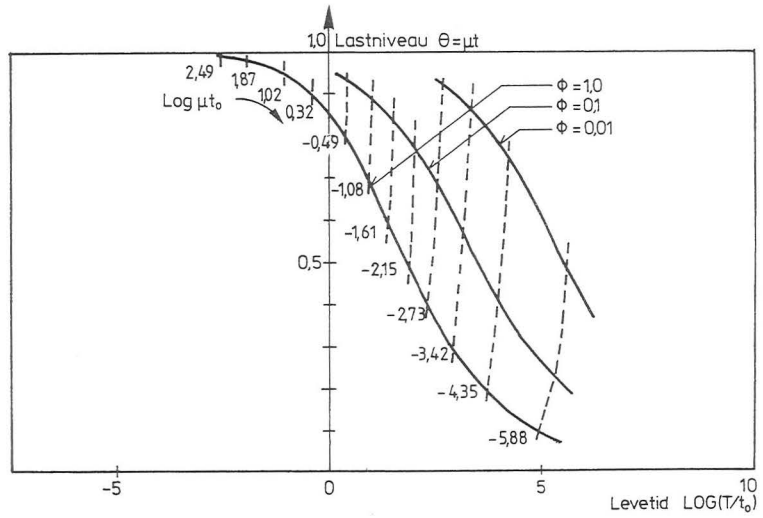
De numeriske resultater er vist i figur 3.8 for $\beta = 0.25$ og i figur 3.9 for $\beta = 0.5$; i begge tilfælde for $\phi = 1.0$, 0.1 og 0.01. Desuden er værdier for log (μt_o) markeret på kurverne $\phi = 1.0$, som med god tilnærmelse (indenfor tegnenøjagtigheden på figur 3.8 og 3.9) er identiske med kurverne som angiver tidspunktet til begyndende revneudbredelse. De punkterede linier angiver det videre brudforløb. På figur 3.9 kan det f.eks. således aflæses, at hvis $\log(\mu t_o) = -4.35$, så starter revnen med at løbe ved et lastniveau på ca. 0.20 og det endelige brud sker ved et lastniveau på ca. 0.75 hvis $\phi = 0.01$.

Det er af en vis praktisk interesse at sammenligne resultaterne fra rampelastpåvirkning med resultaterne for den konstante last udledt i forrige afsnit. Af de numeriske resultater angivet i figur 3.8 og 3.9 for rampelastpåvirkning og af de teoretiske resultater (3.20) og (3.24), samt (3.25) for konstant last, kan forholdet mellem levetiden for rampelast T_r og levetiden for konstant last T_o bestemmes. Logaritmen til kvotienten T_r/T_o er angivet i figur 3.10.

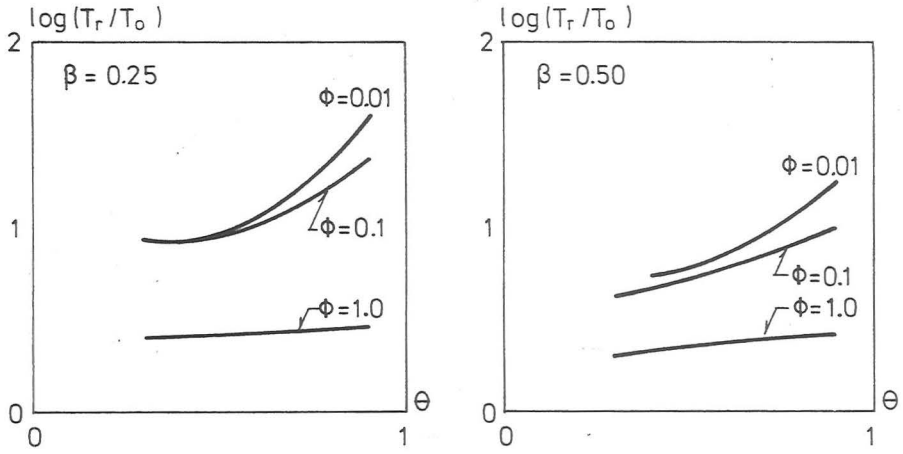
For $\phi = 1.0$ ses det at $\log(T_r/T_o) \cong 0.4$-0.5 for store værdier af θ i overensstemmelse med de tidligere fundne resultater for c_r/c_o , jævnfør figur 3.6. For mindre værdier af ϕ derimod bliver $\log(T_r/T_o)$ som det ses noget større. Nielsen [10] er ved en tilsvarende sammenligning af levetidsresultater for rampelast og konstant last bestemt på grundlag af en Dugdale-Barenblatt-model, kommet til at $\log(T_r/T_o) \cong 0.5$ som et universalt resultat. De ovenfor angivne resultater er ikke i overensstemmelse hermed da $\log(T_r/T_o)$ for de undersøgte værdier af ϕ, θ ses at variere fra ca. 0.3 til ca. 1.6.



Figur 3.8. Levetidskurver for $\beta = 0.25$.



Figur 3.9. Levetidskurver for $\beta = 0.5$.
Eksempel: $\log(\mu t_o) = -4.35 \Rightarrow \theta_s \cong 0.20$, $\theta_{brud} \cong 0.41$ for $\phi = 0.1$ og $\theta_s \cong 0.20$, $\theta_{brud} \cong 0.75$ for $\phi = 0.01$.



Figur 3.10. Forholdet mellem levetider for rampelast T_r og levetider for konstant last T_o .

KONKLUSION

Der skal her gøres status over de resultater vedrørende de lineært viscoelastiske materialers revnemekanik, som er opnået og beskrevet i denne rapport, samt rapporterne [17] og [18].

Der er defineret 6 indbyrdes uafhængige revnespidsparametre (isotrope tilfælde), som giver en fuldstændig beskrivelse af revnespidstilstanden for et vilkårligt lineært viscoelastisk revneproblem. Der er desuden udviklet metoder til bestemmelse af disse parametre for problemer med vilkårlige randbetingelser, vilkårlige materialeegenskaber, og både for stillestående og løbende revner [17].

Med udgangspunkt i disse resultater er der diskuteret forskellige muligheder for revnemodeller og udbredelseskriterier [18]. På basis af energibevarelsessætningen og entropiproduktionsuligheden er der opstillet udbredelseskriterier udtrykt ved revnespidsparametrene som opfylder de termodynamiske betingelser. Det viser sig imidlertid at man på grundlag heraf alene ikke kan opstille en brugbar teori til bestemmelse af revneudbredelsesforløbet i lineært viscoelastiske materialer, idet der opstår et paradoks - der vil være tilfælde hvor teorien hverken tillader den betragtede revne at være stationær eller at udbrede sig. Der må derfor indføres en revnemodel, d.v.s. én eller anden modifikation af teorien som giver en så meget bedre beskrivelse af den fysiske virkelighed, at dette paradoks forsvinder. Det der er foreslået her, er at man antager en model, der lægger visse bånd på revnekinematikken, idet man kun tillader revnen at udbrede sig i skridt med længden δ ; skridtlængden δ antages at være en materialekonstant. Herved fremkommer skridtteorien, som er fremstillet og anvendt i hærværende rapport.

Skridtteorien viser sig at være i god overensstemmelse med de velkendte revnevækstforsøg udført af Mueller & Knauss [9], [5], og viser sig at give en beskrivelse af de klassiske langtidsstyrkeproblemer som i hvert fald er kvalitativt korrekt. Dette er imidlertid ikke nogen kvalitet som er specielt for skridtteorien, idet de fleste andre teorier også er i god overensstemmelse med Mueller & Knauss's resultater og giver kvalitativt korrek-

te levetidsresultater for de klassiske langtidsstyrkeproblemer.

Spørgsmålet er om Mueller & Knauss' resultater ikke er for taknemmelige at sammenligne med, når deres forsøgsresultater er udført ved så store krybetal som tilfældet er. Det er i hvert fald en kendsgerning, at de fleste byggematerialer såsom træ, beton og strukturelle lime typisk vil opnå krybetal på højst 3-5 indenfor en acceptabel levetid, og det er desuden en kendsgerning, at der er tale om en betydelig teoretisk simplifikation at kunne se bort fra at krybefunktionens begyndelsesværdi er forskellig fra nul.

Man må nok konkludere, at gode forsøgsresultater, som reflekterer byggematerialernes langtidsstyrkeegenskaber, og som er velegnede til at teste teorier på, stort set ikke findes i litteraturen. Man må derfor håbe, at de undersøgelser, som er sat i gang på afdelingen med støtte fra STVF for at skaffe sådanne forsøgsresultater til veje, vil medvirke til at afhjælpe dette problem.

Man kan altså ikke på nuværende tidspunkt afgøre om den formulerede teori er i bedre overensstemmelse med relevante forsøgsresultater end andre teorier.

Teoriens eneste virkelige styrke på nuværende tidspunkt er at den er relativt enkel , konsistent og generel. Enkel forstået på den måde, at den bygger på nogle få klart gennemskuelige, antagelser

- lineært viscoelastiske medium
- overfladedissipationen = 0
- revnevækst i skridt = δ .

Konsistent forstået på den måde, at teorien ikke er i strid med nogle af kontinuummekanikkens love. De udledte løsninger for revnespidsparametrene er således løsninger til et randværdiproblem, og tilfredsstiller f.eks. en konstitutiv ligning, som er termodynamisk mulig, d.v.s. opfylder entropiproduktionsuligheden. Teoriens løsninger for problemer med revnevækst opfylder desuden for alle feltstørrelsers vedkommende de respektive kontinuummekaniske betingelser, herunder de termodynamiske.

Teorien er generel forstået på den måde, at den ikke er knyttet til et specifikt randværdiproblem eller en specielt simpel klasse af randværdiproblemer (f.eks. rene spændingsrandværdiproblemer), men kan benyttes til bestemmelse af revneudbredelseshastigheder for et vilkårligt (statisk) randværdiproblem, d.v.s. vilkårlig geometri og vilkårlige randbetingelser.

Man kunne frygte, at teorien var for enkel, idet man kunne have sine tvivl om f.eks. det rimelige i at basere en teori på singulære løsninger. Det er da også muligt, at dette er for grov en tilnærmelse, men på nuværende tidspunkt foreligger der ikke beviser for eller indikationer af, at dette skulle være tilfældet, og der kan derfor ikke nævnes ret mange gode grunde til at gøre tingene mere komplicerede. Mere "realistiske" teorier baseret på f.eks. Dugdale-Barenblatt modeller er nemlig langt vanskeligere at formulere korrekt end den teori som er fremstillet her; der henvises til diskussionen herom i afsnit 2.4. Desuden henvises der til diskussionen vedrørende lineære teoriers begrænsninger i [17], afsnit 3.4.

Selv om at det skulle vise sig, at den opstillede teori baseret på skridtmodellen ikke er god til at beskrive revnevækst i materialer med små krybetal, så betyder det imidlertid ikke nødvendigvis, at grundlaget må kaseres. Skal grundlaget bibeholdes (singulære løsninger, etc) betyder det blot, at revnevæksten skal foregå diskontinuert, d.v.s. i skridt med en vis minimumslængde, og vi har valgt det simplest mulige, nemlig at antage at skridtlængden er konstant. Man kunne imidlertid tænke sig andre muligheder.

Den omstændighed at revnevæksten nødvendigvis må foregå i skridt med en vis minimumslængde for at fjerne revneudbredelsesparadokset, kunne tyde på at der var visse dynamiske effekter som styrer dette; effekter som vi har set bort fra. Hvis man accepterer denne idé, så er det jo nærliggende at antage at skridtlængden er en funktion af det elastiske potential som frigøres ved at revnen starter med at løbe. Energitætheden w omkring revnespidsen kan i de sædvanlige r, θ koordinater skrives, se ref. [32] i [17]

$$w = \frac{S_o(\theta)+S(\theta)}{r}$$

hvor S_o+S er energitæthedsfaktoren og hvor S_o er det elastiske bidrag (svarende til begyndelsesværdien af krybningsfunktionen). Det ville altså være nærliggende at antage at skridtlængden δ var en funktion af S_o (for en eller anden fast θ)

$$\delta = \delta(S_o)$$

og et simpelt gæt kunne være

$$\delta = \delta_o + \alpha S_o$$

hvor α og δ_o så kunne antages at være materialekonstanter.

Skal der fremstilles en kort konklusion, så kan denne derfor være, at der er opstillet en rimeligt teoretisk velunderbygget teori, som er karakteriseret ved at være ret generelt anvendelig og rimelig nem at benytte, og at teorien rummer gode muligheder for modifikationer, som kan gennemføres ret nemt, da de ikke griber ind i de grundlæggende resultater, bestemmelse af revnespidsløsninger, revneudbredelseskriterier osv.

APPENDIX A

Udbredelseskriterier baseret på global energibalance.

A.1. Udledelse af kriterier

Vi betragter en revnespids i en fast position på sin udbredelseskurve til tiden t = 0 for et plant lineært viscoelastisk problem. Om revnen tidligere har udbredt sig eller om legemet har været belastet for tiden t < 0 er ligegyldigt.

Vi vil nu bestemme udbredelseskriteriet for denne revnespids for en bred klasse af belastningstilfælde. Det eneste vi vil forlange vedrørende belastningens art er at spændingerne omkring revnespidsen kan skrives

$$\sigma_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \sigma^o_{ij}(\underset{\sim}{x})\ f(t) \qquad (A.1)$$

Den Helmholtz fri energi kan da skrives

$$\rho\psi^i = A_{ijk\ell}\ \sigma^o_{ij}\sigma^o_{k\ell} - \frac{1}{2}\ B_{ijk\ell}\ \sigma^o_{ij}\ \sigma^o_{k\ell} \qquad (A.2)$$

hvor $A_{ijk\ell}$ og $B_{ijk\ell}$ er funktioner af tiden givet ved

$$A_{ijk\ell} = f(t) \int_{o^-}^{t} K_{ijk\ell}(t-\tau)\ \frac{df(\tau)}{d\tau}\ d\tau \qquad (A.3)$$

$$B_{ijk\ell} = \int_{o^-}^{t}\ \int_{o^-}^{t} K_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta)\ \frac{df(\tau)}{d\tau}\ \frac{df(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta \qquad (A.4)$$

Lad os nu definere tøjningerne

$$\varepsilon'_{ij} = C_{ijk\ell}\sigma^o_{ij} \qquad (A.5)$$

hvor $C'_{ijk\ell} = 2A_{ijk\ell} - B_{ijk\ell}$ (A.6)

Den fri energi kan da skrives

$$\rho\psi^i = \frac{1}{2}\,\sigma^o_{ij}\,\varepsilon'_{ij} \tag{A.7}$$

Spændingerne σ^o_{ij} og tøjningerne ε'_{ij} udgør løsningen til det korresponderende elastiske problem med de elastiske konstanter $C_{ijk\ell}$. Lad det hertil svarende flytningsfelt være u'_i . Udbredelsesbetingelsen kan da udtrykkes ved J-integralet.

$$e_k \int_{\Gamma_c} \left(\rho\psi^i - u'_{i,k}\,\sigma^o_{ij}\,n_j\right) ds = 2\Gamma \tag{A.8}$$

som igen kan omformes til

$$k^o_\alpha\, d'_\alpha = \frac{4}{\pi}\,\Gamma \tag{A.9}$$

hvor k^o_α og d'_α , $\alpha = 1,2$, er de til σ^o_{ij} h.h.v. u'_i svarende intensitetsfaktorer og deformationsfaktorer. Deformationsfaktorerne er funktioner af størrelserne $C_{ijk\ell}$, og udbredelseskriteriet har da formen

$$k^o_\alpha\, d'_\alpha\,(C_{ijk\ell}) = \frac{4}{\pi}\,\Gamma \tag{A.10}$$

Lad os nu betragte det isotrope tilfælde med balanceret krybning. Materialets deformationsegenskaber er da beskrevet ved et konstant poissons forhold ν og en enkelt krybningsfunktion $K(\cdot)$.

I dette tilfælde fås

$$d'_\alpha = \rho(\nu)\left[f(t)\int_{o^-}^{t} K(t-\tau)\,\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_{o^-}^{t}\int_{o^-}^{t} K(2t-\tau-\eta)\,\frac{df(\tau)}{d\tau}\,\frac{df(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta\right] k^o_\alpha \tag{A.11}$$

og udbredelseskriteriet får da formen

$$2k_\alpha(t)d_\alpha(t) - \rho(\nu)\int_{o^-}^{t}\int_{o^-}^{t} K(2t-\tau-\eta)\,\frac{dk_\alpha(t)}{d\tau}\,\frac{dk_\alpha(\eta)}{d\eta}\,d\tau d\eta = \frac{4}{\pi}\,\Gamma \tag{A.12}$$

hvor
$$k_\alpha(t) = k^o_\alpha\, f(t)$$
$$d_\alpha(t) = \rho(\nu)\int_{o^-}^{t} K(t-\tau)\,\frac{dk_\alpha(t)}{d\tau}\,d\tau \tag{A.13}$$

For en enhedslast $k_\alpha(t) = k^o_\alpha\,\Delta(t)$ fås umiddelbart kriteriet

$$2k^o_\alpha d_\alpha(t) - \rho(\nu)\,k^o_\alpha\,k^o_\alpha\,K(2t) = \frac{4}{\pi}\,\Gamma$$
$$\Downarrow$$
$$k^o_\alpha(2d_\alpha(t) - d_\alpha(2t)) = \frac{4}{\pi}\,\Gamma \tag{A.14}$$

i overensstemmelse med det tidligere resultat i [19] .

For en rampelast $k_\alpha(t) = k^o_\alpha \beta t\Delta(t)$ fås

$$2k_\alpha(t)d_\alpha(t) - \rho(\nu)\,k_\alpha(t)\,k_\alpha(t)\,G(t) = \frac{4}{\pi}\,\Gamma$$
$$\Downarrow$$
$$k_\alpha(2d_\alpha(t) - \rho(\nu)\,k_\alpha(t)\,G(t)) = \frac{4}{\pi}\,\Gamma \tag{A.15}$$

hvor
$$G(t) = \frac{1}{t^2}\int_{o}^{t}\int_{o}^{t} K(\tau+\eta)\,d\tau d\eta \tag{A.16}$$

De ovenfor angivne udtryk er alle udledte med udgangspunkt i spændingerne hvorved materialeegenskaberne i ligninger som (A.10), (A.11), o.s.v. udtrykkes ved krybningsfunktionerne $K_{ijk\ell}(\cdot)$. Det kan være praktisk i nogle tilfælde at have de tilsvarende udtryk udledt med udgangspunkt i tøjningerne, hvorved materialeegenskaberne i de nævnte betingelser i stedet bliver udtrykt ved relaxationsfunktionerne $R_{ijk\ell}(\cdot)$.

Analogt antages nu derfor

$$\varepsilon_{ij}(\underset{\sim}{x},t) = \varepsilon^{o}_{ij}(\underset{\sim}{x})g(t) \qquad (A.17)$$

hvorved

$$\rho\psi^{i} = \frac{1}{2} E_{ijk\ell}\ \varepsilon^{o}_{ij}\ \varepsilon^{o}_{k\ell} \qquad (A.18)$$

hvor $E_{ijk\ell} = \int_{o^-}^{t}\int_{o^-}^{t} R_{ijk\ell}(2t-\tau-\eta)\ \frac{dg(t)}{dt}\ \frac{dg(\eta)}{d\eta}\ dtd\eta$ (A.19)

Vi definerer nu spændingerne

$$\sigma'_{ij} = E_{ijk\ell}\ \varepsilon^{o}_{k\ell} \qquad (A.20)$$

Analogt til (A.10) fås da udbredelseskriteriet på formen

$$k'_{\alpha}(E_{ijk\ell})\ d^{o}_{\alpha} = \frac{4}{\pi}\ \Gamma \qquad (A.21)$$

Det til (A.12) analoge udtryk for det isotrope tilfælde med balanceret krybning udledes tilsvarende til

$$\frac{1}{\rho(\nu)}\int_{o^-}^{t}\int_{o^-}^{t} R(2t-\tau-\eta)\ \frac{dd_{\alpha}(\tau)}{d\tau}\ \frac{dd_{\alpha}(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta = \frac{4}{\pi}\ \Gamma \qquad (A.22)$$

For et enhedsforløb $d_{\alpha}(t) = d^{o}_{\alpha}\Delta(t)$ fås betingelsen

$$k_{\alpha}(2t)\ d_{\alpha}(t) = \frac{4}{\pi}\ \Gamma \qquad (A.23)$$

og for et rampeforløb (konstant tøjningshastighed) $d_{\alpha}(t) = d^{o}_{\alpha}\beta t\Delta(t)$ fås

$$\frac{1}{\rho(\nu)}\ d_{\alpha}(t)^{2}\ H(t) = \frac{4}{\pi}\ \Gamma \qquad (A.24)$$

hvor $H(t) = \frac{1}{t^{2}}\int_{o^-}^{t}\int_{o^-}^{t} R(\tau+\eta)\ d\tau d\eta$ (A.25)

A.2 Matrixrepresentationer.

I mange tilfælde kan udtryk som (A.12) og (A.22) være vanskelige at udregne i hånden, og der skal derfor gives nogle matrixtilnærmelser til (A.12) og (A.22) som er velegnede til edb.

Vi skriver (A.12) lidt om og får

$$\int_{o^-}^{t}\int_{o^-}^{t} \{2K(t-\tau)\Delta(t-\eta)-K(2t-\tau-\eta)\}\ \frac{dk_{\alpha}(\tau)}{d\tau}\ \frac{dk_{\alpha}(\eta)}{d\eta}\ d\tau d\eta = \frac{4}{\pi}\ \frac{\Gamma}{\rho(\nu)} \qquad (A.26)$$

Vi indfører så en trappefunktion

$$k^{a}_{\alpha}(t) = \sum_{i} \Delta k^{\alpha}_{i}\ \Delta(t-t_{i}) \qquad (A.27)$$

som en approximation til $k_{\alpha}(t)$ hvorved (A.26) reduceres til

$$\sum_{i}\sum_{j} \{2K(t-t_{i})\Delta(t-t_{j})-K(2t-t_{i}-t_{j})\}\ \Delta k^{\alpha}_{i}\ \Delta k^{\alpha}_{j} = \frac{4}{\pi}\ \frac{\Gamma}{\rho(\nu)} \qquad (A.28)$$

sum over α. Vi indfører nu matricen $\underline{\underline{K}}(t)$ med de tidsafhængige elementer $K^{a}_{ij}(t)$ defineret ved

$$K^{a}_{ij}(t) = 2K(t-t_{i})\Delta(t-t_{j})-K(2t-t_{i}-t_{j}) \qquad (A.29)$$

samt søjlevektorerne $\Delta\underset{\sim}{k}_{\alpha}$ med elementerne Δk^{α}_{i} . Udbredelseskriteriet (A.26) kan da approximeres ved matrixudtrykket

$$\Delta\underset{\sim}{k}^{T}_{\alpha}\ \underline{\underline{K}}(t)\ \Delta\underset{\sim}{k}_{\alpha} = \frac{4}{\pi}\ \frac{\Gamma}{\rho(\nu)} \qquad (A.30)$$

hvor $\Delta\underset{\sim}{k}^{T}_{\alpha}$ betegner den transponerede af $\Delta\underset{\sim}{k}_{\alpha}$; der er sum over α.

På samme måde kan der opskrives en matrixtilnærmelse for udbredelseskriteriet(A.22). Ved at indføre trappeapproximationen

$$d^{a}_{\alpha}(t) = \sum_{i} \Delta d^{\alpha}_{i}\ \Delta(t-t_{i}) \qquad (A.31)$$

fås $\Delta\underset{\sim}{d}_\alpha^T \underline{\underline{R}}(t) \Delta\underset{\sim}{d}_\alpha = \frac{4}{\rho} \rho(\nu) \Gamma$ (A.32)

hvor $\underline{\underline{R}}(t)$ er en matrix med de tidsafhængige elementer $R^a_{ij}(t)$ givet ved

$$R^a_{ij}(t) = R(2t-\tau-\eta) \quad (A.33)$$

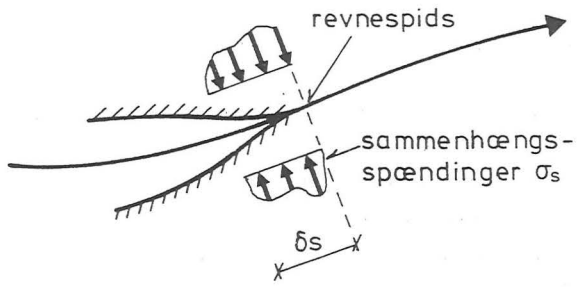
Nøjagtigheden af approximationerne (A.30) og (A.32) vil afhænge af antallet af trapper i approximationerne for $k_\alpha(t)$ henholdsvis $d_\alpha(t)$, samt af disses placering. Det skal der ikke kommes nærmere ind på her, men det skal nævnes, at der kan indføres højre- og venstreapproximationer, og på grundlag heraf bestemmes øvre og nedre grænser for matrixrepresentationerne idet man følger de ideer som er omtalt i Brincker [17] appendix C.

APPENDIX B

Dugdale-Barenblatt-modeller.

B.1 Generelt.

Man antager her at revnefronten (zonen lige omkring revnespidsen) holdes sammen af nogle kohæsive spændinger, de såkaldte sammenhængsspændinger, som virker over en vis strækning δs omkring revnespidsen, se figur B.1.



Figur B.1. Generel Dugdale-Barenblatt model.

Disse sammenhængsspændinger σ_s og den strækning de virker over, afpasses da således, at de resulterende spændingsintensitetsfaktorer forsvinder, og man har herved skabt en model med endelige spændinger ved revnespidsen.

Lad os betragte et enkeltmodeproblem, lad os sige en ren åbningsmode (mode 1 tilstand), og lad bidraget til intensitetsfaktoren fra sammenhængsspændingen være k^{is}, bidraget fra belastningerne på den resterende del af revneranden være k^{i1} og bidraget fra belastningerne på den ydre rand være k^y.

Sammenhængsspændingerne afpasses da således at

$$k^y + k^{is} + k^{is} = 0 \quad (B.1)$$

Da spændingsintensitetsfaktoren for et lineært viskoelastisk revneudbredelsesproblem ikke afhænger af revneudbredelseshistorien, jvnf. Brincker [18], så kan modellen i hvert punkt på udbredelseskursen fortløbende fastlægges uden at revneudbredelseshastigheden behøver at være kendt; dette er en vigtig iagtagelse.

Når spændingsintensitetsfaktoren k forsvinder, så gør de tilsvarende deformationsfaktorer c og d det også *) . Vi kan derfor ikke karakterisere revnespidstilstandene ved disse størrelser længere. Tilstandene må karakteriseres ved spændings- og deformationsstørrelser valgt med baggrund i den aktuelle model.

Det er klart, at det er smart at karakterisere revnespidstilstanden ved størrelser, som indgår på simpel vis i det kriterium for revneudbredelse, som skal benyttes. For disse modeller er det imidlertid umuligt at angivne eksakte kriterier for lineært viscoelastiske revneudbredelsesproblemer selv i de helt simple tilfælde, se f.eks. Christensen [2], og vi vil som kriteirum derfor i øvrigt uden nærmere begrundelse vælge J-integralet , kendt fra de tidsuafhængige teorier.

Det er i dette tilfælde praktisk at karakterisere spændingstilstanden ved størrelsen Σ , som for det korresponderende elastiske problem er givet ved

$$J^e = \frac{\alpha+1}{8\mu} \Sigma^{e^2} a \qquad (B.2)$$

hvor J^e er J-integralet for det korresponderende elastiske problem, μ er forskydningsmodulen, a er en længde som karakteriserer revnens størrelse (normalt den halvde revnelængde), og hvor størrelsen α er givet ved

*) Dette betyder bl.a. at den belastede revne ikke åbnes op til en glat kurve omkring revnespidsen, men at revneranden vedbliver med at have et 180^o s knæk i den deformerede tilstand.

$$\frac{\alpha+1}{8\mu} = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E} & \text{plan tøjning} \\ \\ \frac{1}{E} & \text{plan spænding} \end{cases} \qquad (B.3)$$

Som deformationsparameter χ vælger vi den størrelse, som (for det korresponderende elastiske problem) ganget med spændingstørrelsen Σ giver J-integralet, d.v.s. at χ for det korresponderende elastiske problem er givet ved

$$\chi^e = \frac{\alpha+1}{8\mu} \Sigma^e a \qquad (B.4)$$

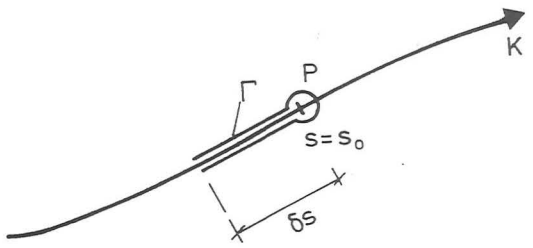
Lad os nu betragte revnen som med hastigheden v er på vej mod et punkt P svarende til parameterværdien s_o på udbredelseskurven K. Vi vil antage, at hastigheden v kan regnes konstant i intervallet $s \in [s_o - \delta s , s_o]$.

Vi bestemmer da hastigheden v for revneudbredelsen i punktet P på følgende måde.

Først fastlægges sammenhængsspændingerne σ_s og størrelsen δ_s af frontzonen, således at ligning (B.1) er opfyldt.

Herefter bestemmes J-integralet på følgende måde. Vi bestemmer først J-integralet J_p^e i punktet P for det korresponderende elastiske problem. Det er her smart at benytte en integrationsvej Γ , der som vist på figur B.2 løber fra punktet $s_o - \delta s$ på den ene side af udbredelseskurven K, langs kurven K, rundt om punktet P, og tilbage langs K til punktet $s_o - \delta s$ umiddelbart på den anden side af udbredelseskurven K , se Rice [13] .

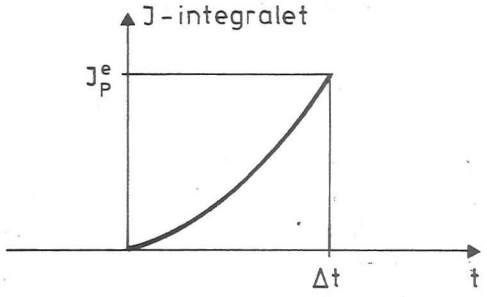
Lad revnespidsen ankomme til positionen $s_o - \delta s$ til tidspunktet $t = 0$. J integralet er da nul for alle tider $t < 0$. I tidsrummet $t \in [0;\Delta t]$ hvor revnespidsen bevæger sig med den konstante hastighed v fra positionen $s_o - \delta_s$ til positionen s_o svarende til punktet P, vokser J-integralet fra nul til værdien J_p^e , se figur B.3.



Figur B.2. Beregning af J-integralet.

Forløbet af $J^e = J^e(t)$ i tidsrummet $t \in [0;\Delta t]$ er karakteristisk for den valgte revnemodel og det betragtede revneproblem. Tidsrummet Δt er givet ved

$$\Delta t = \frac{\delta s}{v} \tag{B.5}$$



Figur B.3. J-integralet's variation i tiden.

Spændingsstørrelsen Σ^e og deformationsstørrelsen χ^e kan da bestemmes af (B.2) og (B.4). Disse størrelser samt J-integralet J^e vil i det generelle tilfælde foruden at være funktioner af tiden t også være funktion af forskydningsmodulen μ og kompressionsmodulen κ, altså

$$\begin{aligned} J^e &= J^e(2\mu, 3\kappa, t) \\ \Sigma^e &= \Sigma^e(2\mu, 3\kappa, t) \\ \chi^e &= \chi^e(2\mu, 3\kappa, t) \end{aligned} \tag{B.6}$$

De hertil svarende lineært viscoelastiske størrelser findes da af korrespondensprincippet

$$\begin{aligned} J(t) &= \underset{p\rightsquigarrow t}{\mathscr{L}^{-1}} J^{e*}(R_1^*(p), R_2^*(p), p) \\ \Sigma(t) &= \underset{p\rightsquigarrow t}{\mathscr{L}^{-1}} \Sigma^{e*}(R_1^*(p), R_2^*(p), p) \\ \chi(t) &= \underset{p\rightsquigarrow t}{\mathscr{L}^{-1}} \chi^{e*}(R_1^*(p), R_2^*(p), p) \end{aligned} \tag{B.7}$$

jvnf. afsnit 1.2. J-integralet J_p, samt de viscoelastiske parametre Σ_p og χ_p for revnespidsen i punktet P findes da af

$$\begin{aligned} J_p &= J(\Delta t) \\ \Sigma_p &= \Sigma(\Delta t) \\ \chi_p &= \chi(\Delta t) \end{aligned} \tag{B.8}$$

Idet vi her benytter J-integralet som kriterium bestemmes revnehastigheden v af

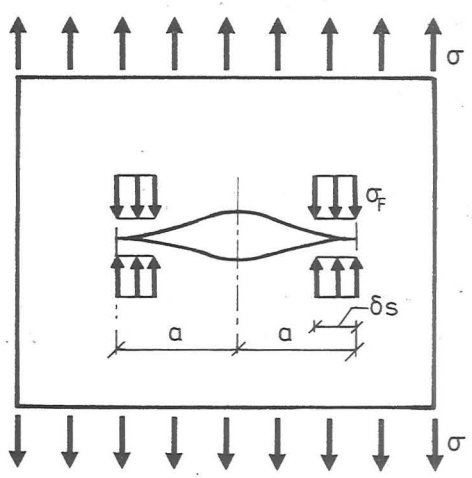
$$\begin{aligned} J_p &= J_c \\ J\left(\frac{\delta s}{v}\right) &= J_c \end{aligned} \tag{B.9}$$

hvor J_c er en kritisk værdi, en materialeparameter.

B.2 Dugdale modellen.

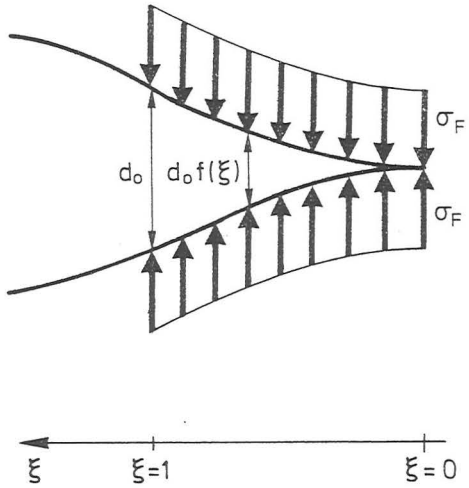
Vi vil nu betragte et konkret eksempel på anvendelse af en model, som giver endelige spændinger ved revnespidsen, nemlig den kendte Dugdale-model, Dugdale [14] , og vi vil anvende denne model til bestemmelse af revnevæksten i en uendelig skive under antagelse om plan spændingstilstand og konstante ydre laste.

Vi betragter en revne med længden $2a$, som åbnes af normalspændingerne σ sat på i det uendeligt fjerne, se figur B.4.



Figur B.4. Dugdale revne i uendelig skive.

Dugdale modellen antager at revnerandene er holdt sammen af de konstante sammenhængsspændinger σ_F over strækningen δs. Revneåbningen givet ved den relative koordinat ξ, se figur B.5, afhænger af det betragtede revneproblem, og er beskrevet ved funktionen $f(\xi)$. For det betragtede problem med en revne i en uendelig skive er funktionen angivet i f.eks. Nielsen [11]. Den tilsvarende løsning for en kantrevne er angivet i Rice [13] . Her er også angivet strækningen δs og J-integralet for det betragtede problem



Figur B.5. Beskrivelse af revneåbningen.

$$\delta s = a\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_F}} - 1\right) \qquad (B.10)$$

$$J^e = \frac{8\sigma_F^2 a}{\pi E}\,\ell n\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_F}}\right) \qquad (B.11)$$

Af definitionerne (B.2) og (B.4) fås da revnespidsparametrene

$$\Sigma^e = 2\sigma_F\sqrt{\frac{2}{\pi}\,\ell n\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_F}}\right)} \qquad (B.12)$$

$$\chi^e = \frac{2a\sigma_F}{E}\sqrt{\frac{2}{\pi}\,\ell n\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_F}}\right)} \qquad (B.13)$$

De til (B.6) svarende udtryk bliver da

$$\left.\begin{aligned} \Sigma^e(E,t) &= 2\sigma_F\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\ell n\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_F}}\right)} \\ \chi^e(E,t) &= \frac{\Sigma^e a}{E}\,f\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \\ J^e(E,t) &= \frac{\Sigma^{e2} a}{E}\,f\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (B.14)$$

Den til J^e svarende lineært viscoelastiske størrelse for et punkt P på udbredelseskurven svarende til den halve revnelængde a findes da ved anvendelse af (B.7) og (B.5), samt nogle få omskrivninger til

$$J_p = \Sigma^{e2}\, a \int_0^1 K\left(\frac{\delta s}{v}(1-\xi)\right)\frac{df(\xi)}{d\xi}\,d\xi \qquad (B.15)$$

hvor $K(\cdot)$ er den til E-modulen svarende krybningsfunktion. Hastigheden v findes da ved anvendelse af (B.9)

$$\Sigma^{e2}\, a \int_0^1 K\left(\frac{\delta s}{v}(1-\xi)\right)\frac{df(\xi)}{d\xi}\,d\xi = J_c \qquad (B.16)$$

Hermed er hastigheden i alle punkter på udbredelseskurven bestemt og revneudbredelsesforløbet dermed fastlagt.

APPENDIX C.

Levetidsanalyser for simple viscoelastiske modeller.

C.1. Indledning.

Vi vil her som randværdiproblem betragte den uendelige skive forsynet med en revne med initiallængden $2a_o$ og belastet i det uendeligt fjerne med en trækspænding $\sigma(t) = \sigma\cdot\Delta(t)$ virkende vinkelret på revnen.

Materialet antages lineært viscoelastisk med balanceret krybning og en krybningsfunktion $K(\cdot)$ som antages at være et resultat af en sammenkobling af et endeligt antal Hookebetingelser og Newtonbetingelser, se nærmere herom i Brincker [17] , appendix C.

Ved at indsætte de korrekte revnespidsparametre, formel (3.2) i det aktuelle kriterium (1.53), fås følgende ligning til bestemmelse af den tid Δt, revnen står stille i en position svarende til revnelængden 2a

$$\sigma^2 a\rho(2K(\Delta t) - K(2\Delta t)) = \frac{4}{\pi}\Gamma \qquad (C.1)$$

Vi indfører styrkeniveau'et

$$\phi = \sqrt{\frac{\delta}{2a_o}} \qquad (C.2)$$

se (2.6), og lastniveau'erne

$$\left.\begin{aligned} \theta_o &= \frac{\sigma}{\sigma_o} \\ \theta_\infty &= \frac{\sigma}{\sigma_\infty} \end{aligned}\right\} \qquad (C.3)$$

hvor korttidsstyrken σ_o og langtidsstyrken σ_∞ findes af (C.1) til

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{8E_o\Gamma}{\pi\rho\delta}} \cdot \phi$$
$$\sigma_\infty = \sqrt{\frac{8E_\infty\Gamma}{\pi\rho\delta}} \cdot \phi \qquad (C.4)$$

hvor E_o , E_∞ er de reciprokke grænseværdier for K(t) for $t \to 0$ henholdsvis $t \to \infty$

Vi vil nu kort analysere levetidsforholdene for de 7 simpleste kombinationer af Hookeelementer og Newtonelementer.

C.2 Hookematerialet.

Krybningsfunktionen er

$$K(t) \equiv \frac{1}{E} \; ; \; t > 0 \qquad (C.5)$$

som indsat i (C.1) for $a = a_o$ giver ligningen

$$\sigma^2 a_o \frac{\rho}{E} = \frac{4}{\pi}\Gamma$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{8E\Gamma}{\pi\rho\delta}} \cdot \phi = \sigma_o = \sigma_\infty \qquad (C.6)$$

hvilket er de kendte resultater fra den lineært elastiske revnemekanik, d.v.s. levetidskurven bliver en linie parallel med t-aksen gennem $\theta = 1$.

C.3 Newtonmaterialet.

Krybningsfunktionen er

$$K(t) = \frac{1}{\eta} t \qquad (C.7)$$

hvilket medfører at venstresiden i (C.1) forsvinder for alle $\Delta t > 0$, d.v.s. ligningen har ikke nogen løsning. Dette betyder, at der overhovedet ikke kan forekomme revnevækst i materialet.

C.4 Maxwellmaterialet.

Krybningsfunktionen er

$$K(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \qquad (C.8)$$

som indsat i (C.1) for $a = a_o$ giver ligningen

$$\sigma^2 a_o \frac{\rho}{E} = \frac{4}{\pi}\Gamma \qquad (C.9)$$

eller præcis det samme som for et Hookemateriale. Den seriekoblede Newtonbetingelse får altså ingen indflydelse på levetidsforholdene.

C.5 Kelvinmaterialet.

Krybningsfunktionen er

$$K(t) = \frac{1}{E_K}\left(1 - e^{-\mu t}\right) \qquad (C.10)$$

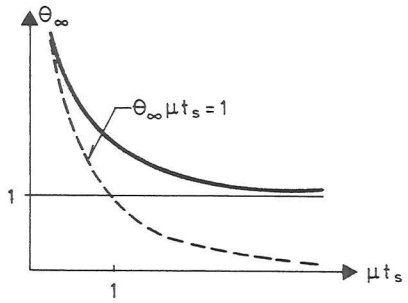
som indsat i (C.1) for $a = a_o$ giver følgende ligning til bestemmelse af tidspunktet til begyndende revnevækst t_s

$$\sigma^2 a_o \frac{\rho}{E_K}\left(1 + e^{-2\mu t_s} - 2e^{-\mu t_s}\right) = \frac{4}{\pi}\Gamma \qquad (C.11)$$

Det ses let at $\sigma \to \infty$ for $t_s \to 0$ og $\sigma \to \sigma_\infty$ for $t_s \to \infty$. For små μt_s fås ved rækkeudvikling af eksponentialfunktionerne

$$\theta_\infty \cdot \mu t_s = 1 \qquad (C.12)$$

Forholdene er illustreret i fig. C.1



Figur C.1. Tiden til begyndende revnevækste t_s for et Kelvinmateriale.

C.6 Thomsonmaterialet.

Krybningsfunktionen er

$$K(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K}\left(1 - e^{-\mu t}\right) = \frac{1}{E}\left(1 + \gamma\left(1 - e^{-\mu t}\right)\right) \qquad (C.13)$$

som indsat i (C.1) for $a = a_o$ og ved indførelse af korttidsstyrken σ_o giver følgende ligning til bestemmelse af tidspunktet til begyndende revnevækst t_s

$$\theta_o^2\left(1 + \gamma\left(1 + e^{-2\mu t_s} - 2e^{-\mu t_s}\right)\right) = \frac{4}{\pi}\,\Gamma \qquad (C.14)$$

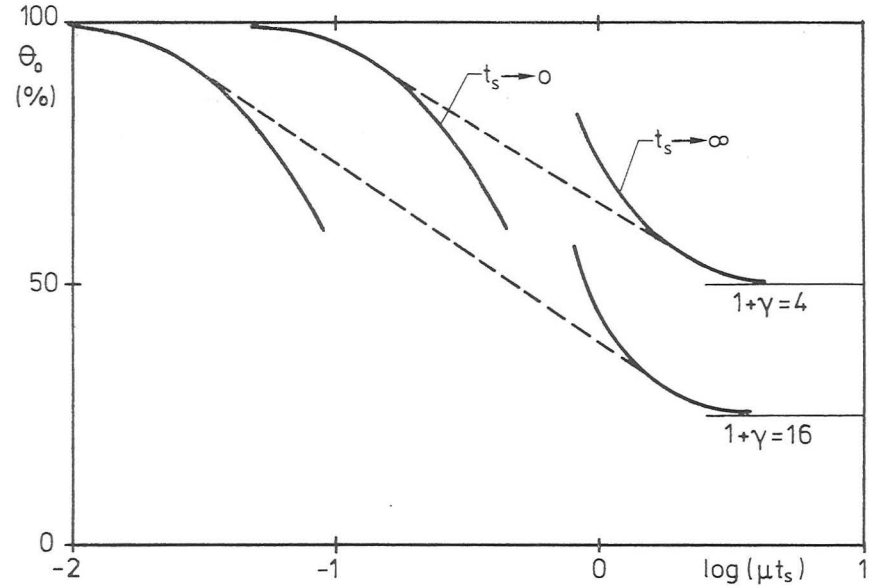
For passende små μt_s findes ved rækkeudvikling af eksponentialfunktionerne

$$\mu t_s = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{\theta^2} - 1} \qquad (C.15)$$

For passende store μt_s kan leddet $e^{-2\mu t_s}$ smides væk og man får

$$\mu t_s = \ln(2) - \ln\left(1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\theta^2} - 1\right)\right) \qquad (C.16)$$

De to tilnærmelser (C.15) og (C.16) for små henholdsvis store værdier af μt_s er tegnet op i figur C.2 for $1 + \gamma = 4$ og $1 + \gamma = 16$ og benyttet til bestemmelse af tilnærmede sammenhænge mellem θ_o og μt_s gældende for alle $t_s > 0$.



Figur C.2. Tilnærmet bestemmelse af θ_o, t_s-sammenhænge for et Thomsonmateriale ved hjælp at udtryk gældende i grænserne $t_s \to 0$ og $t_s \to \infty$.

C.7 Lethersichmaterialet.

Krybningsfunktionen er

$$K(t) = \frac{1}{\eta}\,t + \frac{1}{E_K}\left(1 - e^{-\mu t}\right) \qquad (C.17)$$

Som indsat i (C.1) for $a = a_o$ giver ligning (C.11). D.v.s. at materialet opfører sig i brudmæssig henseende præcis som et Kelvinmateriale. Det seriekoblede Newtonelement får altså ingen indflydelse på levetidsforholdene.

C.8. Burgermaterialet.

Krybningsfunktionen er

$$K(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}\,t + \frac{1}{E_K}\left(1 - e^{-\mu t}\right) \qquad (C.18)$$

som indsat i (C.1) for $a = a_o$ og indførelse af korttidsstyrken σ_o giver ligningen (C.14). D.v.s. at materialet opfører sig i brudmæssig henseende præcis som et Thomsonmateriale. Det seriekoblede Newtonelement får altså som tidligere ingen indflydelse på levetidsforholdene.

REFERENCER.

[1] G.M. Bartenev and Yu.S. Zuyev: Strength and Failure of viscoelastic materials.
Pergamon Press, 1968.

[2] R.M. Christensen: A rate-dependent criterion for crack growth.
International Journal of Fracture, Vol. 15, No. 1, February 1979, p. 3-21.

[3] R.M. Christensen and E.M. Wu: A theory of crack growth in viscoelastic materials.
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 14, 1981, p. 215-225.

[4] Diskussion mellem R.M. Christensen og L.N. McCartney.
Alle 4 indlæg i International Journal of Fracture,
Del 1, L.N. McCartney: Vol. 16, 1980, p. R229-R232,
Del 2, R.M. Christensen:" 16, 1980, p. R233-R237,
Del 3, L.N. McCartney: " 17, 1981, p. R161-R168,
Del 4, R.M. Christensen:" 17, 1981, p. R169-R175.

[5] W.G. Knauss: Delayed failure - the Griffith problem for linearly viscoelastic materials.
International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 6, No. 1, March 1970, p. 7-20.

[6] W.G. Knauss: Fracture of solids possessing deformation rate sensitive material properties.
In the Mechanics of Fracture, AMD - Vol. 19, p. 69-103.

[7] B.V. Kostrov and L.V. Nikitin: Some general problems of mechanics of brittle fracture.
Archiwum Mechaniki Stosowanej, 6, 22, 1970, p. 749-776.

[8] L.N. McCartney: Crack growth laws for a variety at viscoelastis solids using energy and COD fracture criteria.
International Journal of Fracture, Vol. 19, No. 1, February 1979, p. 31-40.

[9] H.K. Mueller and W.G. Knauss: Crack propagation in a linearly viscoelastic strip.
Journal of Applied Mechanics, june 1971, p. 483-488.

[10] L.F. Nielsen: Crack failure of dead-, ramp- and combined - loaded viscoelastic materials.
Proceedings of the First International Conference on Wood Fracture. Banff, Alberta, 14-16 August 1978.

[11] L.F. Nielsen: Revnebevægelse i lineær-viscoelastiske materialer.
Bygningsstatiske Meddelelser, årgang XLIX, Nr. 1, Marts 1978, s. 1-45.

[12] R.J. Nuismer: On the governing equation for quasi-static crack growth in linearly viscoelastic materials.
Journal of Applied Mechanics, Septe,ber 1974, p. 631-634.

[13] J.R. Rice: Mathematical analysis in the mechanics of fracture.
In Fracture, An Advanced Treatise, edited by Harald Liebowitz, Vol. 2, p. 191-311.

[14] D.S. Dugdale: Yielding of steel sheets containing slits.
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, 1960, p. 100-104.

[15] R.A. Schapery: A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media.
International Journal of Fracture, Part 1:
Vol. 11, No. 1, february 1975, p. 141-158. Part II_
Vol. 11, No. 3, June 1975, p. 369-387, Part III:
Vol. 11, No. 4, August 1975, p. 549-562.

[16] M.P. Wnuk: Slow crack growth of cracks in a rate sensitive tresca solid.
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 5, 1973, p. 605-626.

[17] Rune Brincker: Plane revneudbredelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Løsning af plane lineært viscoelastiske randværdiproblemer med kendt revneudbredelsesforløb.
Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DtH, rapport R 131, 1982, licentiatafhandling.

[18] Rune Brincker: Plane revneudbredelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Revnemodeller og udbredelseskriterier.
Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DtH, rapport R 132, 1983.

[19] Rune Brincker: Levetidsforsøg med epoxybaseret modelmateriale. Statusrapport januar 1983.
Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DtH, serie I, No. 74, 1983.

[20] L.F. Nielsen: A lifetime analysis of cracked linear viscoelastic materials - with special reference to wood.
In Proceedings IUFRO 55.02 (Meeting of International Union of Forestry Research Organizations Wood Engineering Group), Borås, Sweden, maj 1982, p. 151-178.

STIKORDSREGISTER

afklingningsfaktoren 35, 36
analytiske resultater 45
anisotrope 16
approximation 65
arbejdslinieforløb 39
arbejdsliniekrumninger 39
asymptoteværdi for lastniveauet 46
asymptotiske egenskaber 10

batches 30
balanceret krybning 9, 12, 18, 37, 62, 64
begyndelsesfejl 49
begyndelsespositionen 29
begyndelsesrevne 26
begyndelsesværdien på krybningsfunktionen 30
begyndende revneudbredelse 50
bevarelseslov 15, 16
belastningshistorie 10
belastningstilfælde 61
beton 30
bidrag til de målte tøjninger 41
brud 30
brudstyrke 41
Burgermaterialet 79
byggematerialer 30

central revne 24

"dead-load" forsøg 24
deformationsfaktor 50
deformationsfaktorer 6, 10, 12, 18
deformationsparameter 69
diskussionen 35
diskret spektrum 49
dissipationshastighed 13
dissipationsleddet 34

dissipationsuligheden 13
Dugdale modellen 22, 33, 72
Dugdale-Barenblatt-model 32, 54, 67
dynamiske effekter 19

edb 65
edb-analyser 18
eksakte kriterier 68
ekstremkurver 41
elastiske løsning 3
elastoplastiske kriterier 34
endelige brud 41, 54
endelige spændinger 11, 22, 32, 67
energibalance 33
energibevarelsessætningen 13
energikriterium 35
enhedsforløb 64
enhedsfunktion 54
enhedslast 18, 63
enkeltmodeproblem 12, 67

faktorieseres 7
flydezonen 32
flydning 32
flydning ved revnespidsen 21
flytningsbetingelser 8
flytningsfeltet 1
for plan spændingstilstand 10
for plan tøjningstilstand 10
forskydningsfaktorer 25
forskydningsmodulen 2
forsøgsserier 25
fremrykning af revnen 23
fri energi 17
frontzonen 33, 69
funktionsafhængighed 12
fysiske betingelser 2, 9
første brud 38

generaliserede spændinger og tøjninger 39
geometriske størrelser 36
global energibalance 12, 14, 15, 21, 22, 31, 61
globale ligninger 13
Griffith's kriterium 12
grænseværdier 76

hastigheden af revnespidsen 9
hastigheden v 45, 69, 74
Heavisides enhedsfunktion 7, 23
Helmholtz fri energi 13, 16, 61
homogen 39
homogenitet 31
Hookebetingelser 75
Hookeelementer 49
Hookematerialet 76
hukommelse 46
højre- og venstreapproximationer 66

ikke lineær opførsel 41
ikke lineære fænomener 39
ikke-pulserende 19
indre bidrag 13
indre dissipation 35
indre ur 36
inhomogeniteter 40
integrationsvej Γ 69
integrationsvejen 15
intensitetsfaktorerne 6
inverse laplacetransformation 3
isoterm proces 13
isoterm revneudbredelsesproces 15
isotrope tilfælde 17

J-integrale 15, 62, 68, 72

karakteristisk længde 37
kartesiske komponenter 3

karakterisitsk spænding 36
Kelvinmaterialet 77
kernerne 7
kinetiske energi 13
kohæsive spændinger 67
kompressionsmodulen 2
konstant normalspænding 26
konstant tøjningshastighed 39
konstante hastighed 69
konstante last 43, 54
konstante ydre last 72
konstitutive ligning 14
kontinuumbeskrivelse 21
kontinuunnekanisk grundlag 19
koordinatsystem 3
korrespondanceprincippet 2, 3, 6
korrespondensprincippet 71
korresponderende elastiske problem 2, 62, 68
(korresponderende) elastisk randværdiproblem 2
korttidsforsøg 38
korttidsstyrken 44, 49, 50
korttidsstyrken σ_o 75
kritisk værdi 11, 71
kritiske revnelængde 29, 45
krumningsradius 21, 22
krybetal 30
krybning 23
krybningsfunktionerne 18, 25, 37, 62, 63
kvotienten T_r/T_o 54
kurve 15

langsom revnevækst 48
langtidsbelastet legeme 43
langtidsstyrker 43, 49
laplacetransformationen 3
laplacetransformerede relaxationsfunktioner 3
large scale yielding 32
lastniveau'erne 75

lastniveau'et θ 46
legemeskrafterne 2
Lethersichmaterialet 79
levetid 49
levetiden t_c 26, 29
Levetiden T 44
levetidens afhængighed af styrkeniveau'et 49
levetidskurver 48, 55
lim 30
limede samlinger 30
lineær funktion 39
lineær funktion af tiden 49
lineært elastisk materiale 2
lineært viscoelastisk faststof 20
lineært viscoelastisk legeme 1
lineært viscoelastisk materiale 16
lineært viscoelastiske randværdiproblemer 1
litteraturen 23
længere varende belastning 38
lukket kurve 15

makroskopiske brudkriterier 38
makroskopiske proces 23
makroskopiske udbredelseshistorie 23
massetætheden 15
materialekonstant 22, 36
materialeparameter 11, 71
materielle punkt 3
matrixformuleres 18
matrixrepresentationer 65
matrixtilnærmelse for udbredelseskriteriet 65
matrixudtrykket 65
Maxwellmaterialet 48, 76
model for revneudbredelsen 22
modelmateriale 31
modelprocessen 22, 23
modstrid 22
modeludbredelseshastigheden 23

momentet og krumningen 39
mikrorevner 39

nedreværdi 52
Newtonbetingelser 75
Newtonelement 49
Newtonmaterialet 76
normerede krybningsfunktion 45
numerisk 44
numerisk integration 29

overflade 13, 16
overfladebidrag 13
overfladedissipationen 14, 19
overfladeenergien 14, 30, 33, 36

paradoks 19
parameterværdien s_o 69
perfekt skarpe revner 21
plan spændingstilstand 72
plan tøjningstilstand 24
plasticitetsteoretiske 33
Poisson forholdet 9, 24, 62
Poissontallet 37
polyurethan gummi 24
potenslov 43
proportionale 10, 14
proportionalitetsgrænse 39, 41
punktmængde 13

rampeforløb 64
rampelast 18, 49, 63
rampelastpåvirkning 54
randbetingelserne 2
randværdiproblem 2
reproducerbarhed 31
relaxationsfunktion 9, 17, 18, 25, 63
relaxationstider 30, 46

resulterende spændingsintesitetsfaktorer 67
revnefronten 67
revnehastigheden 24, 25, 35
revnehastigheden v 71
revnemodel 22, 32, 36
revnepositioner 44
revnespids 3, 9
revnespidsparametre 19
revnespidstilstand 6, 68
revneudbredelsesforløb 10
revneudbredelseshastigheder 31
revneudbredelseshistorie 32, 33, 68
revneudbredelseskriterier 34
revneudbredelseskriterium 16, 33
revneudbredelsesparadokset 19, 21, 36
revneudbredelsesproblemer 6, 8
revneudbredelsesproces 52
revneudbredelsesretningen 15
revnevæksten i en uendelig skive 72
revneåbningen 33
revneåbningens bidrag 38
rækkeudvikling 78

sammenhængsspænding 33,67, 69, 72
selvmodsigelsen 21
seriekoblede 77
simple løsninger 22
singulære 11
singulære generelle løsninger 32
singulære løsninger 35
singulære spændingsfordelinger 31
singulære spændings- og tøjningstilstand 21, 22
skridtlængde 36
skridtmodellen 28, 35, 43
skridtparameter 30, 44
skridtteorien 36
små startrevner 49
Solithan 113 24

spredning 31
sprødt 39
spændingerne omkring revnespidsen 61
spændingsbetingelser 8
spændingsfeltet 1
spændingsintensitetsfaktorer 3, 12, 18
spændingskoncentration 34
spændingsniveau 44
spændings- og deformationsstørrelser 68
spændingsrandværdiproblem 9, 19
stationær 6, 11, 21
statiske 19
startrevnens størrelse 43
stieltjesfoldninger 2, 7, 8, 9, 10
stokastisk 40
stokastisk felt 41
stokastisk model 41
stored energy function 33
store flydezoner 32
strækningen δ 22
styrkeniveau'et 44, 50, 75
stærkt materiale 49
størrelsen Σ
superponere 8
svagt materiale 49

temperaturer 13, 25
termisk ligevægt 13
termodynamisk betingelse 13
termodynamisk system 13
teori og forsøg 24
tiden til begyndende revneudbredelse 46
tidsafhængige lastniveau 50
tidspunktet til begyndende revneudbredelse 54
tidspunktet til begyndende revnevækst 77, 78
tilladelig spændingsfordeling 34
tilnærmede metoder 51
tilnærmet kriterium 25

tilnærmelsesmetode 53
tilnærmede sammenhænge 78
Thomsonmaterialet 78
trappefunktion 22, 65
trappekurver 52
træ 30
tøjningshastighederne 39, 41
tøjningsfeltet 1
tøjningshærdning 32

udbredelse af en revne 13
udbredelsesforsøg 31
udbredelseshastigheden 33
udbredelseskriteriet 12, 15, 61
udbredelseskriterium 11, 19
udbredelseslinien 38
uendelige skive 75
"uendelig" stribe 24, 31
ulineært forløb af arbejdskurven 39

videre brudforløb 54
viscoelastiske intensitetsfaktor 7
viscoelastiske løsning 2, 3
viscoelastiske revnespidsparametre 6
visco-elasto-plastiske revneproblemer 32
voksende funktion 20

ydre kræfters effekt 13

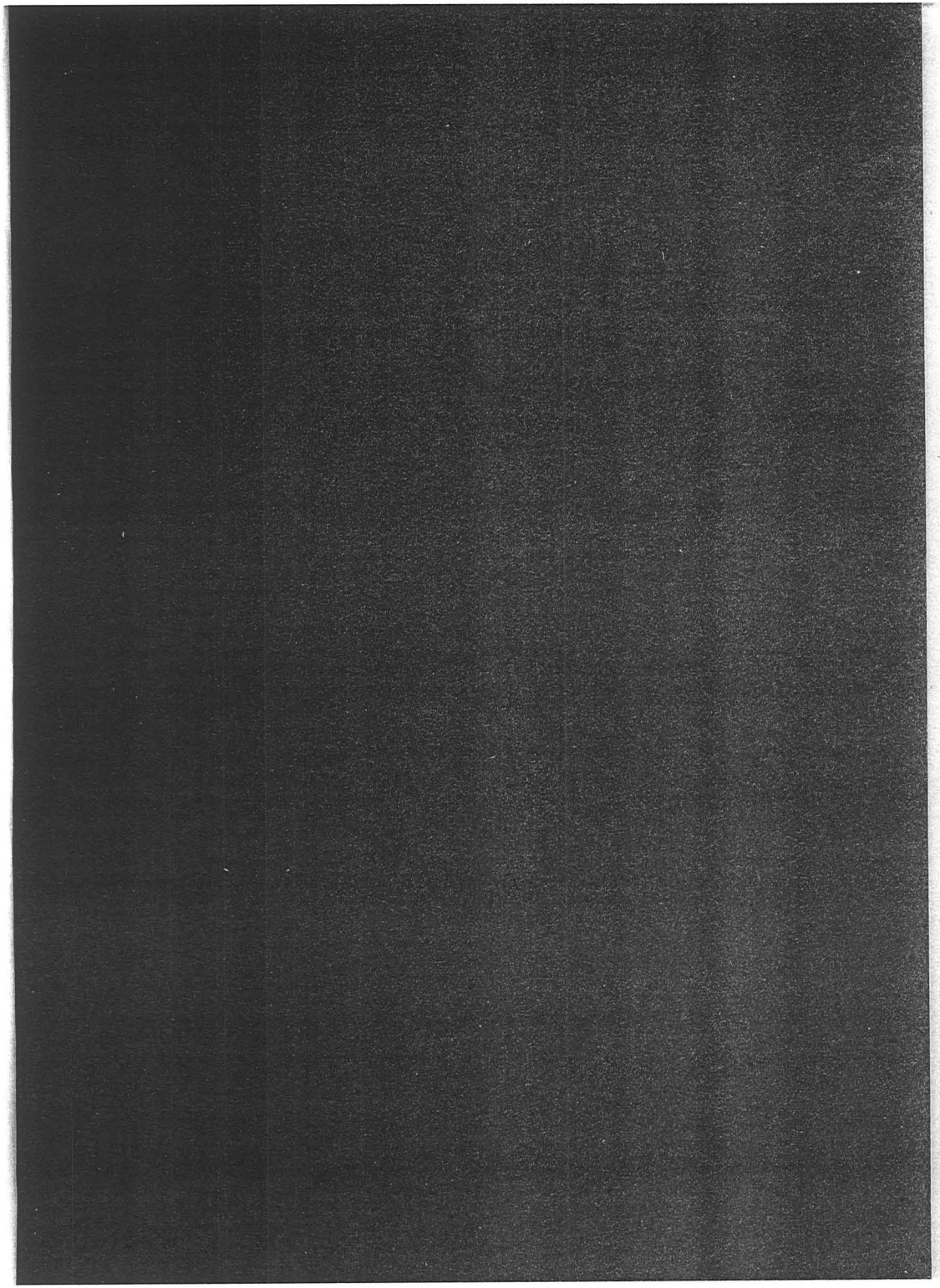
øvre og nedre grænser for matrixrepresentationerne 66
øvreværdi 53

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

SERIE R
(Tidligere: Rapporter)

R 138. NIELSEN, LEIF OTTO og PETER NITTEGAARD-NIELSEN: Elementmetodeberegninger på mikrodatamat. 1981.
R 139. MONDORF, P.E.: Concrete Bridges. Literature Index. 1981.
R 140. NIELSEN, METTE THIEL: Lamb's Problem. Internal Harmonic Point Load in a Half-Space. 1981.
R 141. JENSEN, JESPER FRØBERT: Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton. 1982.
R 142. MØLLMANN, H.: Thin-Walled Elastic Beams with Finite Displacements. 1981.
R 143. KRAGERUP, JAN: Five Notes on Plate Buckling. 1982.
R 144. NIELSEN, LEIF OTTO: Konstitutiv modellering af friktionsdæmpning. 1982.
R 145. NIELSEN, LEIF OTTO: Materiale med friktion til numeriske beregninger. 1982.
R 146. Resuméoversigt 1981. Summary of Papers 1981. 1982.
R 147. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBAK-HANSEN: Bolted End Plate Connections in Round Bar Steel Structures. 1982.
R 148. NIELSEN, LEIF OTTO: Svingninger med friktionsdæmpning. 1982.
R 149. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-Section. Part 1: Basic Analysis. 1982.
R 150. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-Section. Part 2: Numerical Examples. 1982.
R 151. KRENCHEL, HERBERT and HANS WINDBERG JENSEN: Organic Reinforcing Fibres for Cement and Concrete. 1982.
R 152. THIEL, METTE: Dynamic Interaction between Soil and Foundation. 1982.
R 153. THIEL, METTE: Soil-Pile Interaction in Horizontal Vibration. 1982.
R 154. RIBERHOLT, H. og PER GOLTERMANN: Sømmede træbjælker. 1982.
R 155. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers forankring, specielt ved vederlag. 1. del. 1982.
R 156. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers forankring, specielt ved vederlag. 2. del. Appendix A til F. 1982.
R 157. ARPE, ROBERT and CLAES DYRBYE: Elasto-Plastic Response to Stochastic Earthquakes. 1983.
R 158. WALD, FRANTISEK: Non-Linear Analysis of Steel Frames (with Special Consideration of Deflection). 1983.
R 159. BRÆSTRUP, MIKAEL W.: Ten Lectures on Concrete Plasticity. Course given in Nanjing, China, October 1982. 1983.
R 160. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Opbøjet spændarmering som forskydningsarmering. 1983.
R 161. KRAGERUP, JAN: Buckling of Rectangular Unstiffened Steel Plates in Compression. 1983.
R 162. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Revneteorier for enaksede spændingstilstande. 1983.
R 163. FEDDERSEN, B. og M P. NIELSEN: Revneteori for biaksiale spændingstilstande. 1983.

R 164. GIMSING, NIELS J.: Preliminary Design and Optimization of Cable Systems for Bridges. 1983.
R 165. Resumeoversigt 1982. Summaries of Papers 1982. 1983.
R 166. NITTEGAARD-NIELSEN, PETER, JOHN FORBES OLESEN og HILMER RIBERHOLT: Elementmetodeberegning af skiveafstivede lamelkonstruktioner. 1983.
R 167. RIBERHOLT, HILMER og PETER SPØER: Indlimede bolte til indfæstning af vingerne på Nibemølle-B. 1983.
R 168. GIMSING, NIELS J. and ANDERS BORREGAARD SØRENSEN: Investigations into the Possibilities of Constructing Bridges with a Free Span of 3000 m. 1983.
R 169. NIELSEN, LEIF OTTO: Randelementmetoden til 3-dimensional spændingsanalyse. 1983.
R 170. NIELSEN, JOHN SANDER: A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Subjected to Torsion. Part I. Theory. 1983.
R 171. NIELSEN, JOHN SANDER: A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Subjected to Torsion. Part II. Experiments. 1983.
R 172. LANGSØ, H.E. og V. ASKEGAARD: Sammenhæng mellem frostnedbrydning af jernbetonbjælker og ændring af frekvensspektrum, dæmpningsforhold og bæreevne. 1983.
R 173. NIELSEN, M.P. og BENT FEDDERSEN: Effektivitetsfaktoren ved bøjning af jernbetonbjælker. 1983
R 174. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Effektivitetsfaktoren ved vridning af jernbetonbjælker. 1983.
R 175. EXNER, HANS: Plasticitetsteori for Coulomb Materialer. 1983.
R 176. EXNER, HANS: Betonbjælkers Bøjningsbæreevne. 1983.
R 177. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBAK-HANSEN: Optimum Design of Corner-Supported Double-Layer Space Trusses. 1983.
R 178. BJØRNBAK-HANSEN og H. AGERSKOV: Udmattelsesforsøg med Ortotropt Brobanepanel. 1983.
R 179. KRISTIANSEN, NIELS ØRSKOV: Tryk- og Strømningsforhold i Siloer med Kohæsive Medier. 1984.
R 180. NIELSEN, JOHN SANDER: The Effect of Stirrup Spacing on the Ultimate Load of Reinforced Concrete Beams Subjected to Pure Torsion. 1984.
R 181. KÆRN, JENS CHR.: Numerisk Brudstadieberegning af Stift, Plastiske Materialer. 1984.
R 182. FEDDERSEN, B., U. HESS, H. EXNER og M.P. NIELSEN: Gennemlokning af Huldækelementer.
R 183 BJERAGER, PETER: Reliability Analysis of Structural Systems. 1984
R 184 HESS, UWE: Plasticitetsteoretisk analyse af forankring og stød af forkommet armering i beton. 1984
R 185 NITTEGAARD-NIELSEN, PETER: Elementmetodebaserede beregningsmodeller for dæmpede konstruktionssvingninger. 1984.
R 186 DAMKILDE, LARS: Beregning af plader af elastisk-plastisk materiale ved hjælp af elementmetoden. 1984.
R 187 DAMKILDE, LARS: Stability of Plates of Elastic-plastic Material. 1984.
R 188 NITTEGAARD-NIELSEN, PETER: Elementmetodebaseret beregningsmodel for dæmpede svingninger i 3-fase kontinuum: matrixmateriale - væske - luft. 1984.
R 189 Resumeoversigt 1983 - Summaries of Papers 1983.
R 190 JULIUS SOLNES: Vibration of Suspension Bridges under Earthquake Loads.

Abonnement 1.7.1984 - 30.6.1985 kr. 130,-.
Subscription rate 1.7.1984 - 30.6.1985 D.Kr. 130.-.