



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Aalborg Universitet

Rumbjælker

Rathkjen, Arne

Publication date:
2002

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):
Rathkjen, A. (2002). *Rumbjælker*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Bind U0210

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INDHOLD

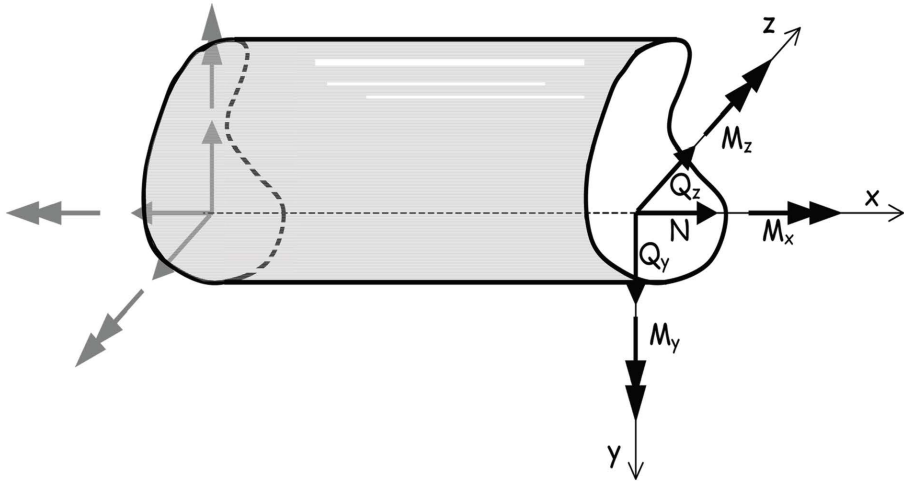
1. Indledning	1
2. Normalspændinger ved skæv bøjning	4
2.1 Nullinien	7
2.1.1 Udbøjninger	9
2.1.2 Kernen	9
3. Tværskningskonstanter	12
3.1 Flytningsregler	13
3.2 Drejningsregler	14
3.3 Nogle hjælpestørrelser	17
4. Forskydningsspændinger ved skæv bøjning	24
4.1 Tyndffligede tværsknit	29
4.1.1 Åbne, tyndffligede tværsknit	31
4.1.2 Tværskningsdeformationer	37
4.1.3 Lukkede, tyndffligede tværsknit	43
5. Flytninger ved skæv bøjning	51
6. Fri vridning	54
6.1 Massive tværsknit	54
6.2 Bjælketværsknit med huller	60
6.3 Membranalogien	67
7. Bunden vridning	73
8. Virtuelt arbejde	90
9. Ligevægt i deformeret tilstand	94
9.1 Kipning	96

1. INDLEDNING

I den tekniske bøjningsteori for bjælker bestemmes spændinger og deformationer udtrykt ved snitkræfter på grundlag af tilnærmede flytninger og konstitutive ligninger.

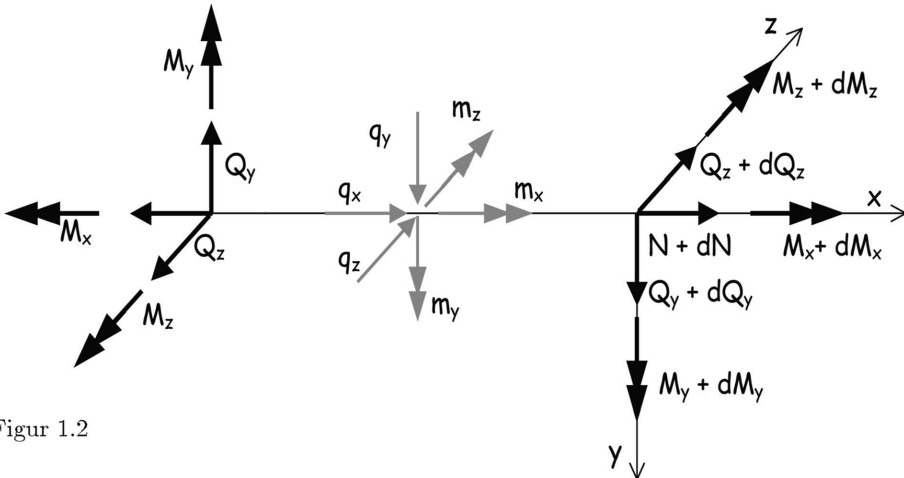
I det følgende vil dette blive gjort for lige, lineærelastiske bjælker med konstant tværsnit. Undervejs vil der blive gjort simplificerende antagelser, hvis berettigelse må dokumenteres ved at sammenligne resultater fra den tilnærmede teori med resultater fra forsøg og/eller resultater fra en teori uden disse tilnærmelser.

Figur 1.1 viser et bjælkestykke, hvortil der er knyttet et sædvanligt retvinklet x , y , z -koordinatsystem. x -aksen er bjælkeakse, men systemets placering i forhold til bjælke-



Figur 1.1

tværsnittet er indtil videre ubestemt. Snitkræfterne N , Q_y , Q_z , M_x , M_y og M_z er vist positive på snit med x -aksen som udadgående såvel som indadgående normal. Belastningen består som vist i figur 1.2 af kontinuerlige laster q_x , q_y og q_z , kræfter pr. længde-

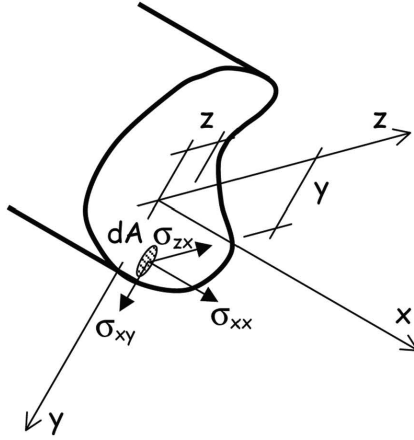


Figur 1.2

enhed samt m_x, m_y og m_z , momenter pr. længdeenhed. Idet bjælkestykket i figur 1.2 har længden dx , finder man ligevægtsligningerne

$$\begin{aligned} dN/dx &= -q_x, & dQ_y/dx &= -q_y, & dQ_z/dx &= -q_z \\ dM_x/dx &= -m_x \\ dM_y/dx &= Q_z - m_y, & dM_z/dx &= -Q_y - m_z \end{aligned} \quad (1.1)$$

Snitkræfterne er spændingsresultanter, og man har, jævnfør figur 1.3, ækvivalensbetin-



Figur 1.3

gelsenerne

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{xx} dA \\ Q_y &= \int_A \sigma_{xy} dA \\ Q_z &= \int_A \sigma_{zx} dA \\ M_x &= \int_A (\sigma_{zx}y - \sigma_{xy}z) dA \\ M_y &= \int_A \sigma_{xx}z dA \\ -M_z &= \int_A \sigma_{xx}y dA \end{aligned} \quad (1.2)$$

Fremgangsmåden bliver i det følgende den, at der postuleres (gættes på) et flytningsfelt, hvorfra man ved hjælp af tøjnings-flytningsrelationerne kan bestemme tøjningerne, som så ved hjælp af de konstitutive ligninger bestemmer spændingerne udtrykt ved de parametre, som beskriver flytningsfeltet. Herefter giver ækvivalensbetingelserne (1.2) sammenhængen mellem disse parametre og snitkræfterne, og spændinger, tøjninger og flytninger kan angives ved snitkræfterne under hensyntagen til randbetingelserne.

Rækkefølgen bliver nu den, at først betragtes bøjning efterfulgt af forskydning, derefter fri vridning og bunden vridning. Til sidst behandles stabilitetsproblemerne søjleknækning og kipning.

2. NORMALSPÆNDINGER VED SKÆV BØJNING

Et tværsnit, $x = \text{konstant}$, påvirket af en normalkraft N og de bøjende momenter M_y og M_z , dvs. de snitkræfter som i henhold til ækvivalensbetingelserne (1.2) er resultanter af normalspændingen σ_{xx} , antages at få *flytningerne*

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= w_x(x) + z\alpha_y(x) - y\alpha_z(x) \\u_y(x, y, z) &= w_y(x) \\u_z(x, y, z) &= w_z(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

hvor w_x, w_y og w_z er flytninger i de tre akseretninger af punktet $x, 0, 0$, mens α_y og α_z er infinitesimale vinkeldrejninger om y - og x -akserne. Flytningerne (2.1) udtrykker Bernoullis forudsætning om, at plane tværsnit forbliver plane under deformationen.

Af flytnings-tøjningsrelationerne fås

$$\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x = dw_x / dx + z d\alpha_y / dx - y d\alpha_z / dx\tag{2.2}$$

som med betegnelserne

$$\varepsilon = dw_x / dx, \quad \kappa_y = d\alpha_y / dx, \quad \kappa_z = d\alpha_z / dx\tag{2.3}$$

kan skrives

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon(x) + z\kappa_y(x) - y\kappa_z(x)\tag{2.4}$$

hvor *tøjningsstørrelserne* ε, κ_y og κ_z kaldes bjælkens *længdetøjning* og bjælkens *krumning* om henholdsvis y -aksen og z -aksen.

Som konstitutiv ligning benyttes Hookes lov

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}\tag{2.5}$$

som indsat i ækvivalensbetingelserne (1.2) giver

$$\begin{aligned}N &= \int_A \sigma_{xx} dA = E \int_A \varepsilon_{xx} dA = E \int_A (\varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z) dA \\&= E(\varepsilon \int_A dA + \kappa_y \int_A z dA - \kappa_z \int_A y dA) \\&= E(\varepsilon A + \kappa_y S_y - \kappa_z S_z)\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_A \sigma_{xx} z dA = E \int_A \varepsilon_{xx} z dA = E \int_A (\varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z) z dA \\
&= E \left(\varepsilon \int_A z dA + \kappa_y \int_A z^2 dA - \kappa_z \int_A y z dA \right) \\
&= E (\varepsilon S_y + \kappa_y I_{yy} - \kappa_z I_{yz}) \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-M_z &= \int_A \sigma_{xx} y dA = E \int_A \varepsilon_{xx} y dA = E \int_A (\varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z) y dA \\
&= E \left(\varepsilon \int_A y dA + \kappa_y \int_A y z dA - \kappa_z \int_A y^2 dA \right) \\
&= E (\varepsilon S_z + \kappa_y I_{yz} - \kappa_z I_{zz}) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

I (2.6) - (2.8) er indført tværsnittets *statiske momenter* om henholdsvis y-aksen og z-aksen

$$\begin{aligned}
S_y &= \int_A z dA \\
S_z &= \int_A y dA
\end{aligned} \tag{2.9}$$

tværsnittets inertimomenter om de samme akser

$$\begin{aligned}
I_{yy} &= \int_A z^2 dA \\
I_{zz} &= \int_A y^2 dA
\end{aligned} \tag{2.10}$$

og endelig centrifugalmomentet med hensyn til y- og z-akserne

$$I_{yz} = \int_A y z dA \tag{2.11}$$

Indtil nu har x,y,z-systemets placering i forhold til bjælketværsnittet været ubestemt. Vælges bjælkeaksen gennem tværsnittets tyngdepunkt G , se afsnit 3, har man

$$S_y = S_z = 0 \tag{2.12}$$

og vælges yderligere at orientere y,z -systemet i forhold til tværsnittet, så centrifugalmomentet I_{yz} er nul, y,z -systemet er et hovedaksesystem, da finder man

$$N = EA\varepsilon, \quad M_y = EI_{yy}\kappa_y, \quad M_z = EI_{zz}\kappa_z \quad (2.13)$$

som er bjælkens konstitutive ligninger.

Indsættes (2.13) i (2.4) fås

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N}{EA} + \frac{M_y}{EI_{yy}}z - \frac{M_z}{EI_{zz}}y \quad (2.14)$$

som indsat i (2.5) giver *Naviers formel*

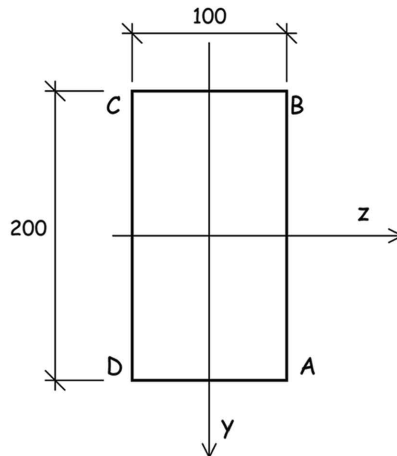
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_{yy}}z - \frac{M_z}{I_{zz}}y \quad (2.15)$$

I et system, hvor x -aksen er tyngdepunktsakse, men y,z -systemet ikke er hovedaksesystem, finder man

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_{yy} + M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y \quad (2.16)$$

Eksempel 2.1

Det i figur 2.2 viste tværsnit med bredden $b = 100$ mm og højden $h = 200$ mm påvirkes af snit-



Figur 2.2
kræfterne

$$N = 50 \text{ kN}, \quad M_y = 0,835 \text{ kNm}, \quad M_z = -6,67 \text{ kNm} \quad (a)$$

Normalspændingerne σ_{xx} ønskes bestemt. Tværsnittets areal og inertimomenter med hensyn til de viste hovedakser er

$$A = b \cdot h = 20 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_{yy} = h \cdot b^3 / 12 = 16,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (b)$$

$$I_{zz} = b \cdot h^3 / 12 = 66,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

og Naviers formel (2.17) giver

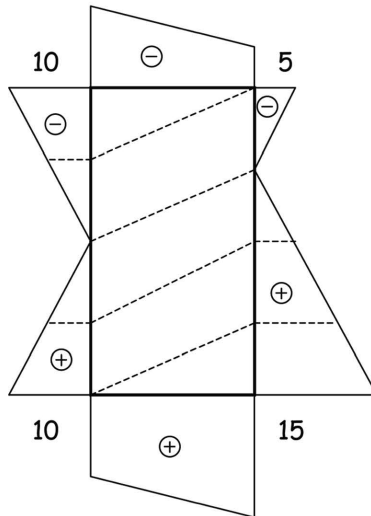
$$\sigma_{xx} = \frac{50 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} + \frac{835 \cdot 10^3}{16,7 \cdot 10^6} z + \frac{6,67 \cdot 10^6}{66,7 \cdot 10^6} y = 2,5 + 0,052z + 0,1y \quad (\text{c})$$

hvor y og z skal indsættes i mm, hvorefter σ_{xx} er angivet i N/mm^2 . Spændingerne i tværsnittets 4 hjørnepunkter A, B, C og D er angivet i tabel 2.1, og i figur 2.3 er spændingsvariationen langs tvær-

Punkt	y mm	z mm	σ_{xx} N/mm^2
A	100	50	15
B	-100	50	-5
C	-100	-50	-10
D	100	-50	10

Tabel 2.1

snittets omkreds vist. σ_{xx} er konstant langs de i tværsnittet viste skrå linier.



Figur 2.3

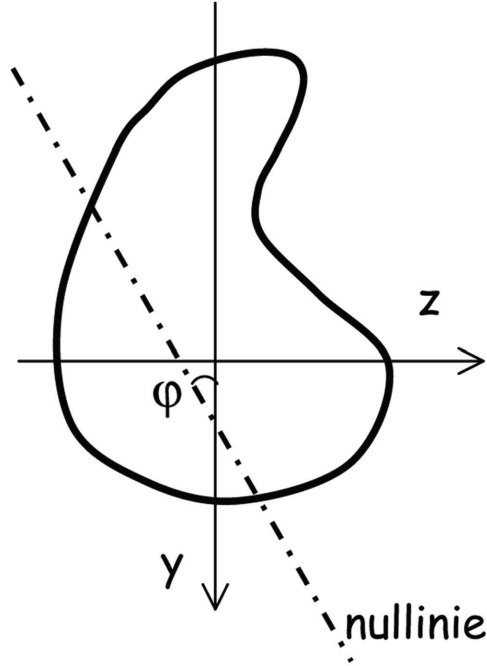
2.1 Nullinien

Sætter man i Naviers formel (2.15), $\sigma_{xx} = 0$ får man

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y = 0 \quad (2.17)$$

ligningen for en ret linie, *nullinien*, langs hvilken normalspændingerne σ_{xx} og længdetøjningen ε_{xx} er nul, se figur 2.4. Langs linier parallelle med nullinien er normalspændingerne konstante og de vokser proportionalt med afstanden fra nullinien. De største

normalspændinger optræder derfor i de punkter på tværsnittets omkreds, som ligger længst fra nullinien.



Figur 2.4

Af (2.17)

$$z = \frac{M_z I_{yy}}{M_y I_{zz}} y - \frac{N I_{yy}}{M_y A} = y \tan \varphi - \frac{N I_{yy}}{M_y A} \quad (2.18)$$

finder man, at nullinien danner vinklen φ bestemt ved

$$\tan \varphi = \frac{M_z I_{yy}}{M_y I_{zz}} = \frac{\kappa_z}{\kappa_y} \quad (2.19)$$

med y-aksen. Da den resulterende momentvektor $\bar{M} = \bar{M}_y + \bar{M}_z$ danner vinklen β bestemt ved

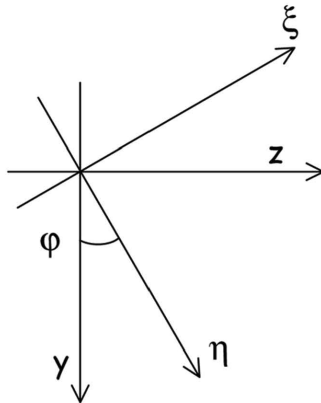
$$\tan \beta = M_z / M_y \quad (2.20)$$

med y-aksen, er de to vinkler kun ens for

$$M_y = 0, \quad M_z = 0 \quad \text{eller} \quad I_{yy} = I_{zz} \quad (2.21)$$

2.1.1 Udbøjninger

Indføres η, ξ -systemet, som er drejet vinklen φ bestemt ved (2.19) i forhold til y, z -systemet, se figur 2.5, har



Figur 2.5

man transformationsreglerne

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

for koordinater og vektorkomponenter. Indsættes i udtrykket (2.4) for længdetøjningen ε_{xx} får man

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon - (-\kappa_y \sin \varphi + \kappa_z \cos \varphi)\eta + (\kappa_y \cos \varphi + \kappa_z \sin \varphi)\xi = \varepsilon - \kappa_\xi \eta + \kappa_\eta \xi \quad (2.23)$$

hvor

$$\kappa_\xi = -\kappa_y \sin \varphi + \kappa_z \cos \varphi = 0 \quad (2.24)$$

i henhold til (2.19).

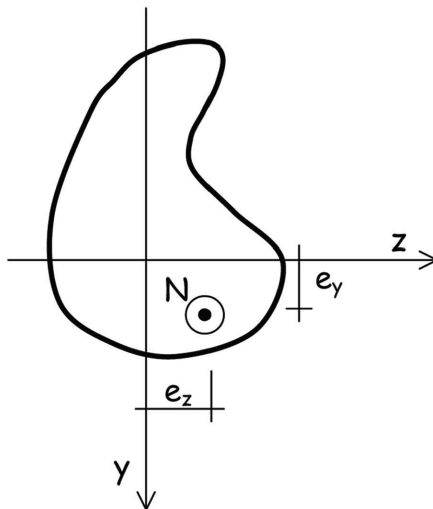
Heraf fremgår, at krumningen κ_ξ er nul, dvs. udbøjningen sker vinkelret på nullinien.

2.1.2 Kernen

Påvirkningen N , M_y og M_z på et tværsnit kan, når normalkraften N er forskellig fra nul, udtrykkes som påvirkningen af en ekscentrisk virkende normalkraft. Ekscentriciteterne e_y og e_z indføres ved

$$M_y = Ne_z, \quad M_z = -Ne_y \quad (2.25)$$

se figur 2.6, og med denne notation



Figur 2.6

kan Naviers formel skrives

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{Ne_z}{I_{yy}}z + \frac{Ne_y}{I_{zz}}y = N \left(\frac{1}{A} + \frac{e_z}{I_{yy}}z + \frac{e_y}{I_{zz}}y \right) \quad (2.26)$$

Ligningen for nullinien bliver dermed

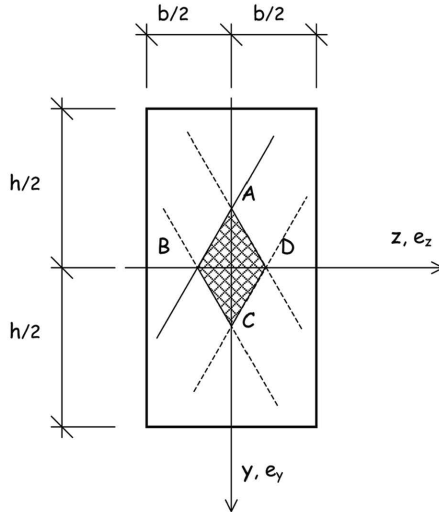
$$\frac{1}{A} + \frac{e_z}{I_{yy}}z + \frac{e_y}{I_{zz}}y = 0 \quad (2.27)$$

Når nullinien skærer tværsnittet, optræder der såvel positive som negative normalspændinger i tværsnittet, og når nullinien helt forløber uden for tværsnittet eller netop tangerer tværsnittets omkreds, da har alle normalspændinger samme fortegn.

Den kurve, som kraftangrebspunktet (e_y, e_z) gennemløber, når tangenten ruller på omkredsen, afgrænser et område, der kaldes *kernen*. Til normalkræfter, som virker i kernen, svarer således normalspændinger, som har samme fortegn over hele tværsnittet, trækspændinger for træknormalkræfter og trykspændinger for tryknormalkræfter.

Eksempel 2.2

For det i figur 2.7 viste rektangulære tværsnit med bredden b og højden h ønskes kernen bestemt. Tvær-



Figur 2.7

snittet har

$$A = bh$$

$$I_{yy} = hb^3/12 \quad (\text{a})$$

$$I_{zz} = bh^3/12$$

som indsat i (2.27) giver

$$b^2 h^2 + 12h^2 z e_z + 12b^2 y e_y = 0 \quad (\text{b})$$

Nulllinien gennem for eksempel punktet $y, z = h/2, b/2$ svarer derfor til ligningen

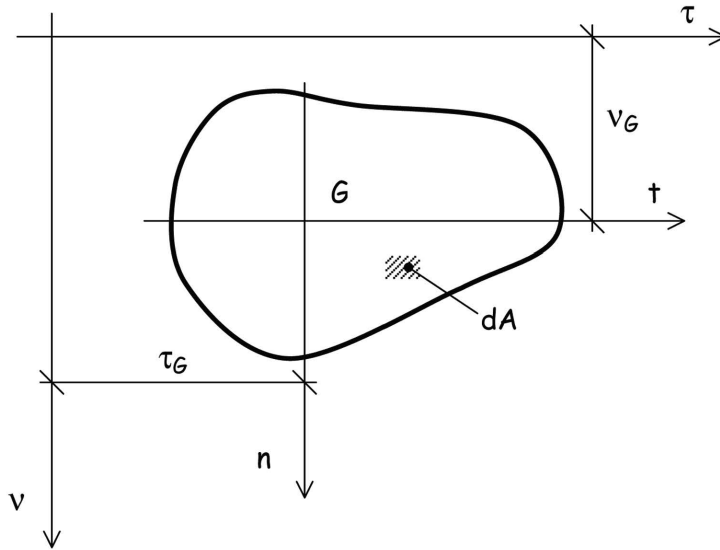
$$bh + 6h e_z + 6b e_y = 0 \quad (\text{c})$$

som er ligningen for den i figuren fuldt optrukne linie gennem punkterne A og B med koordinaterne $(e_y, e_z) = (-h/6, 0)$ og $(e_y, e_z) = (0, -b/6)$. Tilsvarende finder man de 3 punkterede linier gennem henholdsvis B og C, C og D samt D og A. De 4 liniestykker afgrænser kernen, vist skraveret.

3. TVÆRSNITSKONSTANTER

Til bestemmelse af normalspændinger i tværsnit påvirket til bøjning med normalkraft har man brug for at bestemme tværsnittets areal, statiske momenter, inertimomenter og centrifugalmomenter.

Figur 3.1 viser et plant område og 2 sæt på hinanden vinkelrette akser n,t -systemet og



Figur 3.1

ν, τ -systemet, hvor n -aksen er parallel med ν -aksen og t -aksen med τ -aksen.

Arealet A er bestemt ved fladeintegralet

$$A = \int_A dA \quad (3.1)$$

Det statiske moment om ν -aksen, S_ν defineres ved

$$S_\nu = \int_A \tau dA \quad (3.2)$$

og tilsvarende er det statiske moment om τ -aksen

$$S_\tau = \int_A \nu dA \quad (3.3)$$

Inertimomenterne $I_{\nu\nu}$ og $I_{\tau\tau}$ om henholdsvis ν -aksen og τ -aksen defineres ved

$$I_{\nu\nu} = \int_A \tau^2 dA \quad , \quad I_{\tau\tau} = \int_A \nu^2 dA \quad (3.4)$$

og *centrifugalmomentet* med hensyn til ν - og τ -akserne ved

$$I_{\nu\tau} = \int_A \nu\tau dA \quad (3.5)$$

3.1 Flytningsregler

Idet afstanden mellem ν -aksen og n -aksen er τ_G , har man

$$S_\nu = \int_A \tau dA = \int (t + \tau_G) dA = S_n + \tau_G A \quad (3.6)$$

som når n -aksen går gennem *tyngdepunktet* G , dvs. $S_n = 0$, giver

$$S_\nu = \tau_G A \quad \text{eller} \quad \tau_G = S_\nu / A \quad (3.7)$$

Tilsvarende er

$$\nu_G = S_\tau / A \quad (3.8)$$

når t -aksen er en tyngdepunktsakse. For inertimomenter har man f.eks.

$$\begin{aligned} I_{\tau\tau} &= \int_A \nu^2 dA = \int_A (n + \nu_G)^2 dA = \int_A (n^2 + 2n\nu_G + \nu_G^2) dA \\ &= I_{tt} + 2\nu_G S_t + \nu_G^2 A \end{aligned} \quad (3.9)$$

som, når $S_t = 0$, bliver

$$I_{\tau\tau} = I_{tt} + \nu_G^2 A \quad (3.10)$$

hvilket er Königs sætning.

Endelig bliver centrifugalmomentet

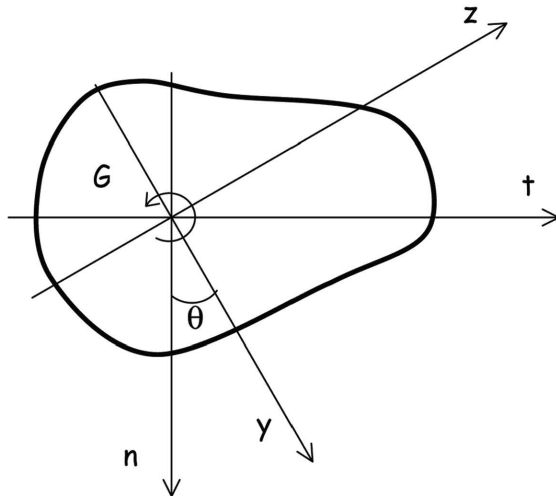
$$\begin{aligned} I_{\nu\tau} &= \int_A \nu\tau dA = \int_A (n + \nu_G)(t + \tau_G) dA \\ &= \int_A (nt + \tau_G n + \nu_G t + \nu_G \tau_G) dA \\ &= I_{nt} + \tau_G S_t + \nu_G S_n + \nu_G \tau_G A \end{aligned} \quad (3.11)$$

som, når n - og t -akserne begge er tyngdepunktsakser, reduceres til

$$I_{\nu\tau} = I_{nt} + \nu_G \tau_G A \quad (3.12)$$

3.2 Drejningsregler

Figur 3.2 viser et plant område og to ortogonale aksetsæt med begyndelsespunkt i tyngdepunktet G . y, z -systemet er drejet vinklen θ i forhold til n, t -systemet. Transformatio-



Figur 3.2

nen mellem de 2 systemer er givet ved

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Man har nu

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_A z^2 dA = \int_A (-n \sin \theta + t \cos \theta)^2 dA \\ &= \int_A (n^2 \sin^2 \theta + t^2 \cos^2 \theta - 2nt \sin \theta \cos \theta) dA \\ &= I_{nn} \cos^2 \theta + I_{tt} \sin^2 \theta - 2I_{nt} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tilsvarende bliver

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_A y^2 dA = \int_A (n \cos \theta + t \sin \theta)^2 dA \\ &= \int_A (n^2 \cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta + 2nt \sin \theta \cos \theta) dA \\ &= I_{nn} \sin^2 \theta + I_{tt} \cos^2 \theta + 2I_{nt} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.15)$$

og

$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \int_A yz dA = \int (n \cos \theta + t \sin \theta)(-n \sin \theta + t \cos \theta) dA \\
 &= \int_A ((t^2 - n^2) \sin \theta \cos \theta + nt(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) dA \\
 &= (I_{nn} - I_{tt}) \sin \theta \cos \theta + I_{nt}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{1}{2}(I_{nn} - I_{tt}) \sin 2\theta + I_{nt} \cos 2\theta
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

y, z -systemet er et *hovedaksesystem*, når centrifugalmomentet I_{yz} er nul. Dette vil i henhold til (3.16) være tilfældet for

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{nt}}{I_{tt} - I_{nn}} \tag{3.17}$$

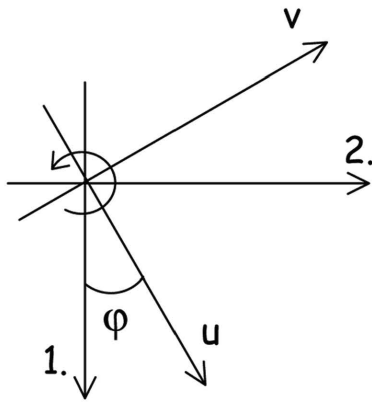
I hovedaksesystemet kaldes inertimomenterne hovedinertimomenter, og de betegnes ofte I_1 og I_2 . Omskrives (3.14) og (3.15), får man

$$\begin{aligned}
 I_{yy} &= \frac{1}{2}(I_{nn} + I_{tt}) + \frac{1}{2}(I_{nn} - I_{tt}) \cos 2\theta - I_{nt} \sin 2\theta \\
 I_{zz} &= \frac{1}{2}(I_{nn} + I_{tt}) - \frac{1}{2}(I_{nn} - I_{tt}) \cos 2\theta + I_{nt} \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

som med 2θ bestemt ved (3.17) giver

$$\left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(I_{nn} + I_{tt}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{nn} - I_{tt})^2 + 4I_{nt}^2} \tag{3.19}$$

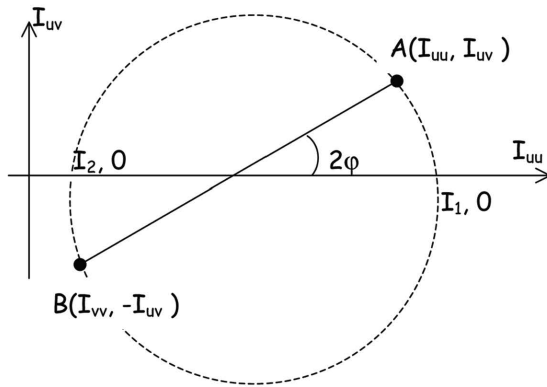
Går man ud fra hovedaksesystemet, bliver ifølge (3.14), (3.15) og (3.16) inertimomenterne og centrifugalsystemet i et vilkårligt u, v -system, som er drejet vinklen φ i forhold til 1,2-systemet, se figur 3.3



Figur 3.3

$$\begin{aligned}
 I_{uu} &= I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos^2 \varphi \\
 I_{vv} &= I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos^2 \varphi \\
 I_{uv} &= (I_1 - I_2) \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \sin 2\varphi
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Af (3.20) fremgår, at punkterne $A : (I_{uu}, I_{uv})$ og $B : (I_{vv}, -I_{uv})$ ligger diametralt over



Figur 3.4

for hinanden på en cirkel, *Mohrs cirkel*, med centrum i $\frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}(I_{uu} + I_{vv})$ og med radius $\frac{1}{2}(I_1 - I_2) = \frac{1}{2}\sqrt{(I_{uu} - I_{vv})^2 + 4I_{uv}^2}$

Sætter man i (3.14) $\varphi = \pi/4$, og betegnes I_{yy} som I_{45} , får man

$$2I_{45} = I_{nn} + I_{tt} - 2I_{nt} \tag{3.21}$$

eller

$$2I_{nt} = I_{nn} + I_{tt} - 2I_{45} \tag{3.22}$$

hvoraf ses, at centrifugalmomentet I_{nt} kan bestemmes ved beregning af inertimomenter alene.

Arealer A har dimensionen L^2 og er altid positive.

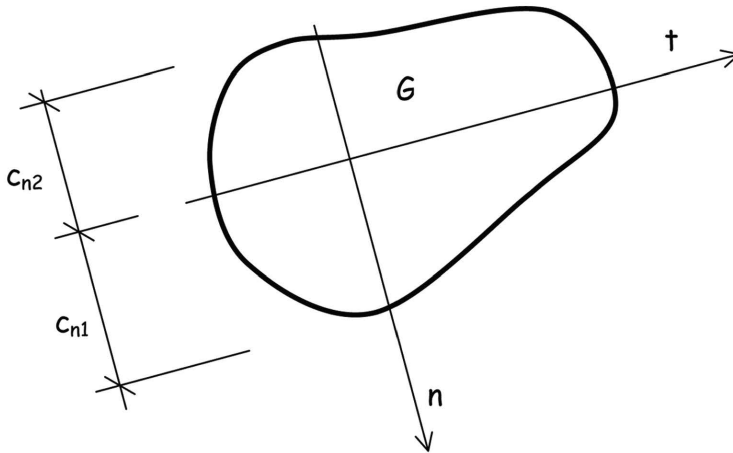
Statistiske momenter S har dimensionen L^3 og kan være såvel positive som negative. Det er derfor en fordel at indlægge hjælpeaksler, så hele tværsnittet er på den ene side af akserne, og alle bidrag til S har samme fortegn.

Inertimomenter I har dimensionen L^4 og er altid positive.

Centrifugalmomenter I_{uv} har dimensionen L^4 og kan være såvel positive som negative.

3.3 Nogle hjælpestørrelser

For tværsnittet i figur 3.5 med de viste akser gennem tyngdepunktet G og de viste af-



Figur 3.5

stande til punkter på omkredsen defineres nogle hyppigt forekommende størrelser.

Modstandsmomenterne om t -aksen, W_{t1} og W_{t2} defineres ved

$$W_{t1} = I_{tt}/c_{n1} \quad \text{og} \quad W_{t2} = I_{tt}/c_{n2} \quad (3.23)$$

og kerneradierne k_{t1} og k_{t2} ved

$$\begin{aligned} k_{t1} &= W_{t1}/A = I_{tt}/Ac_{n1} \\ k_{t2} &= W_{t2}/A = I_{tt}/Ac_{n2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

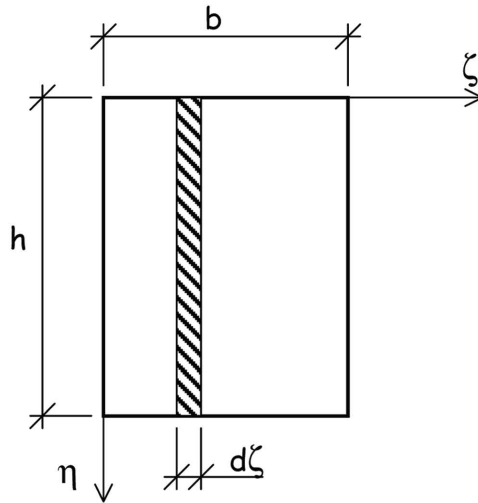
Endelig defineres inertiradius i_t ved

$$i_t^2 = I_{tt}/A \quad (3.25)$$

Med hensyn til n -aksen defineres tilsvarende størrelser.

Eksempel 3.1

Et rektangulært tværsnit har dimensionerne $b \times h$, se figur 3.6. Tværsnittets areal er



Figur 3.6

$$A = bh$$

Dets statiske moment om η -aksen er

$$S_\eta = \int_A \zeta dA = \int_0^b \zeta h d\zeta = \frac{1}{2} b^2 h = \frac{1}{2} bA \quad (\text{a})$$

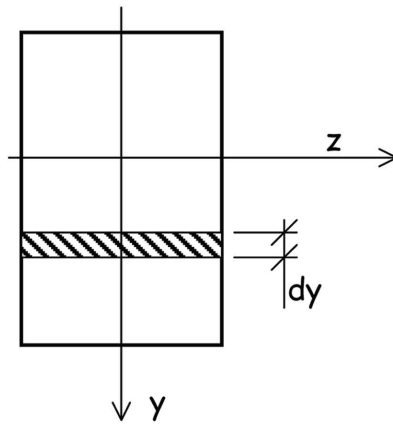
så man ifølge (3.7) finder

$$\zeta_G = S_\eta / A = b/2 \quad (\text{b})$$

Tilsvarende bliver

$$\eta_G = S_\zeta / A = h/2 \quad (\text{c})$$

og man har de i figur 3.7 viste tyngdepunktsakser.



Figur 3.7

Centrifugalmomentet med hensyn til y - og z -akserne bestemmes som

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0 \quad (\text{d})$$

da både y - og z -aksen er symmetriakser. y, z -systemet er dermed hovedaksesystemet.

Inertimomentet om z -aksen er

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{1}{3} b \left[y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = bh^3/12 \quad (\text{e})$$

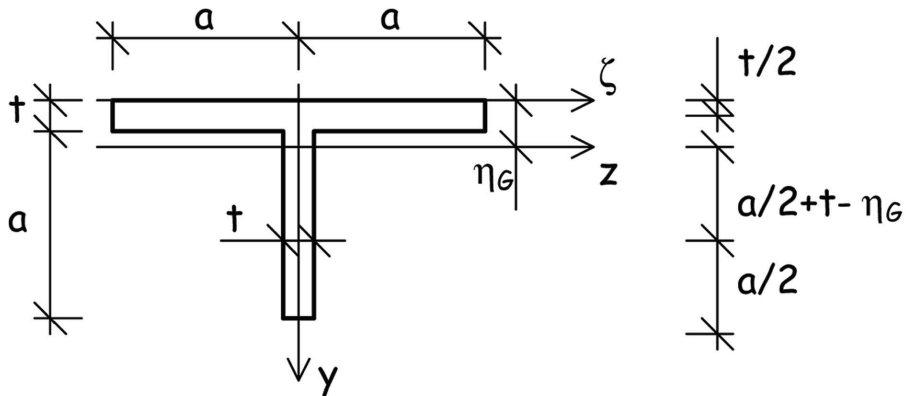
og tilsvarende

$$I_{yy} = b^3 h/12 \quad (\text{f})$$

Ved hjælp af (3.10) finder man f.eks.

$$I_{\zeta\zeta} = I_{zz} + \eta_G^2 A = bh^3/12 + (h/2)^2 bh = bh^3/3 \quad (\text{g})$$

Eksempel 3.2



Figur 3.8

Tværsnittet i figur 3.8 har arealet

$$A = 3at \quad (\text{a})$$

y -aksen er symmetriakse og dermed hovedakse. Det statiske moment om ζ -aksen er

$$S_{\zeta} = at^2 + at(t + a/2) \quad (\text{b})$$

og dermed

$$\eta_G = S_{\zeta}/A = \frac{2at^2 + a^2t/2}{3at} = 2t/3 + a/6 \quad (\text{c})$$

Inertimomenterne bliver

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \frac{1}{12}(t(2a)^3 + at^3) = \frac{1}{12}ta^3(8 + \left(\frac{t}{a}\right)^2) \\ I_{zz} &= \frac{1}{12}2at^3 + 2at(\eta_G - t/2)^2 + \frac{1}{12}ta^3 + at(a/2 + t - \eta_G)^2 \\ &= \frac{1}{12}2at^3 + 2at(a/6 + t/6)^2 + \frac{1}{12}ta^3 + at(a/3 + t/3)^2 \\ &= \frac{1}{12}2at^3 + \frac{2}{36}at(a^2 + t^2 + 2at) + \frac{1}{12}ta^3 + \frac{1}{9}at(a^2 + t^2 + 2at) \\ &= at^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9}\right) + a^3t\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right) + a^2t^2\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) \\ &= a^3t\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{t}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{a}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Når tværsnittet er tyndfliget, dvs.

$$\left(\frac{t}{a}\right)^2 \ll \frac{t}{a} \ll 1 \quad (\text{e})$$

kan man se bort fra led, der indeholder potenser af t højere end første, og man kan regne

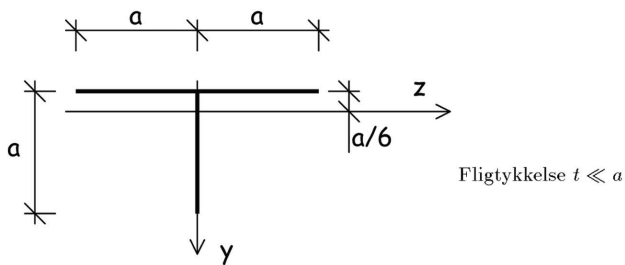
$$I_{yy} = \frac{1}{12}t(2a)^3$$

$$I_{zz} = \frac{1}{4}ta^3 = \frac{1}{12}ta^3 + at(a/2 - a/6)^2 + 2at(a/6)^2 \quad (\text{f})$$

idet tyngdepunktsafstanden regnes til

$$\eta_G = a/6 \quad (\text{g})$$

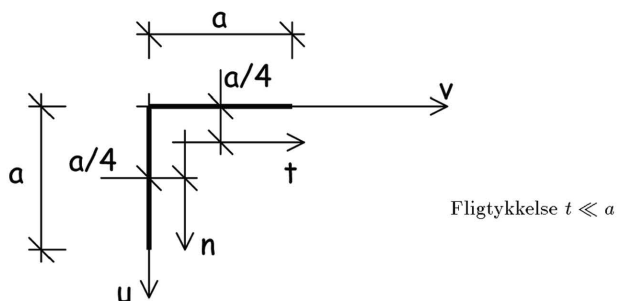
jævnfør figur 3.9.



Figur 3.9

Eksempel 3.3

Et tværsnit har form som det i figur 3.10 viste tyndfligede vinkelprofil.



Figur 3.10

Først indlægges det viste u, v -system, og man har

$$\begin{aligned} A &= 2at \\ S_u &= S_v = a^2 t / 2 \end{aligned} \tag{a}$$

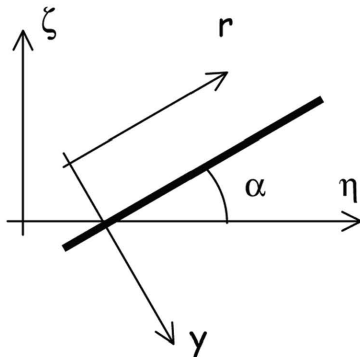
og dermed

$$u_G = v_G = S/A = a/4 \tag{b}$$

Med begyndelsespunkt i G indlægges nu et n, t -system, og man finder

$$\begin{aligned} I_{nn} = I_{tt} &= \frac{1}{12} t a^3 + at \left(\frac{a}{4} \right)^2 + at \left(\frac{a}{4} \right)^2 \\ &= 5ta^3 / 24 \end{aligned} \tag{c}$$

Centrifugalmomentet bestemmes ved hjælp af (3.22), hvorfor vi først må bestemme I_{45} . Inertimomentet $I_{\eta\eta}$ af en flig, som danner vinklen α med η -aksen, se figur 3.11



Figur 3.11

bliver

$$I_{\eta\eta} = \int \zeta^2 dA = \int r^2 \sin^2 \alpha dA = I_{yy} \sin^2 \alpha \tag{d}$$

Inertimomentet om vinkelhalveringslinien gennem tyngdepunktet G bliver nu

$$I_{45} = 2 \cdot \frac{1}{3} t a^3 \sin^2 45^\circ = t a^3 / 3 \tag{e}$$

og hermed ifølge (3.22)

$$\begin{aligned} 2I_{nt} &= I_{nn} + I_{tt} - 2I_{45} \\ &= (5/12 - 2/3) t a^3 = -t a^3 / 4 \end{aligned} \tag{f}$$

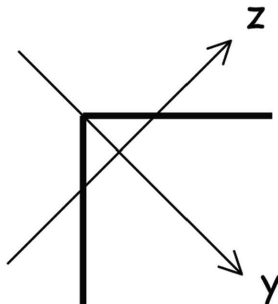
Den vinkel, n , t -systemet skal drejes for at blive ført over i hovedaksesystemet, bestemmes ved (3.17)

$$\tan 2\theta = 2I_{nt}/(I_{tt} - I_{nn}) \rightarrow \infty \quad (\text{g})$$

dvs.

$$\theta = 45 \quad (\text{h})$$

i overensstemmelse med det forhold, at vinkelhalveringslinien er en symmetriakse. Hovedaksesystemet er vist i figur 3.12, og hovedinertimomenterne



Figur 3.12

$$I_{yy} = I_{45} = ta^3/3$$

$$I_{zz} = 2 \cdot \frac{1}{12} ta^3 \sin^2 45 = ta^3/12 \quad (\text{i})$$

4. FORSKYDNINGSSPÆNDINGER VED SKÆV BØJNING

Af flytningsfeltet (2.1)

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= w_x(x) + z\alpha_y(x) - y\alpha_z(x) \\u_y(x, y, z) &= w_y(x) \\u_z(x, y, z) &= w_z(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

kan man foruden længdetøjningen ε_{xx}

$$\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x = \varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z\tag{4.2}$$

også bestemme tøjningerne $\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ og ε_{xy}

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= \partial u_y / \partial y = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \partial u_z / \partial z = 0 \\ 2\varepsilon_{yz} &= \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y = 0 \\ 2\varepsilon_{zx} &= \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z = dw_z / dx + \alpha_y \\ 2\varepsilon_{xy} &= \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x = -\alpha_z + dw_y / dx\end{aligned}\tag{4.3}$$

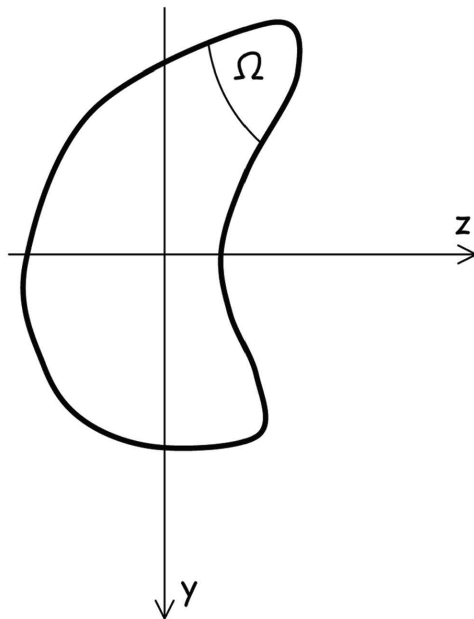
Af (4.3) fremgår, at tøjningerne ε_{zx} og ε_{xy} er funktioner af x alene, og man kan derfor ikke benytte de konstitutive ligninger

$$\sigma_{zx} = 2G\varepsilon_{zx} \quad \text{og} \quad \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}, \quad (G = E/2(1 + \nu))\tag{4.4}$$

til bestemmelse af forskydningsspændingernes variation med y og z .

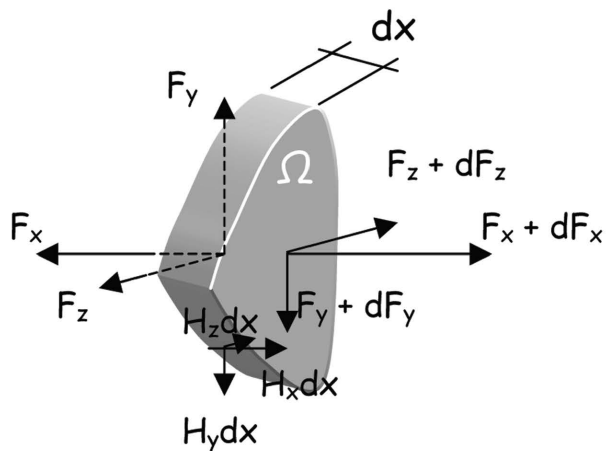
Forskydningsspændingernes variation over tværsnittet vil derfor søges bestemt ved hjælp af en ligevægtsligning.

I figur 4.1 er et bjælketværsnit vist. I tværsnittet afgrænses et område Ω , og et stykke



Figur 4.1

bjælke med længde dx udskæres, se figur 4.2, som viser de kræfter, der virker på elementet. Kræfterne på endefladerne betegnes F_x, F_y og F_z samt $F_x + dF_x, F_y + dF_y$ og $F_z + dF_z$. På den cylindriske snitflade med frembringere parallelle med bjælkeaksen virker kræfterne $H_x dx, H_y dx$ og $H_z dx$, dvs. H_x, H_y og H_z er kræfter pr. længdeenhed.



Figur 4.2

Ved projektion på x-aksen fås

$$F_x + dF_x - F_x + H_x dx = 0 \quad (4.5)$$

dvs.

$$H_x = -dF_x/dx \quad (4.6)$$

F_x er resultatanten af normalspændingerne σ_{xx} på delområdet Ω , så man har

$$F_x = \int_{\Omega} \sigma_{xx} dA \quad (4.7)$$

og dermed

$$H_x = - \int_{\Omega} (d\sigma_{xx}/dx) dA \quad (4.8)$$

som med Naviers formel (2.15) giver

$$H_x = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{A} \frac{dN}{dx} + \frac{z}{I_{yy}} \frac{dM_y}{dx} - \frac{y}{I_{zz}} \frac{dM_z}{dx} \right) dA \quad (4.9)$$

I det følgende betragtes udelukkende det specielle belastningstilfælde, hvor

$$q_x = m_y = m_z = 0 \quad (4.10)$$

dvs.

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z, \quad \frac{dM_z}{dx} = -Q_y \quad (4.11)$$

Hermed fås *Grashofs formel*

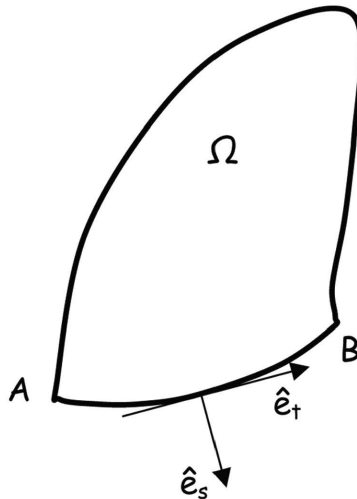
$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{Q_z}{I_{yy}} \int_{\Omega} z dA - \frac{Q_y}{I_{zz}} \int_{\Omega} y dA \\ &= - \left(\frac{Q_z}{I_{yy}} S_{\Omega y} + \frac{Q_y}{I_{zz}} S_{\Omega z} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

hvor de statiske momenter af delområdet Ω med hensyn til tyngdepunktsakserne

$$S_{\Omega y} = \int_{\Omega} z dA \quad \text{og} \quad S_{\Omega z} = \int_{\Omega} y dA \quad (4.13)$$

er indført. For ethvert valg af cylindrisk snitflade, som afgrænser delområdet Ω i normalsnittet, kan man således bestemme den forskydende kraft pr. længdeenhed H_x .

Betegnes normalen til den cylindriske snitflade \hat{e}_s og tangenten \hat{e}_t , som vist i figur 4.3, da har man



Figur 4.3

$$H_x = \int_A^B \sigma_{sx} dt \quad (4.14)$$

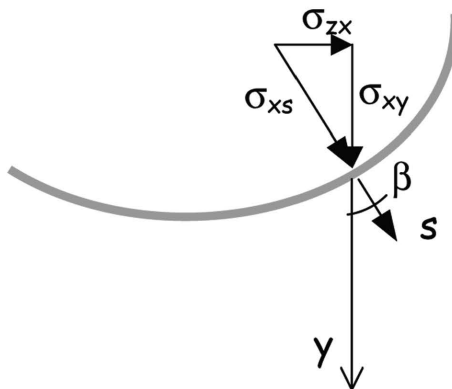
som sammen med

$$\sigma_{xs} = \sigma_{sx} \quad (4.15)$$

og

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xs} \cos \beta \quad , \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xs} \sin \beta \quad (4.16)$$

se figur 4.4 giver



Figur 4.4

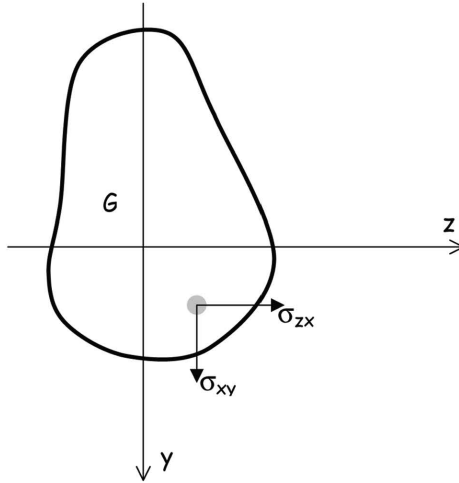
$$H_x = \int_A^B (\sigma_{xy} \cos \beta + \sigma_{zx} \sin \beta) dt = - \left(\frac{Q_z}{I_{yy}} S_{\Omega y} + \frac{Q_y}{I_{zz}} S_{\Omega z} \right) \quad (4.17)$$

Selvom man kan bestemme H_x ved hjælp af Grashofs formel (4.12), er det kun i specielle tilfælde, at man kan bestemme forskydningsspændingerne $\sigma_{xs} = \sigma_{sx}$.

Antages forskydningsspændingerne σ_{xy} og σ_{zx} at være bestemt, da vil ækvivalensbetingelserne

$$Q_y = \int_A \sigma_{xy} dA \quad , \quad Q_z = \int_A \sigma_{zx} dA \quad (4.18)$$

være opfyldt. Forskydningsspændingerne vil imidlertid også resultere i et moment om tyngdepunktsaksen, jævnfør figur 4.5.



Figur 4.5

$$M_x = \int_A (\sigma_{zxy} - \sigma_{xyx}) dA = Q_z y_F - Q_y z_F \quad (4.19)$$

Resultanten af forskydningsspændingerne bestemt ved Grashofs formel

$$\bar{Q} = \bar{Q}_y + \bar{Q}_z \quad (4.20)$$

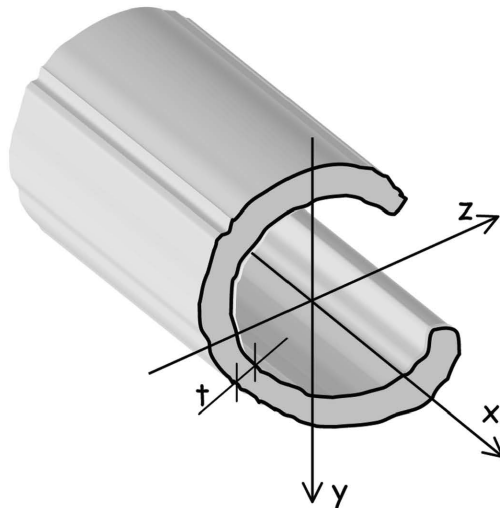
vil derfor gå gennem et punkt, *forskydningscentret* F , med koordinaterne y_F, z_F bestemt ved

$$\begin{aligned} Q_y z_F &= \int_A \sigma_{xy} z dA \\ Q_z y_F &= \int_A \sigma_{zx} y dA \end{aligned} \quad (4.21)$$

og således fremkalde *vridning*, medmindre forskydningscentret falder sammen med tyngdepunktet G .

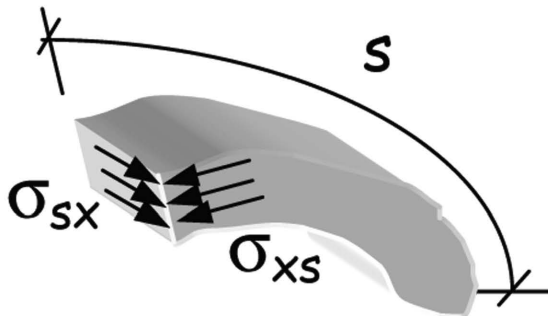
4.1 Tyndfligede tværsnit

I et tyndfliget tværsnit, hvoraf et eksempel er vist i figur 4.6, antages fligtykkelsen at være meget mindre end de øvrige tværsnitsmål i y, z -planen. Det vil her være rimeligt



Figur 4.6

at regne forskydningspændingerne jævnt fordelt over fligtykkelsen som vist i figur 4.7.



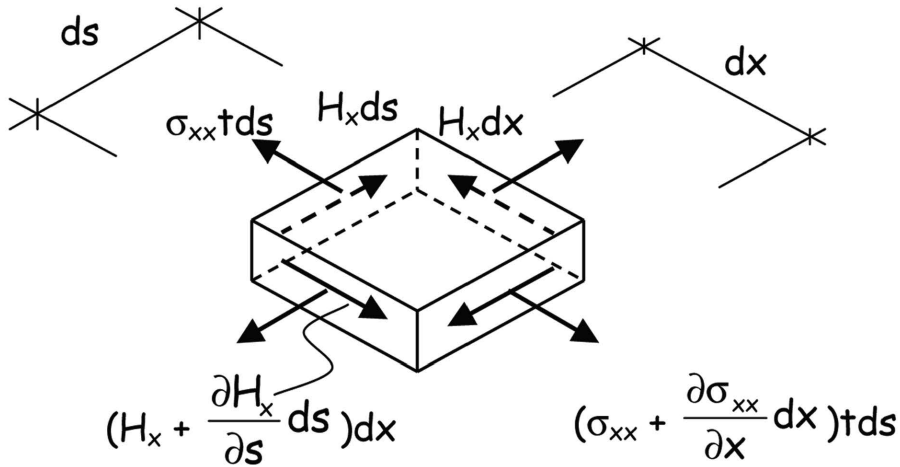
Figur 4.7

Man har således

$$\sigma_{sx} = \sigma_{xs} = H_x(s)/t(s) \quad (4.22)$$

hvor s er en parameter, som måles langs tværsnittets kontur.

H_x kan bestemmes af Grashofs formel (4.12) eller, som man finder ved projektion på x -aksen, af de kræfter, der er vist i figur 4.8.



Figur 4.8

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) t ds - \sigma_{xx} t ds + (H_x + \frac{\partial H_x}{\partial s} ds) dx - H dx &= 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial s} &= -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} t \end{aligned} \quad (4.23)$$

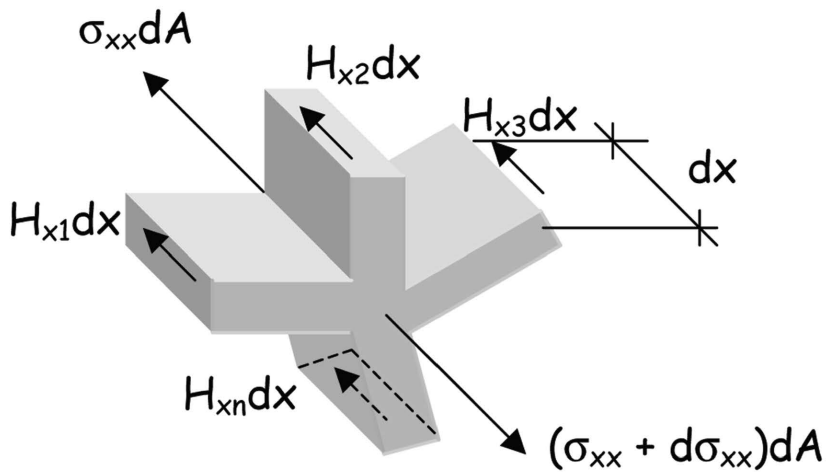
som med σ_{xx} bestemt ved Naviers formel (2.15) bliver

$$\frac{\partial H_x}{\partial s} = -\left(\frac{Q_z}{I_{yy}} z + \frac{Q_y}{I_{zz}} y \right) t(s) \quad (4.24)$$

idet (4.10) vedrørende belastningen er benyttet.

H_x har ekstremum for $y = z = 0$.

Når flere flige mødes i et forgreningspunkt, se figur 4.9, finder man med den viste

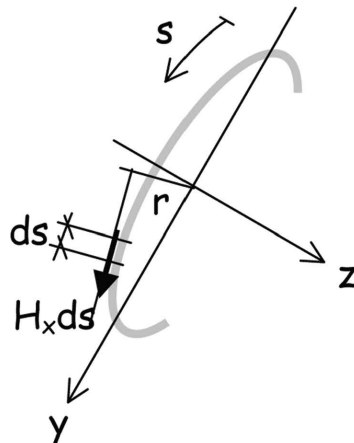


Figur 4.9
fortegnsregning

$$H_{x1} + H_{x2} + \dots H_{xn} = \Sigma H_x = 0 \quad (4.25)$$

4.1.1 Åbne, tyndfligede tværsnit

Det vridende moment om tyngdepunktet G : $M_x = Q_z y_F - Q_y z_F$, som svarer til forskydningspændingerne bestemt ved Grashofs formel, kan udtrykkes på en anden måde,



Figur 4.10
se figur 4.10. Moment om tyngdepunktet G giver

$$M_x = \int_P^Q H_x(s)r(s)ds \quad (4.26)$$

hvor $r(s)$ er afstanden fra G til den tangent, som er angrebslinie for $H_x(s)$. r regnes med fortegn, så r, s -systemet er et højresystem. Den såkaldte *sektorkoordinat* $\omega(s)$ med hensyn til tyngdepunktet G indføres ved

$$d\omega/ds = r(s) \quad (4.27)$$

og man har

$$M_x = \int_P^Q H_x \frac{d\omega}{ds} ds = [H_x \omega]_P^Q - \int_P^Q \frac{\partial H}{\partial s} \omega ds \quad (4.28)$$

Forudsætningen $q_x = 0$ medfører

$$H_x(P) = H_x(Q) = 0 \quad (4.29)$$

og dermed

$$M_x = - \int_P^Q \frac{\partial H_x}{\partial s} \omega ds = \int_P^Q \left(\frac{Q_z}{I_{yy}} z + \frac{Q_y}{I_{zz}} y \right) t \omega ds \quad (4.30)$$

Med sektorcentrifugalmomenterne $I_{\omega y}$ og $I_{\omega z}$ defineret ved

$$\begin{aligned} I_{\omega y} &= \int_P^Q y \omega t ds = \int_P^Q y \omega dA \\ I_{\omega z} &= \int_P^Q z \omega t ds = \int_P^Q z \omega dA \end{aligned} \quad (4.31)$$

har man

$$M_x = Q_z \frac{I_{\omega z}}{I_{yy}} + Q_y \frac{I_{\omega y}}{I_{zz}} = Q_z y_F - Q_y z_F \quad (4.32)$$

hvoraf fremgår, at forskydningscentrets koordinater bestemmes ved

$$\begin{aligned} y_F &= I_{\omega z} / I_{yy} \\ z_F &= -I_{\omega y} / I_{zz} \end{aligned} \quad (4.33)$$

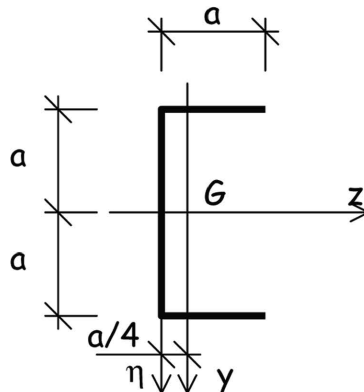
Ved bestemmelsen af sektorkoordinaten ω efter (4.27) indgår der en ubestemt integrationskonstant C , som imidlertid er uden betydning her, idet f.eks.

$$\int_A (\omega + C) y t ds = \int_A \omega y t ds + C \int_A y dA = I_{\omega y} + C S_z = I_{\omega y} \quad (4.34)$$

da y - og z -akserne er tyngdepunktsakser. Da momentet om forskydningscentret F er nul, er også sektorcentrifugalmomenterne $I_{\omega' z} = I_{\omega' y} = 0$, hvor ω' er en sektorkoordinat med hensyn til F .

Eksempel 4.1

Det i figur 4.11 viste U-profil påvirkes af forskydningskræfterne Q_y og Q_z gennem forskydningscentret



Figur 4.11

F , hvis beliggenhed ønskes bestemt ligesom fordelingen af forskydende kræfter pr. længdeenhed H_x . På grund af symmetrien er z -aksens placering som vist, og til bestemmelse af y -aksens placering har vi

$$A = 4ta \quad (a)$$

$$S_\eta = 2 \cdot \frac{1}{2} ta^2 \quad (b)$$

og dermed

$$\zeta_G = ta^2 / 4ta = a/4 \quad (c)$$

Inertimomenterne bliver

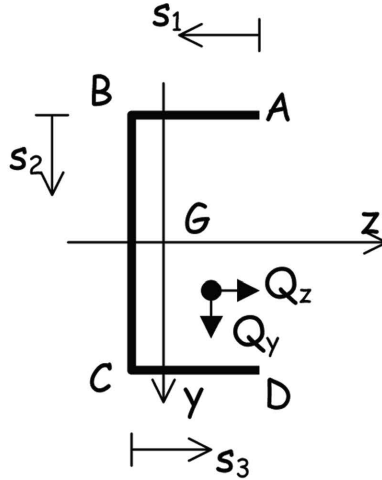
$$I_{yy} = \left(\frac{1}{12} ta^3 + ta \left(\frac{1}{4} a \right)^2 \right) 2 + 2ta \left(\frac{1}{4} a \right)^2 = \frac{5}{12} ta^3 \quad (d)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} t(2a)^3 + ta \cdot a^2 \cdot 2 = \frac{8}{3} ta^3 \quad (e)$$

Først betragtes formel (4.12)

$$H_x = - \left(\frac{Q_z}{I_{yy}} S_{\Omega y} + \frac{Q_y}{I_{zz}} S_{\Omega z} \right) \quad (f)$$

hvoraf ses, at det er fordelingen af statiske momenter $S_{\Omega y}$ og $S_{\Omega z}$, som skal bestemmes. Med de i

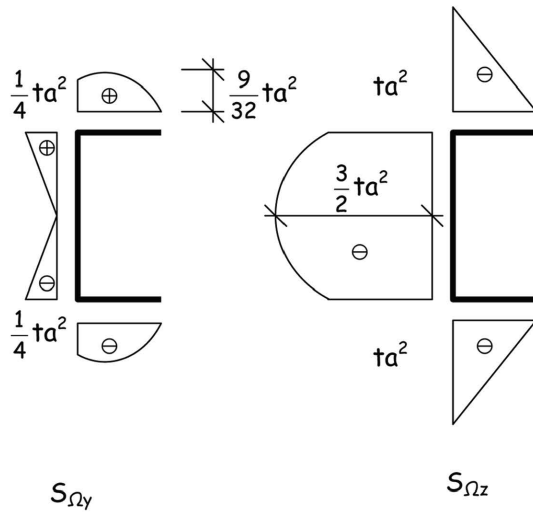


Figur 4.12

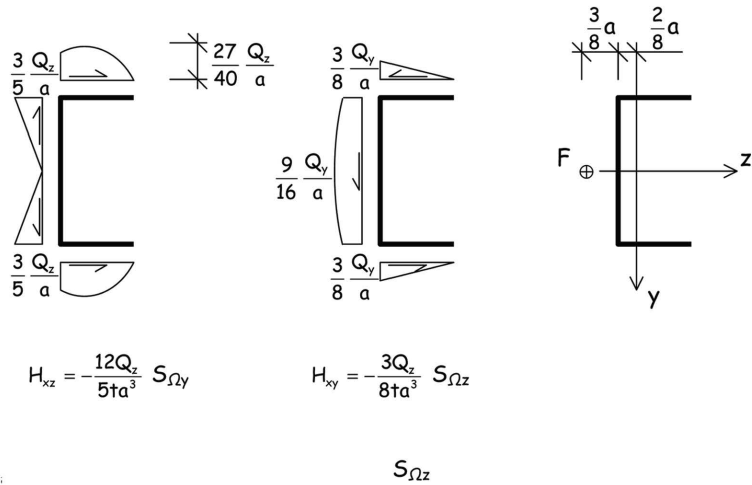
figur 4.12 viste buemål s_1 , s_2 og s_3 langs konturen har man på de 3 strækninger A-B, B-C og C-D:

	y	z	$S_{\Omega y} = \int_{\Omega} z t ds$	$S_{\Omega z} = \int_{\Omega} y t ds$
A			0	0
B	$-a$	$\frac{3}{4}a - s_1$	$\frac{3}{4}as_1t - \frac{1}{2}s_1^2t$	$-as_1t$
			$\frac{1}{4}a^2t$	$-a^2t$
C	$s_2 - a$	$-\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{4}a^2t - \frac{1}{4}as_2t$	$\frac{1}{2}s_2^2t - as_2t - a^2t$
			$-\frac{1}{4}a^2t$	$-a^2t$
D	a	$s_3 - \frac{1}{4}a$	$\frac{1}{2}s_3^2t - \frac{1}{4}as_3t - \frac{1}{4}a^2t$	$as_3t - a^2t$
			0	0

Variationen af de statiske momenter langs konturen er vist i figur 4.13, og i figur 4.14 er fordelingen af forskydende kræfter $H_x = \sigma_{xs}t$, hidrørende fra henholdsvis Q_z og Q_y vist.



Figur 4.13



Figur 4.14

Koordinaterne til forskydningscentret bestemmes som følger: På grund af symmetrien om z -aksen er $y_F = 0$, og z_F bestemmes ved en momentligning, f.eks. moment om punkt B i figur 4.12. Momentet fra henholdsvis H_{xy} og Q_y er

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \frac{Q_y}{a} \cdot 2a = -Q_y \left(z_F + \frac{1}{4}a \right) \quad (\text{g})$$

som giver

$$z_F = -\frac{5}{8}a \quad (\text{h})$$

Forskydningscentrets placering er vist i figur 4.14.

Det ses umiddelbart, at bestemmelse af de statiske momenter $S_{\Omega y}$ og $S_{\Omega z}$ er det samme som integration af (4.24)

$$\frac{\partial H_x}{\partial s} = - \left(\frac{Q_z}{I_{yy}} z + \frac{Q_y}{I_{zz}} y \right) t \quad (i)$$

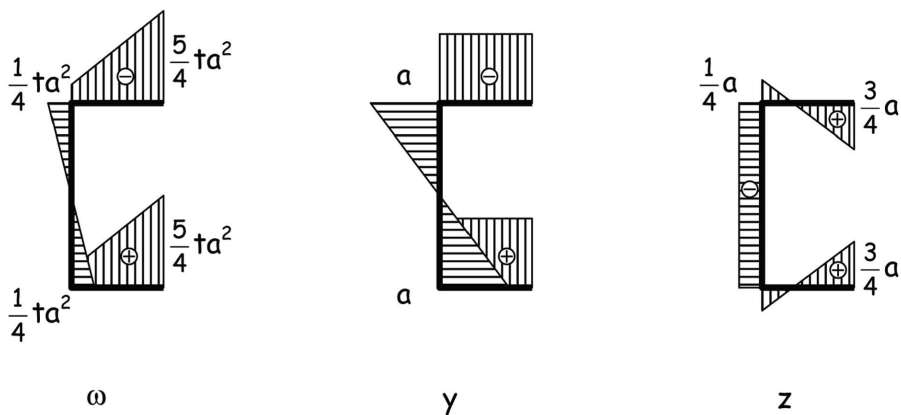
Herefter skal y_F og z_F bestemmes ved hjælp af sektorcentrifugalmomenter. Sektorkoordinaten ω med hensyn til G bestemmes ved

$$d\omega/ds = r \quad (j)$$

På de 3 strækninger A-B, B-C og C-D får man, se figur 4.12

Punkt	r	ω	$\omega(C = -\frac{5}{4}a^2)$
A		C	$-\frac{5}{4}a^2$
	a	$C + as_1$	$as_1 - \frac{5}{4}a^2$
B		$C + a^2$	$-\frac{1}{4}a^2$
	$\frac{1}{4}a$	$C + a^2 + \frac{1}{4}as_2$	$\frac{1}{4}as_2 - \frac{1}{4}a^2$
C		$C + \frac{3}{2}a^2$	$\frac{1}{4}a^2$
	a	$C + \frac{3}{2}a^2 + as_3$	$as_3 + \frac{1}{4}a^2$
D		$C + \frac{5}{2}a^2$	$\frac{5}{4}a^2$

Konstanten $C = -5a^2/4$ er valgt for at give sektorkoordinaten ω en form for symmetri, antimetri, om $s_2 = a$. Variationen langs konturen af de 3 koordinater $\omega(s)$, $y(s)$ og $z(s)$ er vist i figur 4.15, og ved



Figur 4.15

hjælp af integrationsformlerne $I = \int_0^l f(x)g(x)dx$ i appendiks A finder man

$$I_{\omega y} = t \left(a \cdot a \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \right) a^2 + \frac{1}{3} a \cdot a \cdot \frac{1}{4} a^2 \right) \cdot 2 = \frac{5}{3} t a^4 \quad (k)$$

$$I_{\omega z} = 0$$

og dermed

$$\begin{aligned} y_F &= I_{\omega z} / I_{yy} = 0 \\ z_F &= -I_{\omega y} / I_{zz} = -\frac{5}{8} a \end{aligned} \quad (l)$$

i overensstemmelse med (h)

Bemærk, at sektorkoordinaten ω har dimensionen længde i anden og sektorcentrifugalmomentet tilsvarende dimensionen længde i femte.

4.1.2 Tværsnitsdeformationer

En korrekt bestemmelse af deformationer og spændinger i et bærende konstruktionselement i ligevægt kræver samtidig opfyldelse af ligevægtsligninger, tøjnings-flytningsrelationer, randbetingelser samt et sæt konstitutive ligninger.

Ligevægtsligningerne er

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{xx}/\partial x + \partial\sigma_{xy}/\partial y + \partial\sigma_{zx}/\partial z + \rho b_x &= 0 \\ \partial\sigma_{xy}/\partial x + \partial\sigma_{yy}/\partial y + \partial\sigma_{yz}/\partial z + \rho b_y &= 0 \\ \partial\sigma_{zx}/\partial x + \partial\sigma_{yz}/\partial y + \partial\sigma_{zz}/\partial z + \rho b_z &= 0 \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \end{aligned} \quad (4.35)$$

og for infinitesimale flytningsgradienter er tøjnings-flytningsrelationerne

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \partial u_x / \partial x, \quad \varepsilon_{yy} = \partial u_y / \partial y, \quad \varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = (\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x) / 2 \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = (\partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y) / 2 \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = (\partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z) / 2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Randbetingelserne kan være såvel spændingsrandbetingelser som flytningsrandbetingelser.

Som konstitutive ligninger benyttes ligningerne for lineærelastiske materialer, dvs.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.37 a)$$

eller den omvendte relation

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.37 \text{ b})$$

Kun i de simpleste tilfælde kan man bestemme løsningsformler, der angiver de ukendte størrelser som funktioner af stedvektoren og randparametrene, og flytningsfeltet (2.1) er da heller ikke en eksakt løsning.

De tøjninger, der kan afledes af flytningerne, er som tidligere fundet

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0 \\ 2\varepsilon_{zx} &= dw_z/dx + \alpha_y \\ 2\varepsilon_{xy} &= dw_y/dx - \alpha_z \end{aligned} \quad (4.38)$$

jævnfør (4.2) og (4.3). Af den konstitutive ligning (4.37 b) fås nu

$$\sigma_{xx} = (1-\nu)E\varepsilon_{xx}/(1+\nu)(1-2\nu) \quad (4.39)$$

som kun for $\nu = 0$ reduceres til (2.5)

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (4.40)$$

som vi har anvendt. Sættes imidlertid

$$\begin{aligned} u_x &= w_x + z\alpha_y - y\alpha_z \\ u_y &= w_y - \nu(y\varepsilon + yz\kappa_y + (z^2 - y^2)\kappa_z/2) \\ u_z &= w_z - \nu(z\varepsilon + (z^2 - y^2)\kappa_y/2 - yz\kappa_z) \end{aligned} \quad (4.41)$$

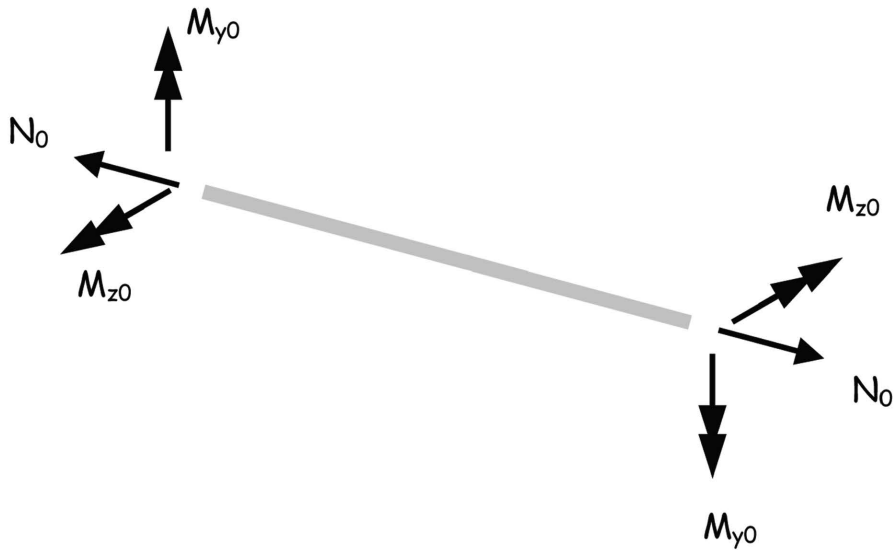
bliver længdetøjningerne

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx} \end{aligned} \quad (4.42)$$

og normalspændingerne ifølge (4.37 b)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

(4.41) er en eksakt løsning for et bjælkestykke belastet alene på endefladerne af N_o , M_{yo} og M_{zo} , se figur 4.16.



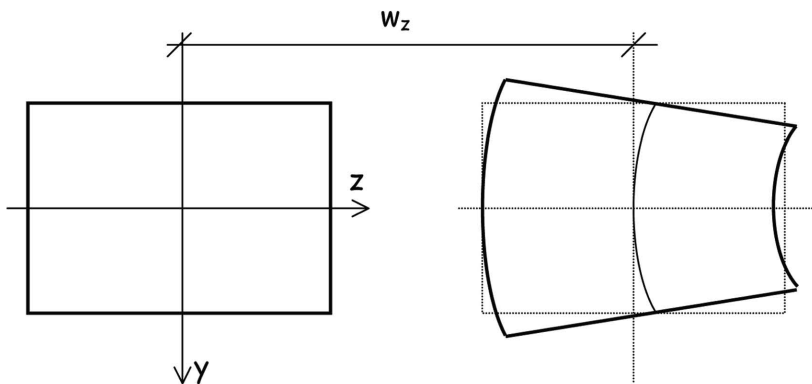
Figur 4.16

Eksempel 4.2

En bjælke med rektangulært tværsnit påvirkes af et konstant moment M_{y0} . Tværsnittets flytninger i y, z -planen bliver i henhold til (4.41)

$$\begin{aligned} u_y &= w_y - \nu y z \kappa_y \\ u_z &= w_z - \nu(z^2 - y^2)\kappa_y / 2 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

hvor $\kappa_y = M_{y0} / EI_{yy}$. Det deformerede tværsnit er vist i figur 4.17



Figur 4.17

Forskydningstøjningerne bestemt ud fra flytningerne (4.41) bliver

$$\begin{aligned}
 2\varepsilon_{yz} &= \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y \\
 &= -\nu(y\kappa_y + z\kappa_z - y\kappa_z - z\kappa_y) = 0 \\
 2\varepsilon_{zx} &= \partial u_z / \partial z + \partial u_x / \partial z \\
 &= dw_z / dx + \alpha_y - \nu \left(z \frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{1}{2}(z^2 - y^2) \frac{d\kappa_y}{dx} - yz \frac{d\kappa_z}{dx} \right) \\
 2\varepsilon_{xy} &= dw_y / dx - \alpha_z - \nu \left(y \frac{d\varepsilon}{dx} + yz \frac{d\kappa_y}{dx} + \frac{1}{2}(z^2 - y^2) \frac{d\kappa_z}{dx} \right)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

som alle er nul i et bjælkestykke, der alene er belastet på endefladerne som beskrevet ovenfor. Udbøjningerne w_y og w_z bestemmes derfor af

$$\begin{aligned}
 dw_z / dx + \alpha_y &= 0 \\
 dw_y / dx - \alpha_z &= 0
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

hvor vinkeldrejningerne α_y og α_z bestemmes af

$$\begin{aligned}
 d\alpha_y / dx &= \kappa_y = M_{y0} / EI_{yy} \\
 d\alpha_z / dx &= \kappa_z = M_{z0} / EI_{zz}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Når momenterne varierer langs bjælkeaksen, og der optræder forskydningskræfter og derfor også tøjninger ε_{zx} og ε_{xy} , er flytningsfeltet (4.41) imidlertid ikke særlig velegnet, da de deraf afledede tøjninger (4.44 b og c) i almindelighed ikke vil føre til en rimelig fordeling af forskydningssspændinger sammen med de konstitutive ligninger.

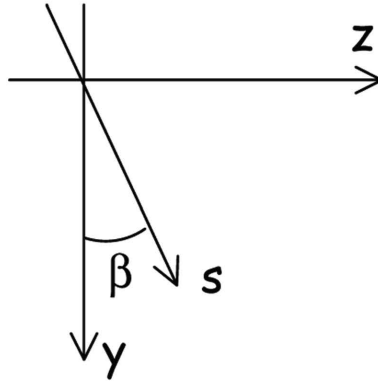
I en bjælke med tyndffliget tværsnit kan man tage hensyn til forskydningsdeformationerne ved at benytte flytningsfeltet

$$\begin{aligned}
 u_x(x, s) &= w_x(x) + z(s)\alpha_y(x) - y(s)\alpha_z(x) + \int 2\varepsilon_{xs} ds \\
 u_y(x, s) &= w_y(x) \\
 u_z(x, s) &= w_z(x)
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

hvor

$$\begin{aligned}
 dw_z / dx + \alpha_y &= 0 \\
 dw_y / dx - \alpha_z &= 0 \\
 2\varepsilon_{xs} &= \sigma_{xs} / G = H_x(x, s) / Gt(s) \\
 H_x(x, s) &= - \left(\frac{Q_z}{I_{yy}} S_{\Omega y} + \frac{Q_y}{I_{zz}} S_{\Omega z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Med betegnelserne i figur 4.18 har man



Figur 4.18

$$\begin{aligned}\partial y / \partial s &= dy / ds = \cos \beta \\ \partial z / \partial s &= dz / ds = \sin \beta \\ u_s &= w_y \cos \beta + w_z \sin \beta\end{aligned}\tag{4.49}$$

og finder

$$\begin{aligned}\partial u_x / \partial s &= \alpha_y dz / ds - \alpha_z dy / ds + 2\varepsilon_{xs} \\ \partial u_s / \partial x &= (dw_y / dx) \cos \beta + (dw_z / dx) \sin \beta = \alpha_z \cos \beta - \alpha_y \sin \beta\end{aligned}\tag{4.50}$$

så definitionsligningen

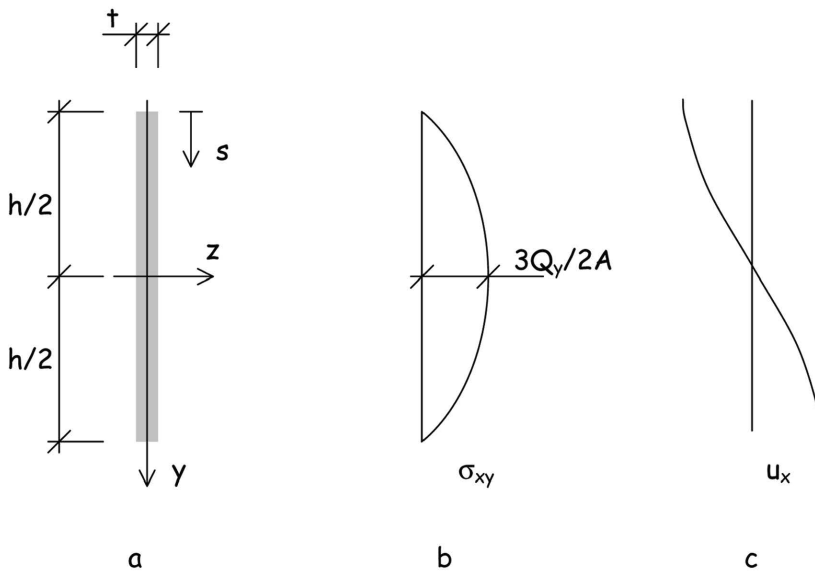
$$2\varepsilon_{xs} = \partial u_x / \partial s + \partial u_s / \partial x\tag{4.51}$$

er i orden.

Bidraget $\int 2\varepsilon_{xs} ds$ fra forskydningsdeformationerne til flytningerne u_x i bjælkeaksens retning kaldes *tværsnitshvælvninger*.

Eksempel 4.3

For det i figur 4.19a viste tyndfligede tværsnit, som kun kan optage forskydningspændinger i y -retningen, ønskes tværsnitshvælvningen bestemt.



Figur 4.19

Man har

$$A = ht \quad , \quad I_{zz} = th^3/12 \quad (a)$$

og $s = y + h/2$

dvs.

$$\partial H_x / \partial s = \partial H_x / \partial y = -Q_y t y / I_{zz} \quad (b)$$

med løsningen

$$H_x = -Q_y t y^2 / 2 I_{zz} + Q_y t h^2 / 8 I_{zz} \quad (c)$$

da randbetingelserne

$$H_x = 0 \quad \text{for} \quad y = \pm h/2 \quad (d)$$

skal være opfyldt.

Hermed bliver forskydningspændingen

$$\sigma_{xy} = Q_y (h^2 - 4y^2) / 8 I_{zz} = 3Q_y (h^2 - 4y^2) / 2th^3 \quad (e)$$

Tværsnitshvælvningen bestemmes nu af

$$\begin{aligned} \partial u_x / \partial y &= 2\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy} / G \\ &= 3Q_y (h^2 - 4y^2) / 2Gth^3 \end{aligned} \quad (f)$$

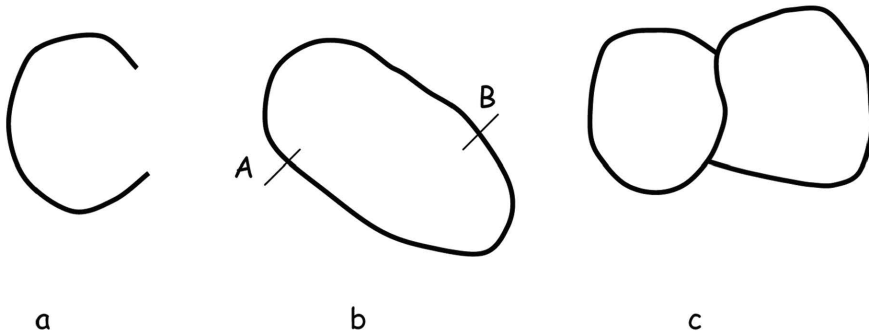
dvs.

$$u_x = Q_y (3h^2 y - 4y^3) / 2Gth^3 + u_{x0} \quad (g)$$

Forskydningspændingerne er vist i figur 4.19b, og tværsnitshvælvningen i 4.19c, idet $u_{x0} = u_x$ for $y = 0$ er sat lig nul.

4.1.3 Lukkede, tyndffigede tværsnit

I et åbent, tyndffiget tværsnit med en kontur som f.eks. vist i figur 4.20a er H_x fastlagt



Figur 4.20

ved $H_x = 0$ i enderne af konturen. I et lukket, tyndffiget tværsnit med en kontur som vist i figur 4.20b derimod, er der ingen steder, hvor H_x på forhånd er kendt. Vælger man som udgangspunkt et vilkårligt punkt A med den ukendte forskydende kraft pr. længdeenhed H_{xA} , kan man ved hjælp af f.eks. (4.24) bestemme H_x i alle punkter i tværsnittet, men ved integration hele vejen rundt langs konturen ender man med den ukendte værdi H_{xA} . Betragtes derimod hvælvningsdeformationerne har man

$$u_{xB} = u_{xA} + \int_A^B 2\varepsilon_{xs} ds = u_{xA} + \int_A^B (H_x/Gt) ds \quad (4.52)$$

og ved integration hele vejen rundt får man

$$\oint (H/Gt) ds = 0 \quad (4.53)$$

Hvis tværsnittet er sammensat af 2 eller flere celler som vist i figur 4.20c, skal (4.53) være opfyldt for alle celler.

Eksempel 4.4

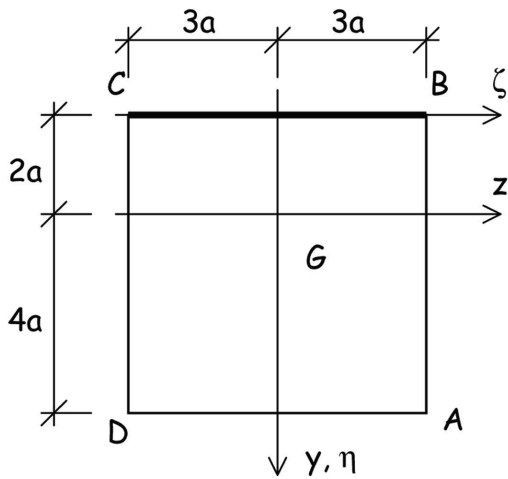
Tværsnittet vist i figur 4.21 er påvirket af en forskydningskraft Q_z gennem forskydningscentret F , hvis beliggenhed indtil videre er ubestemt bortset fra, at det ligger på y -aksen, som er en symmetriakse. Fligene AB, CD og DA har tykkelsen t , mens fligen BC har tykkelsen $3t$. Man har

$$A = 36ta \quad (a)$$

$$S_\zeta = 2 \cdot 6 \cdot 3ta^2 + 6 \cdot 6ta^3 = 72ta^2$$

og dermed

$$\eta_G = S_\zeta/A = 2a \quad (b)$$



Figur 4.21

Yderligere er inertimomentet om y -aksen

$$I_{yy} = 4t(6a)^3/12 + 6ta(3a)^2 = 180ta^3 \quad (c)$$

Den forskydende kraft pr. længdeenhed H_x bestemmes af

$$\partial H_x / \partial s = -Q_z z t(s) / I_{yy} \quad (d)$$

For fligen CD har man $z = -3a$ og dermed

$$\begin{aligned} \partial H_x / \partial y &= 3Q_z a t / I_{yy} \\ H_x &= 3Q_z a y t / I_{yy} + 6Q_z a^2 t / I_{yy} + H_{xC} \end{aligned} \quad (e)$$

I punkt D , $y = 4a$, bliver

$$H_{xD} = 18Q_z a^2 t / I_{yy} + H_{xC} \quad (f)$$

For fligen DA er

$$\begin{aligned} \partial H_x / \partial z &= -Q_z z t / I_{yy} \\ H_x &= -Q_z z^2 t / 2I_{yy} + C_1 \end{aligned} \quad (g)$$

som for $z = -3a$ giver

$$H_{xD} = -9Q_z a^2 t / 2I_{yy} + C_1 = 18Q_z a^2 t / I_{yy} + H_{xC} \quad (h)$$

dvs.

$$C_1 = 45Q_z a^2 t / 2I_{yy} + H_{xC} \quad (i)$$

$$\text{og } H_x = Q_z (45a^2 - z^2) t / 2I_{yy} + H_{xC} \quad (j)$$

I punkt A, $z = 3a$, bliver

$$H_{xA} = 18Q_z a^2 t / I_{yy} + H_{xD} \quad (k)$$

I fligen AB er

$$\partial H_x / \partial s = -\partial H_x / \partial y \quad (l)$$

da vi integrerer langs vejen CDABC.

$$\partial H_x / \partial y = 3Q_z a t / I_{yy}$$

$$H_x = 3Q_z a y t / I_{yy} + C_2$$

$$H_{xA} = 12Q_z a^2 t / I_{yy} + C_2 = 18Q_z a^2 t / I_{yy} + H_{xC} \quad (m)$$

$$C_2 = 6Q_z a^2 t / I_{yy} + H_{xC}$$

$$H_x = 3Q_z a(y + 2a)t / I_{yy} + H_{xC}$$

I punkt B, $y = -2a$, bliver

$$H_{xB} = H_{xC} \quad (n)$$

For fligen BC bliver tilsvarende

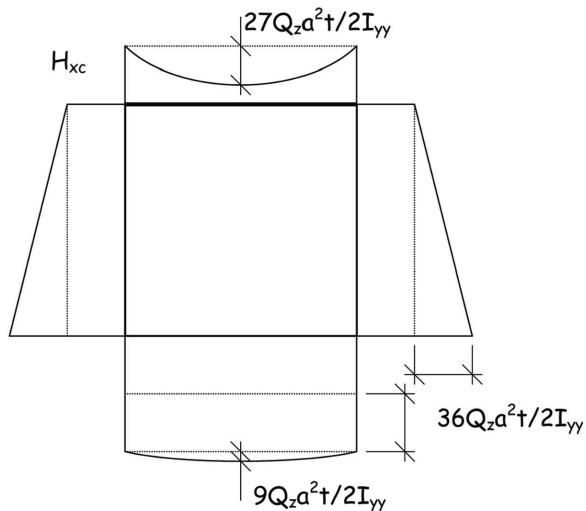
$$\partial H_x / \partial z = 3Q_z z t / I_{yy}$$

$$H_x = 3Q_z z^2 t / 2I_{yy} + C_3$$

$$H_{xB} = 27Q_z a^2 t / 2I_{yy} + C_3 = H_{xC} \quad (o)$$

$$H_x = 3Q_z(z^2 - 9a^2)t / 2I_{yy} + H_{xC}$$

Fordelingen af forskydende kræfter pr. længdeenhed er vist i figur 4.22



Figur 4.22

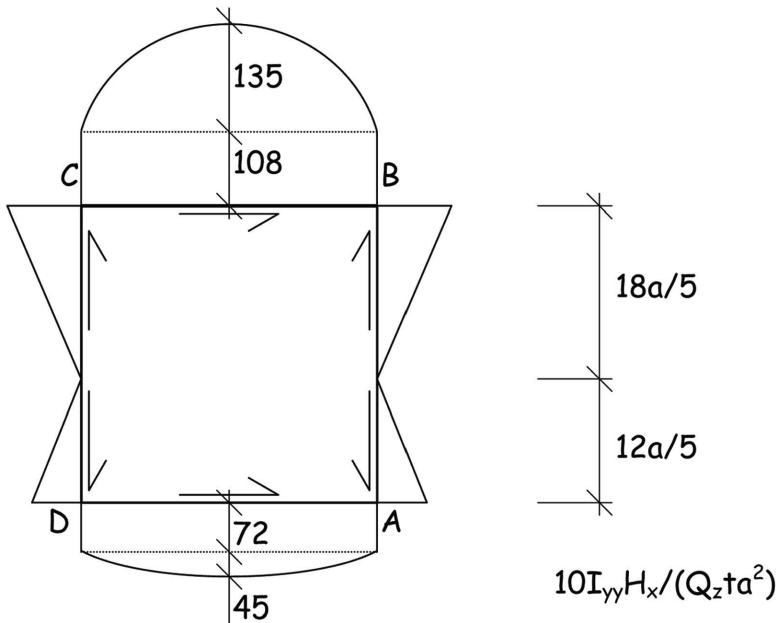
Til bestemmelse af H_{xC} har vi (4.53), som med G konstant kan skrives

$$\oint (H_x/t) ds = 0 \quad (p)$$

og udføres som arealberegninger. Man finder

$$\begin{aligned} H_{xC}(6a \cdot 3/t + 6a/3t) + \frac{36Q_z a^2}{2I_{yy}} \left(\frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 2 + 6a \right) \\ + \frac{9Q_z a^2}{2I_{yy}} \left(\frac{2}{3} \cdot 6a - \frac{2}{3} \cdot 6a \cdot 3/3 \right) = 0 \quad (q) \\ 20aH_{xC}/t + \frac{36Q_z a^2}{2I_{yy}} 12a = 0 \\ H_{xC} = \frac{-108 Q_z a^2 t}{10 I_{yy}} \end{aligned}$$

I figur 4.23 er den endelige fordeling af forskydende kræfter pr. længdeenhed vist. Pilene viser den



Figur 4.23

positive retning af H_x svarende til en forskydningskraft i z -aksens positive retning. Resultanten bliver

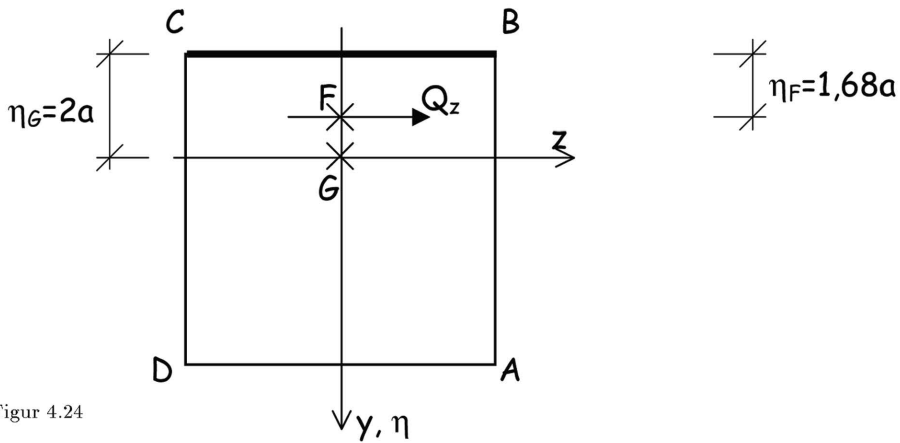
$$\left((108 + 72 + 2(45 + 135))/3 \right) 6a \frac{Q_z t a^2}{10I_{yy}} = 180 \frac{Q_z t a^3}{I_{yy}} = Q_z$$

Endelig bestemmes forskydningscentrets beliggenhed ved at tage moment om f.eks. punkt C . Ved at sammenholde figur 4.23 med figur 4.24 ses det, at man har

$$Q_z \eta_F = \left(\left(72 + \frac{2}{3} \cdot 45 \right) 6a + \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot \frac{12}{5} a - \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot \frac{18}{5} a \right) 6a \frac{Q_z t a^2}{10I_{yy}}$$

og dermed

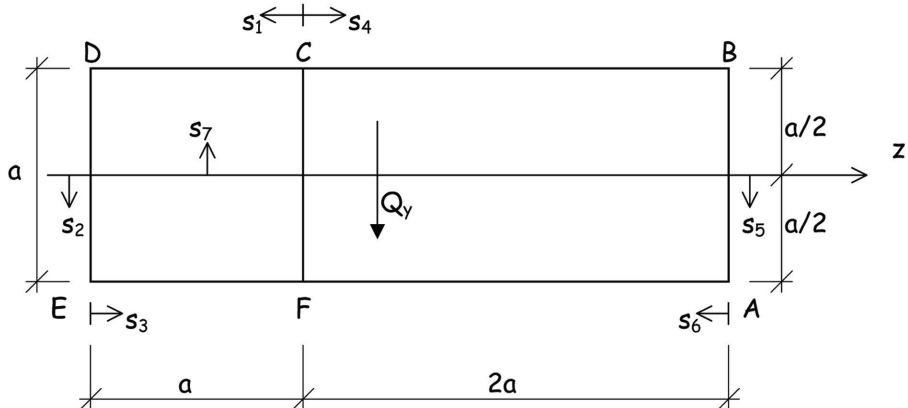
$$\eta_F = \left(612 + \frac{432}{5} - \frac{972}{5} \right) \frac{6ta^4}{10I_{yy}} = \frac{504 \cdot 6}{1800} a = 1,68a$$



Figur 4.24

Eksempel 4.5

Det i figur 4.25 viste lukkede, tyndfligede tværsnit er påvirket af en forskydningskraft \$Q_y\$ gennem forskydningscentret og parallel med de korte sider. Fligtykkelsen er overalt \$t\$. Fordelingen af forskydende



Figur 4.25

kræfter \$H_x\$ og forskydningscentrets beliggenhed ønskes bestemt.

Den forskydende kraft pr. længdeenhed \$H_x\$ bestemmes af

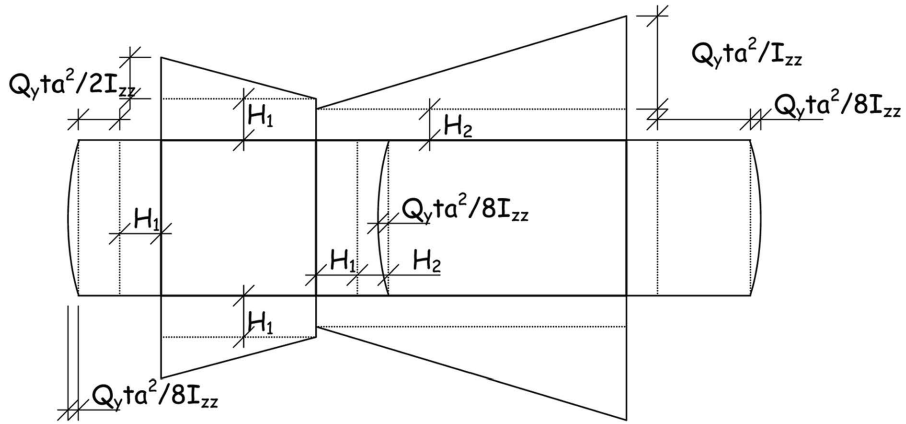
$$\partial H_x / \partial s = -Q_y y t / I_{zz} \quad (a)$$

hvor z-aksen er den viste symmetriakse, og y-aksen er rettet nedad.

Integrationen påbegyndes i punkt C , først strækningen CDEF med begyndelsesværdien H_1 , derefter strækningen CBAF med begyndelsesværdien H_2 og til sidst strækningen FC. Beregningerne opstilles i et skema

Punkt	y	H_x
C		H_1
	$-a/2$	$Q_y t a s_1 / 2I_{zz} + H_1$
D		$Q_y t a^2 / 2I_{zz} + H_1$
	s_2	$Q_y t (5a^2 - 4s_2^2) / 8I_{zz} + H_1$
E		$Q_y t a^2 / 2I_{zz} + H_1$
	$a/2$	$Q_y t (a^2 - a s_3) / 2I_{zz} + H_1$
F		H_1
C		H_2
	$-a/2$	$Q_y t a s_4 / 2I_{zz} + H_2$
B		$Q_y t a^2 / I_{zz} + H_2$
	s_5	$Q_y t (9a^2 - 4s_5^2) / 8I_{zz} + H_2$
A		$Q_y t a^2 / I_{zz} + H_2$
	$a/2$	$Q_y t (2a^2 - a s_6) / 2I_{zz} + H_2$
F		H_2
F		$H_1 + H_2$
	$-s_7$	$Q_y t (4s_7^2 - a^2) / 8I_{zz} + H_1 + H_2$
C		$H_1 + H_2$

I punkterne F og C er (4.25) benyttet. Fordelingen af forskydende kræfter pr. længdeenhed er vist i figur 4.26.



Figur 4.26

For de to celler har man ($Gt = \text{konstant}$)

$$\text{CDEFC: } \int H_x ds = 4H_1 a + H_2 a + 4Q_y t a^2 \cdot 2a/8I_{zz} = 0$$

$$\text{CBAFC: } \int H_x ds = H_1 a + 6H_2 a + 8Q_y t a^2 \cdot 3a/8I_{zz} = 0$$

hvoraf man finder

$$H_1 = -3Q_y t a^2 / 23I_{zz}$$

$$H_2 = -11Q_y t a^2 / 23I_{zz}$$

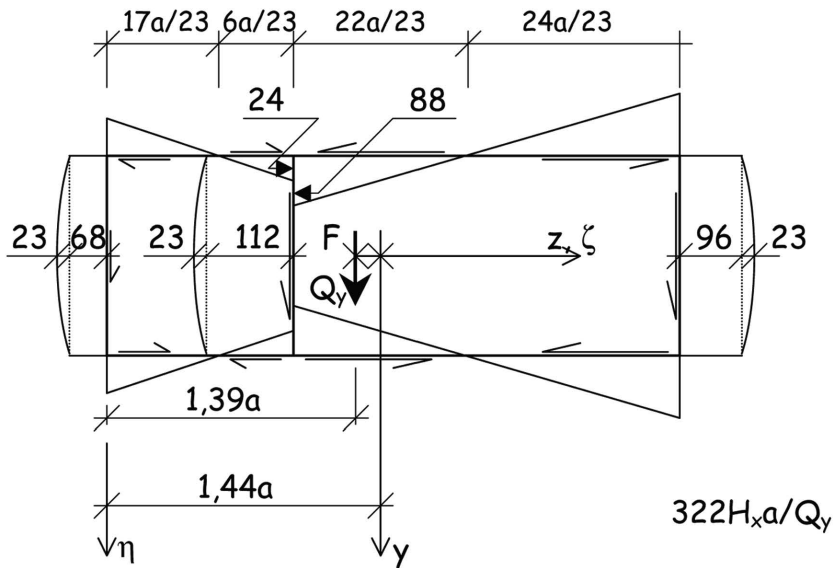
eller, idet

$$I_{zz} = 3 \cdot t a^3 / 12 + 2 \cdot 3at(a/2)^2 = 7t a^3 / 4$$

$$H_1 = -12Q_y / 161a$$

$$H_2 = -44Q_y / 161a$$

Den endelige fordeling af forskydende kræfter er vist i figur 4.27.



Figur 4.27

Forskydningscentrets beliggenhed findes ved moment om f.eks. E:

$$Q_y \zeta_F = \left(112 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 23 \cdot 1(1+3) + 96 \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot \frac{24}{23} \cdot 1 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \frac{6}{23} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 68 \cdot \frac{17}{23} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 88 \cdot \frac{22}{83} \cdot 1 \right) \frac{1}{322} \cdot Q_y a$$

hvilket giver

$$\zeta_F = 671a / (3 \cdot 161) = 1,39a$$

Til sammenligning bestemmes tyngdepunktets beliggenhed ved

$$S_\eta = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3/2)ta^2 = 13ta^2$$

$$A = 9ta$$

$$\zeta_G = S_\eta / A = 13a/9 = 1,44a$$

5. FLYTNINGERNE VED SKÆV BØJNING

I flytningsfeltet (2.1)

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= w_x(x) + z\alpha_y(x) - y\alpha_z(x) \\u_y(x, y, z) &= w_y(x) \\u_z(x, y, z) &= w_z(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

indgår flytningsstørrelserne w_x, w_y, w_z, α_y og α_z . Af flytningerne afledes tøjningerne

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0\tag{5.2}$$

hvor

$$\begin{aligned}\varepsilon &= dw_x/dx \\ \kappa_y &= d\alpha_y/dx \\ \kappa_z &= d\alpha_z/dx\end{aligned}\tag{5.3}$$

som sammen med den konstitutive ligning for et elastisk materiale

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}\tag{5.4}$$

giver bjælkens konstitutive ligninger

$$\begin{aligned}\varepsilon &= N/EA \\ \kappa_y &= M_y/EI_{yy} \\ \kappa_z &= M_z/EI_{zz}\end{aligned}\tag{5.5}$$

som sammen med randbetingelserne bestemmer flytningsstørrelserne w_x, α_y og α_z udtrykt ved snitkræfterne N, M_y og M_z .

Til bestemmelse af flytningerne w_y og w_z har vi i forbindelse med tværsnitshvælvningen benyttet (4.48)

$$\begin{aligned}dw_z/dx + \alpha_y &= 0 \\ dw_y/dx - \alpha_z &= 0\end{aligned}\tag{5.6}$$

og hermed er alle flytningsstørrelserne w_x, w_y, w_z, α_y samt α_z og dermed flytningerne u_x, u_y og u_z udtrykt ved snitkræfterne N, M_y og M_z .

Forskydningskræfterne Q_y og Q_z indgår overhovedet ikke, og man finder da også

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xy} = 0\tag{5.7}$$

med de ovenfor gjorte antagelser. Undervejs har vi ganske vist haft forskydningsdeformationer og forskydningskræfter inde i billedet for at kunne foretage korrektioner, men det har hver gang vist sig at føre til nye modsigelser. Første gang var i forbindelse med den konstitutive ligning (4.40), $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$, som kunne bringes til at passe på bekostning af nogle randbetingelser. Næste gang var i forbindelse med tværsnitshvælvningen, hvor indførelse i (4.47) af det ekstra led $\int 2\varepsilon_{xs} ds$ i udtrykket for u_x medfører, at længdetøjningen ε_{xx} bliver

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z + \int ((dH_x/dx)/Gt) ds \quad (5.8)$$

hvilket igen medfører, at man ikke længere finder relationerne (5.5).

Det skal bemærkes, at for Q_y og Q_z konstante, dvs. $q_z = q_y = 0$, bliver $dH_x/dx = 0$, og de konstitutive ligninger (5.5) gælder. Det er dog kun for $Q_y = Q_z = 0$, at der er tale om en eksakt løsning.

En formelt eksakt løsning får man ved at forlade forudsætningen om, at bjælkematerialet er lineærelastisk med de konstitutive ligninger (4.37 a og b), og i stedet betragte bjælkematerialet som et lineærelastisk materiale med indre deformationsbindinger.

Med udgangspunkt i Greens antagelse om eksistensen af en tøjningsenergifunktion $W(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy})$ har man, at spændingerne bestemmes som afledede af tøjningsenergifunktionen, dvs.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \varrho \partial W / \partial \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \varrho \partial W / \partial \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \varrho \partial W / \partial \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} &= \varrho \partial W / \partial \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= \varrho \partial W / \partial \varepsilon_{zx} \\ \sigma_{xy} &= \varrho \partial W / \partial \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (5.9)$$

For et isotropt, lineærelastisk materiale fører funktionen

$$\begin{aligned} \varrho_0 W &= \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + 2\nu(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}) \right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu)(\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

til de konstitutive ligninger (4.37 b). I (5.9) er ϱ massetætheden, som for infinitesimale tøjninger er konstant $\varrho = \varrho_0$, massetætheden i udeformeret tilstand. For isotrope materialer er x, y, z -systemets orientering i forhold til materialet uden betydning. W repræsenterer arbejdet pr. masseenhed ved en deformation.

I et materiale med indre deformationsbindinger kan deformationerne ikke foregå frit, idet man har en eller flere sidebetingelser udtrykt som

$$g_\alpha(\varepsilon_{xx} \dots \varepsilon_{xy}) = 0 \quad (5.11)$$

hvor $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, dog højst lig 6. I et materiale med bindinger bestemmes spændingerne ved funktionen

$$F = W + \lambda_\alpha g_\alpha \quad (5.12)$$

hvor λ_α er Lagrangefaktorer. Man får

$$\begin{aligned}\sigma_{kl} &= \partial F / \partial \varepsilon_{kl} = \partial W / \partial \varepsilon_{kl} + \lambda_\alpha \partial g_\alpha / \partial \varepsilon_{kl} \\ k, l &= x, y, z\end{aligned}\tag{5.13}$$

Ofte betegnes $\lambda_\alpha \partial g_\alpha / \partial \varepsilon_{kl}$ som reaktionsspændinger (reaktioner på bindingerne), og $\partial W / \partial \varepsilon_{kl}$ kaldes ekstraspændinger.

Har man f.eks. et materiale armeret med ustrækkelige fibre i x -retningen, er

$$g = \varepsilon_{xx} = 0\tag{5.14}$$

og

$$F = W(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}) + t\varepsilon_{xx}\tag{5.15}$$

Hermed bliver

$$\sigma_{xx} = t\tag{5.16}$$

hvor t er et ubestemt træk. De øvrige spændinger bestemmes ved

$$\sigma_{kl} = \partial W / \partial \varepsilon_{kl}\tag{5.17}$$

Det ubestemte træk t må f.eks. bestemmes ved randbetingelser eller ligevægtsligninger. Når der er tale om et usammentrykkeligt elastisk materiale, er

$$g = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0\tag{5.18}$$

og

$$F = W - p(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\tag{5.19}$$

hvor W er en funktion af alle 6 tøjningskomponenter.

Normalspændingerne σ_{xx} , σ_{yy} og σ_{zz} er bestemt på nær et hydrostatisk tryk p i dette tilfælde.

Materialer med indre bindinger vil ofte være anisotrope. Materialet beskrevet ved (5.19) og W givet ved (5.10) vil dog være isotropt, men materialet beskrevet ved (5.15) og W givet ved (5.10) vil udvise anisotropi, såkaldt transvers isotropi.

Af flytningfeltet (5.1) får man tøjningerne (5.2)

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon + z\kappa_y - y\kappa_z, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0\tag{5.20}$$

og

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yz} &= 0 \\ 2\varepsilon_{zx} &= dw_z/dx + \alpha_y \\ 2\varepsilon_{xy} &= dw_y/dx - \alpha_z\end{aligned}\tag{5.21}$$

Flytningerne w_y og w_z kan bestemmes af (5.21 b og c), når ε_{zx} og ε_{xy} er bestemt som funktioner af x alene. Sættes ε_{zx} og ε_{xy} begge lig med nul som i (4.45), taler man om Bernoullibjælker. Man kan dog også sætte ε_{zx} proportional med Q_z og ε_{xy} proportional med Q_y , i hvilket tilfælde man taler om Timoshenkobjælker.

6. FRI VRIDNING

I afsnit 4.1 fandt vi i forbindelse med figur 4.5, at angrebslinien for resultanten af de forskydningsspændinger, som bestemmes af Grashofs formel (4.12), går gennem forskydningscentret F . Kun i specielle tilfælde vil resultanten af belastning og reaktioner imidlertid gå gennem forskydningscentret, og der vil derfor optræde *vridding* foruden bøjning og forskydning i tværsnittet.

Betragtningerne i afsnit 4.1.2 antyder, at forskydningsspændinger fremkalder tværsnitshvælvning, og i et tværsnit påvirket til ren vridning vil vi antage, at flytningsfeltet er givet ved

$$\begin{aligned} u_x &= \psi(y, z)d\theta/dx \\ u_y &= -(z - z_o)\theta(x) \\ u_z &= (y - y_o)\theta(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

hvor $\theta(x)$ kaldes *vridningsvinklen* og $\psi(y, z)$ *hvælvningsfunktionen*. Tværsnittet hvælver sig samtidig med, at det drejer sig som en i y, z -planen stiv figur. Drejningen foregår om en indtil videre ubestemt x' -akse gennem $y, z = y_o, z_o$.

Tøjningerne hørende til flytningsfeltet (6.1) er

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \partial u_x / \partial x = \psi d^2\theta / dx^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \partial u_y / \partial y = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \partial u_z / \partial z = 0 \\ 2\varepsilon_{yz} &= \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y = -\theta + \theta = 0 \\ 2\varepsilon_{zx} &= \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z = (y - y_o + \partial\psi / \partial z)d\theta / dx \\ 2\varepsilon_{xy} &= \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x = (\partial\psi / \partial y - z + z_o)d\theta / dx \end{aligned} \tag{6.2}$$

og der forekommer i almindelighed såvel normalspændinger σ_{xx} som forskydningsspændinger σ_{zx} og σ_{xy} . Når hvælvningen ψ kan foregå frit, dvs. uden at fremkalde normaltøjninger ε_{xx} og dertil hørende normalspændinger σ_{xx} , taler man om *fri vridning*, ellers om *bunden vridning*. Først behandles tilfældet fri vridning.

6.1 Massive tværsnit

Normalspændingerne σ_{xx} er i henhold til de konstitutive ligninger (4.37 b) nul for

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0 \tag{6.3}$$

og i henhold til tøjnings-flytningsrelationerne (6.2) må vi derfor kræve, at vridningsvinklen pr. længdeenhed $d\theta/dx$ er konstant, for at der kan være tale om fri vridning.

Med

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \\
 \sigma_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} = 0 \\
 \sigma_{zx} &= 2G\varepsilon_{zx} = G(y - y_o + \partial\psi/\partial z)d\theta/dx \\
 \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} = G(\partial\psi/\partial y - z + z_o)d\theta/dx
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

er det kun ligevægtsligningerne (4.35 a)

$$\partial\sigma_{xy}/\partial y + \partial\sigma_{zx}/\partial z = 0 \tag{6.5}$$

der ikke er opfyldt for en bjælke uden massekræfter, $\rho\bar{b} = \bar{0}$. (Massekræfter giver normalt kun anledning til bøjning og forskydning). Indsættes (6.4) i (6.5), fås

$$\partial^2\psi/\partial y^2 + \partial^2\psi/\partial z^2 = 0 \tag{6.6}$$

dvs. hvælvningsfunktionen ψ er en harmonisk funktion, som foruden (6.6) skal tilfredsstille randbetingelserne.

Problemstillingen bliver imidlertid lidt mere overskuelig, hvis vi for en tid forlader hvælvningsfunktionen og i stedet betragter ligevægtsligningen (6.5). Indføres *Prandtl's spændingsfunktion* $S(y, z)$ ved

$$\sigma_{xy} = \partial S/\partial z \quad , \quad \sigma_{zx} = -\partial S/\partial y \tag{6.7}$$

er (6.5) identisk opfyldt, og benyttes (6.4), fås

$$\begin{aligned}
 \partial^2 S/\partial z^2 &= G(\partial^2\psi/\partial y\partial z - 1)d\theta/dx \\
 \partial^2 S/\partial y^2 &= -G(\partial^2\psi/\partial y\partial z + 1)d\theta/dx
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

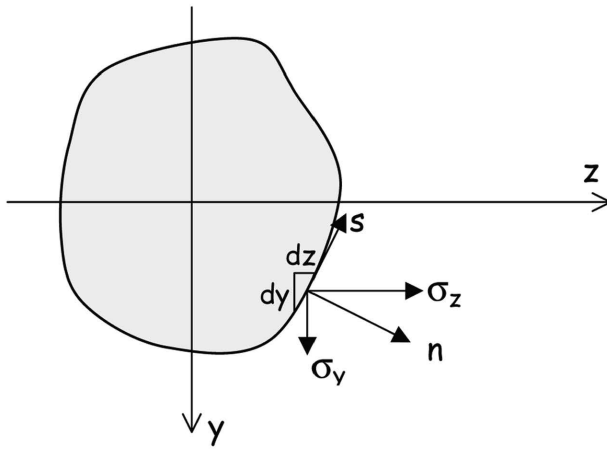
og hermed

$$\partial^2 S/\partial y^2 + \partial^2 S/\partial z^2 = -2Gd\theta/dx \tag{6.9}$$

Poissons ligning (6.9) er tilsyneladende lidt mere besværlig end *Laplaces ligning* (6.6), men randbetingelserne udtrykt ved spændingsfunktionen S er væsentlig simple end randbetingelserne udtrykt ved hvælvningsfunktionen ψ .

På tværsnittets rand, se figur 6.1, har normalen \hat{n} koordinaterne

$$n_x, n_y, n_z = 0, dz/ds, -dy/ds \tag{6.10}$$



Figur 6.1

og randspændingerne på den ubelastede rand bliver

$$\begin{aligned}\sigma_x &= n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{zx} = \\ &= 0 + (dz/ds)(\partial S/\partial z) + (-dy/ds)(-\partial S/\partial y) \\ &= \partial S/\partial s = 0\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$\sigma_y = n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = n_x \sigma_{zx} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz} = 0$$

Spændingsfunktionen $S(y, z)$ er altså konstant langs randen, hvilket er i overensstemmelse med, at forskydningsspændingen skal være parallel med randen, når denne er ubelastet.

For et plant vektorfelt v_y, v_z gælder divergenssætningen på formen

$$\int_A (\partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z) dA = \oint (v_y dz - v_z dy)\tag{6.12}$$

hvor \oint er kurveintegralet langs tværsnittets kontur. Vi har således

$$\begin{aligned}Q_y &= \int_A \sigma_{xy} dA = \int_A (\partial S/\partial z) dA = - \oint S dy = 0 \\ Q_z &= \int_A \sigma_{zx} dA = \int_A (-\partial S/\partial y) dA = - \oint S dz = 0\end{aligned}\tag{6.13}$$

da S er konstant på randen. Yderligere fås det vridende moment

$$M_x = \int_A (\sigma_{zx} y - \sigma_{xy} z) dA = - \int_A (y \partial S/\partial y + z \partial S/\partial z) dA$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A ((S - \partial(Sy)/\partial y) + (S - \partial(Sz)/\partial z))dA \\
&= \int_A SdA - \oint Sydz + \int_A SdA - \oint Szdy \\
&= 2 \int_A SdA
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
\text{da } \oint Sydz &= S \oint y n_y ds = 0 \\
\oint Szdy &= -S \oint z n_z ds = 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

og S sættes lig nul på randen.

Bemærk, at σ_{zx} og σ_{xy} giver lige store bidrag til det vridende moment.

Det bemærkes, at anvendelsen af Prandtls spændingsfunktion med randbetingelsen S lig med en konstant langs randen gælder for ethvert bjælkemateriale og ikke er begrænset til elastiske materialer (jævnfør Airys spændingsfunktion).

Med spændingsfunktionen S bestemt, så den opfylder Poissons ligning (6.9) og randbetingelsen (6.11), kan hvælvningsfunktionen ψ bestemmes ved hjælp af (6.4) og (6.7)

$$\begin{aligned}
\partial\psi/\partial y &= (\partial S/\partial z)/(Gd\theta/dx) + z - z_o \\
\partial\psi/\partial z &= -(\partial S/\partial y)/(Gd\theta/dx) - y + y_o
\end{aligned} \tag{6.16}$$

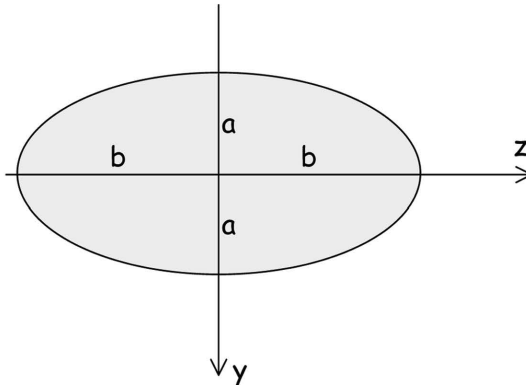
idet dog beliggenheden af y_o, z_o er ubestemt.

Eksempel 6.1

En massiv, homogen og isotrop bjælke med ellipseformet tværsnit påvirkes på endefladerne af vridende momenter M_x . En ellipse med hovedakserne $2a$ og $2b$ har ligningen

$$y/a^2 + z/b^2 - 1 = 0 \tag{a}$$

jævnfør figur 6.2.



Figur 6.2

Gættes på spændingsfunktionen

$$S = m(y^2/a^2 + z^2/b^2 - 1) \quad (\text{b})$$

som er konstant lig nul på randen, har man

$$\partial^2 S / \partial y^2 + \partial^2 S / \partial z^2 = 2m(1/a^2 + 1/b^2) \quad (\text{c})$$

der er konstant og kan sættes lig med $-2Gd\theta/dx$, hvilket bestemmer m til

$$m = -Ga^2b^2(d\theta/dx)/(a^2 + b^2) \quad (\text{d})$$

Herefter bliver i henhold til (6.14)

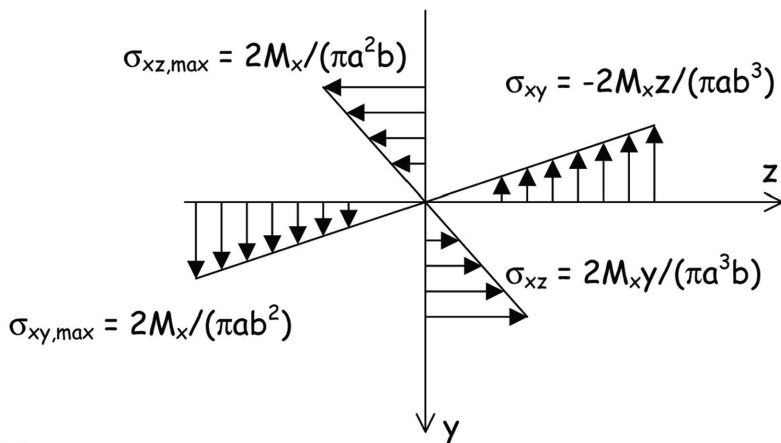
$$\begin{aligned} M_x &= 2 \int_A S dA = -2Ga^2b^2(d\theta/dx) \left(\int_A y^2/a^2 + z^2/b^2 - 1 \right) / (a^2 + b^2) \\ &= -2Ga^2b^2(d\theta/dx) (I_{zz}/a^2 + I_{yy}/b^2 - A) / (a^2 + b^2) \\ &= -2Ga^2b^2(d\theta/dx) \pi ab(1/4 + 1/4 - 1) / (a^2 + b^2) \\ &= G\pi a^3 b^3 (d\theta/dx) / (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (\text{e})$$

som giver sammenhængen mellem det vridende moment M_x og vridningsvinklen pr. længdeenhed $d\theta/dx$.

Forskydningsspændingerne bestemmes ved hjælp af (6.7) og bliver

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \partial S / \partial z = -2Ga^2(d\theta/dx)z / (a^2 + b^2) \\ &= -2M_x z / (\pi a b^3) \\ \sigma_{zx} &= -\partial S / \partial y = 2Gb^2(d\theta/dx)y / (a^2 + b^2) \\ &= 2M_x y / (\pi a^3 b) \end{aligned} \quad (\text{f})$$

Variationen af σ_{xy} med z og σ_{zx} med y er lineær, og den er vist i figur 6.3.



Figur 6.3

Det fremgår, at den største forskydningsspænding optræder for enden af den mindste storakse.

Af (6.16) fås

$$\begin{aligned}\partial\psi/\partial y &= -2a^2z/(a^2 + b^2) + z - z_o = (b^2 - a^2)z/(a^2 + b^2) - z_o \\ \partial\psi/\partial z &= -2b^2y/(a^2 + b^2) - y + y_o = (b^2 - a^2)y/(a^2 + b^2) + y_o\end{aligned}\quad (\text{g})$$

og dermed

$$\psi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}yz - z_o y + y_o z \quad (\text{h})$$

hvor konstanterne y_o og z_o afhænger af understøtningsbetingelserne. Flytningerne er nu bestemt ved (6.1)

$$\begin{aligned}u_x &= \psi d\theta/dx \\ u_y &= -(z - z_o)\theta \\ u_z &= (y - y_o)\theta\end{aligned}\quad (\text{i})$$

hvor drejningsvinklen ved hjælp af (e) kan udtrykkes ved det vridende moment

$$\theta = M_x x(a^2 + b^2)/(G\pi a^3 b^3) \quad (\text{j})$$

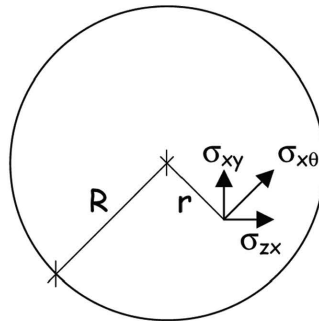
Eksempel 6.2

Når storakserne i en ellipse er lige store $a = b = R$, har man et cirkulært tværsnit og dermed bliver

$$S = -\frac{1}{2}G(y^2 + z^2 - R^2)d\theta/dx = -\frac{1}{2}G(r^2 - R^2)d\theta/dx \quad (\text{a})$$

$$M_x = \frac{1}{2}G\pi R^4 d\theta/dx \quad (\text{b})$$

og den resulterende forskydningsspænding, se figur 6.4, bliver



Figur 6.4

$$\begin{aligned}
\sigma_{x\theta} &= \sigma_{zx} \cos \theta - \sigma_{xy} \sin \theta \\
&= 2M_x(y \cos \theta + z \sin \theta) / \pi R^4 \\
&= 2M_x r / \pi R^4
\end{aligned} \tag{c}$$

med retning vinkelret på radiusvektor. Endelig finder man for et cirkulært tværsnit, at hvælvningen er nul, tværsnittet forbliver plant.

I lighed med de konstitutive ligninger $M_y = EI_{yy}\kappa_y = EI_{yy}d\alpha_y/dx$ og $M_z = EI_{zz}\kappa_z = EI_{zz}d\alpha_z/dx$ skriver man ofte

$$M_x = GI_v d\theta/dx \tag{6.17}$$

hvor I_v er *inertimomentet for vridning*. For en ellipse har man

$$I_v = \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2) \tag{6.18}$$

og for en cirkel er

$$I_v = \frac{1}{2} \pi R^4 \tag{6.19}$$

hvilket er det polære inertimoment

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_{zz} + I_{yy} \tag{6.20}$$

Vinkeldrejningen θ kan nu udtrykkes ved

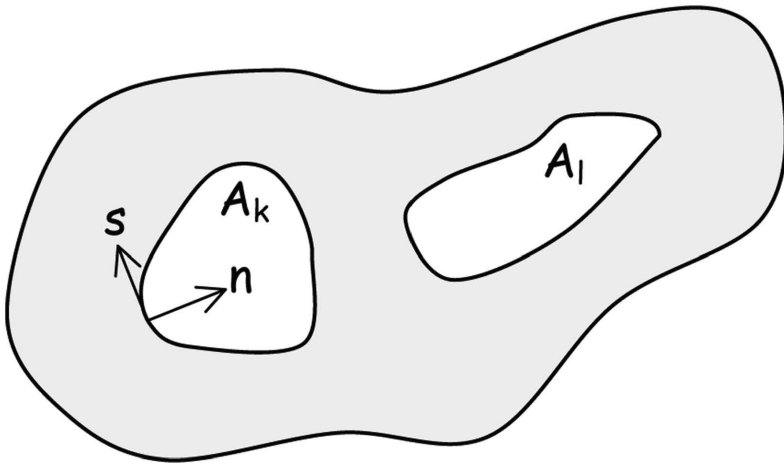
$$\theta = xM_x/GI_v + \theta_o \tag{6.21}$$

hvor θ_o er vinkeldrejningen for $x = 0$.

Den her angivne fremgangsmåde fører således til en eksakt løsning for et bjælkestykke belastet alene med vridende momenter M_x på endefladerne.

6.2 Bjælketværsnit med huller

For en bjælke med massivt tværsnit er de bestemmende ligninger Poissons ligning (6.9) med randbetingelsen (6.11), som udtrykker, at spændingsfunktionen er konstant langs tværsnittets rand, som forudsættes ubelastet. I et bjælketværsnit med huller, se figur 6.5, er der flere rande, og langs hver hulrand skal spændingsfunktionen antage en



Figur 6.5

konstant værdi ligesom langs den ydre rand. Mens betingelsen

$$\partial(\partial\psi/\partial x)/\partial y = \partial(\partial\psi/\partial y)/\partial x \quad (6.22)$$

for et enkeltstående område sikrer entydige flytninger u_x , må man for hvert hul kræve

$$\oint (\partial\psi/\partial y)dy + (\partial\psi/\partial z)dz = 0 \quad (6.26)$$

for multistående område som det, her er tale om.

Ved integration om det k 'te hul finder man ifølge (6.16)

$$0 = \oint (\partial S/\partial z + (z - z_o)Gd\theta/dx)dy - (\partial S/\partial y + (y - y_o)Gd\theta/dx)dz \quad (6.27)$$

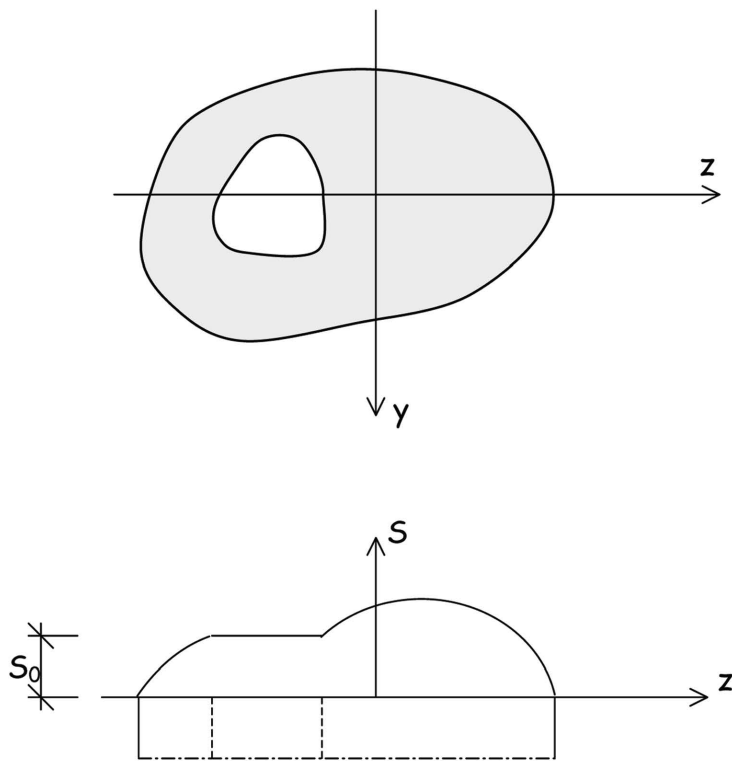
eller

$$\oint (\partial S/\partial z)dy - (\partial S/\partial y)dz = -(Gd\theta/dx) \oint (z - z_o)dy - (y - y_o)dz \quad (6.28)$$

Integralet på højresiden af (6.28) er to gange arealet af det k 'te hul med modsat fortegn, og integralet på venstresiden er $\oint (\partial S/\partial n)ds$, så for hvert hul får man

$$\oint (\partial S/\partial n)ds = 2GA_k d\theta/dx \quad (6.29)$$

For et tværsnit med et enkelt hul bliver forholdene som vist i figur 6.6, hvor spændings-

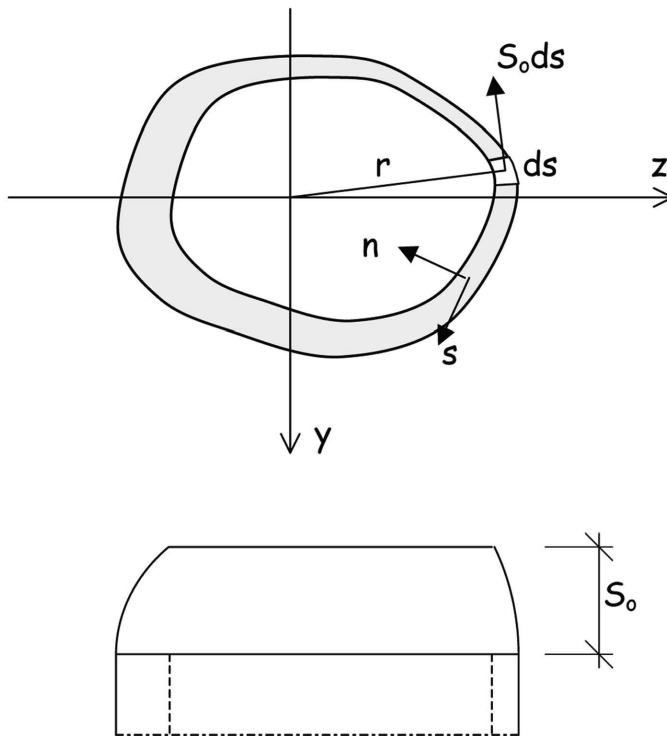


Figur 6.6

funktionens værdi langs hulranden er kaldt S_o , mens værdien langs den ydre rand her og i det følgende er nul.

Når tværsnittet er et tyndvægget rør, se figur 6.7, bliver hældningen af spændingsfunktionsfladen med god tilnærmelse

$$dS/dn = S_o/t(s) = -\sigma_{xs} \quad (6.30)$$



Figur 6.7

Hermed bliver S_o den forskydende kraft pr. længdeenhed, og man finder det vridende moment

$$M_x = \oint S_o r ds = 2S_o A_o \quad (6.31)$$

hvor A_o er hulrumsarealet. Bemærk, at (6.31) er i overensstemmelse med (6.14). Man har

$$\sigma_{xs} = M_x / 2A_o t \quad (6.32)$$

jævnt fordelt over vægtykkelsen.

Vridningsvinklen pr. længdeenhed bestemmes ved hjælp af (6.29), som med (6.30) bliver

$$S_o \oint ds/t = 2GA_o d\theta/dx \quad (6.33)$$

og med (6.31)

$$d\theta/dx = (M_x \oint ds/t)/(4GA_o^2) \quad (6.34)$$

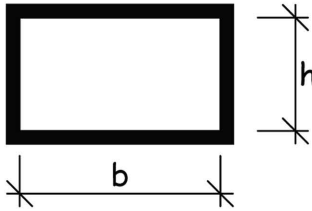
Hermed bliver inertimomentet for vridning bestemt efter (6.17)

$$I_v = M_x/(Gd\theta/dx) = 4A_o^2/\oint ds/t \quad (6.35)$$

Størrelsen $\oint ds/t$ kaldes røromkredsens transformerede længde.

Eksempel 6.3

Et tyndfliget, rektangulært tværsnit, som vist i figur 6.8, har hulrumsarealet



Figur 6.8

$$A_o = bh \quad (a)$$

og dermed

$$M_x = 2S_o bh \quad (b)$$

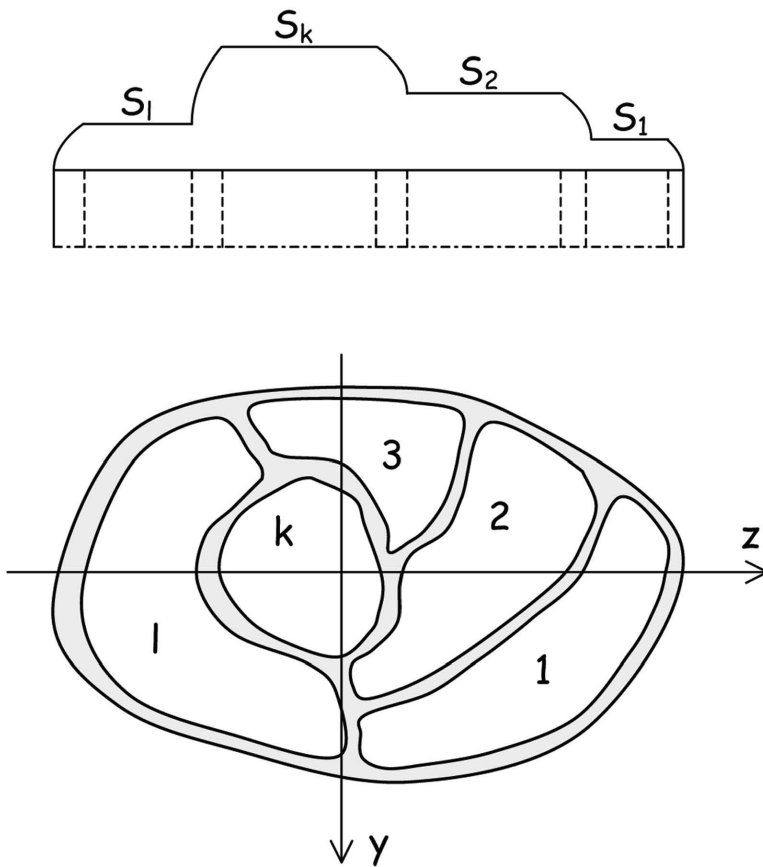
De største forskydningspændinger optræder i den tyndeste væg og bliver

$$\sigma_{xs} = S_o/t_{\min} = M_x/(2bht_{\min}) \quad (c)$$

Inertimomentet for vridning bestemmes af (6.35) og bliver for et tværsnit med lige tykke vægge

$$I_v = 2b^2h^2t/(b+h) \quad (d)$$

Når tværsnittet er et flercellet rør med tynde vægge, se figur 6.9, bestemmes værdien af spændingsfunktionen for hver celle ved at opstille (6.29) for hver celle. Disse ligninger



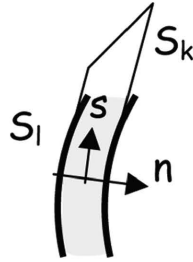
Figur 6.9
får formen

$$\Sigma \int_{kl} (S_k - S_l) ds / t_{kl} = 2GA_k d\theta / dx \quad (6.36)$$

hvor \int_{kl} betyder integralet langs den fælles væg mellem cellerne k og l , t_{kl} er tykkelsen af denne væg, og A_k er arealet af celle k . Ved løsning af dette ligningssystem findes S_k 'erne udtrykt ved vridningsvinklen pr. længdeenhed $d\theta/dx$. Sammenhængen mellem det vridende moment M_x og vridningsvinklen pr. længdeenhed $d\theta/dx$ bestemmes ved (6.14)

$$M_x = 2 \int_A S dA = 2 \sum S_k A_k \quad (6.37)$$

Forskydningsspændingerne σ_{xn} og σ_{xs} i væggen mellem cellerne k og l , se figur 6.10, bestemmes ved



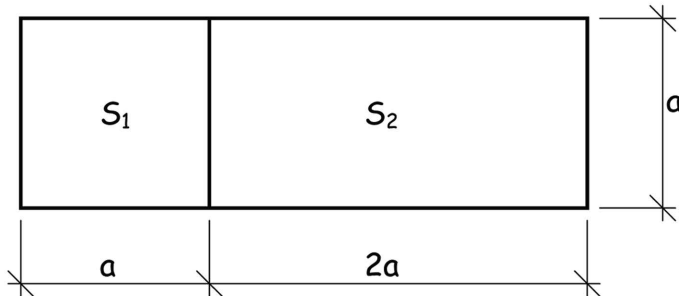
Figur 6.10

$$\begin{aligned}\sigma_{xn} &= \partial S / \partial s = 0 \\ \sigma_{xs} &= -\partial S / \partial n = (S_l - S_k) / t_{kl}\end{aligned}\tag{6.38}$$

Eksempel 6.4

For det i figur 6.11 viste tværsnit med konstant vægtykkelse t bliver ligningssystemet (6.36)

$$S = 0$$



Figur 6.11

$$\begin{aligned}(3(S_1 - 0)a + (S_1 - S_2)a/t &= (4S_1 - S_2)a/t = 2Ga^2 d\theta/dx \\ (3(S_2 - 0)a + (S_2 - S_1)a/t &= (4S_2 - S_1)a/t = 2G2a^2 d\theta/dx\end{aligned}\tag{a}$$

med løsningen

$$\begin{aligned}S_1 &= 16Gat(d\theta/dx)/23 \\ S_2 &= 18Gat(d\theta/dx)/23\end{aligned}\tag{b}$$

Med

$$\begin{aligned} M_x &= 2 \int_A S dA = 2(S_1 a^2 + S_2 a^2) = 2(16 + 36)Ga^3 t(d\theta/dx)/23 \\ &= 104Ga^3 t(d\theta/dx)/23 = GI_v d\theta/dx \end{aligned} \quad (c)$$

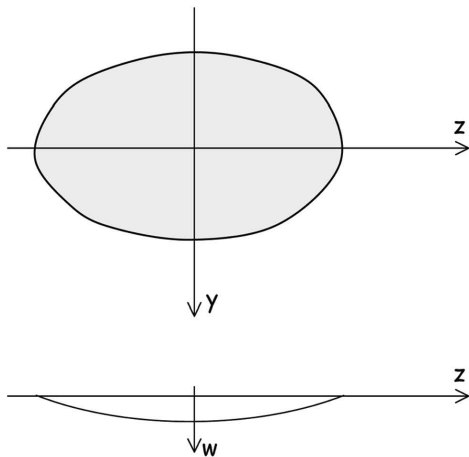
fås

$$\begin{aligned} S_1 &= 8M_x/(52a^2) \\ S_2 &= 9M_x/(52a^2) \\ I_v &= 104a^3 t/23 \end{aligned} \quad (d)$$

6.3 Membrananalogien

For et massivt tværsnit, hvis kontur er beskrevet ved $f(y, z) = 0$, gættede vi i eksempel 6.1 på, at spændingsfunktionen er $S = mf(y, z)$, hvor m er en konstant. Fremgangsmåden kunne benyttes, da $\partial^2 S/\partial y^2$ og $\partial^2 S/\partial z^2$ begge er konstante i eksemplet. Foruden det elliptiske tværsnit kan også et tværsnit med form som en ligesidet trekant behandles på denne måde, men når det drejer sig om for eksempel et rektangulært tværsnit, dur fremgangsmåden ikke. Forskydningsspændingerne i et bjælketværsnit med form som et langt, smalt rektangel kan dog bestemmes ved hjælp af *membrananalogien*.

For en flad membran af et materiale, som ikke kan overføre forskydningsspændinger, for eksempel en sæbeblinde, udspændt over et hul i en plan flade og påvirket af et overtryk



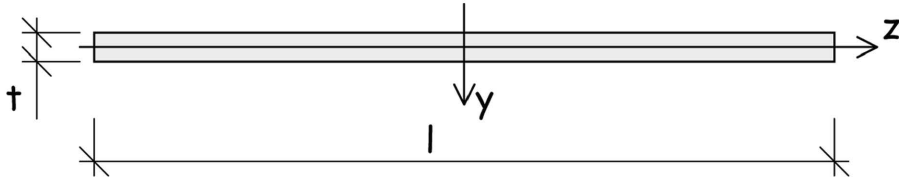
Figur 6.12

p , se figur 6.12, er udbøjningen $w(y, z)$ bestemt ved

$$\partial^2 w/\partial y^2 + \partial^2 w/\partial z^2 = -p/n \quad (6.39)$$

hvor n er det konstante træk pr. længdeenhed i membranen. (6.39) er analog til Poissons ligning. (6.9) og randbetingelsen $w = 0$ er analog til (6.11), $\partial S/\partial s = 0$. Også membranalogien skyldes Prandtl.

For et langt, smalt rektangel med længde l og tykkelse t , hvor $t/l \ll 1$, se figur 6.13,



Figur 6.13

hvor også det anvendte koordinatsystem er vist, har man $\partial w/\partial z = 0$ og dermed $\partial^2 S/\partial z^2 = 0$, så

$$\partial^2 S/\partial y^2 = -2Gd\theta/dx \quad (6.40)$$

med løsningen

$$S = -Gy^2 d\theta/dx + f(z)y + g(z) \quad (6.41)$$

idet vi indtil videre ser bort fra de specielle forhold ved tværsnittets ender. Funktionerne f og g bestemmes ved randbetingelserne

$$S = 0 \quad \text{for} \quad y = \pm t/2 \quad (6.42)$$

og vi finder

$$S = -G(y^2 - t^2/4)d\theta/dx \quad (6.43)$$

og

$$M_x = 2 \int_A S dA = 2 \cdot 2tGt^2 l(d\theta/dx)/4 \cdot 3 = Gt^3 l(d\theta/dx)/3 \quad (6.44)$$

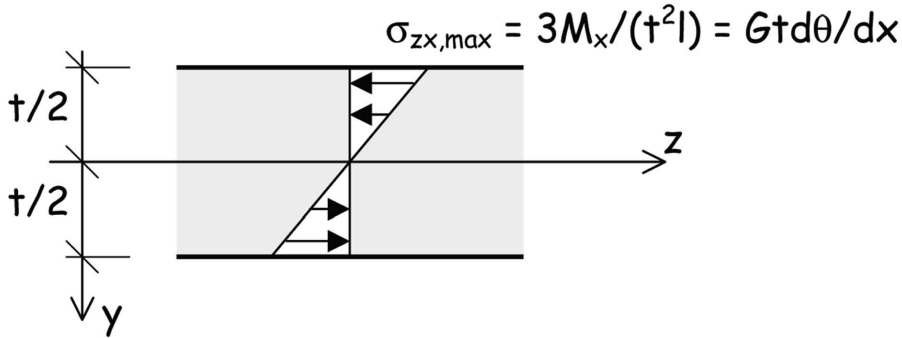
dvs.

$$I_v = t^3 l/3 \quad (6.45)$$

Forskydningsspændingerne bliver

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= -\partial S/\partial y = 2Gy d\theta/dx = 6M_x y/(t^3 l) \\ \sigma_{xy} &= \partial S/\partial z = 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

σ_{zx} varierer lineært over tykkelsen som vist i figur 6.14.



Figur 6.14

Forskydningsspændingerne σ_{xy} er nul i det meste af tværsnittet. At der optræder forskydningsspændinger σ_{xy} , som er forskellige fra nul for enden af tværsnittet, fremgår blandt andet deraf, at bidraget til det vridende moment fra σ_{zx} er

$$l \frac{1}{2} \sigma_{zx,max} (t/2) 2t/3 = M_x/2 \quad (6.47)$$

I overensstemmelse med bemærkningerne i forbindelse med (6.14) giver σ_{zx} og σ_{xy} lige store bidrag til det vridende moment. Da vi således har

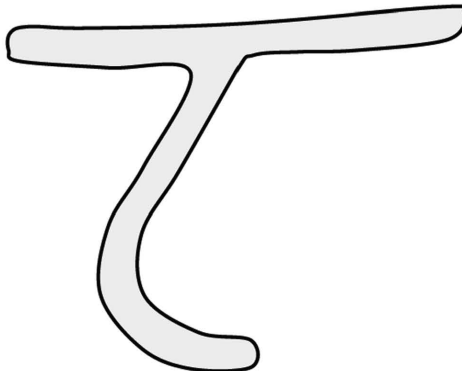
$$M_x/2 = \sigma_{xy,max} A \cdot l \quad (6.48)$$

hvor A er et areal $\sim t^2/4$, og l er momentarmen, fås

$$\sigma_{xy,max} = 2M_x / (t^2 l) \quad (6.49)$$

som er af samme størrelsesorden som $\sigma_{zx,max}$.

Mere generelt har man for et åbent, tyndffiget tværsnit som vist i figur 6.15



Figur 6.15

$$I_v = \int_A t^3(s) ds / 3 \quad (6.50)$$

$$\sigma_{x_s, \max} = M_x t(s) / I_v$$

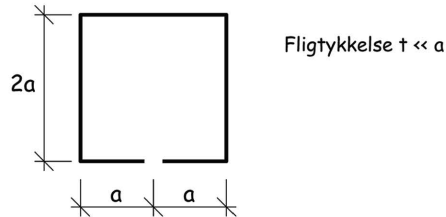
hvor s er en bueparameter langs tværsnittets kontur, og $t(s)$ er den eventuelt svagt varierende fligtykkelse. Største spænding optræder i den tykkeste flig.

De inertimomenter for vridning, som angives i profiltabellerne for valsedede stålprofiler, afviger lidt fra dem, der udregnes efter (6.50) på grund af diverse afrundinger ved hjørner og lignende.

Med hensyn til hvælvningsfunktionens variation langs tværsnittets midterlinie henvises til afsnittet om bunden vridning.

Eksempel 6.5

Det i figur 6.16 viste opslidsede tværsnit har inertimomentet for vridning



Figur 6.16

$$I_v = 8at^3/3 \quad (a)$$

og den maksimale forskydningsspænding bliver

$$\sigma_{x_s, \max} = 3M_x / (at^2) \quad (b)$$

Fra eksempel 6.3 finder vi for det tilsvarende lukkede tværsnit

$$I_v = 8a^3t \quad (c)$$

og

$$\sigma_{x_s, \max} = M_x / (8a^2t) \quad (d)$$

Forholdet mellem stivhederne er

$$I_{v, \text{lukket}} / I_{v, \text{åben}} = 3(a/t)^2 \quad (e)$$

som for $a/t = 10$ er 300. Tilsvarende er forholdet mellem de maksimale forskydningsspændinger

$$\sigma_{xs, \text{lukket}} / \sigma_{xs, \text{åben}} = t/24a \quad (f)$$

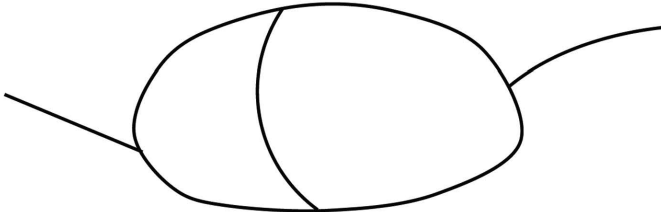
Da man har

$$M_x = 2 \int_A S dA = GI_v d\theta/dx \quad (6.51)$$

og da drejningsvinklen θ er forudsat at være den samme for alle punkter i et tværsnit, kan man skrive

$$\begin{aligned} I_v &= 2 \int_A S dA / (G d\theta/dx) \\ &= 2 \left(\int_{A_1} S dA / G_1 + \int_{A_2} S dA / G_2 \right) / (d\theta/dx) = I_{v1} + I_{v2} \end{aligned} \quad (6.52)$$

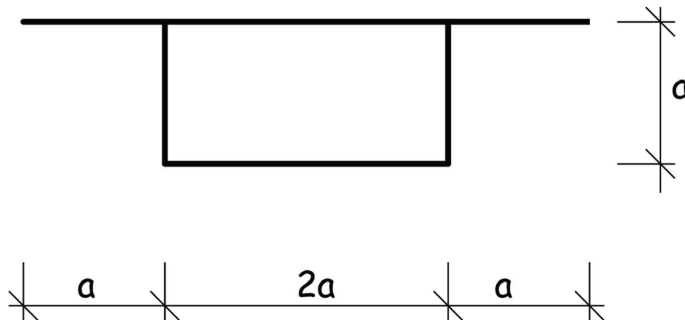
hvor delarealerne A_1 og A_2 for eksempel kan være det i figur 6.17 viste flercellede rør



Figur 6.17

og de udragende flige.

Eksempel 6.6



Figur 6.18

Tværsnittet i figur 6.18 har vandrette flige med tykkelsen $2t$ og lodrette med tykkelsen t , hvor $t \ll a$. Inertimomentet for vridning er for den lukkede del af tværsnittet

$$I_{v,l} = 4A_o^2 / \oint ds/t(s) = 4(2a^2)^2 / (2 \cdot 2a/2t + 2a/t) = 4a^3 t \quad (\text{a})$$

og for de udragende flige

$$I_{v,\tilde{a}} = \sum t^3 l/3 = (2t)^3 2a/3 = 16at^3/3 \quad (\text{b})$$

Hermed bliver

$$I_v = I_{v,l} + I_{v,\tilde{a}} = 4a^3 t(1 + 4t^2/(3a^2)) \cong 4a^3 t \quad (\text{c})$$

og

$$M_x = M_{x,l} + M_{x,\tilde{a}} = 2S_o A_o + GI_{v,\tilde{a}} d\theta/dx \quad (\text{d})$$

For den lukkede del af tværsnittet har man således

$$M_{x,l} = M_x I_{v,l} / I_v = M_x / (1 + 4t^2/(3a^2)) = 2S_o 2a^2 \quad (\text{e})$$

dvs.

$$S_G \cong M_x / 4a^2 \quad (\text{f})$$

og

$$\sigma_{xs,\max} = S_G/t \cong M_x / 4a^2 t \quad (\text{g})$$

For de udragende flige er

$$M_{x,\tilde{a}} = M_x I_{v,\tilde{a}} / I_v \cong M_x 16t^2 / (3 \cdot 4a^2) = M_x 4t^2 / 3a^2 \quad (\text{h})$$

og

$$\sigma_{xs,\max} = Gt(s)d\theta/dx = M_x t(s) / I_v \cong M_x 2t / (4a^3 t) = M_x / (2a^3) \quad (\text{i})$$

7. BUNDEN VRIDNING

I begyndelsen af afsnit 6.1 fandt vi, at normalspændingerne σ_{xx} og længdetøjningerne ε_{xx} i en bjælke påvirket til ren vridning er nul, når vridningsvinklen pr. længdeenhed, $d\theta/dx$, er konstant. Flytningerne i bjælkeaksens retning, $u_x = \psi(y, z)d\theta/dx$, er altså de samme for alle tværsnit. Yderligere fandt vi, se (6.17), at vridningsvinklen pr. længdeenhed er proportional med det vridende moment M_x , som derfor også skal være konstant på den betragtede bjælkestrækning. Når det vridende moment ikke er konstant, eller når hvælvningen på grund af understøtningsforhold eller lignende ikke kan foregå frit, taler man om *bunden vridning*.

Flytningsfeltet (6.1)

$$\begin{aligned} u_x &= \psi(y, z)d\theta/dx \\ u_y &= -(z - z_o)\theta(x) \\ u_z &= (y - y_o)\theta(x) \end{aligned} \tag{7.1}$$

giver de tilhørende tøjninger

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \psi d^2\theta/dx^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0 \\ 2\varepsilon_{zx} &= (y - y_o + \partial\psi/\partial z)d\theta/dx \\ 2\varepsilon_{xy} &= (\partial\psi/\partial y - z + z_o)d\theta/dx \end{aligned} \tag{7.2}$$

Med de konstitutive ligninger

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= E\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= E\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2G\varepsilon_{zx} \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \end{aligned} \tag{7.3}$$

jævnfør afsnit 4.1.3, bliver spændingerne

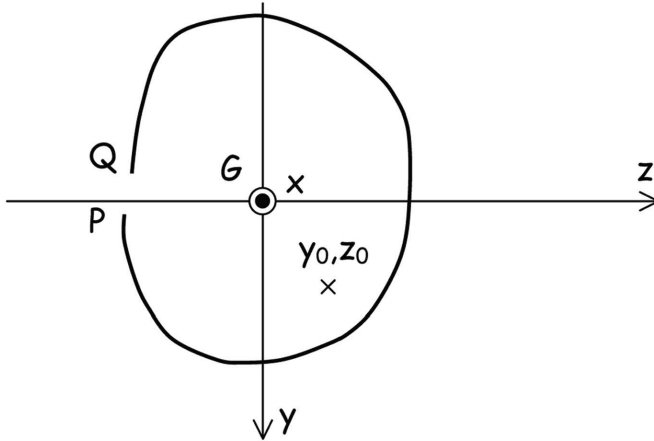
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\psi d^2\theta/dx^2 \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zx} &= G(y - y_o + \partial\psi/\partial z)d\theta/dx \\ \sigma_{xy} &= G(\partial\psi/\partial y - z + z_o)d\theta/dx \end{aligned} \tag{7.4}$$

og ligevægtsligningerne (4.35)

$$\begin{aligned} E\psi d^3\theta/dx^3 + G(\partial^2\psi/\partial y^2 + \partial^2\psi/\partial z^2)d\theta/dx &= 0 \\ G(\partial\psi/\partial y - z + z_o)d^2\theta/dx^2 &= 0 \\ G(y - y_o + \partial\psi/\partial z)d^2\theta/dx^2 &= 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

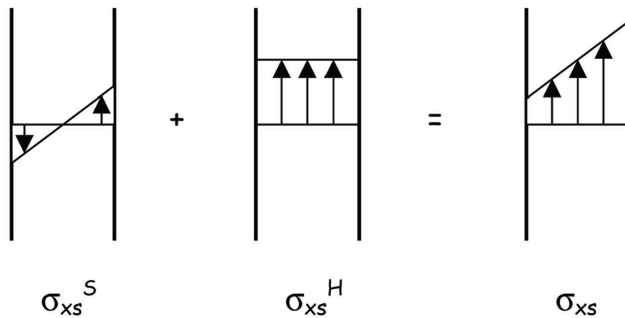
som ikke har simple, konsistente løsninger.

Vi vil derfor indskrænke os til at betragte åbne, tyndffigede tværsnit, se figur 7.1, og



Figur 7.1

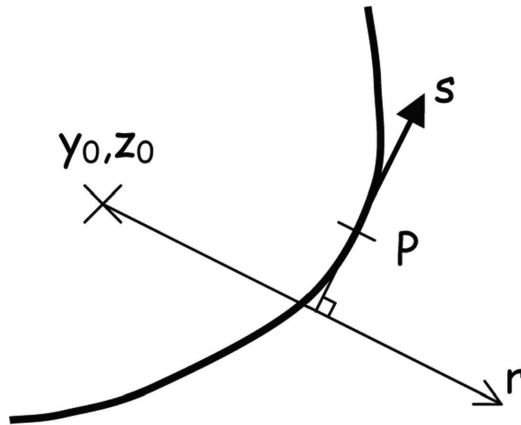
antage, at forskydningsspændingerne i fligen er sammensat af to bidrag. Det ene bidrag er bestemt i afsnit 6.3 og betegnes σ_{xs}^S , hvor S refererer til Saint-Venant, som angav løsningen til problemet fri vridning i 1855. Det andet bidrag betegnes σ_{xs}^H og kaldes *hvælvningsforskydningsspændingerne*. De to bidrag er vist i figur 7.2.



Figur 7.2

Når tværsnittet drejes som en stiv figur, kan man skrive flytningen u_s i fligens tangentretning

$$u_s = \theta r(s) \quad (7.6)$$



Figur 7.3

hvor $r(s)$ er afstanden fra omdrejningsaksen gennem y_0, z_0 til tangenten til fligen i det betragtede punkt P . Hermed bliver tøjningen ε_{xs} bestemt ved

$$2\varepsilon_{xs} = \partial u_x / \partial s + \partial u_s / \partial x = \partial u_x / \partial s + r d\theta / dx \quad (7.7)$$

Denne tøjning regnes som i afsnit 4.1.2 lig med nul, og man har

$$\partial u_x / \partial s = -r d\theta / dx \quad (7.8)$$

Sættes nu

$$r(s) = d\omega / ds \quad (7.9)$$

hvor $\omega(s)$ er den i afsnit 4.1.1 indførte sektorkoordinat, får man

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = -\frac{d\omega}{ds} \frac{d\theta}{dx} \quad (7.10)$$

med løsningen

$$u_x = -\omega d\theta / dx + f(x) \quad (7.11)$$

Længdetøjningen ε_{xx} bliver nu

$$\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x = -\omega d^2\theta / dx^2 + f'(x) \quad (7.12)$$

og hvælvningsnormalspændingen σ_{xx}^H

$$\sigma_{xx}^H = E\varepsilon_{xx} = E(-\omega d^2\theta/dx^2 + f'(x)) \quad (7.13)$$

Funktionen $f(x)$ bestemmes ved at kræve normalkraften N lig med nul

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{xx}^H dA = E \int_A (-\omega d^2\theta/dx^2 + f'(x)) dA \\ &= E(f'(x)A - (d^2\theta/dx^2) \int_A \omega dA) = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Vi vælger løsningen

$$f(x) = 0$$

og

$$\int_A \omega_n dA = 0 \quad (7.15)$$

hvor $\omega_n(s)$ kaldes den normaliserede sektorkoordinat, som er en løsning til (7.9).

Som nævnt i afsnit 4.1.1 optræder der ved bestemmelse af sektorkoordinaten $\omega(s)$ en konstant. I afsnit 4.1.1 er værdien af konstanten uden betydning, men her skal den nu bestemmes, så (7.15 b) er opfyldt.

Flytningen i bjælkeaksens retning er nu $u_x = -\omega_n(s)d\theta/dx$, og sammenholdes med (7.1) har man, at den normaliserede sektorkoordinat er lig med hvælvningsfunktionen i fligens midterlinie med modsat fortegn. Hvælvningsfunktionen uden for midterlinien kan bestemmes ved hjælp af $\varepsilon_{xr} = 0$.

Også de bøjende momenter M_y og M_z skal være nul, når påvirkningen er ren vridning, dvs.

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_{xx}^H z dA = -E(d^2\theta/dx^2) \int_A \omega_n z dA = -E(d^2\theta/dx^2) I_{\omega z} = 0 \\ M_z &= \int_A \sigma_{xx}^H y dA = -E(d^2\theta/dx^2) \int_A \omega_n y dA = -E(d^2\theta/dx^2) I_{\omega y} = 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

hvoraf det fremgår, at sektorcentrifugalmomenterne $I_{\omega z}$ og $I_{\omega y}$ skal være nul. Det blev i afsnit 4.1.1 vist, at sektorcentrifugalmomenterne med hensyn til forskydningscentret er nul, og man kan derfor konkludere, at omdrejningsaksen går gennem forskydningscentret F , dvs.

$$y_o, z_o = y_F, z_F \quad (7.17)$$

hvor forskydningscentrets koordinater kan bestemmes ved hjælp af (4.33)

$$\begin{aligned} y_F &= I_{\omega z} / I_{yy} \\ z_F &= -I_{\omega y} / I_{zz} \end{aligned} \quad (7.18)$$

I (7.18) er I_{ω_z} og I_{ω_y} sektorcentrifugalmomenter med hensyn til tyngdepunktet G , mens ω_n er den normaliserede sektorkoordinat med hensyn til forskydningscentret.

Da vi regner tøjningen ε_{xs} lig nul, kan hvælvningsforskydningsspændingen ikke bestemmes ved den konstitutive ligning $\sigma_{xs} = 2G\varepsilon_{xs}$. I stedet benyttes ligevægtsligningen (4.23)

$$\partial H_x / \partial s = -t \partial \sigma_{xx}^H / \partial x \quad (7.19)$$

som sammen med

$$\sigma_{xx}^H = -E\omega_n d^2 \theta / dx^2 \quad (7.20)$$

giver

$$\partial H_x / \partial s = E\omega_n t d^3 \theta / dx^3 \quad (7.21)$$

til bestemmelse af den forskydende kraft pr. længdeenhed H_x . Endelig bestemmes forskydningsspændingerne ved

$$\sigma_{xs}^H = H_x / t \quad (7.22)$$

Med H_x bestemt ved hjælp af (7.21) og randbetingelserne $H_x = 0$ ved det åbne tværsnits ender, da vi forudsætter $q_x = 0$, jævnfør (4.29), har vi

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_A H_x (dy/ds) ds = [H_x y]_P^Q - \int_P^Q (\partial H_x / \partial s) y ds = \\ &= -E(d^3 \theta / dx^3) \int_A \omega_n y t ds = -E(d^3 \theta / dx^3) I_{\omega_y} = 0 \\ Q_z &= \int_A H_x (dz/ds) ds = [H_x z]_P^Q - \int_P^Q (\partial H_x / \partial s) z ds = \\ &= -E(d^3 \theta / dx^3) \int_A \omega_n z t ds = -E(d^3 \theta / dx^3) I_{\omega_z} = 0 \\ M_x^H &= \int_A H_x r ds = \int_A H_x (d\omega/ds) ds = [H_x \omega]_P^Q - \int_P^Q (\partial H_x / \partial s) \omega_n ds = \\ &= -E(d^3 \theta / dx^3) \int_A \omega_n^2 t ds = -E I_\omega d^3 \theta / dx^3 \end{aligned} \quad (7.23)$$

hvor vi har indført *sektorinertimomentet* I_ω ved

$$I_\omega = \int_A \omega_n^2 dA = \int_P^Q \omega_n^2 t ds \quad (7.24)$$

I en bjælke med åbent, tyndfliget tværsnit og påvirket til ren vridning er således

$$\begin{aligned} N = M_y = M_z = Q_y = Q_z &= 0 \\ M_x = M_x^S + M_x^H &= GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3 \end{aligned} \quad (7.25)$$

hvor

$$I_v = \int_A t^3 ds/3 \quad (7.26)$$

Når det vridende moment M_x er statisk bestemt, kan vridningsvinklen θ bestemmes af (7.25), som med

$$k^2 = GI_v/EI_\omega \quad (7.27)$$

kan skrives

$$d^3\theta/dx^3 - k^2 d\theta/dx + M_x/EI_\omega = 0 \quad (7.28)$$

med den fuldstændige løsning

$$\theta = C_1 \sin h k x + C_2 \cos h k x + C_3 + G(x) \quad (7.29)$$

hvor $G(x)$ er en partikulær løsning til (7.28). For M_x konstant er

$$G(x) = M_x x / (GI_v) \quad (7.30)$$

Når det vridende moment er statisk ubestemt, differentieres (7.28) med hensyn til x , og man får

$$d^4\theta/dx^4 - k^2 d^2\theta/dx^2 - m_x/EI_\omega = 0 \quad (7.31)$$

med den fuldstændige løsning

$$\theta = C_1 \sin h k x + C_2 \cos h k x + C_3 x + C_4 + g(x) \quad (7.32)$$

hvor $g(x)$ er en partikulær løsning til (7.31). For m_x konstant er

$$g(x) = -m_x x^2 / (2GI_v) \quad (7.33)$$

Integrationskonstanterne C_1 , C_2 , C_3 og C_4 bestemmes ved hjælp af randbetingelser:

- Ved faste understøtninger og simple vridningsunderstøtninger er vridningsvinklen $\theta = 0$
- Når hvælvningen er hindret, er $u_x = -\omega_n d\theta/dx = 0$, dvs. $d\theta/dx = 0$
- Kan hvælvningen foregå frit, er $\sigma_{xx}^H = -E\omega_n d^2\theta/dx^2 = 0$, dvs. $d^2\theta/dx^2 = 0$

– I angrebepunktet for et koncentreret vridende moment er

$$\theta_v = \theta_h \quad (a)$$

$$u_{x,v} = u_{x,h} \Rightarrow (d\theta/dx)_v = (d\theta/dx)_h \quad (b)$$

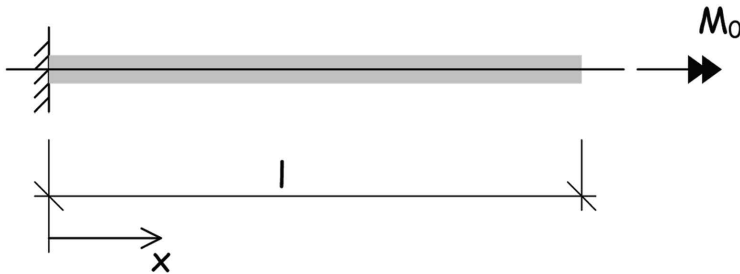
$$\sigma_{xx,v} = \sigma_{xx,h} \Rightarrow (d^2\theta/dx^2)_v = (d^2\theta/dx^2)_h \quad (c)$$

$$\begin{aligned} M_x &= M_{x,v} - M_{x,h} = (GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3)_v \\ &\quad - (GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3)_h \\ &= EI_\omega ((d^3\theta/dx^3)_h - (d^3\theta/dx^3)_v) \end{aligned} \quad (d)$$

– Ved en fri ende er $M_x = M_x^S + M_x^H = GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3 = 0$ og $\sigma_{xx}^H = -EI_\omega d^2\theta/dx^2 = 0$. Bemærk, at det er summen $M_x^S + M_x^H$ som er nul, mens vi ikke kan forlange M_x^S og M_x^H lig med nul hver for sig i denne teori.

Eksempel 7.1

Bjælken i figur 7.4 er indspændt i den ene ende og påvirket af et vridende moment $M_x = M_o$ i den



Figur 7.4

anden ende. Randbetingelserne er $\theta = 0$ og $w_x = 0$ i indspændingen, og $\sigma_x = 0$ i den fri ende. Bjælken er statisk bestemt med $M_x = M_o$ overalt.

Vridningsvinklen er

$$\theta = C_1 \sin hkx + C_2 \cos hkx + C_3 + M_o x / (GI_v) \quad (a)$$

med de afledede

$$\begin{aligned} d\theta/dx &= C_1 k \cos hkx + C_2 k \sin hkx + M_o / (GI_v) \\ d^2\theta/dx^2 &= C_1 k^2 \sin hkx + C_2 k^2 \cos hkx \end{aligned} \quad (b)$$

Randbetingelserne skrives

$$\begin{aligned} x = 0 : \theta &= 0 = C_2 + C_3 \\ x = 0 : d\theta/dx &= 0 = C_1 k + M_o / (GI_v) \\ x = l : d^2\theta/dx^2 &= 0 = (C_1 \sin hkl + C_2 \cos hkl) k^2 \end{aligned} \quad (c)$$

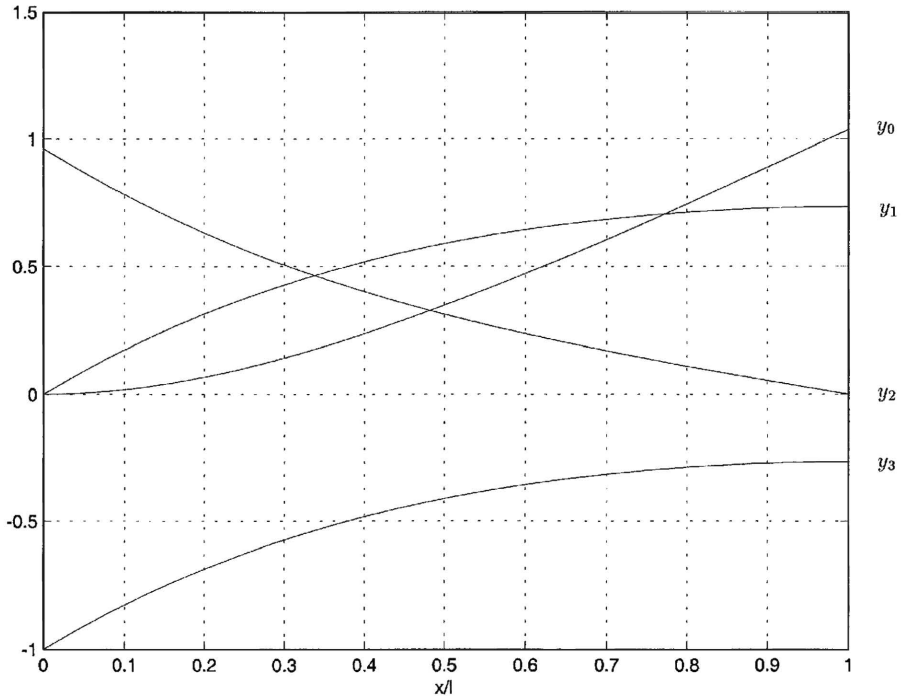
dvs.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -M_o/(kGI_v) \\
 C_2 &= M_o \tan hkl/(kGI_v) \\
 C_3 &= -M_o \tan hkl/(kGI_v)
 \end{aligned}
 \tag{d}$$

og dermed

$$\begin{aligned}
 kGI_v\theta/M_o &= -\sin h kx + \tan hkl(\cos h kx - 1) + kx \\
 (GI_v d\theta/dx)/M_o &= -\cos h kx + \tan hkl \sin h kx + 1 \\
 (GI_v d^2\theta/dx^2)/(M_o k) &= -\sin h kx + \tan hkl \cos h kx \\
 (GI_v d^3\theta/dx^3)/(M_o k^2) &= -\cos h kx + \tan hkl \sin h kx
 \end{aligned}
 \tag{e}$$

Variationen med x af udtrykkene på højresiderne af (e) er vist i figur 7.5.



Figur 7.5

I figuren er

$$y_0 = kGI_v \theta / M_o$$

$$y_1 = (GI_v d\theta / dx) / M_o$$

$$y_2 = (GI_v d^2 \theta / dx^2) / (M_o k)$$

$$y_3 = (GI_v d^3 \theta / dx^3) / M_o k^2$$

Eksempel 7.2

En bjælke er simpelt vridningsunderstøttet i begge ender og påvirket af et konstant moment pr. længdeenhed $m_x = m_o$. Ved en simpel vridningsunderstøtning er drejning af tværsnittet hindret, $\theta = 0$, mens tværsnittet frit kan hvælve sig, dvs. $\sigma_{xx} = 0$ og dermed $d^2 \theta / dx^2 = 0$.

Vridningsvinklen bliver

$$\theta = C_1 \sin hkx + C_2 \cos hkx + C_3 x + C_4 - m_o x^2 / (2GI_v) \quad (\text{a})$$

med de afledede

$$d\theta / dx = C_1 k \cos hkx + C_2 k \sin hkx + C_3 - m_o x / (GI_v) \quad (\text{b})$$

$$d^2 \theta / dx^2 = C_1 k^2 \sin hkx + C_2 k^2 \cos hkx - m_o / (GI_v)$$

og randbetingelserne

$$x = 0 : \theta = 0 = C_2 + C_4$$

$$x = 0 : d^2 \theta / dx^2 = 0 = C_2 k^2 - m_o / (GI_v)$$

$$x = l : \theta = 0 = C_1 \sin hkl + C_2 \cos hkl + C_3 l + C_4 - m_o l^2 / (2GI_v) \quad (\text{c})$$

$$x = l : d^2 \theta / dx^2 = 0 = C_1 k^2 \sin hkl + C_2 k^2 \cos hkl - m_o / (GI_v)$$

Hermed bliver integrationskonstanterne

$$C_1 = m_o (1 - \cos hkl) / (k^2 GI_v \sin hkl)$$

$$C_2 = m_o / (k^2 GI_v)$$

$$C_3 = m_o l / (2GI_v)$$

$$C_4 = -m_o / (k^2 GI_v) \quad (\text{d})$$

dvs.

$$k^2 GI_v \theta / m_o = (1 - \cos hkl) \sin hkx / \sin hkl + \cos hkx + klx / 2 - 1 - k^2 x^2 / 2$$

$$(kGI_v d\theta / dx) / m_o = (1 - \cos hkl) \cos hkx / \sin hkl + \sin hkx + kl / 2 - kx$$

$$(GI_v d^2 \theta / dx^2) / m_o = (1 - \cos hkl) \sin hkx / \sin hkl + \cos hkx - 1 \quad (\text{e})$$

$$(GI_v d^3 \theta / dx^3) / (km_o) = (1 - \cos hkx / \sin hkl + \sin hkx$$

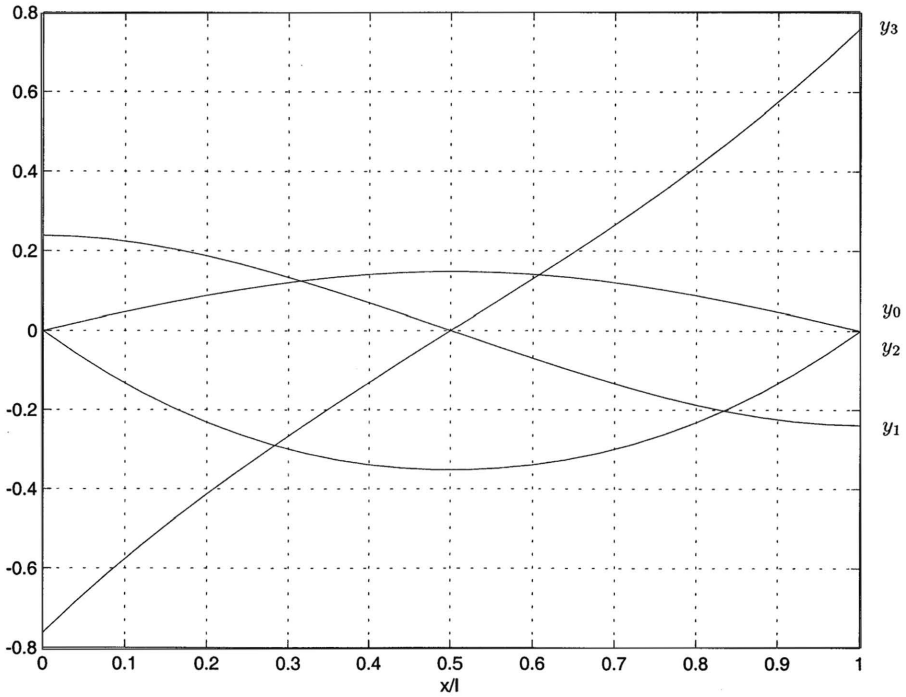
Variationen med x af udtrykkene på højresiderne af (e) er vist i figur 7.6. I figuren er

$$y_0 = k^2 GI_v \theta / m_o$$

$$y_1 = (kGI_v d\theta/dx)/m_o$$

$$y_2 = (GI_v d^2\theta/dx^2)/m_o$$

$$y_3 = (GI_v d^3\theta/dx^3)/(km_o)$$

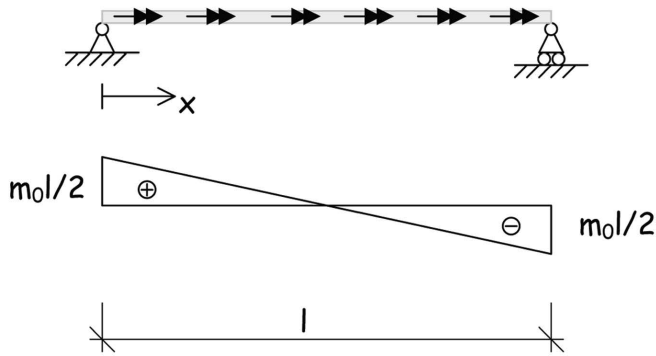


Figur 7.6

Det vridende moment er

$$M_x = M_x^S + M_x^H = GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3 = m_o(l/2 - x)$$

jfr. figur 7.7



Figur 7.7

Når vridningsvinklen θ og dens afledede er bestemt som funktioner af x , bestemmes flytningerne u_x , hvælvningsnormalspændingerne σ_{xx}^H , hvælvningsforskydningspændingerne σ_{xs}^H og den maksimale Saint-Venant forskydningspænding σ_{xs}^S ved

$$\begin{aligned} u_x(x, s) &= -\omega_n d\theta/dx \\ \sigma_{xx}^H(x, s) &= -E\omega_n d^2\theta/dx^2 \\ \sigma_{xs}^H(x, s) &= H_x/t \end{aligned} \quad (7.34)$$

hvor

$$\begin{aligned} \partial H_x / \partial s &= E\omega_n t d^3\theta/dx^3 \\ \sigma_{xs}^S(x, s) &= Gtd\theta/dx \end{aligned}$$

Variationen med bueparameteren s af disse størrelser er således bestemt ved $\omega_n(s)$, $t(s)$ og $\int \omega_n t ds$. For dette integral indføres betegnelsen det *sektorstatistiske moment* S_ω , som altså er defineret ved

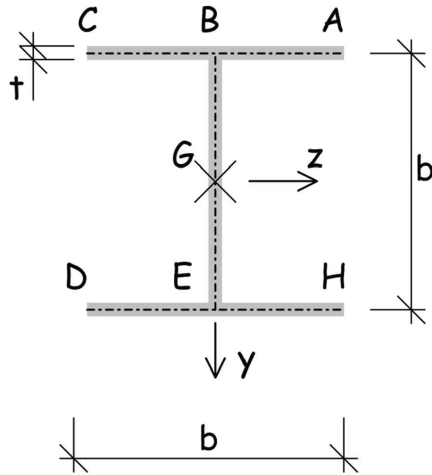
$$dS_\omega = \omega_n t ds \quad (7.35)$$

og opfylder samme rand- og forgreningsbetingelser som den forskydende kraft pr. længdeenhed H_x . Med indførelsen af det sektorstatistiske moment er den forskydende kraft pr. længdeenhed

$$H_x = ES_\omega d^3\theta/dx^3 \quad (7.36)$$

Eksempel 7.3

I-tværsnittet i figur 7.8 har bredden b , højden $h = b$, og fligtykkelsen er overalt t . Tyngdepunktet G

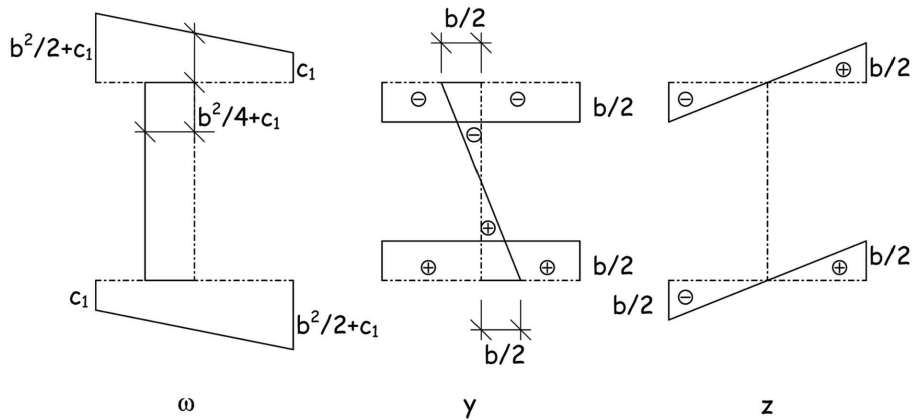


Figur 7.8

ligger midt i kroppen. Buelængden regnes A-B-C, B-E og D-E-H. En sektorkoordinat med hensyn til G bestemmes ved hjælp af (7.9): $d\omega = rds$, hvor r, s er et højresystem. Beregningerne opstilles i et skema.

	r	ω	
A			C_1
B	$b/2$	$bs_1/2 + C_1$	$b^2/4 + C_1$
C	$b/2$	$bs_1/2 + C_1$	$b^2/2 + C_1$
B			$b^2/4 + C_1$
E	0	$C_2 = b^2/4 + C_1$	$b^2/4 + C_1$
D			C_1
E	$b/2$	$bs_3/2 + C_3$	$b^2/4 + C_3 = b^2/4 + C_1$
H	$b/2$	$bs_3/2 + C_3$	$b^2/2 + C_1$

Sektorkoordinatens variation med s er vist i figur 7.9 ligesom y -koordinatens og z -koordinatens.



Figur 7.9

Sektorcentrifugalmomenterne bestemmes af (4.31)

$$I_{\omega y} = \int_A \omega y t ds \quad , \quad I_{\omega z} = \int_A \omega z t ds \quad (a)$$

og ved hjælp af integrationsformlerne i appendiks A finder vi

$$I_{\omega y} = I_{\omega z} = 0 \quad (b)$$

dvs. forskydningscentret F falder sammen med tyngdepunktet G .

Den normaliserede sektorkoordinat med hensyn til forskydningscentret skal opfylde

$$\int_A \omega_n t ds = 0 \quad (c)$$

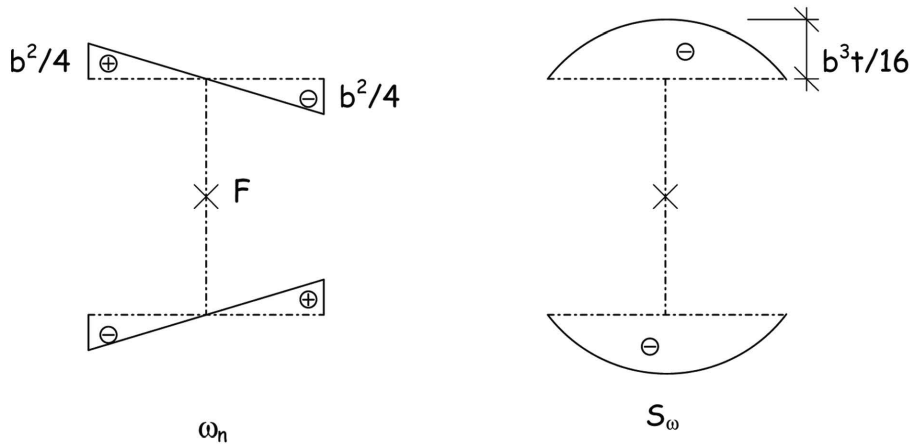
så vi sætter ω_n lig med den fundne sektorkoordinat og bestemmer C_1 , så betingelsen bliver opfyldt

$$\int_A \omega_n t ds = t(3C_1 b + 2b^3/4 + b^3/4) = tb(3C_1 + 3b^2/4) = 0 \quad (d)$$

dvs.

$$C_1 = -b^2/4 \quad (e)$$

Den normaliserede sektorkoordinats variation med s er vist i figur 7.10.



Figur 7.10

Det sektorstatistiske moment S_ω bestemmes ved

$$dS_\omega = \omega_n t ds$$

(f)

og bliver med $\omega_n = bs/2 - b^2/4$ i flangerne

$$S_\omega = (bs^2/4 - b^2 s/4)t$$

Endelig udregnes sektorinertimomentet

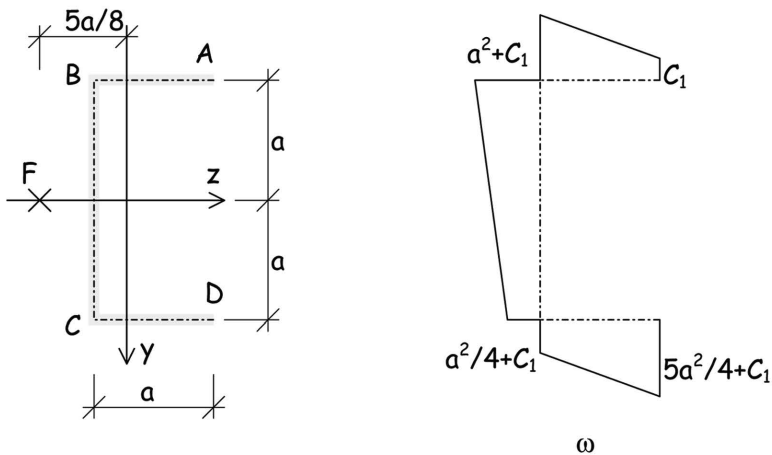
$$I_\omega = \int_A \omega_n^2 t ds = b^5 t / 24$$

og inertimomentet for vridning

$$I_v = \int_A t^3 ds / 3 = t^3 b$$

Eksempel 7.4

I eksempel 4.1 fandt vi forskydningscentrets beliggenhed for det i eksemplet betragtede U-profil, se figur 7.11.



Figur 7.11

En sektorkoordinat med hensyn til F bestemmes og den normaliserede sektorkoordinat ω_n bestemmes

	r	ω
A	a	C_1
B	$-3a/8$	$a^2 + C_1$
C	a	$a^2/4 + C_1$
D	a	$5a^2/4 + C_1$

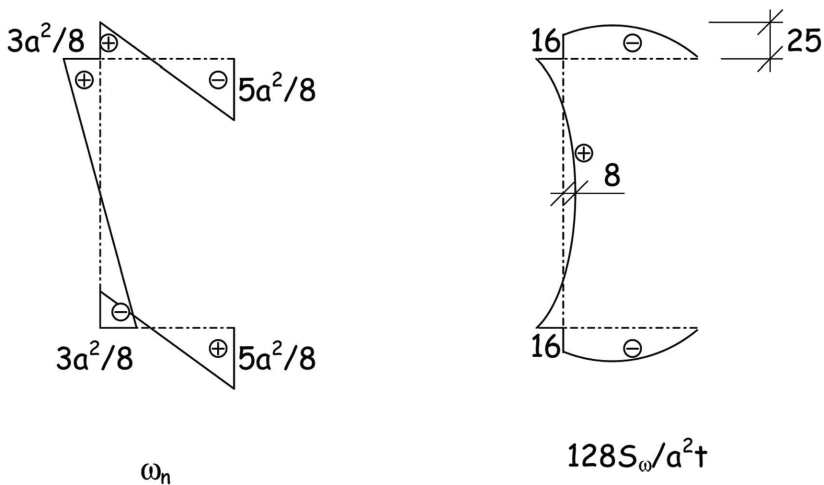
ved

$$\int_A \omega_n t ds = t(4C_1 a + 2a^3/2 + 3a^3/4 + 3a^3/4) = ta(4C_1 + 5a^2/2) = 0 \quad (\text{a})$$

dvs.

$$C_1 = -5a^2/8 \quad (\text{b})$$

Den normaliserede sektorkoordinats variation med s er vist i figur 7.12.



Figur 7.12

Det sektorstatistiske moment S_ω bestemmes ved $dS_\omega = \omega_n t ds$ og bliver

$$\begin{aligned} S_\omega &= (as_1^2/2 - 5a^2 s_1/8)t && \text{i overflangen} \\ S_\omega &= (-3as_2^2/16 + 3a^2 s_2/8 - a^3/8)t && \text{i kroppen} \\ S_\omega &= (as_3^2/2 - 3a^2 s_3/8 - a^3/8)t && \text{i underflangen} \end{aligned} \quad (c)$$

Sektorinertimomentet bliver

$$I_\omega = \int_A \omega_n^2 t ds = ta^5 (5^3/8^3 + 3^3/8^3 + 3^2/8^2) 2/3 = 448ta^5/3 \cdot 8^3 = 7ta^5/24 \quad (d)$$

og inertimomentet for vridning

$$I_v = \int_A t^3 ds/3 = 4t^3 a/3 \quad (e)$$

Resultanten af hvælvningsforskydningsspændingerne $\sigma_{xs}^H = ES_\omega d^3\theta/dx^3/t$ er

$$M_x^H = -EI_\omega d^3\theta/dx^3, \quad Q_y = Q_z = 0 \quad (7.37)$$

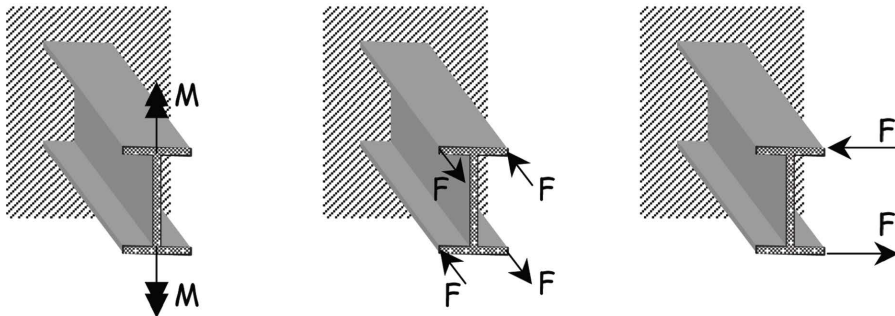
mens resultanten af hvælvningsnormalspændingerne $\sigma_{xx}^H = -E\omega_n d^2\theta/dx^2$ er

$$N = M_y = M_z = 0 \quad (7.38)$$

Disse hvælvningsspændinger er således fremkaldt af et vridende moment, men også andre påvirkninger kan føre til normalspændinger

$$\sigma_{xx} = K(x)\omega_n(s) \quad (7.39)$$

I figur 7.13 er vist nogle eksempler på en indspændt I-bjælke, som i den fri ende er



Figur 7.13

påvirket af kraftsystemer, som medfører plan bøjning i flangerne og dermed normalspændinger givet ved (7.39).

Indføres det såkaldte *bimoment* B ved

$$B = \int_A \sigma_{xx} \omega_n dA \quad (7.40)$$

har man

$$B = - \int E \omega_n^2 dA d^2 \theta / dx^2 = -EI_\omega d^2 \theta / dx^2 \quad (7.41)$$

når påvirkningen er et vridende moment M_x^H . Hermed bliver

$$\sigma_{xx}^H = B \omega_n / I_\omega \quad (7.42)$$

og

$$M_x^H = -EI_\omega d^3 \theta / dx^3 = dB / dx \quad (7.43)$$

Når flangerne påvirkes af et moment M som i figur 7.13a, er spændingerne

$$\sigma_{xx} = M \omega_n / (tb^4 / 24) = Mb \omega_n / I_\omega \quad (7.44)$$

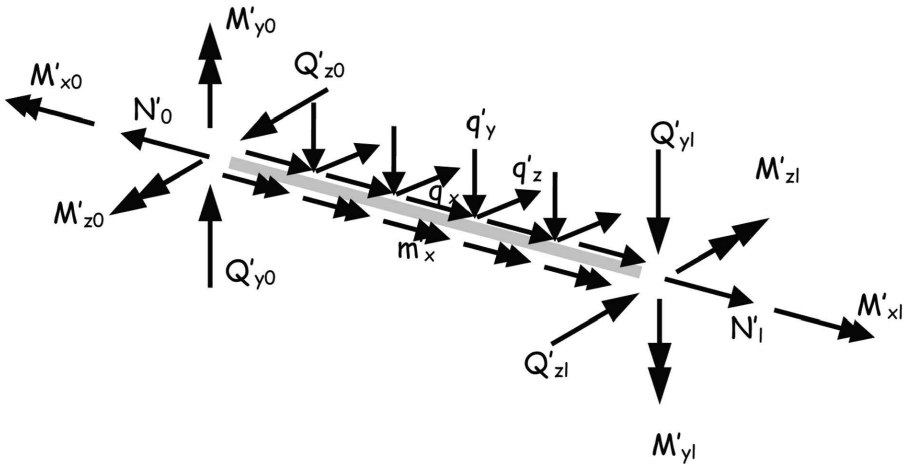
og bimomentet derfor

$$B = Mb \quad (7.45)$$

i dette tilfælde, når normalspændingerne skal udregnes efter (7.42).

8. VIRTUELT ARBEJDE

Vi betragter et bjælkestykke med længden l . x, y, z -systemet er et hovedaksesystem med x -aksen som bjælkeakse. Bjælkestykket påvirkes af belastningen q'_x, q'_y, q'_z og m'_x (dvs. $m'_y = m'_z = 0$), som tilfredsstiller ligevægtsligningerne (1.1) $q'_x = -dN'/dx, q'_y = -dQ'_y/dx, q'_z = -dQ'_z/dx, m'_x = -dM'_x/dx, Q'_z = dM'_y/dx$ og $Q'_y = -dM'_z/dx$. Samtidig udsættes bjælkestykket for en flytningstilstand karakteriseret ved flytningsstørrelserne $w_x^*, w_y^*, w_z^*, \theta^*, \alpha_y^*$ og α_z^* med tilhørende bjælketøjninger $\varepsilon^* = dw_x^*/dx, \kappa_y^* = d\alpha_y^*/dx, \kappa_z^* = d\alpha_z^*/dx, 2\varepsilon_{xy}^* = dw_y^*/dx - \alpha_z^*$ og $2\varepsilon_{zx}^* = dw_z^*/dx + \alpha_y^*$, se (2.3) og (5.21). Bjælkestykket med tilhørende belastning er vist i figur 8.1.



Figur 8.1

De to systemer, belastning og snitkræfter på den ene side, samt flytninger og tøjninger på den anden side, er såkaldte *virtuelle størrelser* dvs. tænkte størrelser, som er knyttet til bjælkestykket. De to systemer er uafhængige af hinanden, dvs. de er ikke forbundet med nogen konstitutiv ligning.

Man definerer nu det *virtuelle ydre arbejde* W_y som

$$\begin{aligned}
 W_y = \int_0^l (q'_x w_x^* + q'_y w_y^* + q'_z w_z^* + m'_x \theta^*) dx + [N'_x w_x^* + Q'_y w_y^* + Q'_z w_z^* + \\
 + M'_x \theta^* + M'_y \alpha_y^* + M'_z \alpha_z^*]_0^l
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Ved gentagen anvendelse af ligevægtsligninger og tøjnings-flytningsrelationer finder man

$$\begin{aligned}
W_y &= \int_o^l (-w_x^* dN'/dx - w_y^* dQ'_y/dx - w_z^* dQ'_z/dx - \theta^* dM'_x/dx) dx \\
&\quad + [N'_x w_x^* + Q'_y w_y^* + Q'_z w_z^* + M'_x \theta^* + M'_y \alpha_y^* + M'_z \alpha_z^*]_o^l = \\
&= \int_o^l (N'_x dw_x^*/dx + Q'_y dw_y^*/dx + Q'_z dw_z^*/dx + M'_x d\theta^*/dx) dx \\
&\quad + [M'_y \alpha_y^* + M'_z \alpha_z^*]_o^l = \\
&= \int_o^l (N'_x \varepsilon^* + Q'_y (2\varepsilon_{xy}^* + \alpha_z^*) + Q'_z (2\varepsilon_{zx}^* - \alpha_y^*) + M'_x d\theta^*/dx) dx \\
&\quad + [M'_y \alpha_y^* + M'_z \alpha_z^*]_o^l = \\
&= \int_o^l (N'_x \varepsilon^* + 2Q'_y \varepsilon_{xy}^* + 2Q'_z \varepsilon_{zx}^* + M'_x d\theta^*/dx - \alpha_z^* dM'_z/dx \\
&\quad - \alpha_y^* dM'_y/dx) dx + [M'_y \alpha_y^* + M'_z \alpha_z^*]_o^l = \\
&= \int_o^l (N'_x \varepsilon^* + 2Q'_y \varepsilon_{xy}^* + 2Q'_z \varepsilon_{zx}^* + M'_x d\theta^*/dx + M'_y \kappa_y^* + M'_z \kappa_z^*) dx \quad (8.2)
\end{aligned}$$

hvor man for det sidste led i (8.2) indfører betegnelsen det *virtuelle indre arbejde* W_i , dvs.

$$W_i = \int_o^l (N'_x \varepsilon^* + 2Q'_y \varepsilon_{xy}^* + 2Q'_z \varepsilon_{zx}^* + M'_x d\theta^*/dx + M'_y \kappa_y^* + M'_z \kappa_z^*) dx \quad (8.3)$$

Man har således den *virtuelle arbejdslikning*

$$W_y = W_i \quad (8.4)$$

hvor W_y og W_i er bestemt ved (8.1) henholdsvis (8.3).

Betragtes i (8.3) de snitkræfter, som er resultanter af normalspændingen σ_{xx} og benyttes ækvivalensbetingelserne (1.2), får man

$$\begin{aligned}
&\int_o^l (N'_x \varepsilon^* + M'_y \kappa_y^* + M'_z \kappa_z^*) dx = \int_o^l dx \int_A \sigma'_{xx} (\varepsilon^* + z \kappa_y^* - y \kappa_z^*) dA \\
&= \int_{V=lA} \sigma'_{xx} \varepsilon_{xx}^* dV \quad (8.5)
\end{aligned}$$

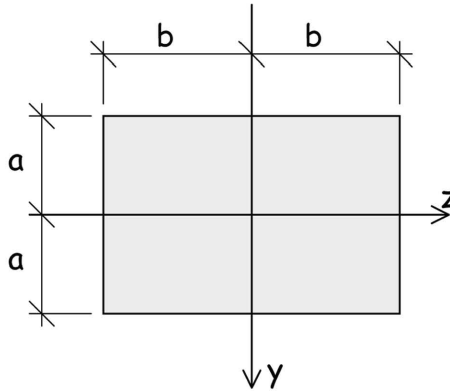
Generelt finder man, stadigvæk under forudsætning af infinitesimale tøjninger, at det virtuelle indre arbejde kan udtrykkes som

$$W_i = \int_V (\sigma'_{xx} \varepsilon_{xx}^* + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy}^* + \sigma'_{zz} \varepsilon_{zz}^*) + 2(\sigma'_{yz} \varepsilon_{yz}^* + \sigma'_{zx} \varepsilon_{zx}^* + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^*) dV \quad (8.6)$$

Den virtuelle arbejdslikning kan blandt andet benyttes til at finde tilnærmede løsninger til forskellige problemer.

Eksempel 8.1

En bjælke med rektangulært tværsnit, se figur 8.2, påvirkes til fri vridning.



Figur 8.2

Spændingsfunktionen,

$$S = m(y^2 - a^2)(z^2 - b^2) \quad (a)$$

som er nul på randen, er ikke den korrekte løsning, da

$$\partial^2 S / \partial y^2 + \partial^2 S / \partial z^2 = 2m(y^2 - a^2 + z^2 - b^2) \quad (b)$$

ikke er en konstant, som kan sættes lig med $-2Gd\theta/dx$. Udtrykket (a) kan imidlertid sammen med den virtuelle arbejdslikning (8.4) benyttes til at finde en tilnærmet løsning.

Til opstilling af den virtuelle arbejdslikning betragtes et bjælkestykke med længden l , drejningen nul for $x = 0$ og drejningen θ^* for $x = l$.

Som virtuelle snitkræfter og spændinger benyttes

$$M'_x = 2 \int_A S' dA \quad (c)$$

$$\sigma'_{xy} = \partial S' / \partial z, \quad \sigma'_{zx} = -\partial S' / \partial y \quad (d)$$

hvor S' er givet ved (a).

Som virtuelle flytninger og tøjninger benyttes en ubestemt drejningsvinkel θ^* , som antages at høre sammen med tøjningerne

$$2\varepsilon_{xy}^* = \sigma'_{xy}/G \quad , \quad 2\varepsilon_{zx}^* = \sigma'_{zx}/G \quad (e)$$

Af (c) fås

$$2m \int_{-a}^a \int_{-b}^a (y^2 - b^2)(z^2 - b^2) dy dz = 2m[y^3/3 - a^2 y]_{-a}^a [z^3/3 - b^2 z]_{-b}^b = 2m16a^3 b^3/9 \quad (f)$$

dvs.

$$m = 9M'_x/32a^3 b^3 \quad (g)$$

mens (d) giver

$$\begin{aligned} \sigma'_{xy} &= 2m(y^2 - a^2)z \\ \sigma'_{zx} &= -2m(z^2 - b^2)y \end{aligned} \quad (h)$$

De virtuelle arbejder er (8.1) og (8.6)

$$W_y = M'_x \theta^* \quad (i)$$

$$\begin{aligned} W_i &= \int_V 2(\sigma'_{zx} \varepsilon_{zx}^* + \sigma'_{xy} \varepsilon_{xy}^*) dV = \\ &= 2 \int_0^l dx \int_A (\sigma'^2_{zx} + \sigma'^2_{xy}) dA/G = \\ &= 24m^2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b ((y^2 - a^2)^2 z^2 + (z^2 - b^2)^2 y^2) dy dz/G \\ &= 8lm^2 32a^3 b^3 (a^2 + b^2)/90G \end{aligned} \quad (j)$$

Med m bestemt ved (g) fås nu

$$M'_x = G(40a^3 b^3/9(a^2 + b^2))\theta^*/l = GI_v d\theta^*/dx \quad (k)$$

og dermed

$$I_v = 40a^3 b^3/9(a^2 + b^2) \quad (l)$$

For et kvadratisk tværsnit $a = b$ finder man

$$I_v = 2,2222a^4 \quad (m)$$

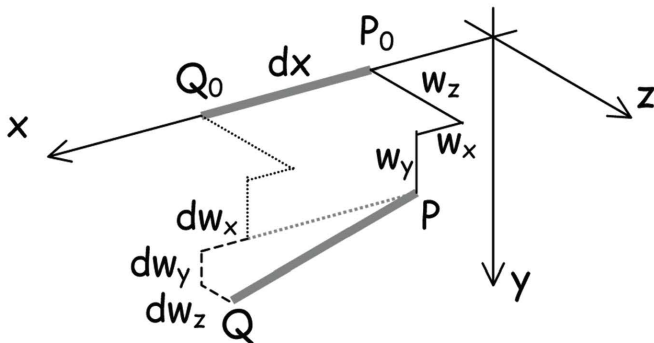
mens den korrekte værdi er

$$I_v = 2,2496a^4$$

Den korrekte værdi er baseret på en spændingsfunktion i form af en uendelig række.

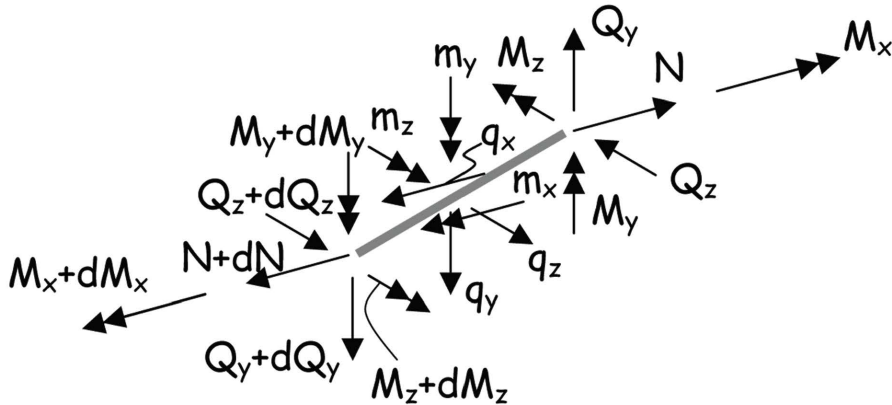
9. LIGEVÆGT I DEFORMERET TILSTAND

Ligevægtsligningerne (1.1) er opstillet for et bjælkeelement i udeformeret tilstand, og så længe der ikke optræder stabilitetsfænomener, er dette en fortrinlig tilnærmelse til de korrekte ligevægtsligninger, som naturligvis må opstilles for et bjælkeelement i deformeret og udbøjet tilstand. Figur 9.1 viser et bjælkeelement, som i udeformeret tilstand



Figur 9.1

har længden dx og befinder sig mellem P_0 og Q_0 , og som i deformeret tilstand befinder sig mellem P og Q . Punktet P_0 får flytningerne w_x, w_y og w_z , mens Q_0 får flytningerne $w_x + dw_x, w_y + dw_y$ og $w_z + dw_z$. Snitkraftvektorerne opløses efter x, y, z -retningerne som vist i figur 9.2, og ligevægtsligningerne bliver



Figur 9.2

$$\begin{aligned}
dN/dx &= -q_x \\
dQ_y/dx &= -q_y \\
dQ_z/dx &= -q_z \\
dM_x/dx &= -m_x - Q_z dw_y/dx + Q_y dw_z/dx \\
dM_y/dx &= -m_y + Q_z - N dw_z/dx \\
dM_z/dx &= -m_z - Q_y + N dw_y/dx
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Sammenholdes (9.1) med (1.1) ser man, at det er led, hvori N , Q_y og Q_z er ganget med momentarme dw_y og dw_z , der er bortkastet i ligevægtsligningerne (1.1).

I den deformerede bjælkes tværsnit indlægges et ξ, η, ζ -system, og i dette system har snitkræfterne komponenterne $N_\xi, Q_\eta, Q_\zeta, M_\xi, M_\eta$ og M_ζ . Under forudsætning af, at ξ, η, ζ -systemet er et ortogonalt system, som x, y, z -systemet for hvert normalsnit føres over i, er transformationen mellem de to systemer med tilnærmelse givet ved

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_z & -\alpha_y \\ -\alpha_z & 1 & \theta \\ \alpha_y & -\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

Tilnærmelsen ligger deri, at der er forudsat infinitesimale tøjninger, så $\cos \alpha = 1$ og $\sin \alpha = \alpha$, og den resulterer i, at drejningsmatricen ikke er eksakt ortogonal.

Om flytningerne forudsættes, at de er givet ved

$$\begin{aligned}
u_x(x, y, z) &= w_x(x) + z\alpha_y(x) - y\alpha_z(x) + \psi(y, z)d\theta/dx \\
u_y(x, y, z) &= w_y(x) - (z - z_F)\theta(x) \\
u_z(x, y, z) &= w_z(x) + (y - y_F)\theta(x)
\end{aligned} \tag{9.3}$$

hvor ψ for massive og lukkede, tyndfligede tværsnit er hvælvningsfunktionen for fri vridning og for åbne, tyndfligede tværsnit består af dette bidrag plus yderligere den normaliserede sektorkoordinat ω_n . Endvidere forudsættes

$$\begin{aligned}
\alpha_y &= -dw_z/dx, \quad \kappa_y = -d^2w_z/dx^2 \\
\alpha_z &= dw_y/dx, \quad \kappa_z = d^2w_y/dx^2
\end{aligned} \tag{9.4}$$

som ved Bernoullibjælker, jfr. (5.21). Med disse forudsætninger vedrørende flytningerne betegnes bjælken en Vlasovbjælke.

Man finder nu

$$\begin{aligned}
 N_\xi &= N + \alpha_z Q_y - \alpha_y Q_z = N + Q_y dw_y/dx + Q_z dw_z/dx \\
 Q_\eta &= -\alpha_z N + Q_y + \theta Q_z = -N dw_y/dx + Q_y + \theta Q_z \\
 Q_\zeta &= \alpha_y N - \theta Q_y + Q_z = -N dw_z/dx - \theta Q_y + Q_z \\
 M_\xi &= M_x + \alpha_x M_y - \alpha_y M_\zeta = M_x + M_y dw_y/dx + M_z dw_z/dx \\
 M_\eta &= -\alpha_z M_x + M_y + \theta M_z = -M_x dw_y/dx + M_y + \theta M_z \\
 M_\zeta &= \alpha_y M_x - \theta M_y + M_z = -M_x dw_z/dx - \theta M_y + M_z
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Som konstitutive ligninger anvendes

$$\begin{aligned}
 N_\xi &= EA\varepsilon = EAdw_x/dx \\
 M_\xi &= GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3 \\
 M_\eta &= EI_{yy}\kappa_y = -EI_{yy}d^2w_z/dx^2 \\
 M_\zeta &= EI_{zz}\kappa_z = EI_{zz}d^2w_y/dx^2
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

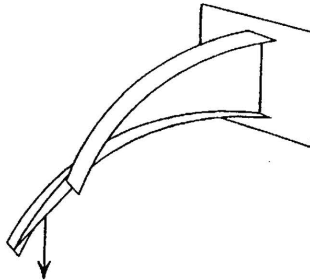
se (2.13) og (7.25). Hermed bliver

$$\begin{aligned}
 EAdw_x/dx &= N + Q_y dw_y/dx + Q_z dw_z/dx \\
 GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3 &= M_x + M_y dw_y/dx + M_z dw_z/dx \\
 -EI_{yy}d^2w_z/dx^2 &= -M_x dw_y/dx + M_y + \theta M_z \\
 EI_{zz}d^2w_y/dx^2 &= -M_x dw_z/dx - \theta M_y + M_z
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

som sammen med ligevægtsligningerne (9.1) kan benyttes til bestemmelse af for eksempel kritiske belastninger.

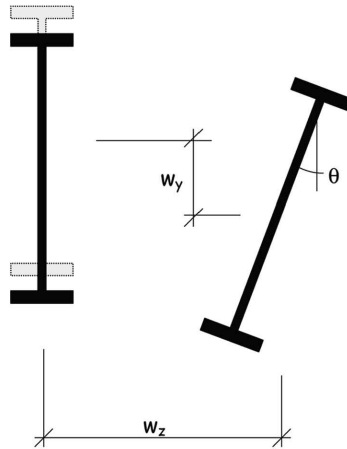
9.1 Kipning

Ved kipning forstås det fænomen, at en bjælke påvirket til bøjning alene om den ene hovedakse bøjer ud også om den anden hovedakse. Fænomenet er illustreret i figur 9.3



Figur 9.3

og figur 9.4 a), b) og c), hvor a) viser bjælketværsnittet i ubelastet tilstand, b) viser

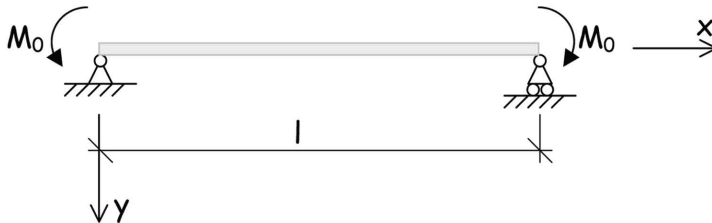


Figur 9.4

tværsnittets flytning i y -retningen ved bøjning om z -aksen, og c) viser flytning i z -retningen og drejning om x -aksen, som finder sted, når udbøjningen i y -retningen alene bliver ustabil.

Eksempel 9.1

En simpelt understøttet bjælke påvirket af det konstante moment $M_z = M_o$, se figur 9.5, betragtes.



Figur 9.5

Snitkræfterne er

$$N = Q_y = Q_z = M_x = M_y = 0, \quad M_z = M_o \quad (a)$$

og man har fra (9.6)

$$GI_v d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3 = M_o dw_z/dx \quad (b)$$

$$-EI_{yy} d^2 w_z/dx^2 = \theta M_o \quad (c)$$

$$EI_{zz} d^2 w_y/dx^2 = M_o \quad (d)$$

Udbøjningen w_y bestemmes af (d) og bliver som i det plane tilfælde. (b) differentieres med hensyn til x , og med d^2w_z/dx^2 indsat fra (c) fås kippingsligningen

$$EI_\omega d^4\theta/dx^4 - GI_v d^2\theta/dx^2 - \theta M_o^2/EI_{yy} = 0 \quad (e)$$

som er tilfredsstillet med

$$M_{o,kr} = (\pi/l)\sqrt{EI_{yy}(GI_v + \pi^2 EI_\omega/l^2)} \quad (f)$$

når bjælken er vridningsfastholdt i begge ender, dvs. $\theta = 0$ for $x = 0$ og $x = l$.

For $M_o < M_{o,kr}$ finder kun udbøjning i y -retningen sted, mens ligevægt i en tilstand, hvor både w_y og w_z er forskellige fra nul, bliver mulig for $M_o = M_{o,kr}$.

I en simpelt understøttet bjælke belastet i y -retningen med q_y , mens $q_x = q_z = m_x = m_y = m_z = 0$, bliver snitkræfterne i udbøjet stilling

$$\begin{aligned} N &= Q_z = M_y = 0 \\ Q_y &= Q_o(x) \\ M_z &= M_o(x) \end{aligned} \quad (9.8)$$

hvor Q_o og M_o er som i det plane tilfælde. Det vridende moment M_x bestemmes af (9.1) til

$$M_x = \int Q_o dw_z/dx + C \quad (9.9)$$

og fra (9.6) fås nu

$$\begin{aligned} GI_\omega d\theta/dx - EI_\omega d^3\theta/dx^3 &= \int Q_o dw_z/dx + C + M_o dw_z/dx \\ EI_{yy} d^2w_z/dx^2 &= -\left(\int Q_o dw_z/dx + C\right) dw_y/dx + \theta M_o \\ EI_{zz} d^2w_y/dx^2 &= -\left(\int Q_o dw_z/dx + C\right) dw_z/dx + M_o \end{aligned} \quad (9.10)$$

(9.10 a) differentieres med hensyn til x , og i (9.10 b) og (9.10 c) antages det, at fejlen ved at se bort fra bidragene fra det vridende moment M_x er uden betydning. Hermed har man

$$\begin{aligned} GI_v d^2\theta/dx^2 - EI_\omega d^4\theta/dx^4 &= M_o d^2w_z/dx^2 \\ EI_{yy} d^2w_z/dx^2 &= \theta M_o \\ EI_{zz} d^2w_y/dx^2 &= M_o \end{aligned} \quad (9.11)$$

hvor (9.11 c) benyttes til bestemmelse af w_y , mens d^2w_z/dx^2 fra (9.11 b) indsat i (9.11 a) giver kippingsligningen

$$GI_v d^2\theta/dx^2 - EI_\omega d^4\theta/dx^4 - \theta M_o^2/EI_{yy} = 0 \quad (9.12)$$

til bestemmelse af det kritiske moment $M_{o,kr}$.

Løsningen af (9.12) simplificeres betydeligt, hvis man kan se bort fra et af leddene $GI_v d^2\theta/dx^2$ eller $EI_\omega d^4\theta/dx^4$. Skrives løsningen som

$$M_{kr} = (\gamma/l) \sqrt{EI_{yy}(GI_v + \pi^2 EI_\omega/l^2)} \quad (9.13)$$

hvor γ er en faktor, som afhænger af blandt andet momentkurvens form og understøtningsforholdene, ses, at en løsning med f.eks. (og som oftest) $EI_\omega = 0$ vil være på den sikre side.

APPENDIKS A

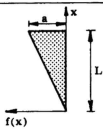
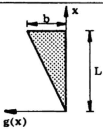
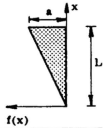
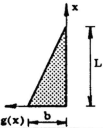
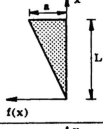
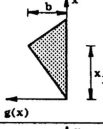
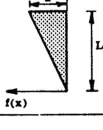
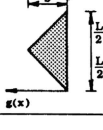
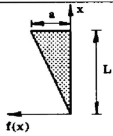
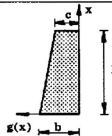
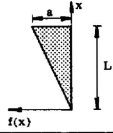
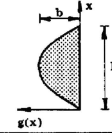
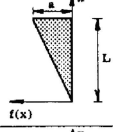
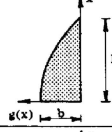
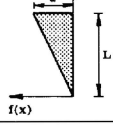
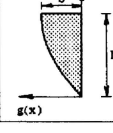
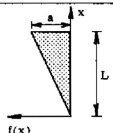
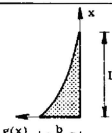
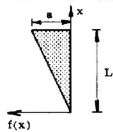
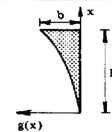
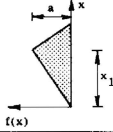
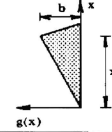
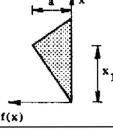
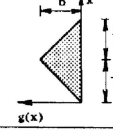
	funktioer		afbildning		$I = \int_0^L f(x)g(x)dx$
	f(x)	g(x)	f(x)	g(x)	
①	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = b \frac{x}{L}$			$\frac{1}{3} Lab$
②	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = b(1 - \frac{x}{L})$			$\frac{1}{6} Lab$
③	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = \begin{cases} b \frac{x}{x_1} & ; \frac{x}{x_1} < 1 \\ b \frac{L-x}{L-x_1} & ; \frac{x}{x_1} > 1 \end{cases}$			$\frac{1}{6} (1 + \frac{x_1}{L}) Lab$
④	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = \begin{cases} 2b \frac{x}{L} & ; \frac{x}{L} < \frac{1}{2} \\ 2b(1 - \frac{x}{L}) & ; \frac{x}{L} > \frac{1}{2} \end{cases}$			$\frac{1}{4} Lab$

Table 3.2

	funktioer		afbildning		$I = \int_0^L f(x)g(x)dx$
	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)$	$g(x)$	
6	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = (c-b) \frac{x}{L} + b$			$\frac{1}{6} La(b+2c)$
6	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = 4b \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L})$			$\frac{1}{3} Lab$
7	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = b(1 - (\frac{x}{L})^2)$			$\frac{1}{4} Lab$
8	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = b \frac{x}{L} (2 - \frac{x}{L})$			$\frac{5}{12} Lab$

Tabell 8.3

	funktioer		afbildning		$I = \int_0^L f(x)g(x)dx$
	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)$	$g(x)$	
9	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = b(\frac{x}{L} - 1)^2$			$\frac{1}{12} Lab$
10	$f(x) = a \frac{x}{L}$	$g(x) = b(\frac{x}{L})^2$			$\frac{1}{4} Lab$
11	$f(x) = \begin{cases} a \frac{x}{x_1} & ; \frac{x}{x_1} < 1 \\ a \frac{L-x}{L-x_1} & ; \frac{x}{x_1} > 1 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} b \frac{x}{x_2} & ; \frac{x}{x_2} < 1 \\ b \frac{L-x}{L-x_2} & ; \frac{x}{x_2} > 1 \end{cases}$			$\frac{(2 - \frac{x_2}{L}) \frac{x_2}{L} - (\frac{x_1}{L})}{6 \frac{x_2}{L} (1 - \frac{x_1}{L})} Lab ; x_1 < x_2$
12	$f(x) = \begin{cases} a \frac{x}{x_1} & ; \frac{x}{x_1} < 1 \\ a \frac{L-x}{L-x_1} & ; \frac{x}{x_1} > 1 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} 2b \frac{x}{L} & ; \frac{x}{L} < \frac{1}{2} \\ 2b(1 - \frac{x}{L}) & ; \frac{x}{L} > \frac{1}{2} \end{cases}$			$\frac{3 - 4(\frac{x_1}{L})}{12(1 - \frac{x_1}{L})} Lab ; x_1 < \frac{L}{2}$ $\frac{4(2 - \frac{x_1}{L}) \frac{x_1}{L} - 1}{12 \frac{x_1}{L}} Lab ; x_1 > \frac{L}{2}$

Tabell 8.4

	funktioner		afbildning		$I = \int_0^L f(x)g(x)dx$
	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)$	$g(x)$	
13	$f(x) = \begin{cases} a \frac{x}{x_1} & ; \frac{x}{x_1} < 1 \\ a \frac{L-x}{L-x_1} & ; \frac{x}{x_1} \geq 1 \end{cases}$	$g(x) = (c-b) \frac{x}{L} + b$			$\frac{1}{6} [La(c+2b) - (b-c) \frac{x_1^3}{L}]$
14	$f(x) = \begin{cases} a \frac{x}{x_1} & ; \frac{x}{x_1} < 1 \\ a \frac{L-x}{L-x_1} & ; \frac{x}{x_1} \geq 1 \end{cases}$	$g(x) = 4b \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L})$			$\frac{1}{3} [1 + \frac{x_1}{L} - (\frac{x_1}{L})^2] Lab$ $x_1 = L/2 \Rightarrow \frac{5}{12} Lab$
15	$f(x) = \begin{cases} a \frac{x}{x_1} & ; \frac{x}{x_1} < 1 \\ a \frac{L-x}{L-x_1} & ; \frac{x}{x_1} \geq 1 \end{cases}$	$g(x) = b(1 - (\frac{x}{L})^2)$			$\frac{1}{12} [5 - \frac{x_1}{L} - (\frac{x_1}{L})^2] Lab$
16	$f(x) = \begin{cases} a \frac{x}{x_1} & ; \frac{x}{x_1} < 1 \\ a \frac{L-x}{L-x_1} & ; \frac{x}{x_1} \geq 1 \end{cases}$	$g(x) = b (\frac{x}{L})^2$			$\frac{1}{12} [1 + \frac{x_1}{L} + (\frac{x_1}{L})^2] Lab$

Tabel 9.5

	funktioner		afbildning		$I = \int_0^L f(x)g(x)dx$
	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)$	$g(x)$	
17	$f(x) = (b-a) \frac{x}{L} + a$	$g(x) = (d-c) \frac{x}{L} + c$			$\frac{1}{6} L(2ac + 2bd + ad + bc)$
18	$f(x) = (b-a) \frac{x}{L} + a$	$g(x) = 4c \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L})$			$\frac{1}{3} Lc(a+b)$
19	$f(x) = (b-a) \frac{x}{L} + a$	$g(x) = c(1 - (\frac{x}{L})^2)$			$\frac{1}{12} Lc(5a+3b)$
20	$f(x) = (b-a) \frac{x}{L} + a$	$g(x) = c(\frac{x}{L})^2$			$\frac{1}{12} Lc(a+3b)$

Tabel 9.6

