



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

**Aalborg Universitet**

## **Grundkursus i stålkonstruktioner (ESDEP-uddrag)**

*Konstruktionselementer*

Albertsen, A.; Kloch, Søren

*Publication date:*  
1996

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Albertsen, A., & Kloch, S. (1996). *Grundkursus i stålkonstruktioner (ESDEP-uddrag): Konstruktionselementer*. Department of Mechanical Engineering, Aalborg University. U : Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet Nr. U9604

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### **Take down policy**

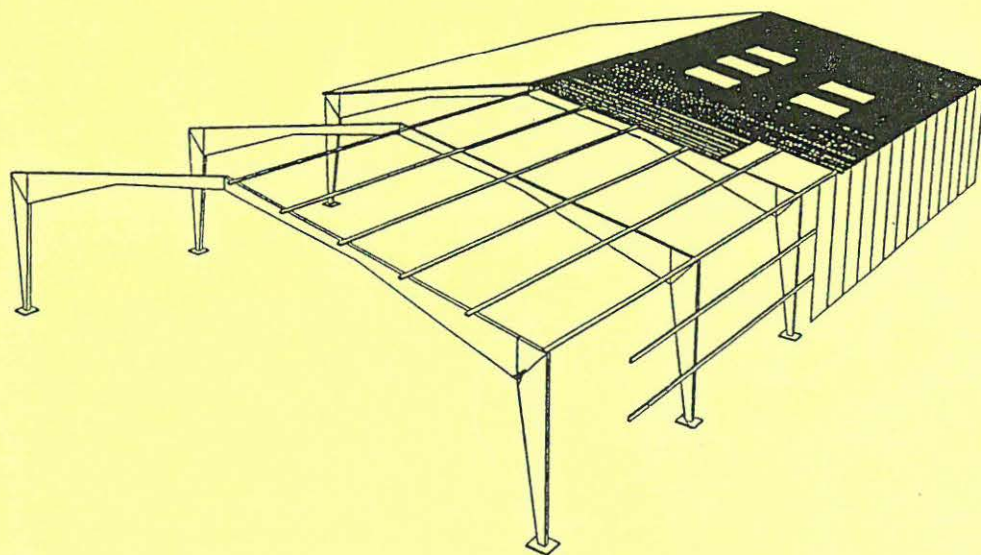
If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

---

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITET • AAU • AALBORG • DANMARK

---



---

A. ALBERTSEN & S. KLOCH  
GRUNDKURSUS I STÅLKONSTRUKTIONER  
KONSTRUKTIONSELEMENTER, 3. udgave  
SEPTEMBER 1996

(ESDEP-UDDRAG)

ISSN 1395-8232 U9604

---

Lars Andersen.

ESDEP-materialet er et undervisningsmateriale, der som et resultat af projektet European Steel Design Education Programme vederlagsfrit stilles til rådighed for undervisningen i stålkonstruktioner. Der sigtes mod undervisning på følgende 3 niveauer:

Niveau A:	Grundkurser for ingeniørstuderende
Niveau B:	Kurser for studerende med speciale i stålkonstruktioner
Niveau C:	Efteruddannelseskurser

---

Materialet foreligger i sin helhed kun på engelsk. Udvalgte dele er p.t. under oversættelse til dansk.

Nærmere oplysninger om materialet kan fås ved henvendelse til instituttet eller til Dansk Stålinstitut, Odense. Et fyldigere udvalg af lektioner kan ses i den engelsksprogede 2. udgave, der er udgivet som undervisningsnote U9507, U9508 og U9509.

### **FORORD TIL 3. UDGAVE**

ESDEP-materialet har - i uddrag - allerede i 2 år været anvendt ved den elementære undervisning i stålkonstruktioner ved Aalborg Universitet. Den omstændighed, at det kun har foreligget på engelsk, har vist sig at volde så store vanskeligheder for de studerende, at vi har fundet det nødvendigt med en oversættelse til dansk. Sammen med lærere fra 3 andre ingeniøruddannelsesinstitutioner deltager undertegnede derfor i et oversættelsesprojekt, som forventes afsluttet i løbet af 1997.

Hermed foreligger da den første dansksprogede udgave af ESDEP-materiale til brug for den grundlæggende undervisning i stålkonstruktioner. I nærværende undervisningsnote, der af praktiske grunde er delt i 2 hæfter, nemlig "Konstruktionselementer" og "Konstruktionssamlinger", er kun medtaget det mest nødvendige stof til gennemførelse af årets undervisning. Når oversættelsesprojektet er afsluttet, vil der være basis for at udsende en ny udgave med en noget mere fyldig dækning af emnet. Vi understreger, at denne note er at betragte som et arbejdsdokument, og vi beder derfor læserne bære over med, at der endnu mangler en afpudsning af tekst, figurer og layout.

Til hver lektion hører et indledende afsnit, hvori der bl. a. opregnes de nødvendige forudsætninger samt henvises til lektioner om beslægtede emner. Læseren bedes bemærke, at danske titler henviser til oversatte lektioner, medens engelske titler refererer til ikke-oversat materiale. For overblikkets skyld er sidstnævnte skrevet med kursivskrift.

Aalborg, september 1996

Aksel Albertsen      Søren Kloch

## OVERSIGT OVER ESDEP-MATERIALETS INDHOLD:

Kapitel	1A	Økonomiske og kommercielle faktorer
-	1B	Introduktion til udformning og beregning af stålkonstruktioner
-	2	Anvendt metallurgi
-	3	Fabrikation og montage
-	4A	Beskyttelse mod korrosion
-	4B	Beskyttelse mod brand
-	5	CAD/CAM (computer aided design and manufacture)
-	6	Anvendt stabilitetsteori
-	7	Konstruktionselementer
-	8	Tynde plader og skaller
-	9	Tyndpladekonstruktioner
-	10	Komposit-konstruktioner
-	11	Samlinger - statisk last
-	12	Udmattelse
-	13	Konstruktioner af rør
-	14	Konstruktionssystemer - bygninger
-	15A	Konstruktionssystemer - offshore
-	15B	Konstruktionssystemer - broer
-	15C	Beholdere, master, tårne og skorstene
-	16	Reparation og levetidsvurdering
-	17	Jordskælvspåvirkede konstruktioner
-	18	Konstruktioner af rustfrit stål

## ENGELSKE KAPITELOVERSKRIFTER:

Chapter	1A	Steel Construction: Economic and Commercial Factors
-	1B	Steel Construction: Introduction to Design
-	2	Applied Metallurgy
-	3	Fabrication and Erection
-	4A	Protection: Corrosion
-	4B	Protection: Fire
-	5	Computer Aided Design and Manufacture
-	6	Applied Stability
-	7	Elements
-	8	Plates and Shells
-	9	Thin-Walled Construction
-	10	Composite Construction
-	11	Connection Design: Static loading
-	12	Fatigue
-	13	Tubular Structures
-	14	Structural Systems: Buildings
-	15A	Structural Systems: Offshore
-	15B	Structural Systems: Bridges
-	15C	Structural Systems: Miscellaneous (Bins, Towers & Masts, Chimneys)
-	16	Structural Systems: Refurbishment
-	17	Seismic Design
-	18	Stainless Steel

## INDHOLDSFORTEGNELSE

Lektion	Emne	Side
<hr/>		
TRÆKSTÆNGER		
7.4.1	Trækstænger I	5
<hr/>		
BJÆLKER		
7.8.1	Bjælker fastholdt mod sideudbøjning, I	17
7.8.2	- - - - , II	31
7.9.1	Bjælker uden sidefastholdelse, I	45
7.9.2	- - - - , II	61
8.1	Introduktion til dimensionering af plader	79
8.4.1	Udformning og beregning af pladedragere, I	93
<hr/>		
SØJLER		
6.3	Elastisk instabilitet	107
6.6.1	Stabilitet af imperfekte konstruktionselementer, I	117
6.6.2	- - - - , II	133
7.5.1	Søjler, I	151
7.5.2	- , II	169
7.7	Fri søjlelængde	181
7.10.1	Bjælkesøjler, I	193
<hr/>		



## Lektion 7.4.1: Trækstænger I

### FORMÅL

At beskrive typiske anvendelser af trækstænger samt at forklare udledningen af reglerne i Eurocode 3.

### FORUDSÆTNINGER

Grundlæggende materiale- og styrkelære.  
Kendskab til principperne for dimensionering i brudstadiet.

### BESLÆGTEDE LEKTIONER

Lektion 7.12: *Trusses and Lattice Girders*  
Lektion 11.1.2: Introduktion til samlinger

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 7.3: Trækstænger I

### RESUMÉ

Lektionen beskriver først brugen af trækstænger i forskellige konstruktioner. Dernæst studeres brudmåden af en trækstang, især i forbindelse med samlinger med boltehuller. Endelig præsenteres de dimensioneringsformler, der er foreslået i Eurocode 3.

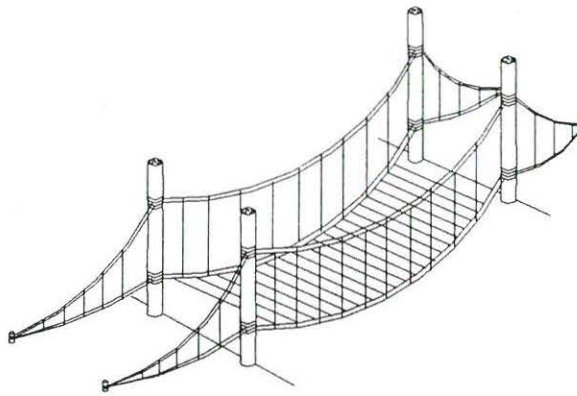
Oversat og bearbejdet af A. Albertsen, Aalborg Universitet, marts 1996

## 1. INDLEDNING

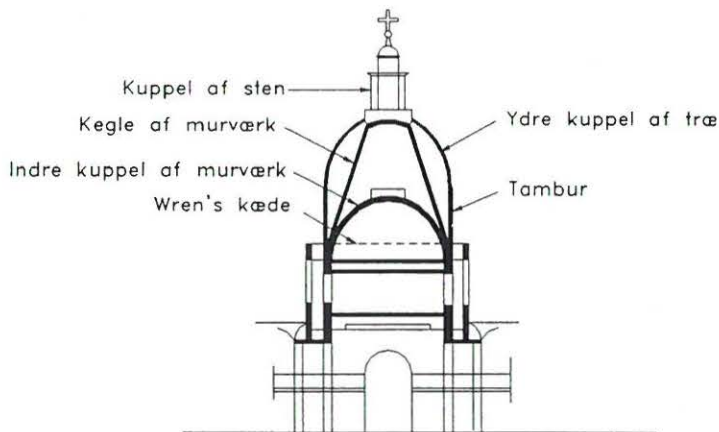
Virkemåden af en konstruktion kan beskrives som en balance mellem konstruktionselementer, der skal modstå enten træk- eller trykspændinger. Da de naturgivne materialer er bedre egnede til at modstå tryk end træk, har bygmesterens /designerens opgave oprindeligt været at forsøge at undgå trækspændinger, for eksempel ved at udvikle systemer som buer og hvælvinger. Ved særlig behandling af de "naturlige" materialer havde man held til at udvikle konstruktioner, hvor optagelsen af træk spillede en fundamental rolle (*figur 1*). I begyndelsen var dette dog som regel begrænset til midlertidige konstruktioner.

Selv i konstruktioner, der væsentligst baserer sig på optagelse af tryk, kan det imidlertid forekomme, at elementer, der kan modstå træk, spiller en væsentlig rolle i sikring af konstruktionens stabilitet (*figur 2*). 1700-tallets industrielle revolution, som medførte den grundlæggende udvikling af de jernbaserede materialer, bragte store fremskridt i udnyttelsen af træk i konstruktionerne, idet rent træk nu kunne optages sikkert og uden de holdbarhedsproblemer, der tidligere havde været forbundet med anvendelse af de naturlige materialer.



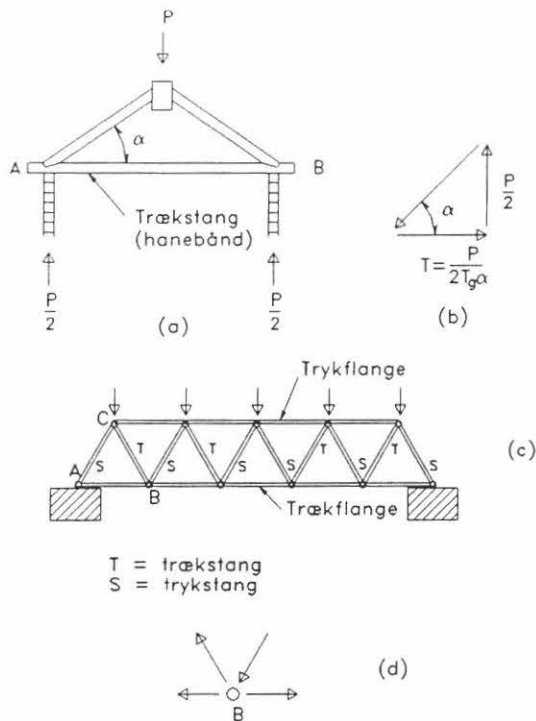


Figur 1. Primitiv midlertidig bro



Figur 2. En gammel konstruktions brug af elementer med træk  
(St Paul's Cathedral, London)

På *figur 3* er der vist et par simple konstruktioner med trækstænger, nemlig en tagkonstruktion med et trækbånd (hanebånd) og en gitterdrager, hvor underflangen og adskillige af diagonalerne er udsat for træk. I de senere år er udviklingen gået i retning af anvendelse af kabler som trækelementer i tagkonstruktioner, broer, master og kraner etc. Denne lektion behandler de konventionelle trækstænger, medens lektion 7.4.2 behandler anvendelsen af kabler.



Figur 3. Simple konstruktioner med trækstænger

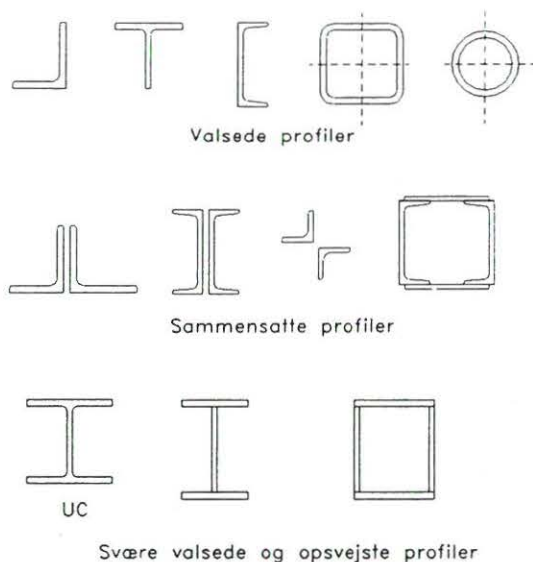
## 2. SPÆNDINGSFORDELING I EN TRÆKSTANGS TVÆRSNIT

### 2.1 Generelt

Til trækstænger benyttes der sædvanligvis simple valsede profiler i form af stænger og fladprofiler eller andre valsede profiler med L-, T- eller U-tværsnit samt profiler med rørtværsnit. I tilfælde af, at der er behov for et større tværsnitsareal, end man kan opnå med disse profiler, eller hvis udformningen af en samling kræver det, kan man kombinere de nævnte profiler eller bygge et specialtværsnit op af plader (figur 4).

Hensynet til stivheden bevirker, at fladprofilerne ikke benyttes ret meget. I praksis begrænses slankheden  $\lambda = L/i$  (se afsnit 3.1) for alle profiltyper til 300 for kraftoptagende elementer og til 400 for rent afstivende elementer (denne regel gælder naturligvis ikke for rundprofiler). I almindelighed foretrækkes simple, valsede profiler, medens de sammensatte profiler kun benyttes til optagelse af store trækkræfter eller i tilfælde, hvor der skal optages samtidig træk og bøjning.

I almindelighed antages det, at trækkræften resulterer i en spænding, der er jævnt fordelt over trækstangens tværsnit. Følgende forhold peger dog i retning af en ujævn fordeling:



Figur 4. Tværsnit af trækstænger

- \* tilstedeværelsen af egenspændinger fra fremstillingen
- \* forholdene i samlingerne

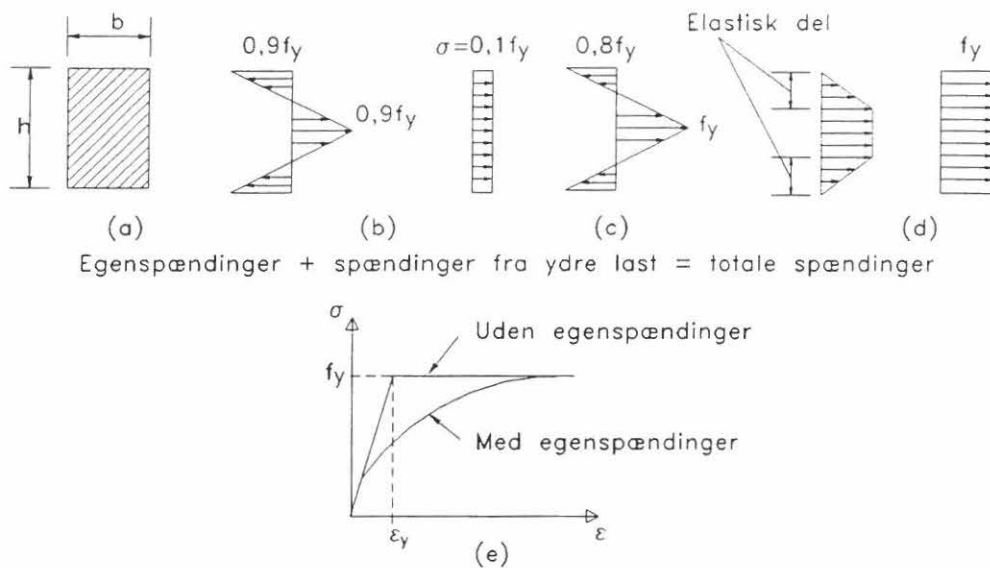
Betydningen heraf behandles i afsnit 2.2 og 2.3.

## 2.2 Egenspændinger

Under formgivningsprocessen opstår der egenspændinger. De kan være termiske eller mekaniske. I første tilfælde som følge af stålets størkning eller i forbindelse med svejsning, i det andet tilfælde som følge af mekanisk krumning eller udretning af et konstruktionselement. De således indførte spændinger repræsenterer kræfter, der er i ligevægt, og skønt de ikke påvirker tværsnittets brudbæreevne, medfører de såvel ikke-lineariteter i tøjnings-/spændingsrelationerne som større deformerbarhed.

Som eksempel betragtes et rektangulært tværsnit med egenspændinger, se *figur 5*. Tværsnittet belastes med en træknormalkraft. Skønt denne kraft giver anledning til normalspændinger jævnt fordelt over tværsnittet, vil de resulterende spændinger ikke være jævnt fordelte. Når den resulterende spænding (se *figur 5c*) i en fiber når op på flydespændingen  $f_y$ , vil flydningen i denne begynde. Hvis den ydre last forøges, vil den del af tværsnittet, der opfører sig elastisk, blive mindre (se *figur 5d*), og brudstadiet nås, når der er flydning i hele tværsnittet. Bemærk, at selvom arbejdslinien for tværsnittet bliver ikke-lineær, se *figur 5e*, hvor  $\sigma$  er den jævnt fordelte spænding fra træknormalkraften, bliver brudbæreevnen den samme, uanset om der er egenspændinger eller ej.





Figur 5. Egenspændingernes indflydelse på materialets arbejdslinie

### 2.3 Samlinger

Samlinger udføres som regel ved svejsning eller boltning.

Når der skal samles flere konstruktionselementer i samme knude, vil det ofte være nødvendigt at tilføje ekstra plader for at muliggøre samlingen. Dette medfører hyppigt sekundære virkninger i form af momenter, der skyldes lokale ekscentriciteter. Disse kan af og til reduceres ved passende fordeling af svejsesømmenes længde henholdsvis boltens placering.

Hertil kommer, at tilstedeværelsen af boltehuller har en meget væsentlig indflydelse på tværsnittets spændingsfordeling, som vil afvige markant fra den "ideelle" jævne fordeling i stangen uden for samlingen.

Først og fremmest er tværsnittet naturligvis reduceret. Desuden vil der rundt om hullet være en meget uensartet tøjningsfordeling, og dermed fås lokalt også en meget uensartet spændingsfordeling, se figur 6. For en lineær-elastisk plade med uendeligt stor bredde er fordelingen givet ved:

$$\sigma_o = \sigma \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{x} \right)^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{R}{x} \right)^4 \right] \quad (1)$$

for  $x \geq R$

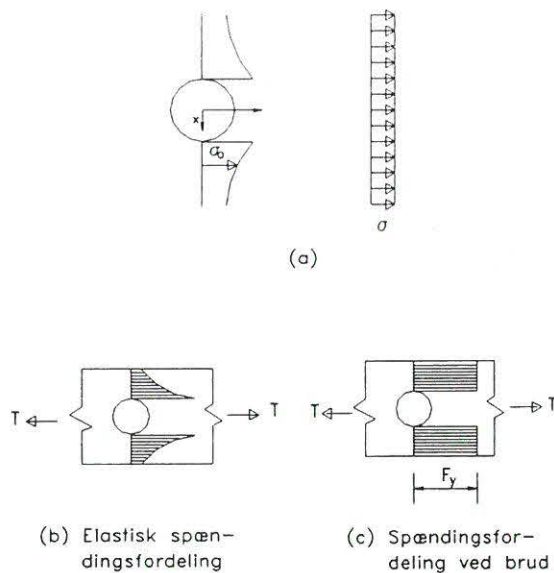
hvor R er hullets radius, og

x er afstanden fra midten af hullet til det betragtede punkt, samt

$\sigma$  er den jævnt fordelte spænding i den tilsvarende plade uden hul.

Når  $x = R$  fås

$$\sigma_o = \max \sigma_o = 3 \sigma$$



Figur 6. Spændingsfordeling i et tværsnit med et hul

For at kompensere for den lokale svækkelse benyttes nettotværsnittet, der normalt defineres som stangarearealet med fradrag af hullet/hullerne. Det skal dog bemærkes, at fastsættelsen af et nettotværsnit i visse tilfælde sker under hensyntagen til en række forhold, der har med materialeegenskaberne og samlingens virkemåde at gøre, f. eks.

- \* materialets duktilitet (sejhed),
- \* fremstillingsmåden for hullerne (lokale revner nedsætter duktiliteten)
- \* forholdet mellem huldiametre og hulafstande (evt. tilstedeværelse af toaksede spændingstilstande).

### 3. BEREGNING

For trækstænger går beregningerne som regel ud på at beregne trækmodstandsevnen. Da materialet udnyttes optimalt - som regel jævnt fordelt spænding i hele (netto)tværsnittet - bliver elementerne ofte så slanke, at det er nødvendigt at kontrollere deres stivhed.

#### 3.1 Stivhedskrav

Trækstænger er som regel (ud over træk) påvirket af et bøjningsmoment, der dels skyldes deres egen vægt, dels dynamiske påvirkninger fra vind eller anden ydre last (f. eks. passage af et køretøj), og dels skyldes i praksis næsten uundgåelige ekscentriciteter i samlingerne. God konstruktionspraksis tager ofte højde for dette, således at en nøjagtig beregning af den kombinerede virkning langt fra altid er nødvendig. Som omtalt i afsnit 2.1 er grænserne for slankhedsforholdet 300 hhv. 400 for kraftoptagende elementer og for rent afstivende elementer. Det kan dog forekomme, at der stilles strengere krav, se f. eks TABEL 1, som gengiver bestemmelserne i to amerikanske normer.

### 3.2 Tværsnittets modstandsevne

Ved beregningen af modstandsevnen skal følgende undersøgelser foretages:

- Kontrol af bæreevne for *statiske* laster
- Kontrol for vekslende laster

Denne lektion behandler kun tilfælde a. Angående beregning af trækstænger for udmattelseslast henvises til lektionerne i hovedafsnit 12.

	AISC	AASHTO
Hovedkonstruktion	240	200
Afstivende konstrukt. Elementer med vekslende last	300	240
	-	140

Slankhedsforholdet  $\lambda$  defineres som:

$$\lambda = L/i \quad \text{hvor} \quad i^2 = I/A$$

og

L = elementets længde  
i = tværsnittets mindste inertiradius  
I = tværsnittets mindste inertimoment  
A = tværsnitsarealet

TABEL 1. Max. værdier af slankhedsforholdet  $\lambda$  for trækstænger

For et tværsnit uden huller beregnes modstandsevnen af udtrykket

$$N_{pl,Rd} = Af_{yk} / \gamma_{M1} \quad (2)$$

hvor A = tværsnittets bruttoareal

$f_{yk}$  = den karakteristiske flydespænding

$\gamma_{M1}$  = partialkoefficienten for bruttoarealet ( $\gamma_{M1} \approx 1,1$ )

Når et konstruktionselement indgår i en boltet samling, svækkes tværsnittet 10 à 20 % af bruttoarealet. Dette medfører følgende to problemer:

- \* konsekvenserne af reduktionen
- \* forekomsten af spændingskoncentrationer ved hullet/hullerne

Spændingerne kan - se ligning (1) og figur 6 - give spændinger på op til tre gange den jævnt fordelte spænding i den intakte del af elementet uden for samlingen. Takket være stålets sejhed forudsættes det imidlertid, at spændingerne (efter lokal flydning) vil fordele sig jævnt over nettotværsnittet.

For huller, der fremstilles ved lokning uden specielle foranstaltninger (som f. eks. kunne være oprivning til større diameter), bør der regnes med en lidt større diameter

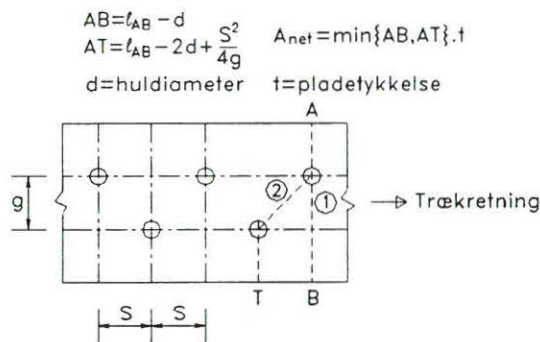
end den faktiske for at tage hensyn til den beskadigelse af materialet, der sker ved lokningen. For huller til forsænkede skruer er det diameteren af den forsækning, som giver plads for skruehovedet, der bør benyttes i beregningerne.

### 3.2.1 Nettoareal

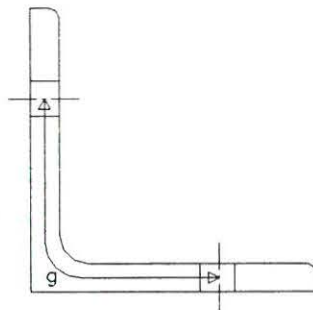
I henhold til Eurocode 3, afsnit 5.4.2.2, fastsættes dette således:

"Et elements eller et elementtværsnits nettoareal skal sættes lig med dets bruttoareal med fradrag for alle huller og andre åbninger. Hvis hullerne til samlingselementer ikke er forskudt, sættes det samlede fradragsareal for sådanne huller lig med den maksimale sum af hullernes tværsnitsarealer i et tværsnit vinkelret på elementets akse."

Når hullerne er forskudt, se *figur 7a*, er spændingsfordelingen mere kompliceret end beskrevet i afsnit 2. Nettoarealet beregnes da efter særlige formler, f. eks. for snit A-T, hvor snitlængden regnes forøget med værdien  $S^2/(4g)$  (Cochrane's regel). I det ovenfor citerede afsnit af Eurocode 3 står der følgende om dette:



(a) Forskudte huller



(b) Vinkelprofil med hul i begge flige

Figur 7. Bestemmelse af nettoareal

"Når hullerne er forskudt, skal det samlede fradragsareal være den største værdi af:

- fradraget for ikke forskudte huller;
- summen af tværsnitsarealet af alle huller i enhver diagonal eller zigzag-linie, der forløber progressivt over elementet eller en del af elementet minus  $S^2/(4g)$  for hver rækkeafstand i kæden af huller, se *figur 7a*, hvor

- S er den forskudte deling, afstanden mellem centrene for to på hinanden følgende huller i kæden, målt parallelt med elementets akse,
- g er afstanden mellem centrum af de samme to huller, målt vinkelret på elementets akse, og
- t er tykkelsen."

I et vinkelprofil eller et andet element med huller i mere end ét plan skal afstanden g måles langs profilets fligmidte, se *figur 7b*.

### 3.2.2 Modstandsevne af nettotværsnit

I princippet kontrolleres nettoarealets bæreevne ved formlen

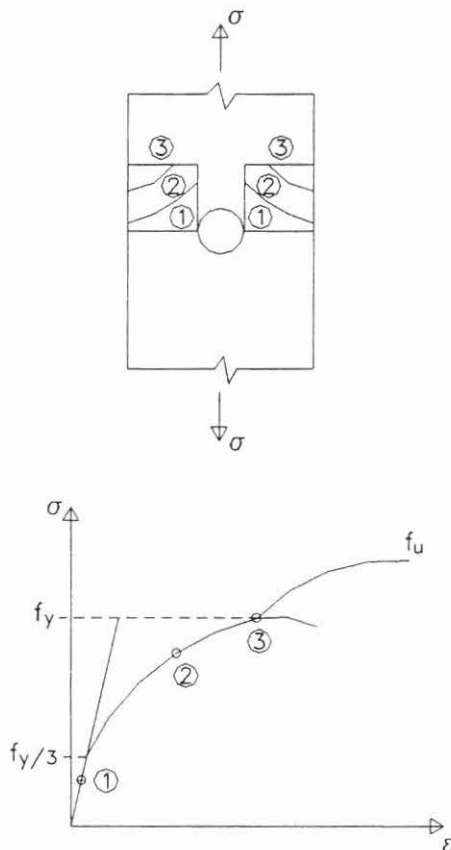
$$N_R = A_{\text{net}} f_{yk} / \gamma_{M2} \quad (3)$$

hvor

$A_{\text{net}}$  er nettoarealet, og

$\gamma_{M2}$  er partialkoefficienten for nettoarealet ( $\gamma_{M2} \approx 1,25$ )

Det viser sig imidlertid nødvendigt at tage hensyn til virkningen på trækstangen som helhed. Antag f. eks., at den del af stangen, der er påvirket af forholdene



Figur 8. Arbejdskurve for nettotværsnit



ved samlingen, udgør ca. 5 % af hele stanglængden, samt at tøjningen ved brud i samlingen er 10 gange flydetøjningen (se *figur 8*). Idet stangen uden for samlingen antages at flyde samtidig med, at brudlasten i samlingen opnås, fås følgende forlængelser:

$$\text{I samlingszonen:} \quad \Delta l_c = 0,05 \cdot 10 \cdot \epsilon_y \cdot L_{\text{TOT}} = 0,05 \cdot \epsilon_y \cdot L_{\text{TOT}}$$

$$\text{I stangen iøvrigt:} \quad \Delta l_m = 0,95 \cdot \epsilon_y \cdot L_{\text{TOT}} = 0,95 \cdot \epsilon_y \cdot L_{\text{TOT}}$$

$$\text{hvoraf fås} \quad \Delta l_c / \Delta l_m \approx 0,5 \quad (4)$$

Forlængelsen i samlingszonen er således meget mindre end i stangen iøvrigt.

Dette er baggrunden for, at Eurocode 3 tillader, at spændingen i samlingszonen overskrides, og at den må gå helt op til brudspændingen. Implicit forudsættes det således, at det er elementets totale deformation, der afgør, hvornår dets bæreevne er udtømt.

Ved beregning af bæreevnen ud fra nettoarealet skal der også tages hensyn til de i praksis uundgåelige ekscentriciteter. Dette gøres med en reduktionsfaktor på 0,9. Eurocode 3's formel til kontrol af nettoarealet ser herefter således ud:

$$N_{\text{netRd}} = 0,9 \cdot A_{\text{net}} \cdot f_{\text{uk}} / \gamma_{M2} \quad (5)$$

hvor  $\gamma_{M2}$  er partialkoefficienten på modstandsevnen. Værdien foreslås sat til 1,25.

### 3.2.3 Eftervisning

Eftervisningen af, at modstandsevnen er tilstrækkelig, sker ved formlen

$$N_{\text{Sd}} \leq N_{\text{Rd}} \quad (6)$$

hvor  $N_{\text{Sd}}$  er den regningsmæssige trækraft, og

$N_{\text{Rd}}$  er den mindste af de to værdier for den regningsmæssige modstandsevne, der fås af ligning (2) og (5).

Hvis der tilstræbes en sej brudform, kan det med henvisning til *figur 8* konstateres, at elementet skal flyde, før der bliver brud i samlingen, dvs.:

$$N_{\text{plRd}} \leq N_{\text{netRd}} \quad (7)$$

eller

$$0,9 \cdot \frac{A_{\text{net}}}{A} \geq \frac{\gamma_{M2}}{\gamma_{M1}} \cdot \frac{f_{yk}}{f_{uk}} \quad (8)$$

Til sidst skal omtales eftervisning for samlinger i kategori C. Det drejer sig om samlinger, som forspændes med højstyrkebolte, således at der ikke sker indbyrdes glidning mellem de dele, der samles, før bruddet indtræffer. I dette tilfælde er svigtkriteriet for nettotværsnittet, dvs. i samlingen, et flydekriterium - og altså ikke et

deformationskriterium som det, der førte til ligning 5. Modstandsevnen er her givet ved:

$$N_{\text{netRd}} = A_{\text{net}} f_{\text{yk}} / \gamma_{\text{M1}} \quad (9)$$

#### 4. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Muligheden for at udnytte træk i konstruktionerne har øget antallet af praktisk anvendelige konstruktionsformer betydeligt.
2. Trækstænger kan udformes med et stort antal forskellige tværsnit. Når disses fulde bæreevne skal udnyttes, er det nødvendigt at tage hensyn til egen-spændinger og samlinger.
3. Modstandsevnen for tværsnittet i en trækstang beregnes ud fra den antagelse, at hele tværsnittet flyder.
4. Brudformerne for en trækstang kan beskrives enten som flydning af brutto-tværsnittet eller som brud i samlingen. Den regningsmæssige modstandsevne fås ved at dividere de relevante modstandsevner med passende partial-koefficienter.
5. Hvis der ønskes en sej svigtform, f. eks. for cyklisk last, bør flydning i brutto-tværsnittet optræde, før der sker brud i nettotværsnittet.
6. Trækstængers slankhed bør begrænses for at undgå store deformationer under transport, montage, vedligeholdelse etc.

#### 5. LITTERATURHENVISNINGER

1. Dowling, P.J., Knowles, P., Owens, G.W., "Structural Steel Design", The Steel Construction Institute & Butterworths, 1988.
2. Worgan, W., "The Elements of Structure", Pitman 1964.
3. Mouthkhanov, K., "Constructions métalliques", MIR 1978.
4. Salmon, C.G. and Johnson, J.E., "Steel Structures, 2nd Edition", Harper & Row 1980.
5. Torroja, E.; "Razón y Ser de los Tipos Estructurales", IETCC 1960.
6. Zignoli, V.; "Costruzioni Metalliche", UTET 1978.
7. Chr. Petersen, "Stahlbauten", Vieweg Verlag, Braunschweig 1988.



## Lektion 7.8.1: Bjælker fastholdt mod sideudbøjning, I

### FORMÅL

At gøre rede for de metoder, der i henhold til Eurocode 3 benyttes ved dimensionering af kompakte bjælker fastholdt mod sideudbøjning, når disse er påvirket til bøjning og forskydning.

### FORUDSÆTNINGER

Teknisk elasticitetsteori for enakset bøjning.

Simpel vridningsteori.

Lektion 7.2: *Cross Section Classification*

### BESLÆGTEDE LEKTIONER

Lektion 7.8.2: Bjælker fastholdt mod sideudbøjning, II

Lektion 7.9.1: Bjælker uden fastholdelse mod sideudbøjning, I

Lektion 7.9.2: Bjælker uden fastholdelse mod sideudbøjning, II

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 7.8(i): Simpelt understøttet I-bjælke påvirket til bøjning og forskydning

Eksempel 7.8(ii): Udkraget, indspændt RHS-bjælke påvirket til skæv bøjning og forskydning

Eksempel 7.8(iii): Opsvejest krandrager med enkeltsymmetrisk tværsnit

### RESUMÉ

Denne lektion omhandler bjælker, hvis dimensionering udelukkende kan baseres på elementært kendskab til materialestyrken. Der gøres rede for en sådan bjælkes virkemåde, når den er påvirket til ren bøjning, og dette fører frem til definition af tværsnittets modstandsmoment som grundlag for styrkedimensioneringen. Desuden omtales forskydningsbæreevne, virkning af lokale, koncentrerede laster samt hensynet til begrænsning af nedbøjninger. Endelig berøres emner som skæv bøjning samt kombineret bøjning og vridning.

## 1. INDLEDNING

Det mest grundlæggende konstruktionselement er nok bjælken, der spænder mellem to understøtninger og overfører laster hovedsageligt ved enakset bøjning. Dimensioneringen af en stålbjælke kan ofte klares med blot en smule mere viden end kendskabet til elementær bøjningsteori. Hertil medvirker det store antal bjælketyper og -profiler, der fås som standard på markedet. Det vil dog af og til forekomme, at også andre påvirkninger end enakset bøjning må inddrages i dimensioneringen.

Hovedformålet med denne lektion er at fokusere på den klasse af bjælker, der stort set kan dimensioneres ud fra materialestyrken alene. Denne type bjælker benævnes "sidefastholdte, kompakte bjælker". For at falde i denne kategori må en bjælke

- ikke være *lokalt* instabil (se lektion 7.2 vedr. tværsknitklasse 4)
- og ikke være *globalt* instabil (se lektion 7.9.1 og 7.9.2 vedrørende bjælker uden sidefastholdelse).

En yderligere begrænsning ligger desuden i, at bjælken enten skal være statisk bestemt, eller - hvis den er statisk ubestemt - at beregningen af dens momentfordeling skal foretages ud fra forudsætningen om lineærelastisk opførsel.

Førstnævnte krav vil være opfyldt, hvis forholdet mellem bredde og tykkelse af de enkelte tværsknitsdele ikke overstiger en vis grænseværdi. Tværsknit, hvor forholdet flangebredde/flangetykkelse eller forholdet bjælkehøjde/kroptykkelse etc. holdes under de relevante grænseværdier, så deres fulde plastiske bæreevne kan udnyttes, tilhører enten tværsknitklasse 2 eller tværsknitklasse 3 i henhold til Eurocode 3. De fleste varmtvalsede profiler, herunder alle IPE-, HE-B- og HE-M-profiler, opfylder disse betingelser. Hvis man derimod benytter f. eks. opsvejste profiler, vil det ofte være nødvendigt at foretage en særlig undersøgelse, der som regel kan støtte sig til simple regler angivet i konstruktionsnormerne. I denne lektion forudsættes det, at bjælkens tværsknit i værste fald tilhører klasse 2 eller 3, samt - i tilfælde af at tværsknittet er på grænsen til at tilhøre klasse 1 - at snitkræfterne beregnes på basis af elasticitetsteorien.

Den globale instabilitet - kipning af bjælken - vil *ikke* være aktuel, hvis blot én af nedenstående betingelser er opfyldt:

- der er bøjning om tværsknittets svage akse;
- der er fuld sideafstivning af den trykkede flange, f. eks. ved fastgørelse af overflangen af en simpelt understøttet bjælke til en betonplade;
- der er etableret sideafstivninger med lille indbyrdes afstand, så slankheden i bjælkens svage retning ( $L/i_z$ ) bliver passende lille;
- trykflangen er i tilstrækkelig grad fastholdt mod vridning, f. eks. ved anvendelse af en profileret kropplade;
- bjælkens tværsknit har stor vridnings- og sidestivhed - f. eks. vil der sjældent være problemer med kipning af rektangulære hulprofiler påvirket til bøjning om tværsknittets stærke akse.

Hvis et tag eller et etagedæk bæres af en kontinuert bjælke, må der træffes foranstaltninger til at sikre den fornødne stabilitet mod kipning på de strækninger, hvor

der er tryk i underflangen. Dette forekommer f. eks. ved mellemunderstøtningerne for nedadrettet last og ved midten af bjælkefagene for resulterende opadrettet last.

Inden for rammerne af denne lektion vil alle bjælker, der falder ind under ovennævnte kategorier, blive betragtet som fastholdt mod sideudbøjning.

## 2. BJÆLKETYPER

Valget af bjælketype til en given konstruktion afhænger af adskillige faktorer, hvoraf nogle kan være indbyrdes modstridende. F. eks. skal bjælken naturligvis

	Bjælketype	Typisk spændvidde (m)	Typisk anvendelsesområde Kommentarer iøvrigt
0	Vinkelprofiler	3 - 6	Til let belastede konstruktioner, f. eks. tagåse og væggrigler
1	Koldtbukkede el. -valsede profiler	4 - 8	Som ovenfor
2	Valsede profiler IPE, UNP, HE, m. fl.	1 - 30	Mest anvendte profiltyper. De valgte proportioner tager i et vist omfang hensyn til stabilitetsforhold.
3	Lette gitterbjælker	4 - 40	Gitterbjælker med vinkelprofiler eller rør som flanger og rundprofiler som diagonaler; konkurrerer med de valsede profiler.
4	Kastellerede bjælker	6 - 60	Store spænd og/eller let last. Udføres af I- eller H-profil ved udskæring og svejsning, så der fremkommer en højere bjælke med huller.
5	Sammensatte bjælker, f. eks. INP + UNP	5 - 15	Større bæreevne end med et enkelt, valset profil. Udnyttes ofte til at forbedre sidestivheden.
6	Opsvejste, åbne pladedragere	10 - 100	Fremstilles som regel ved automat-svejsning. Ofte behov for krop-afstivninger.
7	Opsvejste kassedragere	15 - 200	Opbygges af afstivede plader. God vridnings- og tværstivhed.

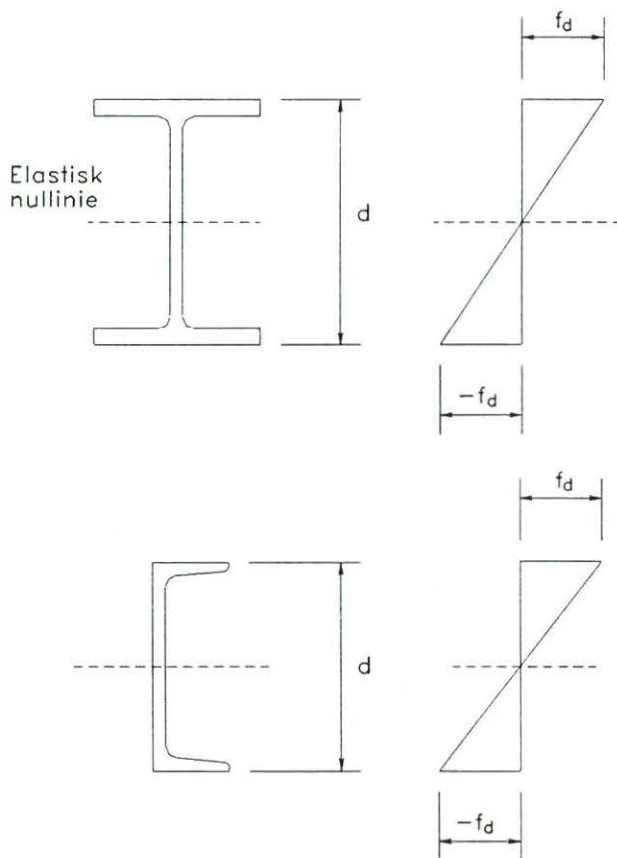
TABEL 1. Bjælketypenes karakteristika og anvendelse.

være stærk nok, men den må heller ikke få for store nedbøjninger. Bjælken skal desuden udformes, så det bliver let at samle den med de omgivende konstruktions-

dele, hvilket ofte foregår på byggepladsen som en såkaldt montagesamling. Denne bør være simpel og hurtig at udføre, så kravet om specialviden hos de udførende og behovet for særligt udstyr ved montagen kan holdes på et minimum. Desuden kan der være særlige forhold, som betinger valg af specialprofiler, f. eks. bjælker med åbninger i kroppen til brug for krydsende installationer, eller man kan vælge profiler med varierende højde af arkitektoniske grunde. I *TABEL 1* præsenteres de forskellige hovedtyper af stålbjælker med angivelse af deres typiske spændvidder. Desuden indeholder tabellen diverse kommentarer.

### 3. DIMENSIONERING AF BJÆLKER FOR REN BØJNING

For et dobbeltsymmetrisk tværsnit med bøjning om en af de to symmetriakser eller for et enkeltsymmetrisk tværsnit med bøjning om symmetriaksen giver den elementære bøjningsteori anvendt på et lineærelastisk materiale den spændingsfordeling, der er vist på *figur 1*. Den maksimale spænding  $\sigma_{\max}$  fås af



Figur 1. Fordeling af normalspændinger efter elasticitetsteorien for bøjning om en symmetriakse

$$\sigma_{\max} = M d / (2 I) \quad (1)$$

hvor  $M$  er momentet i det betragtede tværsnit  
 $d$  er tværsnittets højde

$I$  er inertimomentet om nullinien (tøjning nul)

Idet denne spænding maksimalt må antage grænseværdien  $f_d$ , der sættes i forhold til materialets flydegrænse, fås et dimensioneringsudtryk af formen

$$W \geq M / f_d \quad (2)$$

hvor  $W = (2 I) / d$

Når  $M$  simpelthen er det snitmoment, der fremkaldes af de aktuelle laster (incl. bjælkens egenvægt), taler man om, at der dimensioneres efter "elastiske spændinger" eller "tilladelige spændinger", hvilket er den metode, der traditionelt har været benyttet i mange landes normer.

I mere moderne normer baseret på brudgrænsetilstande vælges  $f_d$  som materialestyrken  $f_y$ , eventuelt divideret med en passende faktor  $\gamma_M$ , der kaldes partialkoefficienten på materialet, og  $M$  vælges som det moment, der fås, når lasterne multipliceres med andre, passende valgte faktorer benævnt lastpartialkoefficienter. Disse laster benævnes regningsmæssige laster. Herved skabes der en sikkerhed mod brud. Under disse forudsætninger repræsenterer ligning (2) den situation, hvor der netop sker flydning i de yderste "fibre" - og kun dér. Værdier af  $W$  for de sædvanligt anvendte standardprofiler findes i de fleste profiltabeller.

Udvælgelse af et egnet bjælketværsnit kan således beskrives i følgende få punkter:





1. Bestemmelse af det maksimale moment i bjælken.
2. Fastsættelse af den relevante værdi af  $f_d$  i henhold til den gældende norm.
3. Udvælgelse af et tværsnit med et modstandsmoment, der opfylder ligning (2), idet der samtidig inddrages forhold som ønske om vægtbesparelse, eventuelle krav til bjælkehøjde, behov for ensartet profilvalg i en større konstruktion m.m.

De mest effektive tværsnit til optagelse af bøjning er naturligvis dem, der har mest muligt materiale koncentreret i størst mulig afstand fra nullinien. Nogle af de mest almindelige bjælketværsnit er sammenlignet på *figur 2*. Det ses, at I-tværsnit er meget effektive (størst forhold mellem bæreevne og vægt). Da de er åbne, kan de let samles med andre konstruktionsdele, og de foretrækkes derfor hyppigt for andre profiler. På *figur 3* er der vist nogle typiske eksempler på bjælke-søjle samlinger.

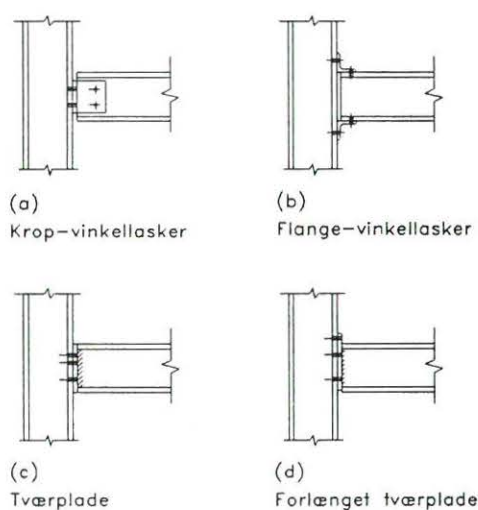
Hvis man udnytter den plastiske del af materialets arbejdskurve, vil tværsnittets bæreevne overstige den, der fås af ligning (2). Ved fuld plasticitet bliver spændingsfordelingen som vist på *figur 4*, hvor halvdelen af tværsnittet har trykflydning, medens den anden halvdel har trækflydning. Denne spændingssituation er ækvivalent med et moment  $M_{pl}$ , momentbæreevnen ved fuld plasticitet. Det beregnes ved at tage moment om nullinien, hvilket definerer størrelsen  $W_{pl}$ , det plastiske modstandsmoment.

$$M_{pl} = f_y W_{pl} \quad (3)$$

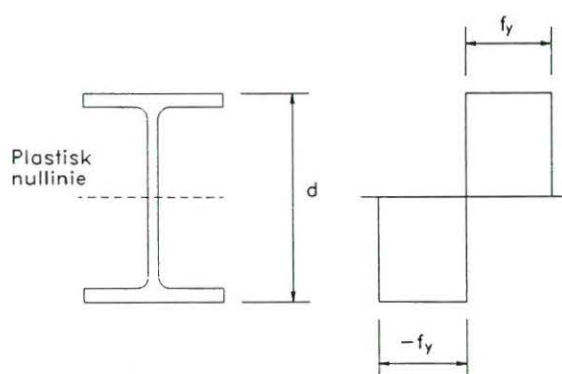


Tværsnits- type	Rectangel	HE typisk	IPE typisk	RHS typisk
Tværsnits- konstanter				
A: Areal	1	1	1	1
$W_y$ : Elastisk modstands- moment	1	3,5	6,2	2,3
$W_y$ : Plastisk modstands- moment	1,5	3,9	7,2	2,9

Figur 2. Relative tværsnitskonstanter for bøjning af forskellige tværsnitstyper



Figur 3. Eksempler på bjælke-søjle samlinger



Figur 4. Plastisk spændingsfordeling for et dobbeltsymmetrisk tværsnit

hvor  $f_y$  er den regningsmæssige flydespænding (der antages at være den samme for tryk og træk).

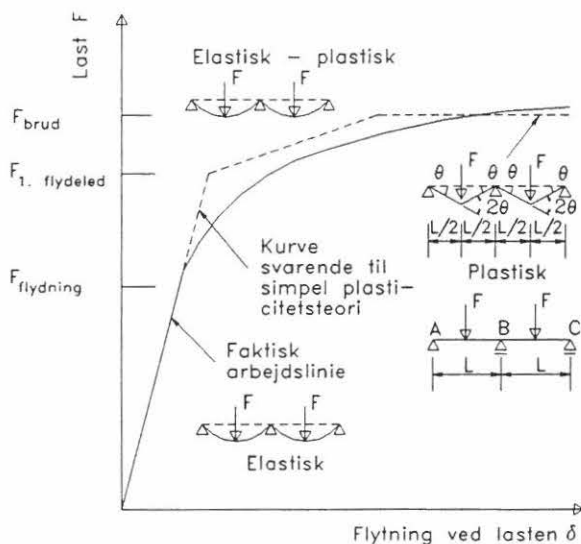
Denne beregningsmåde ligger til grund for dimensionering i henhold til Eurocode 3. Dimensioneringsformlen ser da således ud:

$$W_{pl} \geq M / f_{yd} \quad (4)$$

hvor  $M$  er momentet i det betragtede bjælkets tværsnit  
 $f_{yd}$  er den regningsmæssige flydespænding (flydespændingen divideret med en passende partialkoefficient).

Når  $M$  beregnes ud fra de regningsmæssige laster, repræsenterer ligning (4) dimensioneringskravet i Eurocode 3 for bjælker, hvis tværsnit mindst opfylder kravene til tværsnitklasse 2. I normsammenhæng vælges der som regel en lidt formindsket værdi af flydespændingen for at tage højde for mulige afvigelser fra den forventede værdi.

For statisk ubestemte konstruktioner, f. eks. kontinuerte bjælker, vil det normalt ikke give anledning til sammenbrud af konstruktionen, at  $M_{pl}$  nås i det punkt, hvor momentet er størst. Forudsat at ikke andre forhold som f. eks. lokal foldning udløser faldende bæreevne i dette punkt af bjælken, vil rotationsstivheden ved forøgelse af belastningen forsvinde, dvs. tværsnittet vil opføre sig som et charniere, og momentfordelingen i konstruktionen vil ændre sig i forhold til den oprindelige, elastiske fordeling, efterhånden som der successivt dannes nye plastiske charnierer (flydeled). Denne omfordeling sætter konstruktionen i stand til at modstå laster, som er større end den last, der fremkalder det første flydeled. Ved forøgelse af lasten ud over denne værdi vil der successivt dannes nye flydeled, indtil konstruktionen er omdannet til en mekanisme. Dette er illustreret på figur 5.



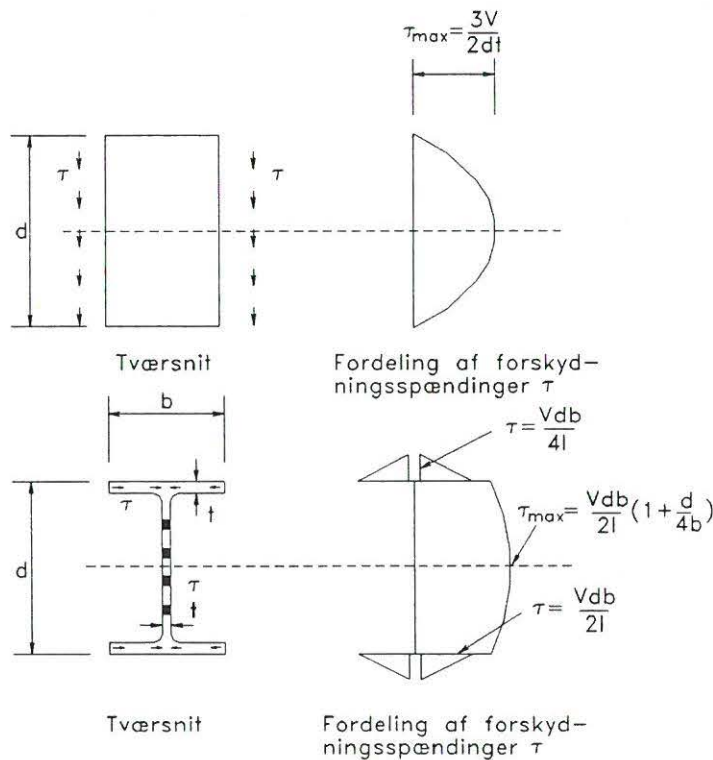
Figur 5. Last/deformations-kurve for en statisk ubestemt stålbjælke

Udnyttelse af denne evne til omfordeling af momenterne benævnes "plastisk dimensionering". Den kan kun udnyttes for statisk ubestemte konstruktioner, f. eks. kontinuerte bjælker, og kun med visse begrænsninger angående tværsnittets geometri, bjælkens slankhed etc. Dette emne behandles mere detaljeret i lektion 7.8.2. (bjælker) og i lektion 7.12 (rammer).

#### 4. DIMENSIONERING AF BJÆLKER FOR FORSKYDNING

Selv om det som regel er bøjningen, der er afgørende for dimensioneringen af stålbjælker, vil der være tilfælde, hvor forskydningskræfterne er så store, at hensynet til forskydning bliver udslagsgivende. Dette gælder f. eks. korte bjælker, der skal bære store, koncentrerede laster.

Figur 6 viser den elastiske fordeling af forskydningspændinger i henholdsvis et rektangulært tværsnit og et I-tværsnit for en forskydningskraft  $V$ . For begge tværsnit varierer forskydningspændingen parabelformet over bjælkehøjden med maksimumsværdi ved tyngdepunktsaksen. For I-tværsnittet er forskellen mellem største og mindste forskydningspænding i kroppen - der bærer stort set hele forskydningskraften - imidlertid så lille, at dimensioneringen kan baseres på den gennemsnitlige forskydningspænding, d.v.s. hele forskydningskraften divideret med kroparealet. Da flydespændingen for forskydning kan sættes til  $1/\sqrt{3}$  gange flydespændingen for træk, vil en passende værdi af den "tilladelige" spænding for forskydning være  $1/\sqrt{3}$  gange den "tilladelige" trækspænding.



Figur 6. Forskydningspændinger i bjælke med forskydningskraft  $V$

Når der dimensioneres efter plasticitetsteorien, benyttes den regningsmæssige, plastiske forskydningsbæreevne. Denne sættes i Eurocode 3 til  $f_{y,d}/\sqrt{3}$ , og der benyttes ved dimensioneringen et forskydningsareal  $A_v$ , som f. eks. defineres således:

valsede I-profiler

med lasten i kroppens plan:  $A_v = A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f$

plader og massive profiler:  $A_v = A$

cirkulære rørprofiler:  $A_v = 2A/\pi$

Her er  $A$  tværsnittets totalareal og  $r$  er rundingsradius i overgangen mellem krop og flanger for I-profilet. De øvrige benævnelser fremgår af symbollisten.

I tværsnit, hvor der er en høj værdi af momentet og af forskydningskraften, hvilket f. eks. forekommer ved mellemunderstøtninger for en kontinuert bjælke, kan det være nødvendigt at tage hensyn til denne interaktion, som indebærer, at der ikke samtidigt kan udnyttes fuld momentbæreevne og fuld forskydningsbæreevne. Imidlertid viser det sig, at det moment, der kan optages samtidigt med, at den fulde bæreevne for forskydning udnyttes, er ganske stort - og vice versa -, så denne begrænsning vil kun sjældent have nogen praktisk betydning. F. eks. kræver Eurocode 3 kun reduktion af momentbæreevnen, når den samtidige forskydningsspænding overstiger 50% af forskydningsbæreevnen.

## 5. DEFORMATIONER

Selv om store deformationer normalt ikke medfører sammenbrud af konstruktionen, kan de alligevel medføre betydelige gener for dens anvendelse. F. eks. kan nedbøjninger forårsage

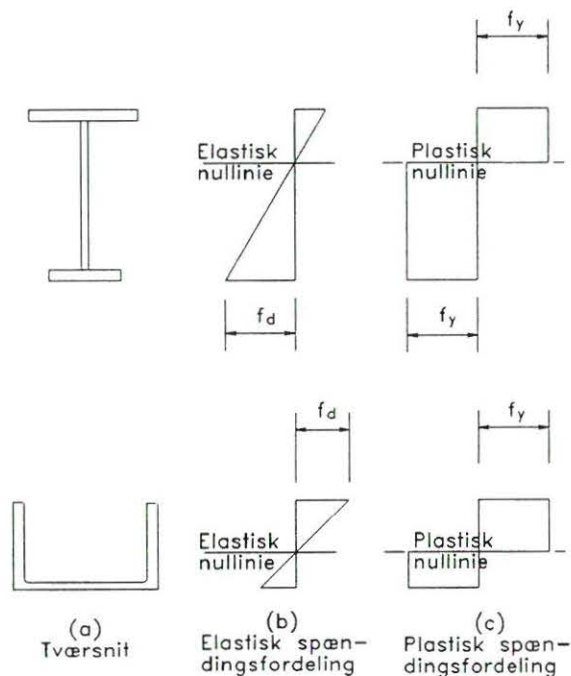
- revner i pudsede lofter
- ujævnheder i kranspor
- vanskeligheder ved åbning af (større) døre.

Da det er de forventede, faktiske deformationer, der har interesse i denne sammenhæng, udføres beregningen af dem sædvanligvis i anvendelsesgrænsetilstanden.

Eurocode 3 angiver en række anbefalede grænseværdier for nedbøjninger for henholdsvis totallast og for bevægelig last alene. For en bjælke, som indgår i et etagedæk, foreslås der f. eks. en øvre grænse på 1/300 af spændvidden for den del af nedbøjningen, der skyldes den bevægelige last alene. Det skal understreges, at sådanne grænseværdier blot er vejledende, og at det i mange situationer kan være hensigtsmæssigt at fastsætte strengere eller mindre strenge krav. Hvor det overhovedet er muligt, bør der søges særlig sagkyndig assistance; f. eks. skulle en kranfabrikant kunne give detaljerede retningslinier vedrørende de deformationer, der kan tillades under hensyn til den pågældende krans funktion.

## 6. BØJNING AF USYMMETRISKE BJÆLKEPROFILER

For enkeltsymmetriske tværsnit påvirket til bøjning om den hovedakse, der er vinkelret på symmetriaksen, vil den elastiske fordeling af bøjningsspændingerne være som vist på *figur 7*, hvor der er bøjning om en vandret akse. På grund af, at der ikke er symmetri om bøjningsaksen, vil normalspændingerne ved bjælkens overside og underside ikke være numerisk lige store. For I-profilet betyder dette, at spændingen i den mindste flange (her underflangen) vil være større end spændingen i den største flange (overflangen). Når der "regnes elastisk", d.v.s. når bæreevnen regnes udtømt ved første flydning, er det nødvendigt at bruge det mindste af tværsnittets to modstandsmomenter.



Figur 7. Bøjning af enkeltsymmetriske tværsnit i symmetriplanen

Når der regnes med fuld plasticitet (og ren bøjning), må nullinien nødvendigvis være placeret, så den deler tværsnittet i to lige store arealer som vist på *figur 7(c)*. Eftersom det plastiske modstandsmoment er defineret som forholdet  $M_{pl}/f_y$ , se ligning (3), er der altså kun én værdi af modstandsmomentet. Dette indebærer, at man ved "plastisk beregning" skal benytte samme krav som for dobbelt-symmetriske tværsnit, nemlig uligheden (4).

## 7. TOAKSET BØJNING (SKÆV BØJNING)

Dobbelt- eller enkeltsymmetriske tværsnit påvirket af momenterne  $M_1$  og  $M_2$  om de to hovedakser kan under visse omstændigheder behandles ved superposition af resultaterne for bøjning om de to akser hver for sig. Svarende til elastisk beregning fås herved følgende interaktionsformel:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq f_d \quad (6)$$

hvor  $W_y$  og  $W_z$  er tværsnittets elastiske modstandsmomenter om henholdsvis y-aksen og z-aksen, og  $f_d$  er grænseværdien for bøjningsspændingen.

Ovenstående er baseret på den forudsætning, at bæreevnen er udtømt, når der sker flydning i blot ét punkt af tværsnittet. NB: For visse tværsnitsformer, f. eks. vinkelprofiler, hvis hovedakser ikke er parallelle med fligene, gælder formel (6) ikke uden videre.

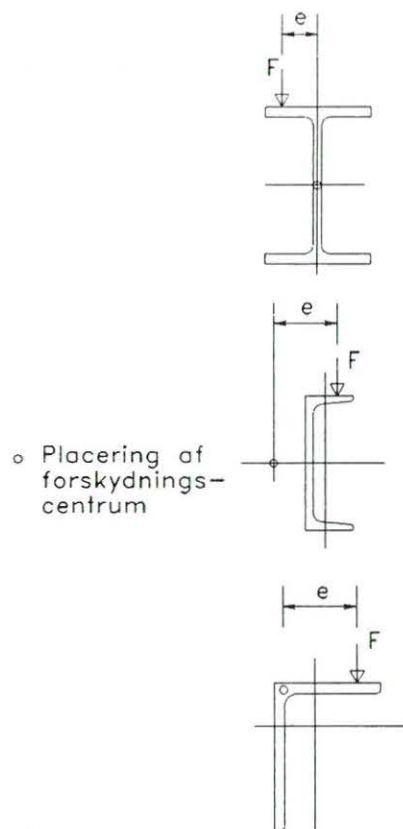
Hvis man ønsker at udnytte tværsnittets plastiske bæreevne, bliver beregningerne, herunder bestemmelsen af nulliniens placering, mere komplicerede. Foretagne undersøgelser har vist, at interaktionsudtrykkene afhænger af tværsnittets form, men at de med god tilnærmelse kan skrives på følgende form:

$$\left[ \frac{M_y}{M_{ply}} \right]^\alpha + \left[ \frac{M_z}{M_{plz}} \right]^\beta \leq 1 \quad (7)$$

hvor  $M_{ply}$  og  $M_{plz}$  er den plastiske bæreevne for moment om henholdsvis y-aksen og z-aksen. Eksponenterne  $\alpha$  og  $\beta$  for forskellige tværsnitstyper er angivet i Eurocode 3. På den sikre side kan sættes  $\alpha = \beta = 1$ .

## 8. BØJNING OG VRIDNING

Laster, hvis virkelinie ikke går gennem tværsnittets forskydningscentrum (se figur 8), vil ud over den ovenfor beskrevne bøjning også fremkalde vridning om bjælkeaksen. (Bemærk, at forskydningscentret er sammenfaldende med tyngdepunktet for dobbeltsymmetriske tværsnit, samt at det ligger på symmetriaksen for enkeltsymmetriske tværsnit.) Herved opstår der vridnings-forskydningsspændinger i tværsnittet, samt - hvis tværsnittet er åbent - eventuelt ekstra normalspændinger af betydelig størrelse på grund af den virkning, der benævnes hvælving. En dybtgående behandling af dette komplekse emne forudsætter kendskab til teorien for fri og bunden vridning, hvilket ligger uden for rammerne af denne lektion. I mange tilfælde kan problemet med vridning begrænses ved omhyggelig udformning af konstruktionsdetaljerne f. eks. ved at påføre lasten på en måde, så vridning helt eller delvis undgås, eller ved at vælge profiler, der har ubetydelig hvælving, f. eks. hulprofiler.



Figur 8. Eksempler på bjælker med kombineret bøjning og vridning

## 9. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Det væsentligste dimensioneringskrav for bjælker er etableringen af den fornødne bøjningsstyrke. De typer af konstruktionselementer, der normalt anvendes, er beskrevet, og det er desuden antydnet, hvilke krav der skal være opfyldt, for at dimensioneringen af en bjælke kan baseres på relativt enkle principper.
2. Modstandsmomentet er, uanset hvilken beregningsmetode der anvendes, den væsentligste tværsnitsparameter ved udvælgelsen af et bjælkets tværsnit. Bemærk forskellen mellem det elastiske og det plastiske modstandsmoment.
3. Til dimensionering af en simpel bjælke fastholdt mod sideudbøjning hører også kontrol af forskydningsstyrken og deformationerne.
4. Lektionen indeholder også en omtale af mere komplekse tilfælde, hvor der er behov for at tage hensyn til toakset bøjning (skæv bøjning) og vridning m.m.

## LITTERATURHENVISNINGER

1. Dowling, P.J., Owens, G. W and Knowles, P., "Structural Steel Design", Butterworths, 1988.
2. Petersen, C.; "Stahlbauten", Vieweg Verlag Braunschweig, 1988.
3. Galambos, T. V., "Structural Members and Frames", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
4. Narayanan, R., "Beams and Beam Columns - Stability and Strength", Applied Science, London, 1983.
5. Salmon, C. G. and Johnson, J. E., "Steel Structures - Design and Behaviour", Harper and Row, New York, 1980.





## Lektion 7.8.2: Bjælker fastholdt mod sideudbøjning, II

### FORMÅL

At gøre rede for fremgangsmåderne ved dimensionering af sidefastholdte bjælker, herunder behandling af momentomlejring for bjælker i Klasse 1.

### FORUDSÆTNINGER

Teknisk elasticitetsteori for enakset og toakset bøjning kombineret med forskydningskræfter.

Grundlæggende kendskab til ståls mekaniske egenskaber.

### BESLÆGTEDE LEKTIONER

Lektion 7.2: Klassifikation af tværsnit

Lektion 7.10.1: Bjælkesøjler I

Lektion 7.10.2: Bjælkesøjler II

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 7.8(i): Simpelt understøttet I-bjælke påvirket til bøjning og forskydning

Eksempel 7.8(ii): Udkraget, indspændt RHS-bjælke påvirket til skæv bøjning og forskydning

Eksempel 7.8(iii): Opsvejst krandrager med enkeltsymmetrisk tværsnit

### RESUMÉ

Der gøres rede for omlejringen af bøjningsspændingerne i et bjælketværsnit, efter at første flydning er indtrådt. For statisk bestemte bjælker gennemgås den plastiske brudmodel, hvorefter bjælkens bæreevne er udtømt, når der er dannet en fuldt plastisk spændingsfordeling i blot ét snit; et sådant snit benævnes et flydeled. I denne forbindelse defineres det plastiske modstands-moment og formfaktoren.

For statisk ubestemte bjælker vises det, at der kan dannes flere flydeled, før konstruktionen bliver til en mekanisme.

Betydningen af en samtidig forskydningskraft vurderes, og det vises, hvordan man kan nå frem til simple dimensioneringsregler for interaktion mellem bøjning og forskydning.

## 1. INDLEDNING

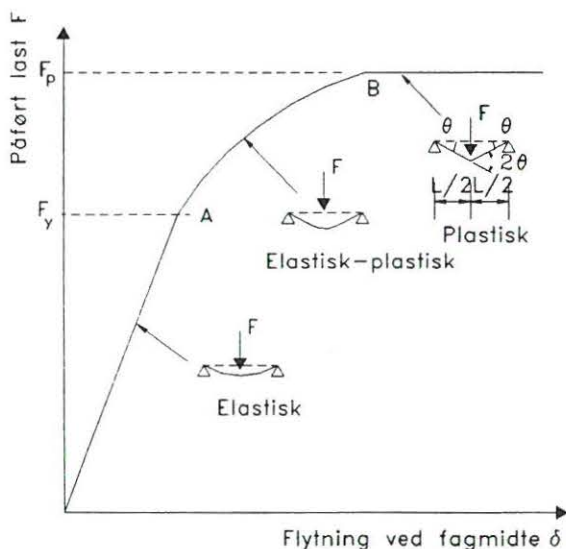
Når en sidefastholdt bjælke med "kompakte" proportioner (se lektion 7.8.1) belastes til enakset bøjning om den vandrette hovedakse, vil dens respons, d.v.s. momentfordeling, spændingsfordeling og deformationer udvikle sig i forskellige etaper, efterhånden som lasten forøges. I begyndelsen vil bjælken opføre sig elastisk med nedbøjninger, der er proportionale med lastens størrelse. Når lasten forøges, vil de mest påvirkede dele af bjælken/tværsnittet få tøjninger, der overstiger flydetøjningen, hvorved der sker en lokal formindskelse af bjælkens stivhed. For bjælken som helhed begynder nedbøjningerne dermed at øges kraftigt. Ved yderligt stigende last vil denne proces fortsætte, indtil der er opnået en fuldt plastisk spændingsfordeling i et af bjælkens tværsnit. For en simpelt understøttet bjælke vil dette lasttrin svare til den maksimale last, der kan bæres af bjælken uden tøjningshærdning. Hvis lasten forøges ud over dette trin, vil der optræde meget store nedbøjninger. For en statisk ubestemt konstruktion, f. eks. en kontinuert bjælke, vil det derimod være muligt at udnytte bjælken ud over dette trin, idet der vil optræde omlejring af momenterne, efterhånden som der dannes flydeled.

Formålet med denne lektion er at studere den indflydelse, som plasticiteten har på dimensionering af bjælker, samt at vise, hvordan den grundlæggende fremgangsmåde fra lektion 7.8.1 kan tilpasses den plastiske virkemåde.

## 2. BØJNINGSPÅVIRKEDE STALBJÆLKER

### 2.1 Statisk bestemte bjælker

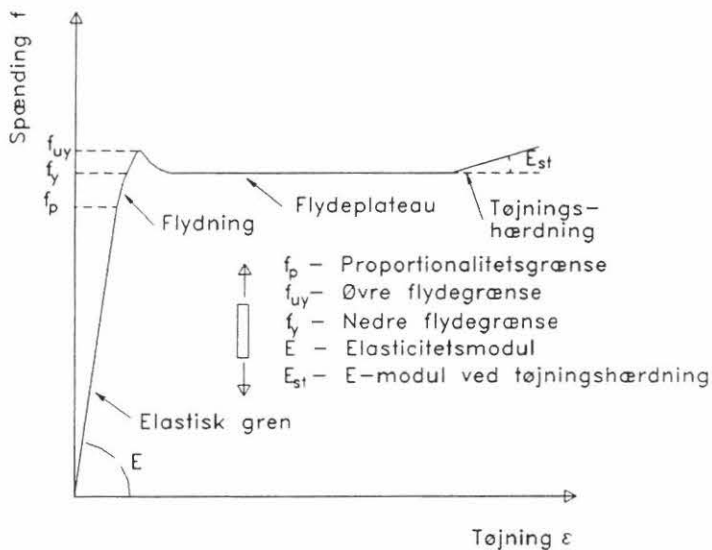
Figur 1 viser sammenhængen mellem påført last og nedbøjning ved fagmidte for en stålbjælke i Klasse 1 eller 2. Grafen kan passende deles i tre afsnit, der afspejler følgende faser:



Figur 1. Last/deformations-kurve for simpelt understøttet bjælke

- Afsnit OA: Den elastiske fase: Lineær sammenhæng mellem last og nedbøjning
- Afsnit AB: Den elastisk-plastiske fase: Tilvæksten i nedbøjning vokser relativt hurtigere end lasttilvæksten; denne tendens øges med stigende last.
- Afsnit BC: Den plastiske fase: Stor tilvækst i nedbøjninger for næsten konstant last.

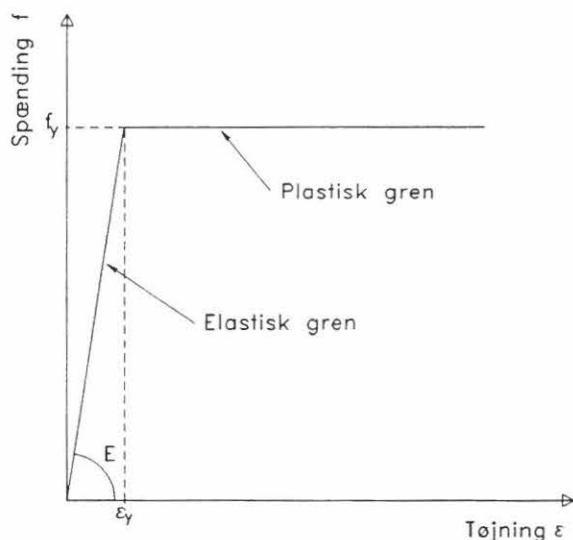
Eftersom de to sidste faser indebærer udviklingen af plastiske deformationer i områder med høj påvirkning, er det nødvendigt først at se nærmere på materialeegenskaberne.



Figur 2. Typisk arbejdslinie optegnet for et trækforsøg

Figur 2 viser en arbejdslinie af den type, der kan fås ved forsøg med en trækprøve.

Til praktiske formål foretrækkes dog en væsentligt simplere, idealiseret kurve bestående af to rette linier, se figur 3. Denne kurve begynder med en elastisk gren og slutter med en perfekt plastisk gren. Herved negligeres forskellige fænomener som

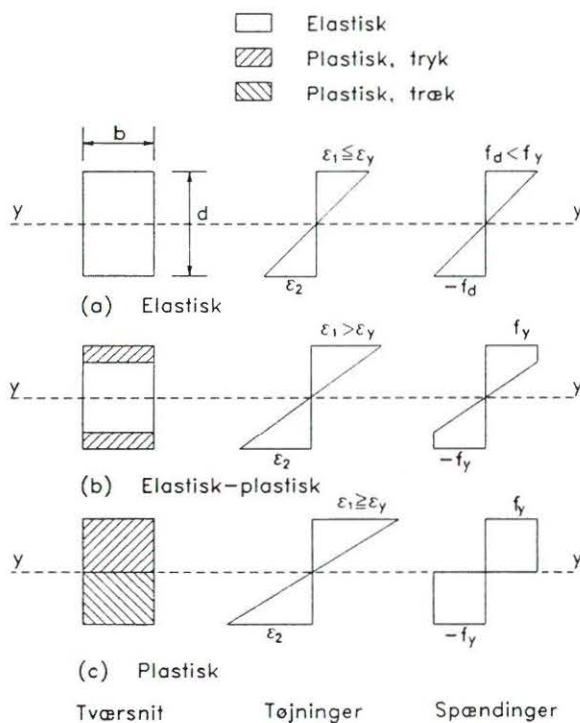


Figur 3. Idealiseret lineærelastisk-plastisk arbejdslinie for stål

f.eks. eksistensen af en øvre flydegrænse samt tøjningshærdningen ved store tøjninger, men til gengæld opnås en væsentligt enklere beregning, hvis resultater ikke adskiller sig nævneværdigt fra dem, der ville fås med udgangspunkt i den "korrekte" arbejdslinie.

Med udgangspunkt i *figur 3* kan sammenhængen mellem momentet ( $M$ ) og krumningen ( $\phi$ ) - også benævnt bøjningsarbejdslinien - findes ved at tage hensyn til spændings- og tøjningsfordelingerne i de forskellige faser, se *figur 4*. Hvis den største tøjning i den yderste fiber ( $\epsilon_1$ ) er mindre end flydetøjningen ( $\epsilon_y$ ), vil den hertil svarende spændingsfordeling være lineær som vist på *figur 4a*. Svarende til bjælkehøjden  $d$  bliver bjælkens krumning

$$\phi = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/d \quad (1)$$



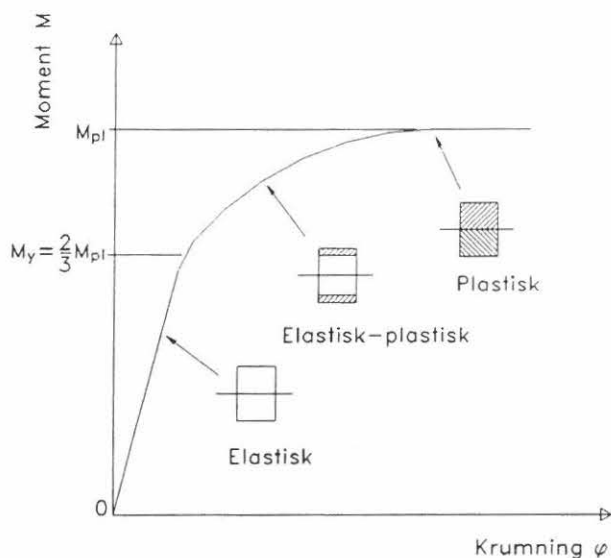
Figur 4 Omlejring af spændinger i et tværsnit ved overgang fra elastisk til plastisk tilstand

Det hertil svarende moment kan bestemmes ved at tage moment om nullinien ( $yy$ ) af de indre kræfter, der svarer til spændingsfordelingen. For et rektangulært tværsnit med bredden  $b$  fås:

$$M = \sigma (bd^2/6) \quad (2)$$

hvor størrelsen  $bd^2/6$  benævnes det elastiske modstandsmoment ( $W$ ).

Når  $\epsilon_1$  overstiger  $\epsilon_y$ , vil spændingsfordelingen ændre karakter, eftersom  $\sigma$  ikke kan blive større end  $f_y$ , se *figur 4b*. Heraf følger, at tilvæksten i  $\phi$  nu vil blive større, d.v.s. sammenhængen  $M$ - $\phi$  bliver ikke-lineær, se *figur 5*. Ligning (1) kan stadig bruges til



Figur 5. Bøjningsarbejdslinie ( $M-\phi$ ) for et rektangulært tværsnit

at finde  $\phi$ , og  $M$  kan beregnes på samme måde som før, men nu på basis af *figur 4b*. Til sidst nærmer fordelingen sig den, der er vist på *figur 4c*, hvor momentet for det rektangulære tværsnit kan findes af:

$$M = f_y (bd^2/4) \quad (3)$$

Bemærk, at tilnærmelsen af den korrekte spændingsfordeling (*figur 4b*) med den, der er vist på *figur 4c*, trods betydeligt forenklede beregninger medfører en næsten forsvindende fejl i resultatet.


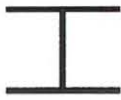




Det således beregnede moment er tværsnittets fulde plastiske (flyde)moment  $M_{pl}$ ; det repræsenterer en øvre grænse for den modstandsevne, der kan opnås svarende til arbejdslinien på *figur 3*. Størrelsen  $W_{pl} = bd^2/4$  benævnes det plastiske modstandsmoment, og forholdet  $W_{pl}/W$ , som er et mål for, i hvor høj grad tværsnittet er i stand til at optage et større moment efter første flydning, kaldes formfaktoren ( $s$ ). For et rektangulært tværsnit beregnes den til:

$$s = (bd^2/4)/(bd^2/6) = 1.50 \quad (4)$$

I *Tabel 1* er der angivet værdier af  $W$ ,  $W_{pl}$  og  $s$  for en del andre tværsnit.

Når momentet er nået op på  $M_{pl}$ , er hældningen af tværsnittets bøjningsarbejdslinie nul. I denne situation siges der at være dannet et flydeled i det pågældende tværsnit, idet bøjningsstivheden lokalt vil være nul, dvs. bjælken vil herefter opføre sig, som om der var et virkeligt charniere, blot med den forskel at størrelsen af momentet ikke er nul, men  $M_{pl}$ . For en simpelt understøttet bjælke vil det i langt højere grad være flydemomentet, der er udtryk for bjælkens virkelige bæreevne, end det vil være det moment, der fremkalder den første flydning (i de yderste fibre af tværsnittet).

En simpel metode til bestemmelse af den last, der skal påføres bjælken for at fremkalde et flydeled, består i at negligere de elastiske deformationers bidrag ved

Tværsnit	Elastisk modstandsmoment $W$	Plastisk modstandsmoment $W_{pl}$	Formfaktor $s$
 Rektangel	$bd^2/6$	$bd^2/4$	1,5
 I - stærke akse	$[bd^3 - (b - t_w)h^3]/(6d)$	$bt_f(d - t_f) + t_w(d - 2t_f)^2$	ca. 1,15
 I - svage akse	$[db^3 - h(b^3 - t_w^3)]/(6d)$	$b^2t_f/2 + (d - 2t_f)t_w^2/4$	ca. 1,67
 Massivt rundprofil	$\pi d^3/32$	$d^3/6$	1,70
 Cirkulært rørprofil	$\pi[d^4 - (d - 2t)^4]/(32d)$	$[d^3 - (d - 2t)^3]/6$ For $t \ll d$ fås $td^2$	Værdi for $t = d/10$ : $s = 1,40$ For $t \ll d$ fås $s = 1,27$
 U-profil	$[bd^3 - (b - t_w)^3]/(6d)$	$bt_f(d - t_f) + t_w(d - 2t_f)^2/4$	ca. 1,15

Tabel 1. Værdier af  $W$ ,  $W_{pl}$  og  $s$  for forskellige tværsnit

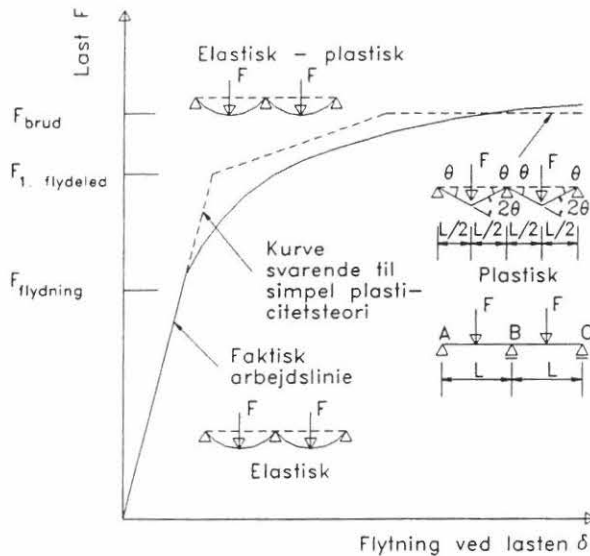
benyttelse af arbejdsligningen (ydre arbejde = indre arbejde), dvs. bjælken regnes stiv undtagen i flydeledet. For den bjælke, der er vist på *figur 1*, fås

$$F(\theta L/2) = M_{pl} 2\theta \quad \text{og dermed} \quad F = 4 M_{pl}/L \quad (5)$$

Ved denne metode antages konstruktionen omdannet til en mekanisme ved dannelsen af flydeleddet.

## 2.2 Statisk ubestemte bjælker

For en kontinuert stålbjælke med tværsnit i klasse 1 vil dannelsen af det første flydeled i snittet med maksimumsmoment - fundet ved en sædvanlig elastisk beregning - *ikke* markere den øvre grænse for bjælkens bæreevne (se figur 6).



Figur 6. Last/deformations-kurve for en statisk ubestemt stålbjælke

Derimod betegner dannelsen af flydeleddet en ændring af bjælkens virkemåde over for fortsat lastpåførsel. For to-fags bjælken på figur 6 ville indsættelse af et egentligt charniere ved midterunderstøtningen (B) betyde, at begge de indgående bjælker AB og BC ville være simpelt understøttede. De ville hver for sig have en bæreevne svarende til dannelsen af et flydeled ved fagmidten. Dannelsen af flydeleddet ved punkt B i den kontinuerte bjælke vil virke på tilsvarende måde. Den ydre last kan altså forøges ud over den last, der fører til dannelsen af flydeleddet ved B, indtil der er så mange flydeled, at konstruktionen overgår til at være en mekanisme.

Når dette indtræffer, vil bjælken have deformeret sig som vist øverst til højre på figur 6. For denne mekanisme får arbejdslikningen følgende udseende:

$$2F (\theta L/2) = M_{pl}(2\theta + 2\theta + 2\theta) \quad (6)$$

og dermed

$$F = 6 M_{pl}/L$$

Figur 6 viser arbejdskurven (F- $\delta$ ) for to-fags bjælken baseret på en elastisk-plastisk beregning. Den fuldt optrukne kurve svarer til en beregning, hvor der tages hensyn til flydezonernes gradvist stigende udbredelse i tværsnittet. Den punkterede kurve afspejler en enklere fremgangsmåde, hvor det - som det er sædvanligt i denne type undersøgelser - forudsættes, at flydeleddene dannes pludseligt, hvilket svarer til, at kroppens bidrag negligeres. Dette kan også udtrykkes således, at formfaktoren er forudsat at være  $s = 1$ , dvs.  $W_{pl} = W$ .



I sidstnævnte tilfælde vil  $(F-\delta)$ -kurven være stykkevis retliniet med knæk ved den eller de laster, hvorved der dannes (nye) flydeled. Bemærk desuden, at hældningen på kurven, dvs. bjælkens stivhed formindskes for hvert nyt flydeled, der dannes. Bæreevnen nås ved den last, der fremgår af ligning (6). Ved påvirkning ud over denne værdi er kurven vandret svarende til, at bjælken har mistet sin stivhed.

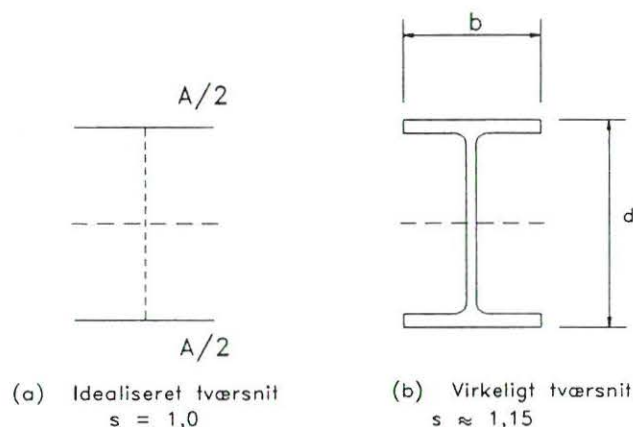
Ved sammenligning mellem de to kurver på *figur 6* ses det, at den tilnærmede metode giver et ganske godt billede af bjælkens virkemåde.

Skønt en elastisk-plastisk beregning af statisk ubestemte bjælker er temmelig besværlig, er det for de fleste kontinuerte bjælker ret enkelt at bestemme den last der omdanner bjælken til en mekanisme. En tilsvarende fremgangsmåde er også mulig ved plastisk beregning af rammekonstruktioner.

Til slut skal det bemærkes, at der under forløbet fra det elastiske stadium med laster op til  $F_y$  (første flydning i yderste fibre) over det elasto-plastiske stadium og frem til det plastiske stadium kendetegnet ved  $F_c$  (mekanismelasten) er sket en ændring af momentfordelingen i bjælken på *figur 6*. I det plastiske stadium optræder det numerisk største moment ( $M_{pl}$ ) ved alle tre flydeled, medens der i det elastiske tilfælde kun vil være ét snit med maksimumsmoment, nemlig ved midterunderstøtningen.

### 2.3 Bøjning af dobbeltsymmetriske I-profiler

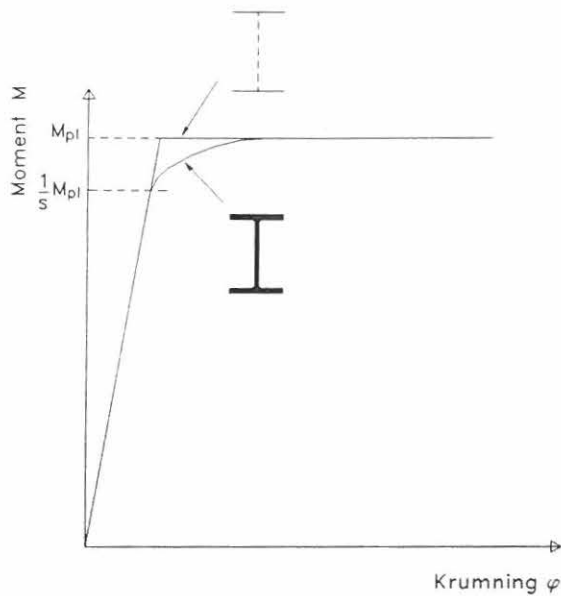
Hvis man benytter en lineærtelastisk-plastisk arbejdslinie (se *figur 3*) for det idealiserede, dobbeltsymmetriske I-tværsnit på *figur 7a*, hvor hele tværsnitsarealet er



Figur 7. I-tværsnit

koncentreret i flangernes midtlinier, vil man for bøjning om  $yy$ -aksen få den bilineære  $M-\theta$  kurve, der er vist på *figur 8*. For dette hypotetiske tværsnit ses første flydning og fuld plasticitet at falde sammen, og formfaktoren er følgende  $s = 1$ .

Betragter man i stedet et mere realistisk I-tværsnit som vist på *figur 7b*, vil man få en  $M-\theta$  kurve med en rundet overgang mellem de to rette linier, se *figur 8*. Denne rounding, der svarer til udbredelsen af den plastiske zone i tværsnittet, begynder ved et moment af størrelse  $M_{pl}/s$ . For et sædvanligt I-profil vil formfaktoren typisk være  $s \approx 1,15$  for bøjning om den stærke akse og  $s \approx 1,5$  for bøjning om den svage akse.



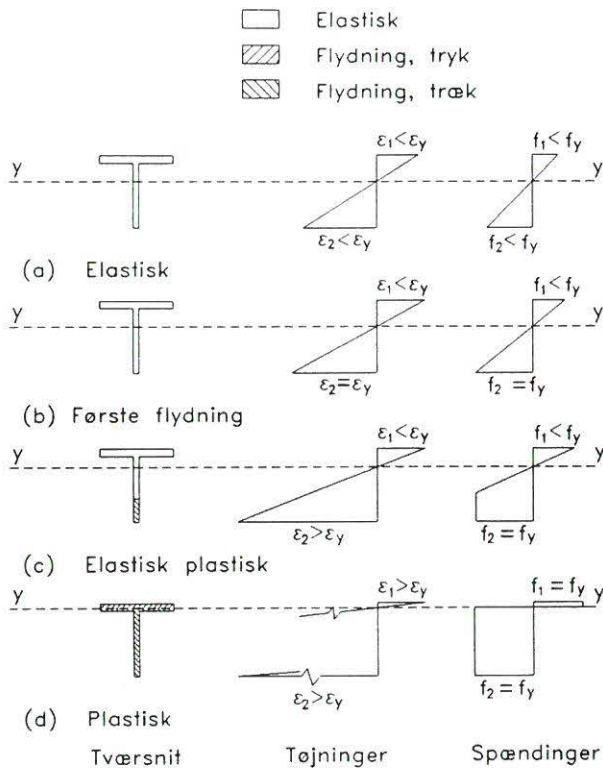
Figur 8. Bøjningsarbejdslinie ( $M-\phi$ ) for I-tværsnit

For et vilkårligt tværsnit med bøjning om en symmetriakse kan der i princippet gennemføres en beregning svarende til den, der blev foretaget ovenfor for et rektangulært tværsnit. Om nødvendigt kan der indføres et mere nøjagtigt matematisk udtryk for materialets arbejdslinie, men dette vil naturligvis føre frem til mere komplicerede beregningsformler.

## 2.4 Bøjning af enkeltsymmetriske profiler

En elastisk-plastisk undersøgelse af et tværsnit, der er påvirket til ren bøjning om en akse, som ikke er en symmetriakse, kompliceres af, at nulliniens placering ændres i takt med udbredelsen af flydningen i tværsnittet. I det lineærelastiske stadium går nullinien gennem tværsnittets tyngdepunkt som vist på *figur 9a*. Da der ikke er symmetri om bøjningsaksen, vil belastningen fremkalde forskellige tøjninger i over- og underkant af bjælken, og den første flydning vil derfor kun optræde ved den ene af disse kanter, se *figur 9b*. Følgelig vil den fortsatte flydning (ved forøget belastning) heller ikke være symmetrisk om nullinien, se *figur 9c*. I alle stadier skal der være ligevægt mellem tryk- og trækkræfter i tværsnittet, og ved belastning ud over "første flydning" må nullinien derfor bevæge sig væk fra den oprindelige placering; dette sker i retning væk fra flydezonen, da krafttilvæksten i denne del af tværsnittet ellers ville være mindre end i den modsatte side, hvor der endnu ikke er sket flydning. Når der til sidst er indtrådt fuld flydning som vist på *figur 9d*, må nulliniens placering være sådan, at den deler tværsnittet i to lige store dele. Beregning af  $M_{pl}$  for et usymmetrisk tværsnit kræver derfor kendskab til denne placering.

Et enkeltsymmetrisk tværsnit har to forskellige værdier af det elastiske modstandsmoment, fordi afstanden fra tyngdepunktlinien til de yderste fibre i overside hhv. underside ikke er den samme. Derimod er der kun en enkelt værdi af det plastiske modstandsmoment; størrelsen af dette er  $M_{pl}/f_y$ . Heraf følger, at der er to formfaktorer. Brugen af disse er afhængig af, hvilke kantspændinger det er aktuelt at undersøge. For T-tværsnit er forskellen mellem de to formfaktorer særlig stor; den ene af dem vil endda være mindre end 1,0. Dette ændrer naturligvis ikke på det grundlæggende sammenhæng mellem  $M_y$  og  $M_{pl}$  for tværsnittet, men kan dog være



Figur 9. Flydning i et usymmetrisk, bøjningspåvirket tværsnit

årsag til nogen forvirring i situationer, der kræver særlig hensyntagen til tryk- eller trækflydning.

### 3. VIRKNING AF FORSKYDNINGSKRÆFTER

Når det er aktuelt at tage hensyn til forskydningskræfternes indflydelse på bjælke-tværsnittets plastiske momentbæreevne, må der først opstilles en flydebetingelse for kombinerede normal- og forskydningsspændinger. En sådan er:

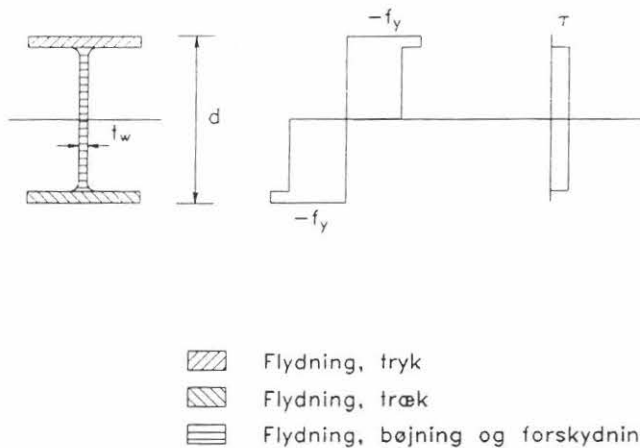
$$(\sigma/f_y)^2 + (\tau/\tau_y)^2 = 1 \quad (7)$$

hvor  $\tau_y$  er flydespændingen for forskydning, der med henvisning til von Mises' brudhypotese er sat til  $f_y/\sqrt{3}$  (i Eurocode 3 afrundet til  $0,6 f_y$ ).

Anvendes dette kriterium på et rektangulært tværsnit, hvor der forekommer flydning for bøjning og forskydning, fås følgende tilnærmede udtryk til bestemmelse af den reducerede plastiske momentbæreevne  $M_{plv}$ , når moment-bæreevnen for bøjning alene er  $M_{pb}$ , forskydningsbæreevnen for forskydning alene er  $V_{pw}$ , og der samtidig med  $M_{plv}$  virker en forskydningskraft  $V_s$ :

$$M_{plv} = \{1 - 3/4 (V_s/V_{pw})^2\} M_{pl} \text{ for } V_s/V_{pw} > 2/3 \quad (8)$$

Anvendt på et I-tværsnit, hvor der overalt antages at være flydning, enten for tryk eller træk alene eller for kombinationen tryk/forskydning henholdsvis træk/forskydning, fører ligning (7) - under forudsætning af jævnt fordelte forskydnings-



Figur 10. Skønnet fordeling af bøjnings- og forskydningspændinger for I-tværsnit med fuldt udviklet plasticitet

spændinger i kroppen samt  $V_{pw} = 0,6 dt_w f_y$  - frem til følgende tilnærmelse:

$$M_{plv} = \{1 - [2(V_s/V_{pw}) - 1]^2\} M_{pl} \text{ for } 0,5 V_s \leq V_s \leq V_{pw} \quad (9)$$

$$\text{samt } M_{plv} = M_{pl} \quad \text{for } V_s \leq 0,5 V_{pw}$$

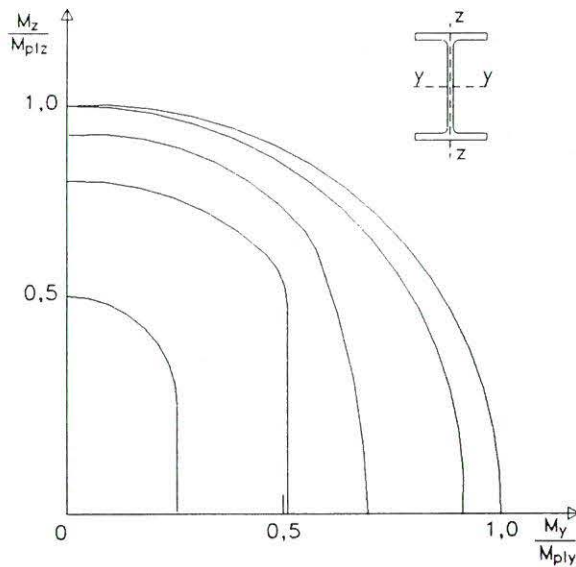
Det ses heraf, at når det drejer sig om I-bjælker, der bøjes af kræfter i kroppens plan, vil forskydningskræfter, der er mindre end den halve forskydningsbæreevne, ikke have nogen mærkbar indflydelse på momentbæreevnen  $M_{pl}$ . For bøjning om den svage akse vil forholdene ligne dem, der gælder for det rektangulære tværsnit, således at  $M_{pl}$  bestemmes af ligning (8).

#### 4. BIAKSIAL BØJNING OG FORSKYDNING PLASTISK BEREGNING

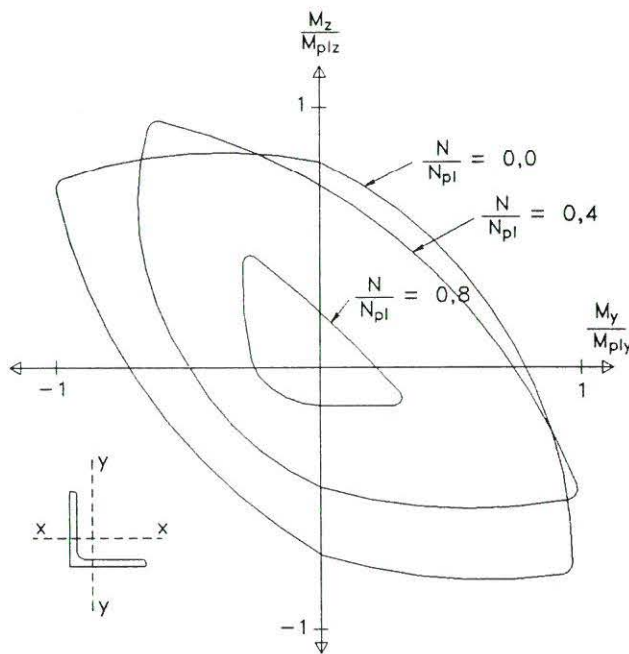
For en række forskellige tværsnitstyper er der udført beregninger af den plastiske modstandsevne for kombinationer af momenter og forskydningskræfter. Som beregningsgrundlag er der benyttet et antal varianter af plasticitetsteorien. Med henblik på den praktiske anvendelse af resultaterne udtrykkes disse som regel i form af grafer eller som tilnærmede interaktionsformler. For et I-tværsnit med bøjning om den stærke akse er det - som nævnt ovenfor - ikke nødvendigt at reducere  $M_{pl}$ , når forskydningskraften er mindre end halvdelen af  $V_{pw}$ .

Når der er bøjning om begge hovedakser, vil nullinien svarende til plastisk spændingsfordeling danne en vinkel med hovedakserne. Størrelsen af denne vinkel afhænger af forholdet mellem de virkende momenter samt af tværsnittets form. Ud fra antagne spændingsfordelinger og de dertil svarende momentbæreevner kan der opstilles en sammenhæng mellem de to reducerede, plastiske momentbæreevner ( $M_{ply}$  og  $M_{plrz}$ ) og de ureducerede bæreevner ( $M_{ply}$  og  $M_{plz}$ ). Om nødvendigt kan også virkningen af normalkraften ( $N$ ) inddrages.

Sådanne beregninger er udført for en række tværsnitstyper (se figur 11 og 12),



Figur 11. Interaktionskurver for fuld plasticitet af et I-tværsnit påvirket til skæv bøjning og normalkraft  
(Kurverne for de øvrige kvadranter fås ved spejling i koordinataksene)



Figur 12. Interaktionskurver for fuld plasticitet af et vinkelprofil påvirket til skæv bøjning og normalkraft

herunder også usymmetriske profiler som f. eks. vinkelprofiler. For et I-profil (eller H-profil) med biaksial bøjning, dvs. skæv bøjning, viser følgende udtryk sig anvendeligt:

$$(M_{ply}/M_{ply})^2 + M_{plrz}/M_{plz} = 1 \quad (10)$$

Under forudsætning af, at tværsnittet har mindst én symmetriakse, og momentakserne  $yy$  og  $zz$  er tværsnittets hovedakser, vil det altid være på den sikre side at benytte den lineære pendant til ligning (10), nemlig:

$$M_{plry}/M_{ply} + M_{plrz}/M_{plz} = 1 \quad (11)$$

## 5. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Under forudsætning af, at der ikke optræder instabilitet, kan stålbjælker modstå større momenter end dem, der fremkalder flydning i de yderste fibre. Takket være en spændingsomlejring i bjælketværsnittet kan der udvikles en fuldt plastisk fordeling af bøjningsspændingerne svarende til den fulde plastiske moment bæreevne  $M_{pl}$ .
2. Statisk ubestemte bjælker når først deres bæreevne, når der er udviklet tilstrækkeligt mange lokale, fuldt plastiske områder benævnt *flydeled* til, at konstruktionen omdannes til en mekanisme.
3. Værdien af  $M_{pl}$  fås som produktet af flydespændingen  $f_y$  og en geometrisk størrelse benævnt *det plastiske modstandsmoment*,  $W_{pl}$ . Forholdet  $W_{pl}$  benævnes *formfaktoren*.
4.  $M_{pl}$  skal reduceres, hvis der samtidig optræder en forskydningskraft. I de fleste praktiske tilfælde kan man dog se bort fra dette.

## LITTERATURHENVISNINGER

1. Dowling, P.J., Owens, G.W. and Knowles, P., "Structural Steel Design", Butterworths, 1988.
2. Ballio, G. and Mazzolani, F., "Theory and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, New York, 1983.
3. Salmon, C.G. and Johnson, J.E., "Steel Structures - Design and Behaviour" Harper and Row, New York, 1980.
4. Trohair, N.S. and Bradford, M.A., "The Behaviour and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, New York, 1988.
5. McGinley, T.J. and Ang, T.C., "Structural Steelwork Design to Limit State Theory", Butterworths, 1987.



## Lektion 7.9.1: Bjælker uden sidefastholdelse, I

### FORMÅL

At give læseren en forståelse af, hvad fænomenet kipning indebærer, at udpege de bestemmende parametre samt at vise, hvordan man ud fra teori og forsøg kan komme frem til en praktisk dimensioneringsmetode.

### FORUDSÆTNINGER

Lektion 6.1: *Concepts of Stable and Unstable Elastic Equilibrium*

Lektion 6.6.2: Instabilitet af konstruktionselementer i praksis

Lektion 7.8.1 og 7.8.2: Bjælker fastholdt mod sideudbøjning

### BESLÆGTEDE LEKTIONER

Lektion 7.9.2: Bjælker uden sidefastholdelse, II

Lektion 7.10.1 og 7.10.2: Bjælkesøjler

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER (alle med kontrol af kipstabilitet):

Eksempel 7.9(i): Simpelt understøttet I-bjælke med gaffellejring ved enderne

Eksempel 7.9(ii): Enkeltsymmetrisk kranbjælke

Eksempel 7.9(iii): I-bjælke med positive og negative momenter

### RESUMÉ

Lektionen indledes med en redegørelse for fænomenet kipning, og der omtales en simpel analogi mellem virkemåden af en bjælkes trykflange og virkemåden af en søjle. De vigtigste parametre af betydning for bjælkens sidestabilitet udpeges, og den gunstige virkning af afstivninger beskrives kort.





Der gives desuden en kort forklaring på, hvorfor den teori, der udvikles på basis af elasticitetsteorien (se nærmere om denne i lektion 7.9.2), behøver at modificeres, før den kan danne grundlag for praktiske beregningsregler for ikke-sidefastholdte bjælker. Endelig gøres der også rede for baggrunden for Eurocode 3.



## 1. KARAKTERISTIKA FOR BJÆLKETVÆRSNIT

Ved dimensionering af en stålbjælke er opmærksomheden i almindelighed rettet mod behovet for at opnå en passende styrke og stivhed mod bøjning for lodrette kræfter. Dette fører naturligt til et tværsnit, hvis stivhed i lodret retning er væsentligt større end i vandret retning. Stålprofiler, der normalt benyttes som bjælker, har det meste af materialet koncentreret i flangerne. Disse er relativt smalle for at undgå foldning. Behovet for bekvemt at kunne samle bjælker med tilgrænsende konstruktionsdele peger i retning af åbne profiler, og for disse vil vridningsstivheden være forholdsvis ringe.

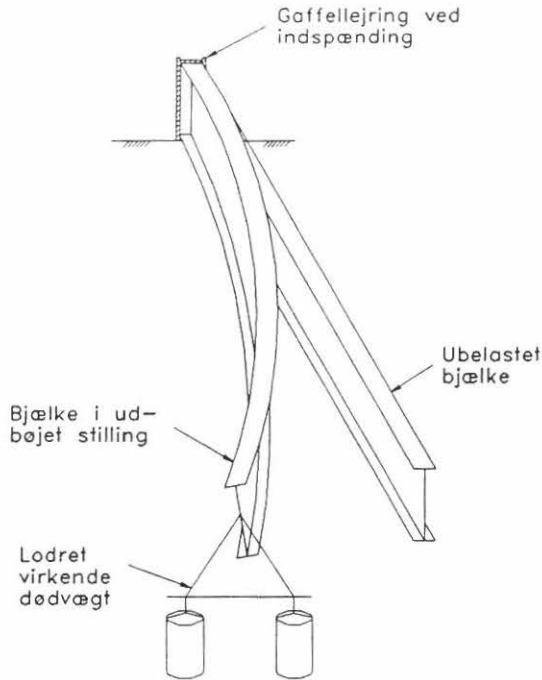
På *figur 1* er tværskningskonstanterne for fire forskellige profiler med samme tværskningsareal sammenlignet. Det ses, at den store lodrette bøjningsstivhed opnås på bekostning af såvel vandret bøjningsstivhed som vridningsstivhed.

Tværsknings- type	Fladprofil	HE typisk	IPE typisk	RHS typisk
Tværsknings- konstanter				
A: Areal	1	1	1	1
$I_y$ : vertikal bøjning	1	0,35	1	0,2
$I_z$ : horisontal bøjning	0,2	3,5	1	3,5
$I_t$ : vridning	1	1	1	100

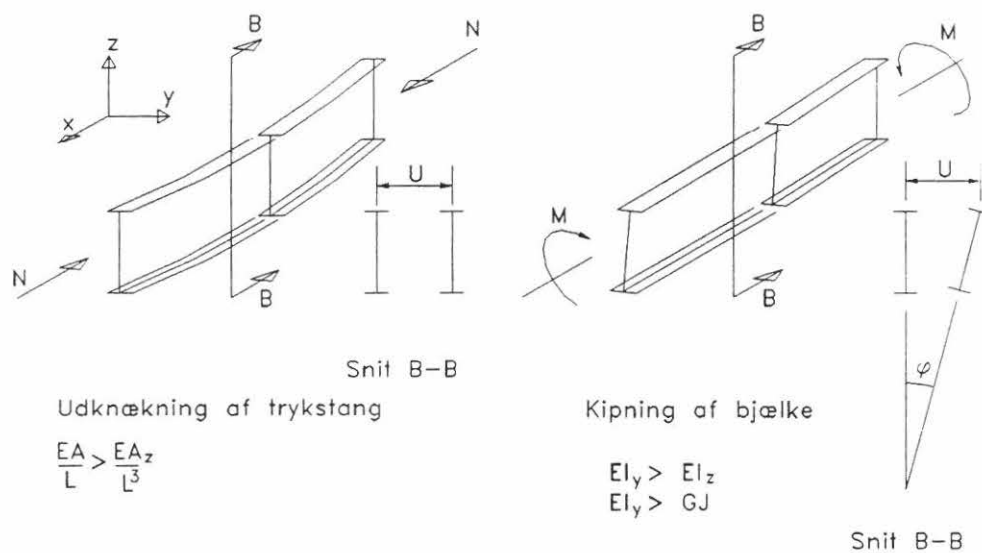
Figur 1. Relative tværskningskonstanter for bøjning og vridning af forskellige tværskningstyper

## 2. VIRKEMÅDE AF SLANKE BJÆLKER UDSAT FOR LODRET BØJNING

Ud fra vort kendskab til trykstængers opførsel er det at vente, at når som helst et slankt konstruktionselement belastes i sin stive retning - hvilket for en trykstang er med en centralt virkende normalkraft - er der en tendens til, at den vil svigte ved at bøje ud i en anden retning, hvor stivheden ikke er så stor. (I tilfældet med trykstangen ved udbøjning vinkelret på trykretningen.) På *figur 2* ses en slank, udkraget bjælke, der deformerer sig under påvirkning af en lodret last virkende i den frie ende; denne udbøjningsform benævnes kipning. Skønt der - som vist på *figur 3* - optræder både en vandret udbøjning ( $u$ ) og en drejning ( $\phi$ ) om bjælkeaksen, er denne type af insta-



Figur 2. Kipning af en slank, udkraget bjælke med lodret last



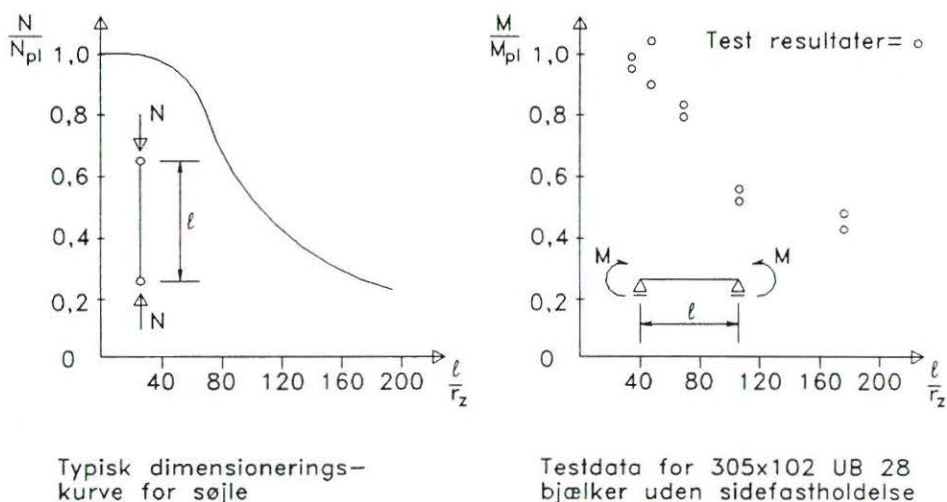
Figur 3. Sammenligning mellem udknækning af en trykstang og kipning af en bjælke

biliter af samme art som den noget simple sideudbøjning af en centralt belastet trykstang: Belastning af bjælken i dens stive plan (kroppens plan) fører til, at den svinger ved udbøjning i en retning, hvor stivheden er mindre (nemlig ved tværubøjning og samtidig vridning).

Der er naturligvis mange tilfælde, hvor bjælken indgår i en konstruktion, som forhindrer denne udbøjningsform, således at bjælketværsnittet kan regnes fuldt effektivt (forudsat at der ikke er problemer med foldning), som det er beskrevet i

lektion 7.8.1. I denne sammenhæng er det imidlertid vigtigt at være opmærksom på, at en bjælke meget vel kan være væsentligt mindre sideafstivet i udførelsesfasen end i den færdige konstruktion, hvor også etageadskillelser og vindafstivninger etc. er udført. Kontrol af bjælkens stabilitet under udførelsen er derfor også nødvendig.

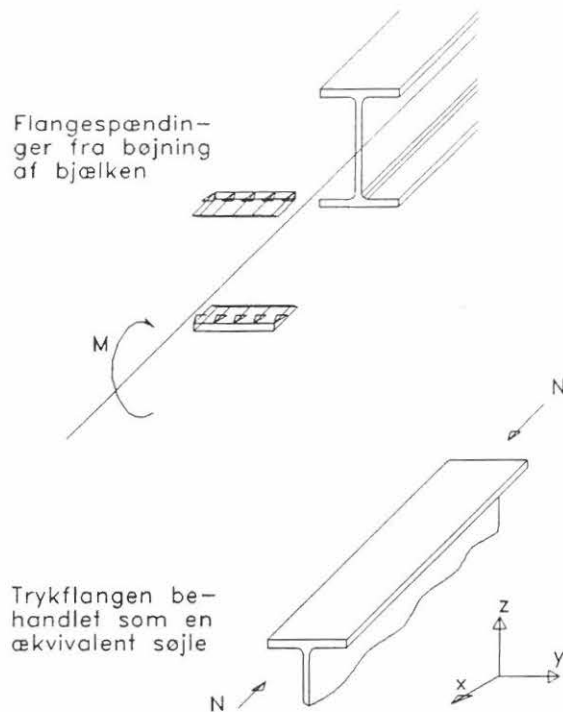
Instabilitet i form af kipning har næsten samme betydning for dimensionering af bjælker uden sideafstivning, som sideudbøjning har for dimensionering af søjler. Bæreevnen for bøjning er således en funktion af bjælkens slankhed, se figur 4, og en bjælke dimensionering vil i princippet være iterativ på samme måde som en søjle dimensionering. På grund af den sammensatte udbøjningsform (sideudbøjning og vridning) er dimensionering mod kipning imidlertid mere kompleks, hvilket nødvendiggør en mere omfattende beregning.



Figur 4. Bæreevnen af en bjælke som funktion af uafstivet længde.  
Analogi med trykstang

### 3. EN SIMPEL FYSISK MODEL

Inden der går nærmere ind på beregningen, kan det være nyttigt at prøve at få en ide om problemets fysiske natur ved at betragte en simplificeret model. Eftersom bøjning af et I-profil i hovedsagen optages af flangerne som en trækraft henholdsvis en trykkraft, se figur 5, kan trykflangen betragtes som en trykstang. En sådan har en tendens til at bøje ud i den svageste retning, som her ville være opad eller nedad. Dette forhindres imidlertid af bjælkens krop, og trykflangen tvinges derfor til at bøje ud i bjælkens sideretning. Dette medfører en vis drejning af tværsnittet, idet sammenhængen i tværsnittet kræver, at kroppen følger med i trykflangens udbøjning. Skønt denne model ikke tager hensyn til vridningens og trækflangens virkelige indflydelse, giver den et godt billede af stabilitetsproblemet for meget høje dragere med tynde kroppe samt for gitterdragere. Faktisk tog de første forsøg på at studere fænomenet kipning udgangspunkt i denne model.

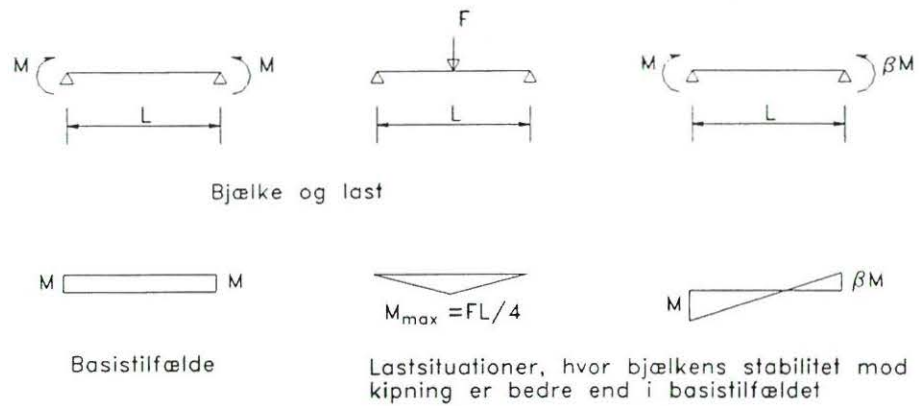


Figur 5. Kipningsproblemet betragtet som et søjleproblem

#### 4. FAKTORER, DER PÅVIRKER EN BJÆLKES SIDESTABILITET

Den analogi mellem en trykflange og en trykstang, der blev omtalt i forrige afsnit, er også nyttig til forståelse af følgende forhold:

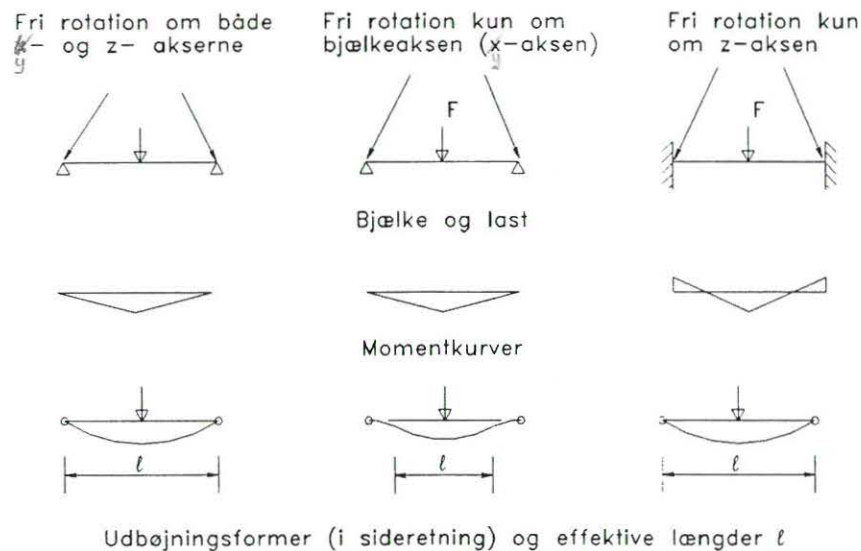
1. En søjles bæreevne er afhænger af størrelsen  $EI_z/L^2$ . Kipningslasten for en bjælke må derfor forventes at være afhængig af den uafstivede længde, d.v.s. afstanden mellem de punkter, hvor sideudbøjning er forhindret, samt af bjælkens sidestivhed ( $EI_z$ ).
2. Tværsnitsformen må forventes at have en vis indflydelse, især for bjælker af lille eller middel højde (i forhold til bjælkens spændvidde). Her vil den relativt lille afstand mellem den stabile trækflange og den ustabile trykflange føre til en forbedret stabilitet af sidstnævnte. Dette medfører en større drejning af tværsnittet (end for høje bjælker), og dermed bliver betydningen af vridningsmodstanden større.
3. Hvis momentet i en bjælke varierer langs denne, se figur 6, vil også flangekraften variere. I sammenligning med en bjælke med et konstant moment må det forventes, at førstnævnte bjælke vil være den mest stabile, d.v.s. have den største bæreevne/kipningslast.



Bemærk, at normalkraften i trykflangen varierer på samme måde langs bjælken som det bøjeende moment

Figur 6. Virkning af ikke-konstant moment på kipning af bjælke

4. Hvis der ved bjælkeenden (se figur 3) etableres en fastholdelse, som modvirker den viste udbøjningsform, må det forventes, at dette vil forbedre bjælkens stabilitet over for kipning. Ved betragtning af deformationerne  $u$  og  $\phi$  indses det, at en sådan virkning kan opnås ved fastholdelse mod drejning om  $z$ -aksen (se også figur 5). En fastholdelse mod rotation om  $y$ -aksen ændrer derimod ikke direkte udbøjningsformen, men den vil ændre momentfordelingen i bjælken, hvilket meget vel kan føre til en forbedret stabilitet. Se iøvrigt figur 7.



Figur 7. Virkning på kipning af en bjælke af forskellige understøtningsforhold i lastens plan eller vinkelret herpå

En mere indgående analyse, der dokumenterer ovenstående fire punkter, omtales i lektion 7.9.2, hvor også faktorer, der ikke fremgår af den omtalte, simplificerede model, omtales, nemlig hvælvning af tværsnittet og indflydelsen af lastens placering

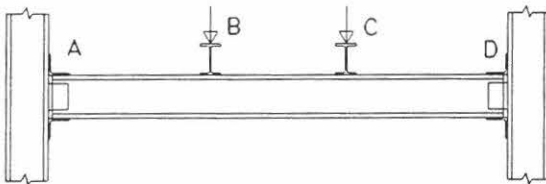
i forhold til bjælkens tyngdepunktslinie.

## 5. AFSTIVNING SOM ET MIDDEL TIL FORBEDRING AF STABILITETEN

Sideafstivninger kan benyttes til at forbedre bæreevnen af en bjælke, der ellers vil svigte ved kipning. For sat de kan være effektive, skal følgende to krav være opfyldt:

1. Afstivningen skal være så stiv, at den effektivt kan fastholde bjælken mod sideudbøjning i det ønskede punkt. (Dette kan normalt let opfyldes).
2. Afstivningen skal være tilstrækkeligt stærk til at modstå de kræfter, der overføres til den af den understøttede bjælke. (Disse kræfter udtrykkes normalt som en procentdel af trykkraften i den afstivede bjælke).

Under forudsætning af, at disse to betingelser er opfyldt, kan den fulde bøjningsstyrke af bjælken udnyttes med afstivninger, der anbringes passende tæt. På *figur 8*, der viser udbøjningsformen for en bjælke med flere afstivninger, ses det desuden, hvorledes udbøjningen vedrører hele bjælken.



Bjælke belastet med tværbjælker, der fungerer som sideafstivning i punkt B og C



Udbøjet bjælke set ovenfra

Figur 8. Kipning af bjælke med sideafstivninger

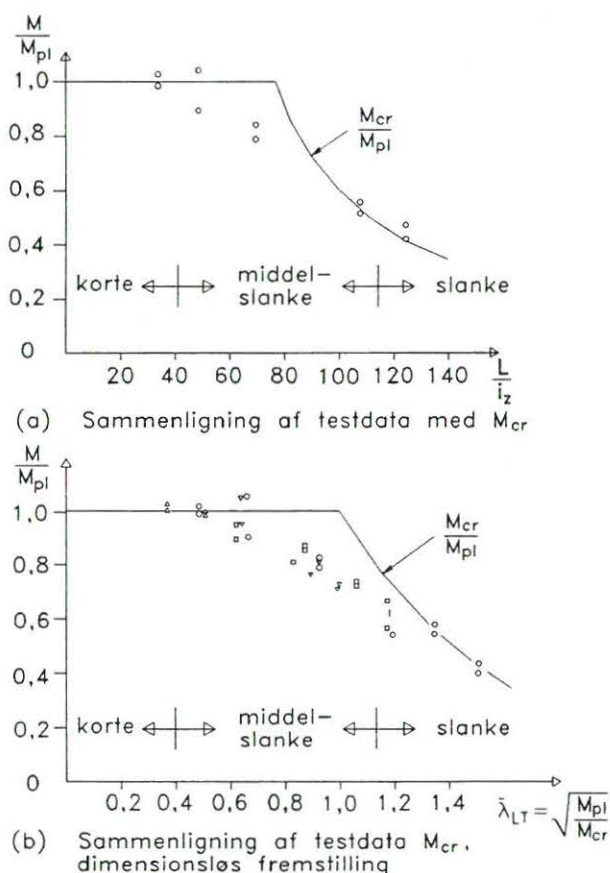
Umiddelbart kunne man forestille sig, at afstivningerne helt skulle forhindre enten sideflytninger eller vridningsflytninger. I praksis vil det snarere være hensigtsmæssigt at anbringe afstivninger, så de forhindrer de største deformationskomponenter. For den bjælke, der er vist i udbøjet tilstand på *figur 3*, er det således nærliggende at forestille sig, at en sideafstivning anbragt ved overflangen vil være mere effektiv end en tilsvarende afstivning anbragt ved underflangen.

## 6. PRAKTISK DIMENSIONERING

Direkte brug af teorien for kipning til dimensionering er mindre hensigtsmæssig af følgende årsager:

- Formlerne er for komplekse til brug for andre end specialister, se f. eks. ligning (17) i lektion 7.9.2.
- Der er betydelig forskelle mellem de antagelser, der danner grundlag for teorien, og de egenskaber der karakteriserer bjælker i praksis. Eftersom teorien er baseret på, at materialets arbejdslinie er idealelastisk, vil den teoretiske bæreevne være en øvre grænse for den virkelige bæreevne. Dette emne behandles på det overordnede plan i lektion 6.6.2.

På *figur 9* er et typisk sæt testdata fra kipningsforsøg med varmtvalsede profiler plottet ind på en graf, der viser de teoretiske værdier af de elastiske, kritiske momenter beregnet efter ligning (17) i lektion 7.9.2. Bemærk, at der på *figur 9a*, hvor



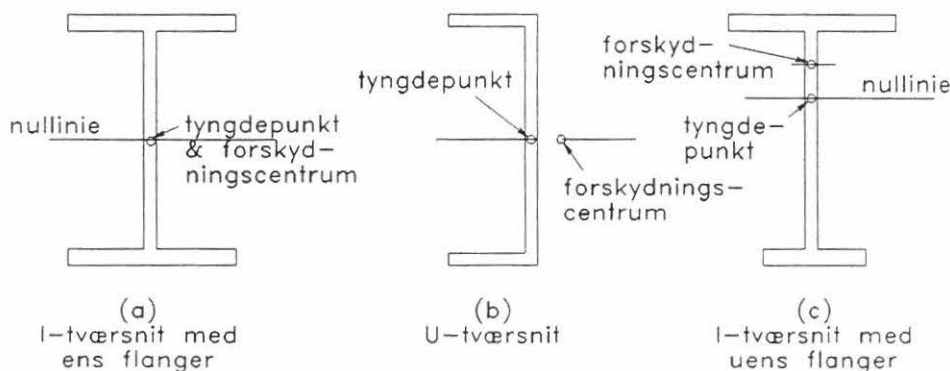
Figur 9. Sammenligning af testdata med de teoretiske værdier af elastiske, kritiske momenter

den uafhængige parameter er  $L/i_z$  kun er plottet data fra et enkelt forsøg, På *figur 9b* er der imidlertid benyttet parameteren  $\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{M_{cr}/M_{pl}}$ , hvilket har den fordel, at der på den samme graf direkte kan sammenlignes resultater fra forskellige forsøgsserier, selv om disse er baseret på forskellige tværsnit eller forskellige materialestyrker etc. På begge disse figurer kan der skelnes mellem følgende bjælketyper:

- Korte bjælker, for hvilke momentet  $M_{pl}$  kan udnyttes. På *figur 9b* svarer dette til værdier af  $\bar{\lambda}_{LT}$  under ca. 0,4.
- Slanke bjælker, hvis bæreevne er tæt på den teoretiske værdi  $M_{cr}$ . På *figur 9b* svarer dette til værdier af  $\bar{\lambda}_{LT}$  over ca. 1,2.
- Middelslanke bjælker, hvis bæreevne ligger imellem  $M_{pl}$  og  $M_{cr}$ . På *figur 9b* svarer dette til intervallet  $0,4 < \bar{\lambda}_{LT} < 1,2$ .

Kun i førstnævnte tilfælde har sidestabiliteten ingen betydning for dimensioneringen; bjælker af denne type kan med andre ord dimensioneres efter metoderne i lektion 7.8.1. For de middelslanke bjælker - som er den type, man hyppigst støder på i praktisk projektering - skal dimensioneringen baseres på teorien for ikke-elastisk instabilitet med passende modifikationer for at tage højde for geometriske imperfektioner og egenspændinger etc., jævnfør lektion 6.1. Den praktiske dimensionering må således baseres på både teori og forsøg, hvilket i kraft af problemets komplekse natur fører til dimensioneringsregler, som til en vis grad må være empiriske.

I afsnit 7 nedenfor skitseres Eurocode 3's regler vedrørende bjælke dimensionering, når der benyttes de tværsnitstyper, som er vist på *figur 10a* og *10b*. Bemærk, at sidstnævnte type - dvs. U-profiler - kun falder ind under de angivne regler, når der er bøjning om tværsnittets symmetriakse, hvilket er tilfældet, når lasten påføres i kroppens retning, og dens virkelinie går gennem tværsnittets forskydningscentrum. Enkeltsymmetriske profiler belastet til ren bøjning om den hovedakse, der ikke er symmetriakse, f. eks. et enkeltsymmetrisk I-profil med bøjning om den "stærke" akse (se *figur 10c*), skal derimod behandles som en udvidet version af teorien i lektion 7.9.2, først og fremmest fordi tværsnittets forskydningscentrum så ikke ligger på nullinien.



Figur 10. Eksempler på dobbeltsymmetriske og enkeltsymmetriske tværsnit



## 7. BEREGNINGSMETODEN I EUROCODE 3

Kipningsmomentet bestemmes af:

$$M_{bRd} = \chi_{LT} M_{Rd} \quad (1)$$

hvor  $M_{Rd}$  er tværsnittets regningsmæssige momentbæreevne  
og  $\chi_{LT}$  er reduktionsfaktoren for kipning

Ved bestemmelsen af  $M_{Rd}$  skal der naturligvis tages hensyn til tværsnitklassen, således at der benyttes det dertil svarende modstandsmoment kombineret med den relevante materialestyrke  $f_d$ . Værdien af  $\chi_{LT}$  afhænger af bjælkens dimensionsløse slankhed  $\bar{\lambda}_{LT}$  på følgende måde:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + [\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2]^{1/2}} \quad (2)$$

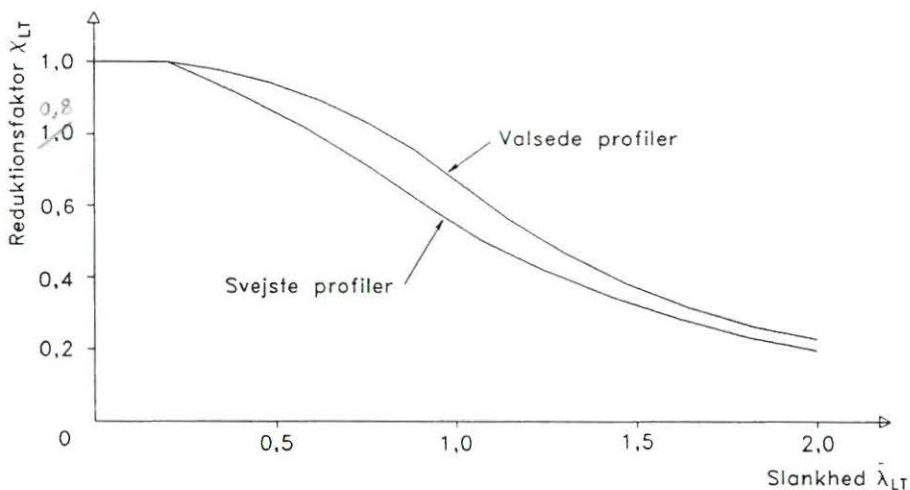
hvor  $\phi_{LT} = 0,5 [ 1 + \alpha_{LT} ( \bar{\lambda}_{LT} - 0,2 ) + \bar{\lambda}_{LT}^2 ]$

og  $\alpha_{LT} = 0,21$  for valsede profiler

samt  $\alpha_{LT} = 0,49$  for svejste profiler

Figur 11 viser sammenhængen mellem  $\bar{\lambda}_{LT}$  og  $\chi_{LT}$ . Bemærk, at grafens form ligger nær op ad det mønster, der tegnes af de forsøgsdataene på figur 9. Når  $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4$ , er værdien af  $\chi_{LT}$  så nær 1,0, at dimensioneringen kan baseres på den fulde, regningsmæssige momentbæreevne  $M_{Rd}$ .

Den dimensionsløse slankhed  $\bar{\lambda}_{LT}$ , er et mål for, i hvilket omfang faren for kipning reducerer en bjælkes bæreevne; den er en funktion af  $M_{Rd}$  og  $M_{cr}$ . Her er  $M_{cr}$  det elastiske, kritiske moment med hensyn til kipning - en størrelse der "ligner" Eulerlasten for en trykstang, idet den udledes på basis af en teori (se lektion 7.9.2), hvor der forudsættes ideelle forhold såsom helt retliniet konstruktionsdel, lineærelastisk arbejdslinie, fravær af lastekscentriciteter etc.



Figur 11. Reduktionsfaktor for kipning

I samklang hermed defineres  $\bar{\lambda}_{LT}$  af udtrykket

$$\bar{\lambda}_{LT} = [M_{Rd}/M_{cr}]^{1/2} \quad (3)$$

Til praktisk beregning omskrives (3) til:

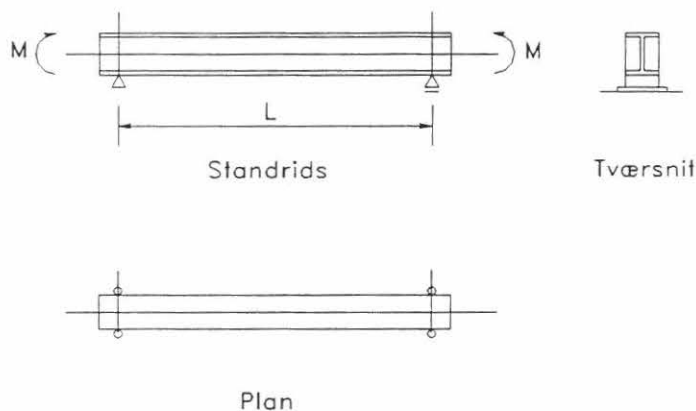
$$\bar{\lambda}_{LT} = [\lambda_{LT}/\lambda_1] \quad (4)$$

hvor  $\lambda_1 = \pi [E/f_y]^{1/2} = 93,9 [235/f_y]^{1/2}$

og 
$$\lambda_{LT} = \frac{L/i_z}{[1 + \frac{1}{20} (\frac{L/i_z}{h/t_f})^2]^{1/4}}$$

Dette udtryk repræsenterer en tilnærmelse på den sikre side, gældende for et vilkårligt, dobbeltsymmetrisk I- eller H-profil med konstant tværsnit og uden afstivninger. Udtrykket er udledt i Appendix.

Ovenstående udtryk for  $\lambda_{LT}$  gælder for en belastning, der giver konstant moment over hele længden af en simpelt understøttet bjælke, der er forsynet med en såkaldt gaffellejring ved enderne, således at både drejning om bjælkeaksen og sideudbøjning er forhindret ved understøtningerne, se figur 12. Den teoretiske udledning for dette tilfælde, der tjener som basistilfælde for kipning, findes i lektion 7.9.2. For bjælker med andre lastformer og/eller understøtningsbetingelser kan bæreevnen beregnes ved at benytte basistilfældet som reference, idet der indføres modifikationsfaktorer i de angivne udtryk for  $\lambda_{LT}$  eller  $M_{cr}$ .



Figur 12. Definition af basistilfældet for kipning

Hvis der f. eks. er en lineær momentvariation mellem fastholdelsespunkterne, beregnes  $\lambda_{LT}$  således:

$$\lambda_{LT} = \frac{L/i_z}{[C_1]^{1/2} [1 + \frac{1}{20} (\frac{L/i_z}{h/t_f})^2]^{1/4}} \quad (5)$$

hvor  $C_1 = 1,75 - 1,05 \psi + 0,3 \psi^2 \leq 2,35$   
 og  $\psi$  er momentforholdet, se figur 13.

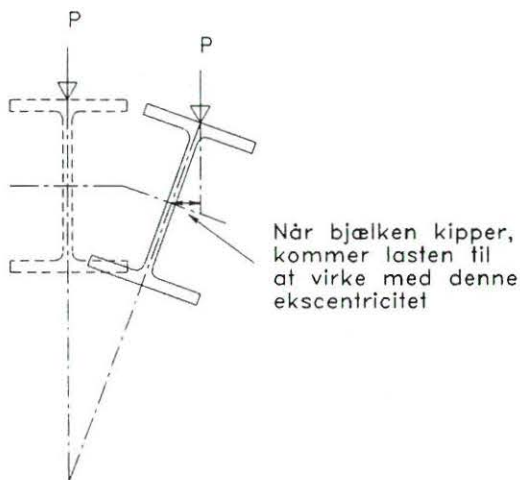


Figur 13. Lineær momentvariation over en bjælke med spændvidde L

Eksempelvis fås for endefaget af en kontinuert bjælke med momentlast svarende til  $\psi = 0$  værdien  $C_1 = 1,75$ , hvilket betyder, at  $\lambda_{LT}$  reduceres til  $1/\sqrt{1,75} = 0,76$  gange værdien for konstant moment, hvilket medfører et større  $\chi$  og dermed også en større bæreevne  $M_{brd}$ .

Afvigelser i sidefastholdelsen i forhold til basistilfældet kan behandles ved at indføre k-koefficienter (effektiv-længde-faktorer) til definition af en ækvivalent længde  $kL$  (hvor  $L$  er den geometriske længde) ved bestemmelsen af  $M_{cr}$ . For støtningsbetingelser, der indebærer mere fastholdelse end i basistilfældet, fås k-værdier  $< 1,0$ . Dette giver en større værdi af  $M_{cr}$  og dermed et reduceret  $\bar{\lambda}_{LT}$  med det resultat, at  $\chi_{LT}$  og  $M_{brd}$  forøges.

På tilsvarende måde kan der angives C-faktorer til direkte brug ved bestemmelsen af  $M_{cr}$  - og dermed af  $\bar{\lambda}_{LT}$  - for en lang række lasttyper, der giver ikke-lineære momentsforløb. I særdeleshed bør denne metode benyttes, når det drejer sig om bjælker påvirket af destabiliserende laster, hvorved forstås laster, der angriber oven over bjælkens forskydningscentrum, og som kan flytte sig sideværts sammen med bjælken, når denne kipper, se figur 14.



Figur 14. Destabiliserende last

For tværsnit af den type, der er vist på *figur 9c*, og som karakteriseres ved, at forskydningscentrum og tyngdepunkt ikke ligger i samme højde, er bestemmelsen af  $M_{cr}$  mere kompliceret. Dette område dækkes af Annex F i Eurocode 3.

## 8. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Kipning kan optræde for bjælker, der er påvirket til bøjning om den stærke akse, når de ikke er fastholdt i sideretningen mellem understøtningerne.
2. De faktorer, der har væsentligst betydning for en bjælkes modstandsevne mod kipning, er: Afstanden mellem sideafstivninger, sideslankheden ( $L/i_y$ ), tværsnitsformen (udtrykt i vridningsstivheden og i hvælvningsstivheden), moment fordelingen samt fastholdelsen ved understøtningerne.
3. Modstanden mod kipning kan forøges ved at forhindre sideudbøjninger og/eller vridningsdeformationer ved tilføjelse af afstivninger med passende stivhed og styrke.
4. Beregning af den kritiske last efter elasticitetsteorien danner grundlag for forståelse af kippingfænomenet. Til brug for praktisk dimensionering er det dog nødvendigt at indføre visse simplifikationer samt empiriske modifikationer.
5. Kontrol af en bjælke for kipping begynder med bestemmelse af den effektive, dimensionsløse slankhed  $\bar{\lambda}_{LT}$ .
6. Ved dimensioneringen kan der tages hensyn til forskellige understøtningsforhold eller til forskellige lastformer ved hjælp af faktorer ( $k$  og  $C$ ), der benyttes til at modificere enten slankheden  $\lambda_{LT}$  eller det kritiske moment  $M_{cr}$  for basistilfældet.

## 9. LITTERATURHENVISNINGER

1. Narayanan, R., Editor, "Beams and Beam Columns: Stability and Strength", Applied Science Publishers 1983.

Kapitel 1-3 handler om forskellige aspekter vedrørende fænomenet kipping og beregningsmetoder for bjælker uden sidefastholdelse.

2. Chen, W. F. and Atsuta, T. "Theory of Beam Columns Volume 2, Space Behaviour and Design", McGraw Hill 1977.

Kapitel 3 handler om bjælker uden sidefastholdelse.

3. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability" Second Edition, McGraw Hill 1961.

Den grundlæggende udledning af det elastiske, kritiske moment er i kapitel 6 angivet for en række forskellige bjælkeproblemer.

4. Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw Hill 1952.

Den grundlæggende teori for kipping af bjælker omtales i kapitel 4.

5. Galambos, T. V., "Structural Members and Frames", Prentice-Hall 1968.

Kapitel 2 behandler den grundlæggende, elastiske teori for kipning.  
Kapitel 3 medtager det ikke-elastiske område samt dimensionering af bjælker uden sidefastholdelse.

6. Trahair, N. S. and Bradford, M. A., "The Behaviour and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, Second Edition, 1988.

Bjælker uden sidefastholdelse behandles i kapitel 6.

7. Eurocode No. 3: Stålkonstruktioner. Del 1-1.  
Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner (DS/ENV 1993-1-1).

## APPENDIX: UDLEDNING AF $\lambda_{LT}$ FOR EN BJÆLKE MED KONSTANT, DOBBELTSYMMETRISK TVÆRSNIT

Det kritiske, elastiske moment  $M_{cr}$  for basistilfældet kan skrives således:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ \frac{I_w}{I_z} + \frac{L^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} \right]^{1/2}$$

Med definitionen  $\bar{\lambda}_{LT} = [M_{Rd} / M_{cr}]^{1/2} = [\lambda_{LT} / \lambda_1]$

hvor 
$$\lambda_1 = \pi [E / f_y]^{1/2}$$

kan  $\lambda_{LT}$  skrives som

$$\begin{aligned} \lambda_{LT} &= [\pi^2 E W_{pl,y} / M_{cr}]^{1/2} \\ &= \frac{L [W_{pl,y}^2 I_z I_w]^{1/4}}{[1 + L^2 GI_t / \pi^2 EI_w]^{1/4}} \end{aligned}$$

Med definitionerne 
$$a_{LT} = (I_w / I_t)^{1/2}$$

og 
$$i_{LT} = (I_z I_w / W_{pl,y}^2)^{1/4}$$

og benyttelse af tilnærmelsen

$$I_w = I_z h_s^2 / 4$$

hvor 
$$h_s = h - t_f$$

fås følgende tilnærmelse for  $i_{LT}$  (mellemlregninger udeladt):

$$i_{LT} = [I_z / (A - 1/2 t_w h_s)]^{1/2}$$

samt for  $\lambda_{LT}$ :

$$\lambda_{LT} = \frac{L / i_{LT}}{\left[ 1 + 1/20 \left[ \frac{L / i_{LT}}{h / t_f} \right]^2 \right]^{1/4}}$$

For et almindeligt I- eller H-profil med ens flanger kan dette udtryk simplificeres til ligning (5) i tekstafsnittet.



## Lektion 7.9.2: Bjælker uden sidefastholdelse, II

### FORMÅL

At gennemgå den grundlæggende teori for elastisk kipning samt den fysiske betydning af de resulterende formeludtryk.

### FORUDSÆTNINGER

Grundlæggende bøjningsteori

Grundlæggende vridningsteori

Lektion 6.4: *General Methods for Assessing Critical Loads*

Lektion 7.5.1 og 7.5.2: Søjler

Lektion 7.9.1: Bjælker uden sidefastholdelse, I

### BESLÆGTEDE LEKTIONER

Lektion 7.10.1 og 7.10.2: Bjælke-søjler

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER (alle med kontrol af kipstabilitet):

Eksempel 7.9(i): Simpelt understøttet I-bjælke med gaffellejring ved enderne

Eksempel 7.9(ii): Enkeltsymmetrisk kranbjælke

Eksempel 7.9.(iii): I-bjælke med positive og negative momenter

### RESUMÉ

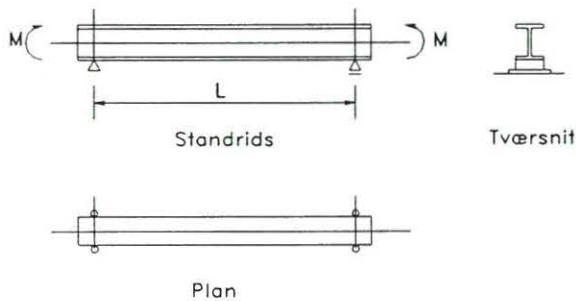
I denne lektion præsenteres den grundlæggende teori for elastisk kipning af bjælker med udgangspunkt basistilfældet: en simpelt understøttet bjælke med konstant bøjningsmoment. Herefter gennemgås andre lasttilfælde, herunder betydningen af lastangrebepunktets placering, samt andre understøtningsforhold. De teoretiske udledninger er anbragt i Appendix 1 og Appendix 2, således at hovedteksten kan begrænses til en vurdering af forudsætningerne for de udledte udtryk samt af deres fysiske betydning.



## 1. INDLEDNING

På *figur 1* ses den basismodel, der benyttes til at illustrere teorien for kipning. Den bygger på følgende forudsætninger:

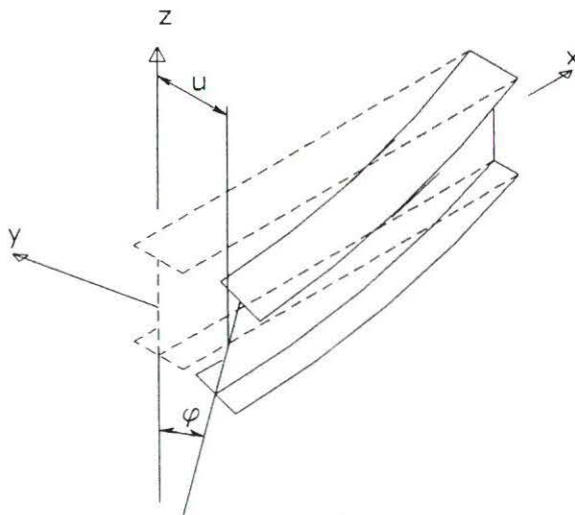
- bjælken er helt lige, dvs. uden geometriske imperfektioner
- materialet er lineærelastisk
- bjælken har konstant, dobbeltsymmetrisk I-tværsnit
- understøtningerne ved bjælkens ender fungerer som gaffellejringer, dvs. de forhindrer sideflytning samt drejning om bjælkens akse (men ikke drejning om en lodret og en vandret akse vinkelret på bjælkeaksen).



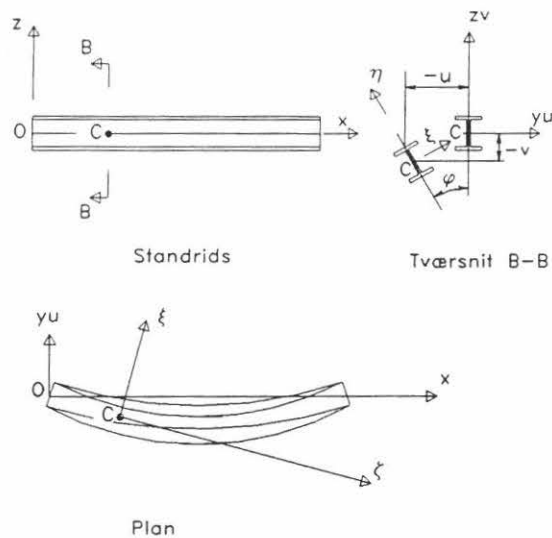
Figur 1. Definition af basistilfældet for kipning

Kipningsproblemet for en sådan bjælke er i en vis udstrækning analogt med søjleproblemet for en simpelt understøttet Euler-søjle.

Størrelsen af den ydre last, der netop er stor nok til at fremkalde den viste udbøjningstilstand, se *figur 2 og 3*, bestemmes ved at betragte ligevægten for den udbøjede bjælke. Bemærk, at endemomenterne på grund af udbøjningen får en forstyrrende effekt på bjælken i form af sidebøjning og vridning.



Figur 2. Bjælke i udbøjet tilstand



Figur 3. Bjælkens deformationer

Opstillingen af ligevægtsligningerne og løsningen af dem resulterer i bestemmelse den kritiske værdi  $M_{cr}$  for hvilken bjælken på *figur 1* netop bliver ustabil. Denne udledning er vist i Appendix 1. Den fysiske betydning af løsningen samt dennes anvendelse i tilfælde, hvor der optræder forudsætninger, som afviger fra de ovenfor anførte, er gennemgået i afsnit 2 og 3.

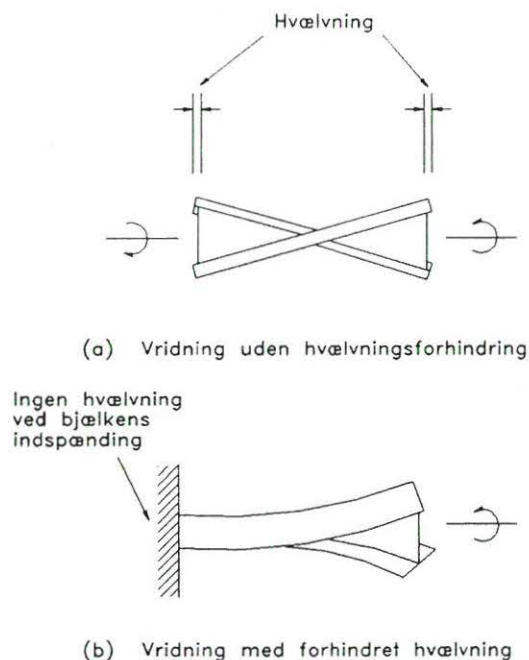
## 2. FYSISK VURDERING AF LØSNINGEN

Det elastiske, kritiske moment for bjælken på *figur 1* er (se Appendix 1):

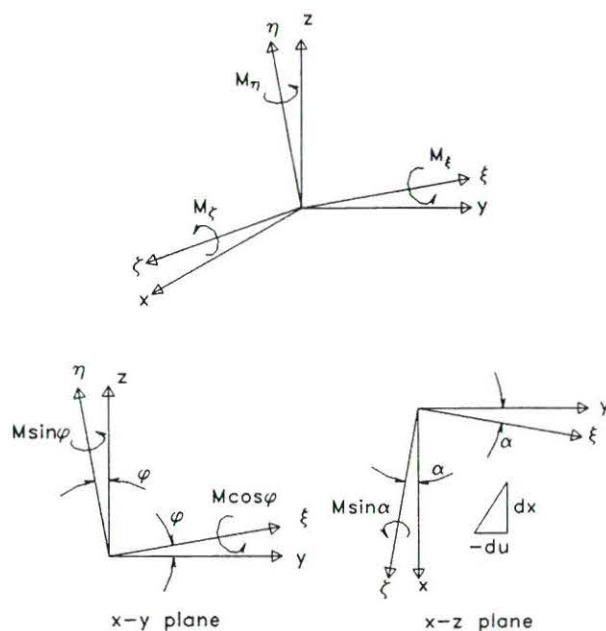
$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \quad (17)$$

Med udgangspunkt i den udbøjede bjælke, se *figur 2* eller *figur 3*, kommer man frem til følgende, kvalitative vurdering: Det forhold, at både bøjningsstivheden  $EI_z$  om bjælke-tværsnittets svage akse, vridningsstivheden  $GI_t$  og hvælningsstivheden  $EI_w$  optræder i ligning (17), hænger direkte sammen med, at der ved bjælkens udbøjning forekommer såvel sideflytninger som vridnings- og hvælningsdeformationer. Desuden har forholdet mellem stivhederne  $GI_t$  og  $EI_w$  betydning, hvilket afspejles i det andet af kvadratrodsudtrykkene. Også længden har stor betydning, idet den indgår både direkte og indirekte via størrelsen  $\pi^2 EI_w / L^2 GI_t$ . Det er ikke muligt at simplificere ligning (17) ved at udelade dele af formeludtrykket uden at indføre en stærk begrænsning af det tilnærmede resultats gyldighedsområde.

På *figur 4* er begrebet hvælvning illustreret. *Figur 5* supplerer fig. 2 og 3. Mere herom i Appendix 1.

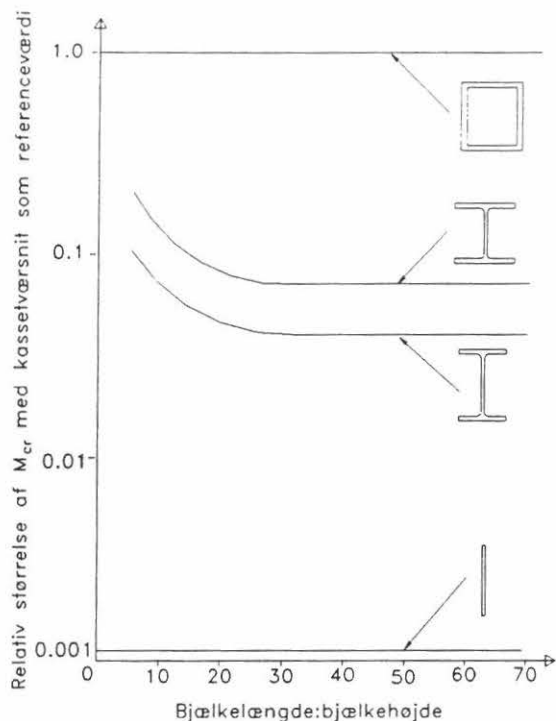


Figur 4. Hvælvning af tværsnit



Figur 5. Opløsning af endemomentet  $M$  i momenter om den deformerede bjælkes akser

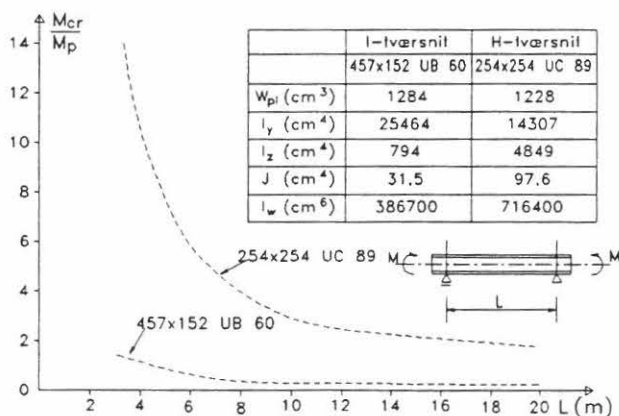
På figur 6 vises et eksempel på de kritiske, elastiske momenter efter (17) for de forskellige tværsnitstyper, der er præsenteret i lektion 7.8.1. For begge de to typer af I-bjælker ses det, at de største værdier af  $M_{cr}$  forekommer i området med lave værdier af forholdet mellem bjælkelængde og -højde. Dette hænger sammen med, at den anden kvadratrods i udtrykket her har en værdi væsentligt over 1,0. Eftersom effekten af



Figur 6. Tværnitstypens betydning for størrelsen af det elastiske kritiske moment

hvælvning (se Appendix 1) vil være mest betydende for høje tværnit sammensat af tynde plader, vil størrelsen  $\pi^2 EI_w / L^2 GI_t$  generelt have en stor værdi for korte, høje bjælker, medens den vil være lille for lange bjælker med lille højde.

Betydningen af tværnittets form for I-bjælker belyses på figur 7, der viser en sammenligning mellem et relativt højt, smalt I-profil (UB) og et H-profil (UC) med næsten samme plastiske modstandsmoment for bøjning om den stærke akse. Det ses, at det kritiske moment for I-profilet er væsentligt mindre end for H-profilet, hvilket naturligvis hænger sammen med, at det smalle profil (I) har meget mindre sidestivhed.



Figur 7. Sammenligning af elastiske kritiske momenter for et I- og et H-tværsnit med samme bøjningsstyrke  $M_p$

### 3. ANDRE TILFÆLDE END BASISTILFÆLDET

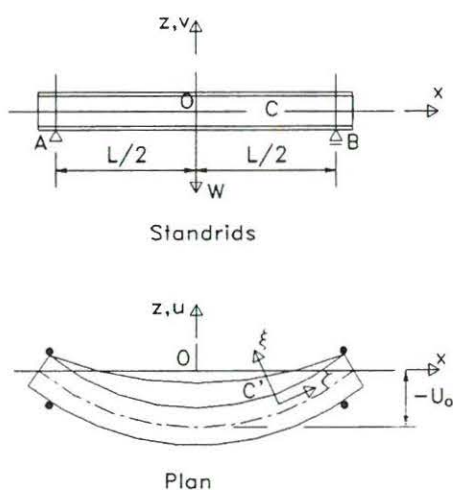
#### 3.1 Belastningstype

For en række andre lasttilfælde kan der opstilles og løses en differentiallyingning svarende til (8) i Appendix 1. I modsætning til basistilfældet vil momentet i et vilkårligt punkt være en funktion af  $x$ , og det matematiske problem vil derfor være mere komplekst.

Tag f. eks. en bjælke belastet på midten med en punktlast  $W$ , der virker i bjælkens tyngdepunktslinie, se *figur 8*. Løsningen for dette tilfælde giver en værdi af det kritiske moment  $M_{cr}$  ved fagmidten, der passende kan sammenlignes med værdien for basistilfældet.

$$\text{Basistilfældet:} \quad M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \quad (17)$$

$$\text{Punktlast på midten:} \quad M_{cr} = \frac{4,24}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \quad (21)$$

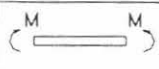
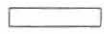


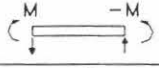

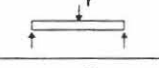

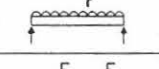

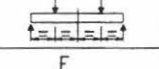
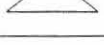
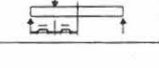
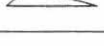


Figur 8. Kipning af simpelt understøttet bjælke med en punktlast ved fagmidten

Forholdet mellem de to konstanter  $\pi/4,24 = 0,74$  er den reciproke værdi af den koefficient  $C_1$ , der blev introduceret i lektion 7.9.1. Dens talværdi er et direkte mål for et lasttilfældes "farlighed" i forhold til basistilfældet, d.v.s. bjælkens tilbøjelighed til at blive instabil ved kipning.

På *figur 9* er der angivet en tabel med  $C_1$ -værdier for en række forskellige lasttilfælde. Bemærk, at stabiliteten mod kipning generelt set stiger, jo mere momentkurven fjerner sig fra momentfordelingen i basistilfældet.

$$M_{cr} = \frac{1}{C_1} \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GJ_t} \sqrt{\frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t} + 1}$$

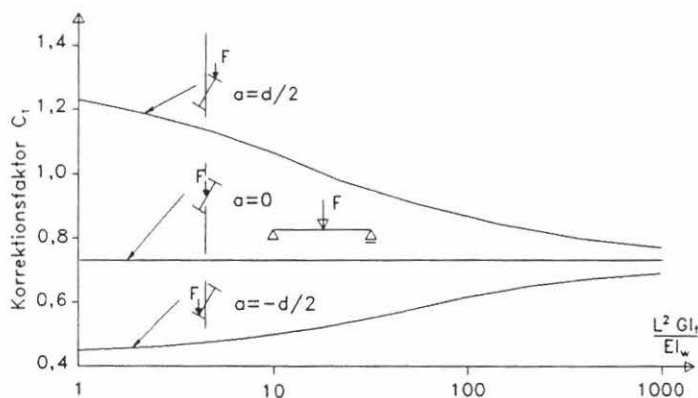
Bjælke og last	Momentkurve	$M_{max}$	$C_1$
		M	1,00
		M	0,60
		M	0,40
		$\frac{FL}{4}$	0,74
		$\frac{FL}{8}$	0,89
		$\frac{FL}{4}$	0,94
		$\frac{3FL}{16}$	0,68

Figur 9. Faktorer  $C_1$  til bestemmelse af kritiske momenter for simpelt understøttede bjælker med udgangspunkt i basistilfældet

### 3.2 Placering af last i forhold til tyngdepunktslinien

Ved belastning i bjælkens symmetriplan med laster, der frit kan flytte sig sammen med bjælken, når der indtræder kipning, har det stor betydning, i hvilken højde (i forhold til bjælkeaksen, d.v.s. bjælkens tyngdepunktslinie) lastens angriber. Løsningen af kippingsproblemet for en punktlast, der er vilkårligt placeret i forhold til bjælkens tyngdepunktslinie kan bekvemt findes ved at benytte en energimetode, sådan som det er vist i Appendix 2.

Når lasten angriber i højde med enten overflangen eller underflangen, hvilket f. eks. kan være tilfældet med last fra en kranboggie, kan udtrykket (21) stadig benyttes, idet dog faktoren 4,24 erstattes med talfaktor, hvis størrelse varierer med forholdet  $L^2 GI_t / EI_w$  som vist på figur 10. Ud fra skitserne på figur 10 kan man få et indtryk af



Figur 10. Virkning af lastens placering i forhold til tyngdepunktet

den destabiliserende henholdsvis stabiliserende virkning, der er årsagen til, at belastning i niveau med overflangen og belastning i niveau med underflangen giver mindre henholdsvis større kritisk last end belastning i tyngdepunktslinien. Denne tendens må naturligvis forventes at blive mere udtalt, jo højere profil og/eller mindre spændvidde der benyttes, d.v.s. når størrelsen  $L^2GI_t/EI_w$  bliver mindre.

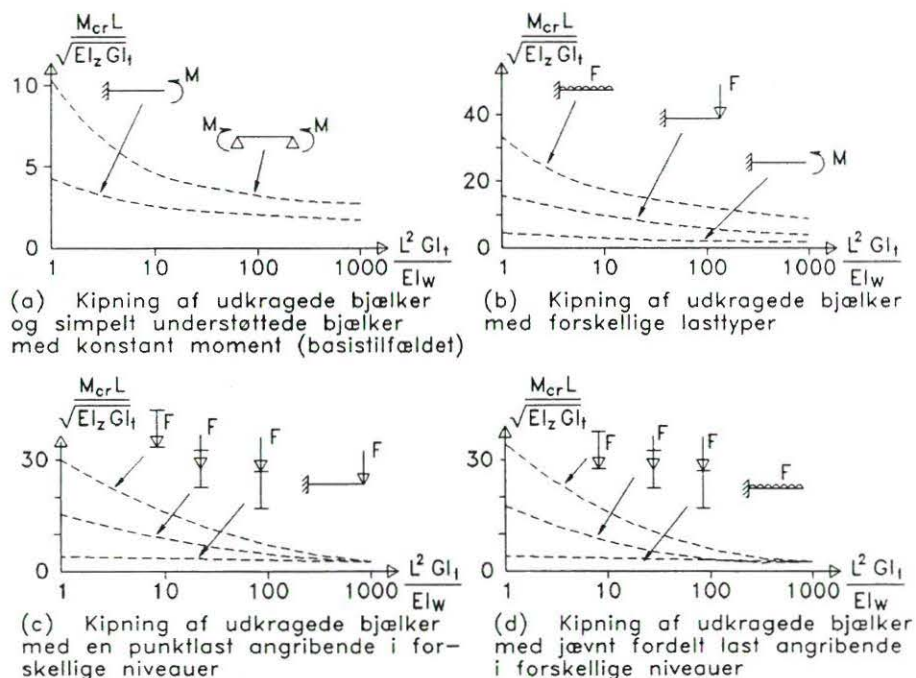
### 3.3 Understøtningsforhold i sideretningen

Det er allerede antydnet i lektion 7.9.1, at afstivninger, der forhindrer eller blot hæmmer en bjælkes kipningsdeformationer, vil forbedre dens stabilitet over for kipning. På den anden side vil en sidefastholdelse, der er mindre effektiv end forudsat i basistilfældet, reducere denne. Under forudsætning af, at de relevante understøtningsbetingelser kan inddrages i beregningsmetoderne i Appendix 1 og 2, kan hvilken som helst konstruktionsudformning behandles.

En bekvem måde at medtage virkningen af forskellige understøtningsbetingelser på, er at definere  $L$  i ligning (17) som en effektiv længde  $\ell$ , hvor den nøjagtige værdi af forholdet  $\ell/L$  afhænger af, i hvilket omfang bjælkens sidebøjning og dens hvælvning er forhindret. I Eurocode 3 kvantificeres dette ved brug af følgende to faktorer:

- $k$  der refererer til vinkeldrejning i belastningens plan ved bjælkens ender
- $k_w$  der refererer til hvælvning ved bjælkens ender.

Det anbefales, at  $k_w$  sættes til 1,0, med mindre der helt konkret sørges for en konstruktionsudformning, som hindrer tværnitshvælvningen;  $k$  varierer fra 0,5 svarende til fuld indspænding i begge ender, over 0,7 svarende til fuld indspænding i den ene ende og simpel understøtning i den anden, og til værdien 1,0 for simpel understøtning i begge ender.



Figur 11.

Et tilfælde af særlig interesse er den indspændte, udkragede bjælke. For denne er der på *figur 11* vist nogle resultater, hvoraf man kan uddrage følgende konklusioner:

1. Udkragede bjælker med konstant moment er mindre stabile end simpelt understøttede bjælker med samme spændvidde.
2. Stabiliteten forbedres, når momentet er koncentreret i nærheden af understøtningen, som det f. eks. er tilfældet med en punktlast i bjælkens frie ende eller - endnu mere udtalt - en jævnt fordelt belastning.
3. Virkning af lastens højdeplacering er endnu mere markant for udkragede bjælker end for simpelt understøttede bjælker.

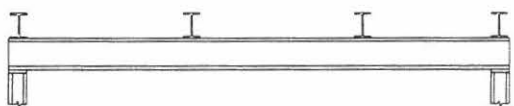
### 3.4 Kontinuerte bjælker

Kontinuitet kan forekomme på to forskellige måder:

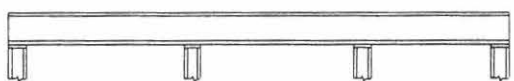
1. I en ét-fags bjælke, der er forsynet med flere sideafstivninger, så der fremkommer horisontal kontinuitet mellem de delbjælker, der ligger mellem afstivningerne, se *figur 12a*.
2. I lodret plan som vist på *figur 12b*.

I det første tilfælde vil det være på den sikre side at basere dimensioneringen af hele bjælken på den mest kritiske delbjælke, der beregnes, som om den ikke havde nogen forbindelse med de øvrige delbjælker. I det andet tilfælde går der ud fra det aktuelle momentforløb i hvert enkelt fag med den dertil svarende  $C_1$ -faktor.

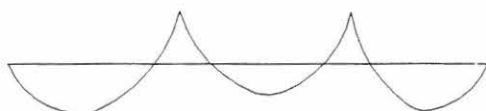
Hvis overflangen kan regnes sidefastholdt i hele sin længde (eller eventuelt blot med meget lille afstand mellem punktafstivninger), f. eks. ved at være fastholdt af en betonplade, må der tages særligt hensyn til de strækninger, hvor det er underflangen, der har tryk, hvilket forekommer i nærheden af understøtningerne eller hvor der kan optræde opadrettede kræfter.



(a) Bjælke, der er kontinuert i vandret plan



(b) Bjælke, der er kontinuert i lodret plan



Figur 12. To forskellige typer af kontinuitet for en bjælke



### 3.5 I-bjælker hvis tværsnit ikke er dobbeltsymmetrisk

Den grundlæggende teoretiske løsning af ligning (17) gælder for bjælker, der er symmetriske om den vandrette hovedakse, f. eks. et U-profil med lodret krop og lodret belastning, forudsat at denne virker gennem forskydningscentret (der jo for denne type tværsnit ikke er sammenfaldende med tyngdepunktet).

Derimod vil det for bjælker med tværsnit, der kun er symmetriske om den lodrette hovedakse, f. eks. et I-profil med uens flanger, være nødvendigt med visse modifikationer for at tage hensyn til den såkaldte Wagner-effekt. Denne optræder som et direkte resultat af, at forskydningscentret og tyngdepunktet ikke ligger i samme højde og fører til enten en forøgelse eller en formindskelse af tværsnittets vridningsstivhed. Sammenlignet med et dobbeltsymmetrisk I-profil vil det enkelt-symmetriske I-profil have bedre stabilitet mod kipning, når dets største flange er påvirket til tryk - og ringere stabilitet, når det er den mindste flange, der har tryk - naturligvis under forudsætning af, at de to profiler har nogenlunde ens egenskaber (højde, bøjningsstivhed etc.).

Tværsnit uden nogen symmetriakse vil normalt få bøjning om begge hovedakser samt vridning som følge af flytning af lastens angrebepunkt. De kan derfor ikke behandles ved hjælp af de allerede udviklede udtryk, men må betragtes på samme måde som dobbeltsymmetriske tværsnit med toakset bøjning (skæv bøjning).

### 3.6 Bjælker med kontinuert, elastisk fastholdelse mod vridning

Det elastiske, kritiske moment for en dobbeltsymmetrisk I-bjælke med en kontinuert, elastisk vridningsfastholdelse, hvis stivhed udtrykkes ved fjederkonstanten  $K_\phi$ , kan udtrykkes således:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t} + \frac{K_\phi L^2}{\pi^2 GI_t}}$$

Dette udtryk kan omformes til

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z (GI_t + K_\phi L^2 / \pi^2)} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 (GI_t + K_\phi L^2 / \pi^2)}}$$

Ved sammenligning med (17) konstateres det, at den elastiske fastholdelse har samme virkning, som hvis bjælkens vridningsstivhed var forøget til  $GI_t$  til værdien  $(GI_t + K_\phi L^2 / \pi^2)$ , hvilket gør det enkelt at vurdere effekten af fastholdelsen.

Et vigtigt eksempel på realisering af en sådan fastholdelse er den i praksis hyppigt anvendte tagkonstruktion med bjælker, der bærer en tagdækning af tyndpladeprofiler, som spænder vinkelret på bjælkerne. Her vil tagdækningens bøjningsstivhed kunne udnyttes til at etablere en fjedrende vridningsunderstøtning for bjælkerne (forudsat at befæstelsen af pladerne til bjælkerne udføres i overensstemmelse hermed).

#### 4. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Det elastiske, kritiske moment der fremkalder kipning af en slank bjælke kan bestemmes ved en fremgangsmåde, der meget minder om udledelsen af Eulerlasten for en slank søjle.
2. Ud fra udtrykket for det elastiske, kritiske moment i basistilfældet (simpelt understøttet bjælke med konstant moment) kan man få en ide om betydningen af tværsnittets form, idet den påvirker bjælkens modstand mod sidebøjning ( $EI_y$ ), vridning ( $GI_t$ ) og hvælvning ( $EI_w$ ). Desuden ses det, at afstanden mellem de punkter, hvori bjælken er sidefastholdt, er en vigtig parameter.
3. Med baggrund i basistilfældet kan virkningen af lasttype, understøtningsbetingelser og påførsel af destabiliserende laster kvantificeres.
4. Lasttilfælde, der giver en ikke-konstant momentkurve kan sammenlignes med basistilfældet ved indførelsen af en koefficient  $C_1$ . Da de fleste tilfælde vil være mindre farlige end basistilfældet, vil  $C_1$  normalt være større end 1,0.

#### LITTERATURHENVISNINGER

1. Narayanan, R., Editor, "Beams and Beam Columns: Stability and Strength", Applied Science Publishers 1983.  
Kapitel 1-3 handler om forskellige aspekter vedrørende fænomenet kipning og beregningsmetoder for bjælker uden sidefastholdelse.
2. Chen, W. F. and Atsuta, T. "Theory of Beam Columns Volume 2, Space Behaviour and Design", McGraw Hill 1977.  
Kapitel 3 handler om bjælker uden sidefastholdelse.
3. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability" Second Edition, McGraw Hill 1961.  
Den grundlæggende udledning af det elastiske, kritiske moment er i kapitel 6 angivet for en række forskellige bjælkeproblemer.
4. Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw Hill 1952.  
Den grundlæggende teori for kipning af bjælker omtales i kapitel 4.
5. Galambos, T. V., "Structural Members and Frames", Prentice-Hall 1968.  
Kapitel 2 behandler den grundlæggende, elastiske teori for kipning.  
Kapitel 3 medtager det ikke-elastiske område samt dimensionering af bjælker uden sidefastholdelse.
6. Trahair, N. S. and Bradford, M. A., "The Behaviour and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, Second Edition, 1988.

Bjælker uden sidefastholdelse behandles i kapitel 6.

7. Eurocode No. 3: Stålkonstruktioner. Del 1-1.  
Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner (DS/ENV 1993-1-1).

## APPENDIX 1: TEORI FOR ELASTISK KIPNING

### Opstilling af differentialligninger

Den deformerede bjælke med flytningerne  $u$  og  $v$  samt vridningsvinkelen  $\phi$  er vist på figur 3. Ud over det "globale" koordinatsystem  $xyz$  indføres et  $\xi\eta\zeta$ -system, der følger med bjælken i dens deformationer, se samme figur. Bøjning i  $\xi\zeta$ - og i  $\eta\zeta$ -planen samt drejning om  $\zeta$ -aksen styres af følgende ligninger:

$$EI_y \frac{d^2 v}{dx^2} = M_\xi \quad (1)$$

$$EI_z \frac{d^2 u}{dx^2} = M_\eta \quad (2)$$

$$GI_t \frac{d\phi}{dx} - EI_w \frac{d^3 \phi}{dx^3} = M_\zeta \quad (3)$$

I ligning (1) og (2) er bøjningsstivheden og krumningen i henholdsvis  $\xi\zeta$ - og  $\eta\zeta$ -planen erstattet af værdierne for henholdsvis  $yx$ - og  $zx$ -planen, idet vinkelen  $\phi$  antages at være lille. Bemærk, at ligning (3) afspejler begge de måder, hvorpå et tyndfliget profil kan modstå vridning: det første led svarer til den del af vridningen, der resulterer i forskydningspændinger (fri vridning), medens andet led tager hensyn til forhindret hvælvning af tværsnittet (der typisk resulterer i normalspændinger, se nedenfor).

Dette fænomen hænger sammen med den type deformationer, som flangerne i et I-profil får, når bjælken belastes med lige store vridningsmomenter ved enderne, se figur 4a. De to flanger vil bøje ud hver sin vej ved drejning om en lodret akse gennem kroppen, hvorved de oprindeligt plane (normal-)snit ikke længere er plane - tværsnittet hvælver sig. Hvis man i stedet for betragter en udkraget bjælke, se figur 4b, er det imidlertid klart, at selvom der kan optræde tilsvarende hvælvningsdeformationer ved denne bjælkes frie ende, må disse være i det mindste delvis forhindrede langs bjælken, eftersom de ikke kan forekomme ved indspændingen. Ved denne hvælvningsforhindring fremkaldes der i hver af flangerne normalspændinger, som summeret over flangetværsnittet er ækvivalent med et moment, hvis momentvektor er sammenfaldende med den ovenfor omtalte drejningsakse. De to lige store flangemomenter, der tilsammen benævnes et bimoment, yder herved et bidrag til tværsnittets modstand mod vinkeldrejning om bjælkeaksen. Når det drejer sig om kipning, vil der på tilsvarende måde optræde en modstand mod tværsnitshvælvningen som følge af, at nabotværsnit ikke vil hvælve sig ens.

For et I-tværsnit er størrelsen af henholdsvis hvælvningsinertimomentet  $I_w$  og vridningsinertimomentet  $I_t$

$$I_w = I_z \frac{h_f^2}{4} \quad \text{og} \quad I_t = \frac{2bt^3}{3} + \frac{dt_w^3}{3}$$

Her refererer  $b$  og  $t$  til flangerne,  $d$  og  $t_w$  til kroppen, og  $h_f$  er flangeafstanden.

De væsentligste parametre er her pladetykkelsen i flanger og krop samt bjælkehøjden. For kompakte tværsnit, f. eks. til søjler, der skal have stor bæreevne, men ikke må fylde så meget, vil det første led i ligning (3) tegne sig for størstedelen af vridningsmodstanden, medens det andet led vil være dominerende for de mere udprægede bjælkeprofiler med stor profilhøjde.

Ved betragtning af den deformerede bjælke, se *figur 2, 3 og 5*, kan komponenterne af det ydre moment  $M$  i  $\xi\zeta$ -planen (d.v.s. om  $\eta$ -aksen), i  $\eta\zeta$ -planen (d.v.s. om  $\xi$ -aksen) og i  $\xi\eta$ -planen (d.v.s. om  $\zeta$ -aksen) bestemmes til

$$M_{\xi} = -M \cos\phi, \quad M_{\eta} = M \sin\phi, \quad M_{\zeta} = M \sin\alpha \quad (4)$$

Idet  $\phi$  er en lille størrelse, fås  $\cos\phi \approx 1$  og  $\sin\phi \approx \phi$ . Desuden kan  $\sin\alpha$  tilnærmes med  $du/dx$ . Herefter kan ligning (1) - (3) skrives således:

$$EI_y \frac{d^2v}{dx^2} = -M \quad (5)$$

$$EI_z \frac{d^2u}{dx^2} = M\phi \quad (6)$$

$$GI_t \frac{d\phi}{dx} - EI_w \frac{d^3\phi}{dx^3} = -M \frac{du}{dx} \quad (7)$$

Da ligning (5) kun indeholder den lodrette flytning ( $v$ ), er den uafhængig af de to andre ligninger; den beskriver bjælkens virkemåde i lodret plan svarende til fremstillingen i lektion 7.8.1. Ligning (6) og (7) er koblede i  $u$  og  $\phi$ , d.v.s. de flytninger der er knyttet til kipningen. Ved løsning af dem fås størrelsen af det elastiske, kritiske moment ( $M_{cr}$ ), ved hvilket bjælken bliver ustabil. Ved differentiation af (7) og indsættelse af (6) i det derved fremkomne udtryk kan  $u$  elimineres, og der fås følgende differentialligning i  $\phi$ :

$$EI_w \frac{d^4\phi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{M^2}{EI_z} \phi = 0 \quad (8)$$

## Løsninger

Inden løsningen til (8) præsenteres, skal det bemærkes, at løsningen bliver væsentligt simplere, hvis hvælvingsstivheden ( $I_w$ ) antages at være nul. Resultaterne kan da direkte anvendes for bjælker med smalt, rektangulært tværsnit, mens de vil være på den sikre side for de normalt forekommende I-tværsnit (d.v.s. størrelsen af  $M_{cr}$  vil blive undervurderet for disse). Hvis  $I_w$  altså er nul, reduceres (8) til

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_z GI_t} \phi = 0 \quad (9)$$

Idet der sættes  $\frac{M^2}{EI_z GI_t} = \mu^2$ , kan løsningen skrives på formen:

$$\phi = A \cos \mu x = B \sin \mu x \quad (10)$$

Herefter indføres randbetingelserne ved begge ender af bjælken:

$$\text{For } x = 0 \text{ er } \quad \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad (11)$$

$$\text{For } x = L \text{ er } \quad \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad B \sin \mu L = 0$$

$$\text{og dermed enten} \quad B = 0 \quad (12)$$

$$\text{eller} \quad \sin \mu L = 0 \quad (13)$$

Ligning (12) svarer til, at der ikke er nogen udbøjning, medens (13) fører til:

$$\mu L = 0, \pi, 2\pi \quad (14)$$

med den første ikke-trivielle løsning:

$$\mu L = \pi \quad (15)$$

og dermed:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \quad (16)$$

Eftersom (9) har samme form som den grundlæggende differentiaalligning for en Eulersøjle, gælder der her de samme overvejelser angående løsningen, jævnfør lektion 6.3.

Løsningen til ligning (8), der gælder for en bjælke *med* hvælvningsstivhed, ser således ud:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \quad (17)$$

Ved sammenligning med (16) ses det umiddelbart, at hvælvningseffekten forøger værdien af  $M_{cr}$ . Kvantitativt afhænger forøgelsen af forholdet mellem  $EI_w$  og  $GI_t$  samt af bjælkens længde.

## APPENDIX 2: KIPNING AF EN BJÆLKE MED EN LODRET PUNKTLAST PÅ MIDTEN

Som i Appendix 1 opstilles differentiallyingningerne for bjælken i udbøjet tilstand. Punktlasten  $W$ , der virker i tyngdepunktet  $O$  af midtvertværsnittet, følger med bjælken i udbøjningen og giver derved et moment om  $x$ -aksen af størrelsen  $(W/2)(u_0 - u)$ , se figur 8. Svarende til ligningerne (4) i Appendix 1 fås følgende 3 udtryk:

$$M_\xi = \frac{W}{2} \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

$$M_\eta = \frac{W}{2} \left( \frac{L}{s} - x \right) \sin \phi \quad (18)$$

$$M_\zeta = \frac{W}{2} \left( \frac{L}{2} - x \right) \sin \alpha + \frac{W}{2} (u_0 - u) \cos \alpha$$

Disse udtryk indføres i de grundlæggende differentiallyingninger (1) - (3), og sideflytningen  $u$  elimineres af de derved fremkomne ligninger. Resultatet bliver følgende differentiallyingning i  $\phi$ :

$$EI_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{W^2}{4EI_z} \left( \frac{L}{2} - x \right)^2 \phi = 0 \quad (19)$$

Med udgangspunkt i en tilnærmet løsning kan resultatet udtrykkes som

$$W_{cr} = 5,4 \frac{\pi}{L^2} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \quad (20)$$

Momentet i bjælkens midtersnit bliver herefter

$$M_{cr} = \frac{4,24}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}} \quad (21)$$

I stedet for at opstille differentiallyingningerne til bestemmelse af den elastiske, kritiske last kan problemet løses ved hjælp af energimetoden (arbejds-ligningen). Ved denne udtrykkes lighed mellem det arbejde, der udføres af den ydre last, og den tøjningsenergi der er "oplagret" i bjælken som følge af deformationerne. Ved betragtning af et bjælkeelement ved  $C$  med længden  $dx$ , ses det, at bøjning i  $\xi\zeta$ -planen giver en rotation af bjælkeende  $B$  i  $\xi\zeta$ -planen af størrelsen:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \left( \frac{L}{2} - x \right) dx \quad (22)$$

Den lodrette komponent er:

$$\phi \frac{d^2 u}{dx^2} \left( \frac{L}{2} - x \right) dx \quad (23)$$

Ved summation heraf mellem  $x = 0$  og  $x = L/2$  fås den samlede lodrette flytning ved lasten, der, multipliceret med  $W$  giver det ydre arbejde

$$A_y = W \int_0^{L/2} \phi \frac{d^2 u}{dx^2} \left( \frac{L}{2} - x \right) dx \quad (24)$$

Tøjningsenergien, d.v.s. det indre arbejde hidrørende fra bøjning, vridning og hvælvning er:

$$A_i = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left[ \frac{d^2 u}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{EI_w}{2} \int_0^L \left[ \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{GI_t}{2} \int_0^L \left[ \frac{d\phi}{dx} \right]^2 dx \quad (25)$$

Udbøjningens form antages at kunne beskrives med følgende udtryk:

$$\phi = a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{3\pi x}{L} \quad (26)$$

der indsættes i (24) og (25), hvorefter den kritiske værdi af lasten  $W$  kan bestemmes, idet  $A_y = A_i$ .

Ved benyttelse af denne fremgangsmåde kan man også undersøge det tilfælde, hvor lasten  $W$  angriber over eller under tyngdepunktsaksen. Hvis  $W$  f. eks. virker stykket  $a$  over tyngdepunktet, vil det udførte arbejde (24) forøges med

$$Wa (1 - \cos \phi_0) = Wa \phi_0^2 / 2$$

hvor  $\phi_0$  er størrelsen af  $\phi$  i snittet ved lastens angrebepunkt.





## Lektion 8.1 Introduktion til dimensionering af plader

### FORMÅL

At introducere emnet plader og deres evne til at modstå laster i planen og vinkelret herpå, og beskrive deres virkemåde både som enkelt pladefelt og som del af afstivede plader.

### FORUDSÆTNINGER

Ingen.

### LEKTIONER VEDRØRENDE BESLÆGTEDE EMNER

Lektion 8.2: *Behaviour and Design of Unstiffened Plates*

Lektion 8.3: *Behaviour and Design of Stiffened Plates*

### RESUMÉ

I denne lektion introduceres anvendelsen af pladefelter og plader i stålkonstruktioner. Virkemåden af et pladefelt belastet i planen og vinkelret herpå beskrives, herunder betydningen af de geometriske forhold og understøtningsbetingelser. De grundlæggende udbøjningsformer og kombinationer heraf præsenteres. Begrebet effektiv bredde introduceres, og det beskrives, hvorledes imperfektioner i virkelige plader påvirker deres virkemåde. Desuden gives en kort introduktion til virkemåden af afstivede plader.

Oversat og bearbejdet af S. Kloch, Aalborg Universitet, juli 1996

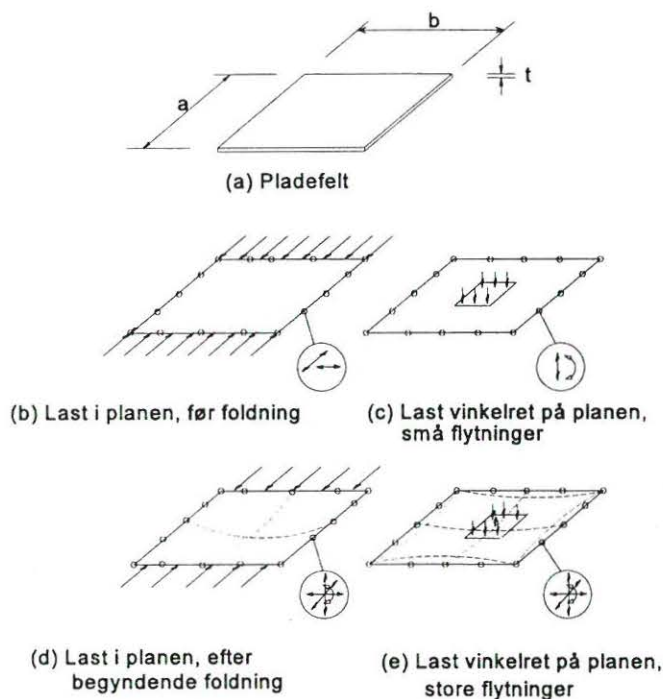
## 1. INTRODUKTION

Plader udgør et vigtigt konstruktionselement i stålkonstruktioner. De enkelte pladefelter kan samles til komplekse tværsnit, som det sker gennem valsning eller koldbukning af profiler, eller samles ved svejsning. Effektiviteten af sådanne tværsnit skyldes den store stivhed i planen af det enkelte pladeelement, der sikrer naboelementerne mod udbøjning vinkelret på planen langs randen.

Størrelsen af de plader, der anvendes i stålkonstruktioner, varierer fra en tykkelse på ca. 0.6 mm og en bredde på 70 mm i tyndpladekonstruktioner, til en tykkelse på ca. 100 mm og en bredde på 3 meter i store industrikonstruktioner eller offshore konstruktioner. Uanset konstruktionens størrelse vil pladens tykkelse  $t$  være meget mindre end pladens bredde  $b$  eller længden  $a$ . Det vil senere fremgå, at den vigtigste geometriske parameter for et pladefelt er  $b/t$ , og at dette forhold i en effektiv pladekonstruktion vil variere mellem 30 og 250.

## 2. DEN BASALE VIRKEMÅDE AF ET PLADEFELT

For at forstå hvordan pladekonstruktioner virker, er det hensigtsmæssigt først at undersøge virkemåden af et enkelt pladefelt.



Figur 1 Pladefelt med typiske understøtningsbetingelser

### 2.1 Geometri og understøtningsbetingelser

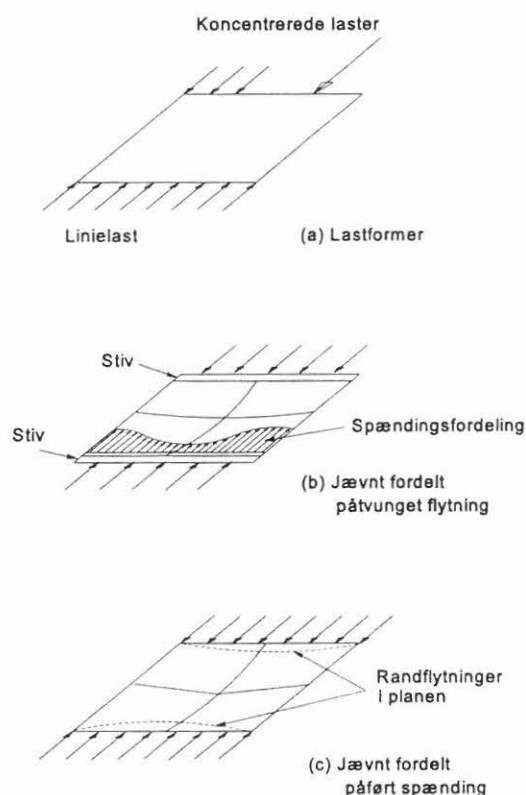
De vigtigste geometriske parametre er tykkelsen  $t$ , bredden  $b$  (normalt målt vinkelret på hovedkraftretningen) og længden  $a$ , se *figur 1a*. Forholdet  $b/t$ , der kaldes pladens slankhedsforhold, har indflydelse på, om der opstår lokal foldning i pladefeltet. Forholdet  $a/b$  kan også påvirke udbøjningsformen og kan have afgørende betydning for styrken.

Ud over pladens geometriske proportioner er understøtningsbetingelserne af afgørende betydning for dens bæreevne. *Figur 1* viser, hvordan pladens virkemåde, ved forskellige former for påvirkning, er afhængig af dens understøtningsbetingelser. Overfor en påvirkning i pladens plan, der ikke forårsager foldning, vil virkemåden kun afhænge af spændingerne i planen og af understøtningsbetingelserne, *figur 1b*. Ved tværbelastning vil virkemåden i begyndelsen kun være afhængig af pladens understøtningsbetingelser vinkelret på planen, *figur 1c*. Når lasten øges, vil pladens virkemåde, for begge lasttyper, påvirkes af alle 4 understøtningsbetingelser. Fastholdelsen mod flytninger ud af planen påvirker foldningen, *figur 1d*, medens fastholdelserne i planen har indflydelse på de membrankræfter, som opstår, når tværlasten giver store deformationer ( $> t$ ), *figur 1e*.

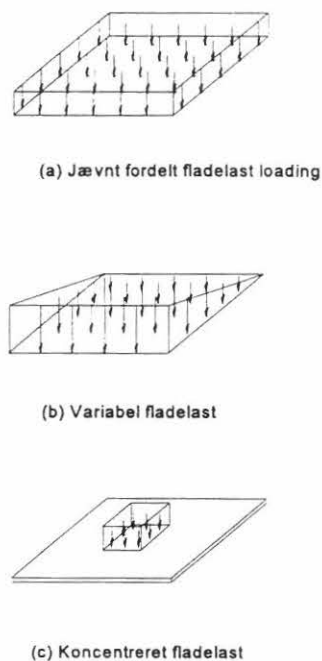
## 2.2 Last i pladens plan

Som vist i *figur 2a* er den basale form for last i pladens plan en linielast, der enten påføres langs en hel side eller lokalt.

Når pladen folder, er det specielt nødvendigt at skelne mellem påførte flytninger, *figur 2b*, og påførte laster, *figur 2c*. Førstnævnte tillader, at der sker en spændingsomlejring i pladen, idet de mere eftergivelige centrale område vil aflastes i forhold til de stivere randområder, hvorved der opnås en værdifuld overkritisk bæreevnereserve.



Figur 2 Lasttyper i planen



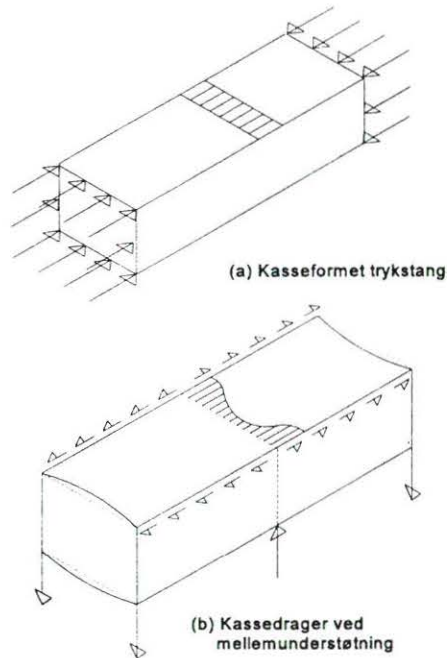
Figur 3 Lasttyper vinkelret på planen

## 2.3 Tværbelastning

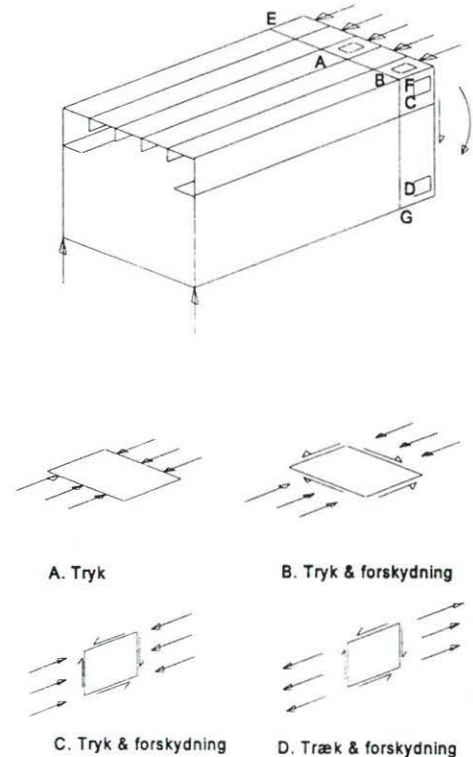
- konstant fladelast over hele pladen, *figur 3a*, f. eks. bundpladen i en vandtank.
- variabel fladelast over hele pladen, *figur 3b*, f. eks. vægge i en vandtank.
- lokal fladelast på en del af pladen, *figur 3c*, f. eks. en hjullast på en broplade.

## 2.4 Fastlæggelse af lasten på et pladefelt.

I nogle tilfælde, f. eks. *figur 4a*, er fordelingen af last langs randene indlysende, men i andre tilfælde vil pladefeltets eftergivelse i planen medføre en fordeling, som ikke kan forudsiges på simpel vis. I kassedrageren vist på *figur 4b* vil flangernes eftergivelse mod forskydningspåvirkninger betyde, at overflagen deformeres i planen, og at der opstår en ikke lineær fordeling af normalspændingerne tværs over overflagen. Dette fænomen kaldes "forskydningslag".



Figur 4 Forskydningslag



Figur 5 Spændingskomponenter i pladefelter i kassedrager

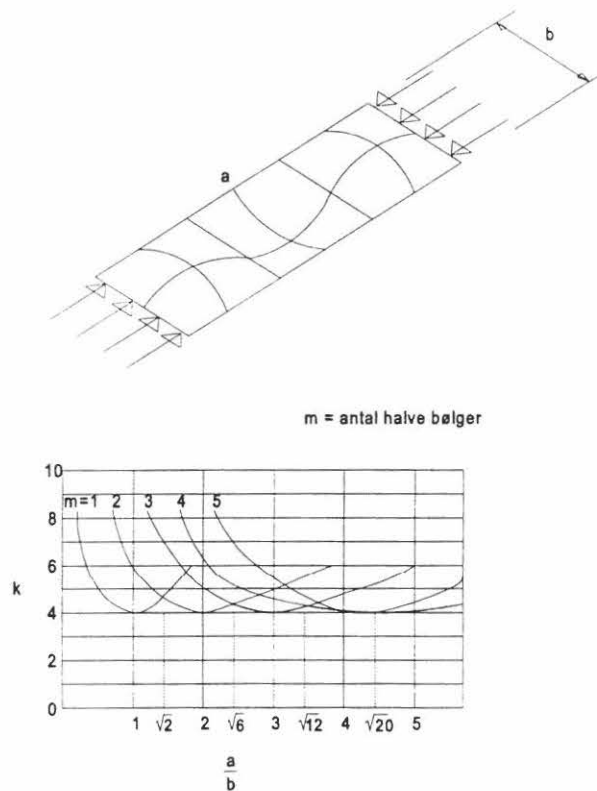
I konstruktionselementer opbygget af plader, som f. eks. kassedrageren vist i *figur 5*, vil mange af pladefelterne blive udsat for mere end en lastkomponent i planen. Kun i feltet A vil der ikke optræde en forskydningspåvirkning samtidig med trykpåvirkningen.

Hvis tværafstivningen ved EFG yderligere har til opgave at overføre kræfter til kassedrageren vil der også opstå tværgående spændinger som følge af samvirken mellem plade og tværafstivning.

## 2.5 Faktorer der har indflydelse på udbøjningsformen

### i. Sideforholdet $a/b$

For et langt pladefelt, som vist *figur 6*, vil den største modstand mod udbøjning ydes af pladens bøjningsstivhed i tværretningen mellem de to ubelastede rande. (I det overkritiske område vil membranvirkningen i tværretningen blive dominerende, efterhånden som pladens udbøjningsform antager en form, der ikke opstår alene på grund af bøjningen).



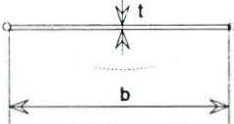
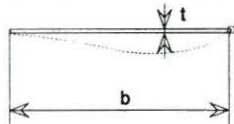
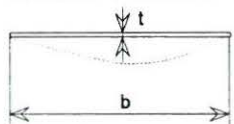
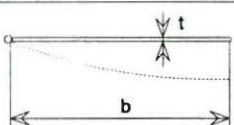
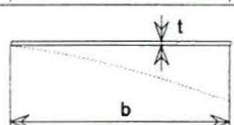
Figur 6 Udbøjningsformens variation med sideforholdet

Som ved ethvert stabilitetsfænomen i et kontinuert medium vil der være flere mulige udbøjningsformer, her en halv bølge i tværretningen og et antal halve bølger i længderetningen. Med voksende sideforhold  $a/b$  vil udbøjningsformen tendere mod en situation, hvor den halve bølgelængde bliver  $a/m=b$ . Virkemåden af et langt pladefelt kan derfor fastlægges ved at betragte et simpelt understøttet kvadratisk felt.

### ii. Randbetingelser

Som vist i *figur 7* har understøtningsbetingelserne indflydelse på både udbøjningsformen og den kritiske spænding for en elastisk plade. Den væsentligste forskel er, om en rand er understøttet eller ej. Det ses ved at

sammenligne tilfælde 1 og 4, hvor fjernelsen af en simpel understøtning betyder, at den kritiske spænding reduceres med faktoren  $4.0/0.425$  eller  $9.4$ . Derimod vil ændringen af en simpelt understøttet rand (tilfælde 1) til en fast indspænding (tilfælde 2) kun øge den kritiske spænding med faktoren  $1.35$ .

Tilfælde	Understøtningsbetingelser for ubelastede rande		k
1	Begge rande simpelt understøttet		4,00
2	En rand simpelt understøttet, den anden indspændt		5,42
3	Begge rande indspændt		6,97
4	En rand simpelt understøttet, den anden fri		0,425
5	En rand indspændt, den anden fri		1,277

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E t^2}{12(1 - \nu^2) b^2}$$

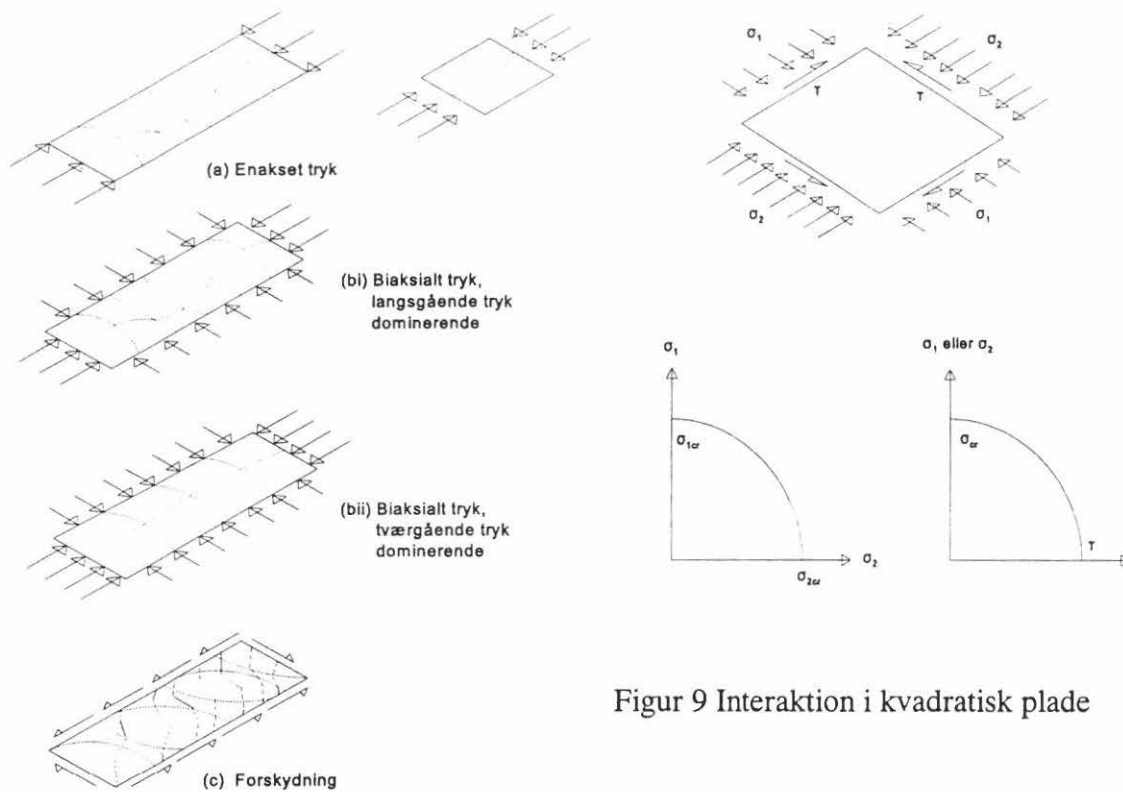
Figur 7 Foldningskoefficienten k ved forskellige understøtningsbetingelser

### iii. Interaktion

Hvis der optræder mere end en lastkomponent, vil der være flere mulige udbøjningsformer, og der kan opstå interaktion imellem disse. Som vist i *figur 8b(i)* vil tilstedeværelsen af beskedent tryk i tværretningen ikke påvirke udbøjningsformen. Derimod vil et stort tryk medføre, at pladefeltet deformeres i form af en enkelt halvbølge (*figur 8b(ii)*). I visse situationer kan en sådan tvangsmæssig ændring af udbøjningsformen resultere i en højere kritisk spænding, det kan være tilfældet i eksemplet vist i *figur 8b(ii)*, hvor et tværtryk kan forøge styrken over for tryk i pladens længderetning. Forskydningsfoldningen som vist i *figur 8c* er grundlæggende en interaktion mellem et destabiliserende diagonaltryk og et tilsvarende stabiliserende diagonaltræk.

Hvis udbøjningsformerne for to forskellige påvirkninger ligner hinanden, vil den kritiske spænding for den kombinerede påvirkning være mindre end summen af værdierne for de individuelle udbøjningsformer. *Figur 9*

viser interaktionskurver dels for 2-akset tryk og dels for 1-akset tryk med forskydning.

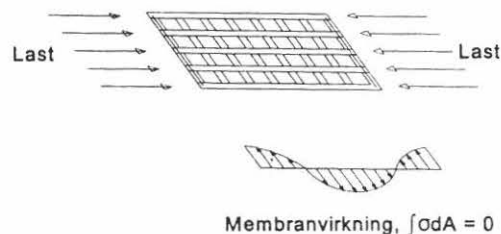


Figur 9 Interaktion i kvadratisk plade

Figur 8 Udbøjningsformer for pladefelter

## 2.6 Risteværksanalogi for foldning af plader

En nyttig måde at betragte fænomenet foldning af plader på er den på *figur 10* viste risteværksanalogi. Det antages at lasten bæres af en række søjler i pladens længderetning, og når de bøjer ud, vil de tværgående ribber yde større modstand over for udbøjning af de søjler, der er nærmest randene, end for dem der findes



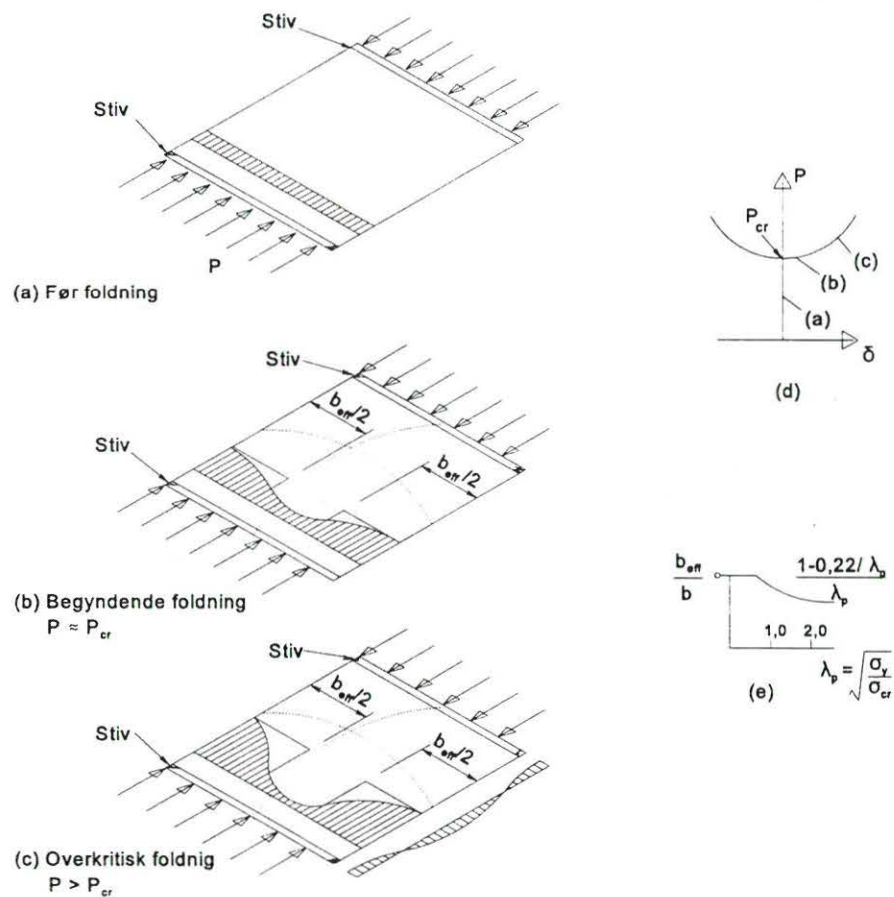
Figur 10 Risteværksanalogi



midt i pladen. Derfor vil de yderste søjler have en større bøjningsstivhed i det overkritiske område og dermed bære en større del af lasten. I det overkritiske område vil risteværkets modstand mod foldning i tværretningen øges som følge af membranvirkningen.

## 2.7 Overkritisk foldning og effektiv bredde

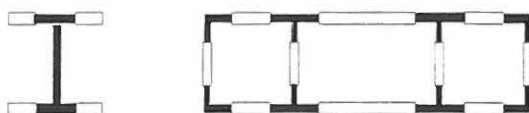
I figur 11a-c er der en mere detaljeret fremstilling af ændringerne i spændingsfordelingen, når pladen følger ligevægtsdiagrammet vist på figur 11d. Ved begyndende foldning vil spændingerne omlejres til de stivere rande, og ved fortsat foldning vil denne omlejring blive mere markant (der kan endog opstå træk i den midterste del, før pladen svigter). I tværretningen vil der opstå membran-spændinger, der udgør en egen-spændingstilstand, med mindre pladens rande fastholdes mod flytninger i planen. I den midterste del vil der opstå trækspændinger, som modvirker foldningen, og de balanceres af trykspændinger ved pladens ender, hvor udbøjningen er hindret.



Figur 11 Simpelt understøttet kvadratisk plade udsat for foldning, belastede rande forbliver rette

Betragtes de ikke-lineære spændingsfordelinger på *figur 11b* og *11c*, ses det, at det er muligt at erstatte disse spændinger med 2 rektangulære spændingsblokke med samme maximale værdi og samme resultant. Den effektive bredde ( $b_{\text{eff}}/2$  på hver side) viser sig at være en yderst nyttig dimensioneringsparameter. *Figur 11e* viser, hvordan den effektive bredde varierer med slankheden ( $\lambda_p$  er et mål for pladens slankhed, som er uafhængig af flydespændingen, og  $\lambda_p=1$  svarer til værdier af  $b/t$  på 57, 53 og 46 for værdier af  $f_y$  på 235, 275 og 355 MPa).

*Figur 12* viser eksempler på, hvordan den effektive bredde af de enkelte pladefelter kombineres til et effektivt tværsnit.



(a) Effektivt areal (sværtet) for typiske trykpåvirkede tværsnit



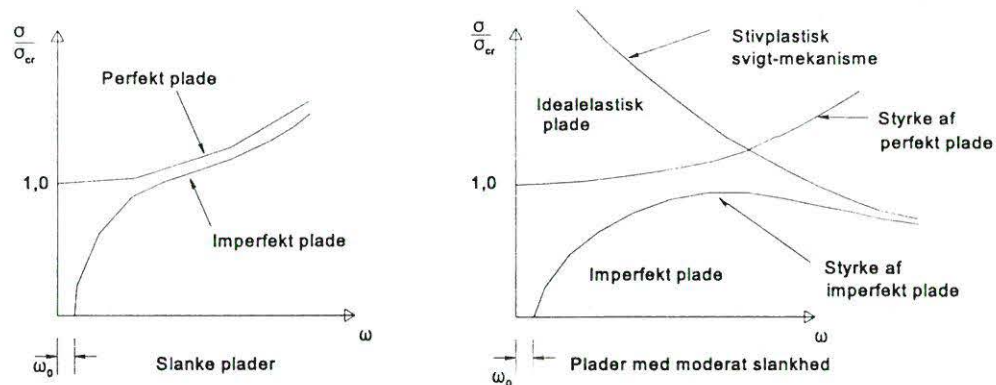
(b) Effektivt areal (sværtet) for typisk momentpåvirket pladedrager

Figur 12 Effektivt tværsnit.

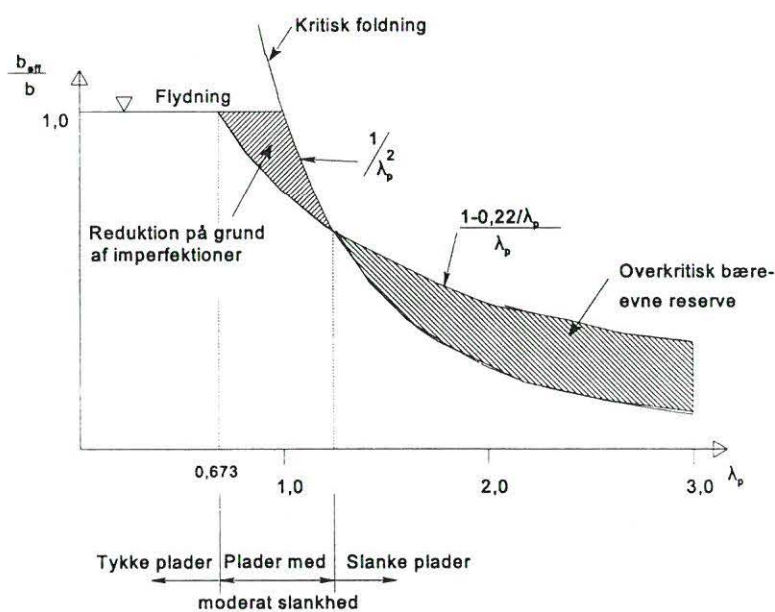
## 2.8 Imperfektionernes indflydelse på pladers virkemåde

Som det er tilfældet med alle stålkonstruktioner, vil der være egenspændinger i pladefelter stammende fra fremstillingsprocessen (valsning og evt. svejsning), og desuden vil de ikke være perfekt plane. I det foregående blev det imidlertid forudsat, at der var tale om perfekte plader uden imperfektioner. Det fremgår af *figur 13*, at imperfektionerne i virkelige plader vil ændre deres virkemåde. For slanke plader vil virkemåden være asymptotisk til den perfekte plades, og der er kun tale om en beskedne reduktion i bæreevne. For plader med moderat slankhed (der i praksis er det almindelige) vil plader med imperfektioner have betydelig lavere bæreevne end tilsvarende perfekte plader.

På *figur 14* er der en sammenfatning af virkelige pladers bæreevne som funktion af slankheden. Den viser reduktionen i bæreevne på grund af imperfektioner samt den overkritiske bæreevnereserve i slanke plader.



Figur 13 Betydningen af imperfektioner.



Figur 14 Effektiv bredde som funktion af slankheden  $\lambda_p$ .

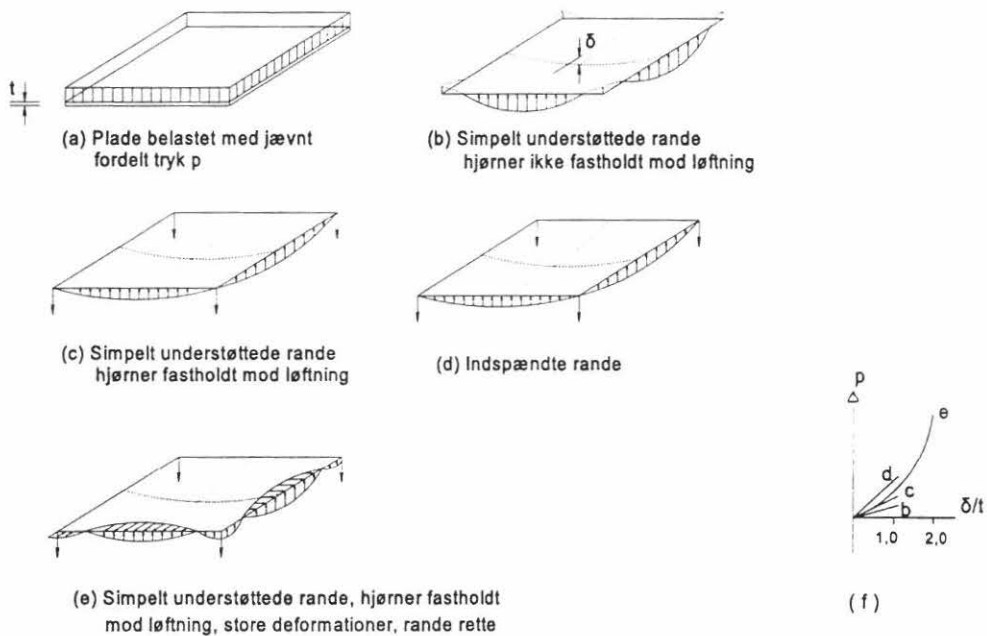
## 2.9 Elastiske plader med tværlast

Den elastiske virkemåde af plader udsat for tværlast er meget afhængig af understøtningsbetingelserne. Hvis pladen er simpelt understøttet som vist *figur 15b*, vil den få en trugformet udbøjning, og hjørnerne vil løfte sig fra understøtningerne. Fastholdes hjørnerne mod løftning, f. eks. ved svejsning, vil pladens stivhed

og bæreevne øges (figur 15c). Er pladens rande indspændte, vil både stivhed og bæreevne øges på grund af indspændingsmomenterne (figur 15d).

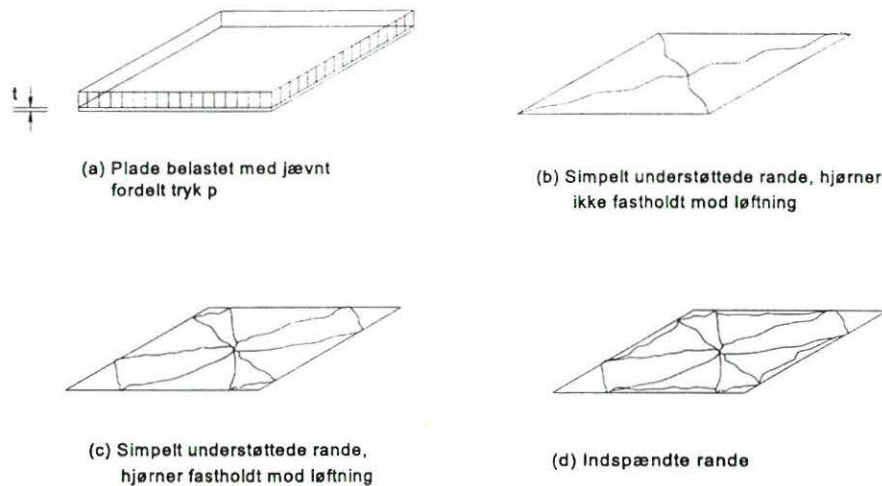
Slanke plader kan opnå store elastiske deformationer, typisk  $d > t$ . I disse tilfælde vil bøjningsstivheden øges betydeligt på grund af membranvirkning i pladen. Denne membranvirkning vil være særlig effektiv, hvis randene er fastholdte i pladens plan. Selv når randene kun delvist fastholdt, vil forbedringen af pladens stivhed og bæreevne være betydelig ved store deformationer.

I figur 15 sammenlignes virkemåden for en plade med forskellige understøtningsbetingelser.



Figur 15 Elastisk plade med tværlast og forskellige randbetingelser

Figur 16 viser virkemåden af den samme plade, når lasten øges til et niveau, så der opstår en brudliniefigur. Det store antal brudlinier, der dannes, når understøtningsbetingelserne forbedres, er et kvalitativt mål for pladens forøgede modstandsevne.

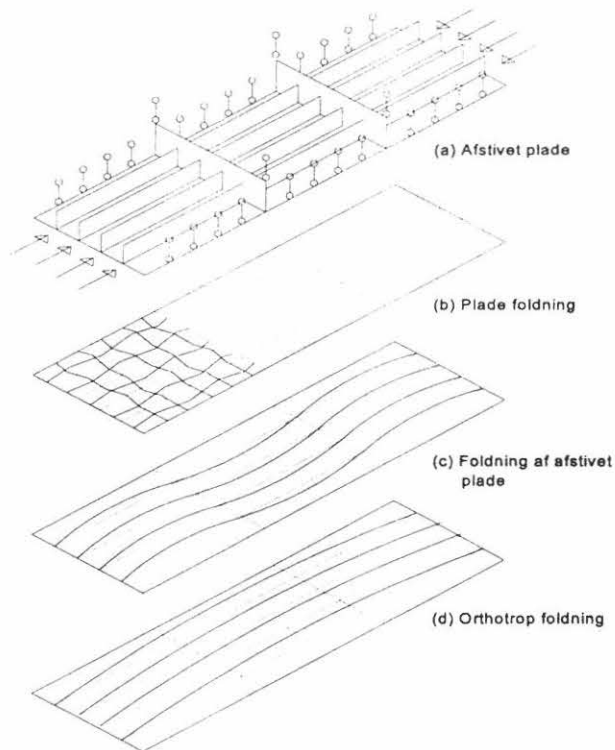


Figur 16 Brudliniefigurer i plade med forskellige understøtningsbetingelser.

### 3. AFSTIVEDE PLADERS VIRKEMÅDE

Mange forhold vedrørende afstivede pladers virkemåde kan udledes fra de uafstivede pladefelter. Når man foretager en sådan ekstrapolation, skal man gøre sig klart:

- at fordelingen af afstivningernes stivhed jævnt over pladebredden er en tilnærmelse.
- afstivningerne er som regel ekscentrisk anbragte, så bøjningen af det ækvivalente T-formede tværsnit lokalt vil give tillægsspændinger i pladen.
- lokale påvirkninger på pladefelter og på den enkelte afstivning skal undersøges separat.
- den omstændighed, at afstivningerne er, dvs. anbragt med en vis indbyrdes afstand, betyder, at der kan opstå lokal foldning. For eksempel vil den afstivede flange (plade) *figur 17a* have adskillige mulige udbøjningsformer:
  - (i) det enkelte pladefelt kan folde på grund af den samlede trykspænding i pladen (incl. tillægsspændinger fra afstivninger), *figur 17b*.



Figur 17 Udbøjningsformer for afstivet plade

- (ii) den afstivede plade folder mellem tværafstivningerne, *figur 17c*. Det sker, hvis tværafstivningen har tilstrækkelig stivhed til at hindre den samlede plade i at folde, men tendensen er ikke særlig udtalt, fordi stivheden i tværretningen kun udgøres af selve pladen. Denne form for foldning behandles bedst ved at modellere den afstivede plade som en serie T-tværsnit, der virker som søjler. Det skal bemærkes, at dette tværsnit er enkeltsymmetrisk og vil derfor virke forskelligt afhængigt af, om trykspændingen er størst i pladen eller ved foden af T-tværsnittet.
- (iii) global eller orthotrop foldning er vist på *figur 17d*. Den indtræffer hvis tværafstivningernes bøjningsstivhed er moderat, og behandles bedst ved at modellere hele pladen med afstivninger som en orthotrop plade.

#### 4. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Plader og pladefelter anvendes meget i stålkonstruktioner til optagelse af påvirkninger både i egen plan og vinkelret herpå.
2. Pladefelter, der påvirkes med tryk og/eller forskydning i planen, har tendens til foldning.
3. Den elastiske kritiske spænding for et perfekt pladefelt afhænger af:
  - pladens slankhed ( $b/t$ ).
  - sideforholdet ( $a/b$ ).
  - understøtningsbetingelserne.
  - interaktionen mellem påvirkninger, f. eks. to-akset tryk eller tryk og forskydning.
4. Den effektive bredde er en nyttig parameter til fastlæggelse af et trykpåvirket pladefelts virkemåde i det overkritiske område.
5. I virkelige plader vil både egenspændinger og geometriske imperfektioner have indflydelse på virkemåden.
6. Virkemåden af et pladefelt, der påføres en tværbelastning, afhænger af understøtningsbetingelserne.
7. I en afstivet pladekonstruktion kan der optræde både lokale og globale former for instabilitet.

#### 5. SUPPLERENDE LITTERATUR

1. Timoshenko, S. and Woinowsky-Kreiger, S., "Theory of Plates and Shells" Mc Graw-Hill, New York, International Student Edition, 2nd Ed.

## Lektion 8.4.1: Udformning og beregning af pladedragere, I

### FORMÅL

At give en grundlæggende indføring i udformning og beregning af pladedragere, at belyse sammenhængen mellem en dragers udformning og dens respons på forskellige påvirkninger, samt at udpege de forskellige stabilitetsfænomener, der skal tages hensyn til ved dimensioneringen.

### FORUDSÆTNINGER

Ingen

### BESLÆGTEDE LEKTIONER

Lektion 3.2: *Erection*

Lektion 7.2: *Cross-section Classification*

Lektion 7.3: *Local Buckling*

Lektion 8.1: Introduktion til dimensionering af plader

Lektion 8.4.2: *Plate Girder Behaviour and Design, II*

Lektion 8.4.3: *Plate Girder Design - Special Topics*

Lektion 11.7: *SplICES*

Lektion 14.4: *Crane Girders*

Lektion 15B.4: *Plate Girder Bridges*

### RESUMÉ

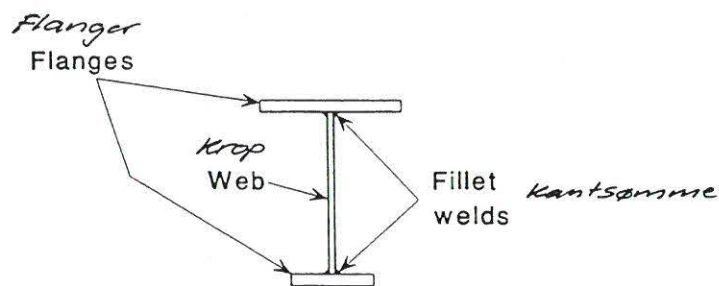
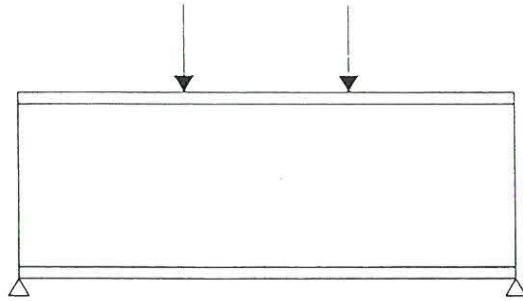
Moderne pladedragere præsenteres i form af en beskrivelse af anvendelsesområde og dragertyper samt en begrundelse for at en pladedrager i reglen udformes, så den har betydelig slankhed såvel globalt som lokalt. Virkemåden beskrives med særlig vægt på de instabilitetsfænomener, der kan optræde. Der omtales en simplificeret dimensioneringsmetode som forløber for en mere detaljeret behandling, der findes i lektion 8.5.1 og 8.5.2. Desuden præsenteres begrebet overkritisk bæreevne, herunder trækfeltmetoden. Som afslutning gives en simpel oversigt over de funktioner, som de enkelte tværsnitsdele først og fremmest varetager.

Oversat og bearbejdet af A. Albertsen, Aalborg Universitet, august 1996

## 1. INDLEDNING

Den hyppigst anvendte dragerform fremstilles ved at svejse to flangeplader og en kropplade sammen til et I-profil, se *figur 1*. På denne måde kan der let fremstilles dragere med større bæreevne end den, der kan opnås med sædvanlige valsede profiler eller med tværsnit sammensat af valsede profiler. Dette kan også udtrykkes således, at man med svejste pladedragere opnår at kunne bære større laster over større spændvidder. Typiske anvendelsesområder er etagebjælker i bygninger, brodragere og krandardere.





Figur 1. Pladedrager opbygget af 3 plader

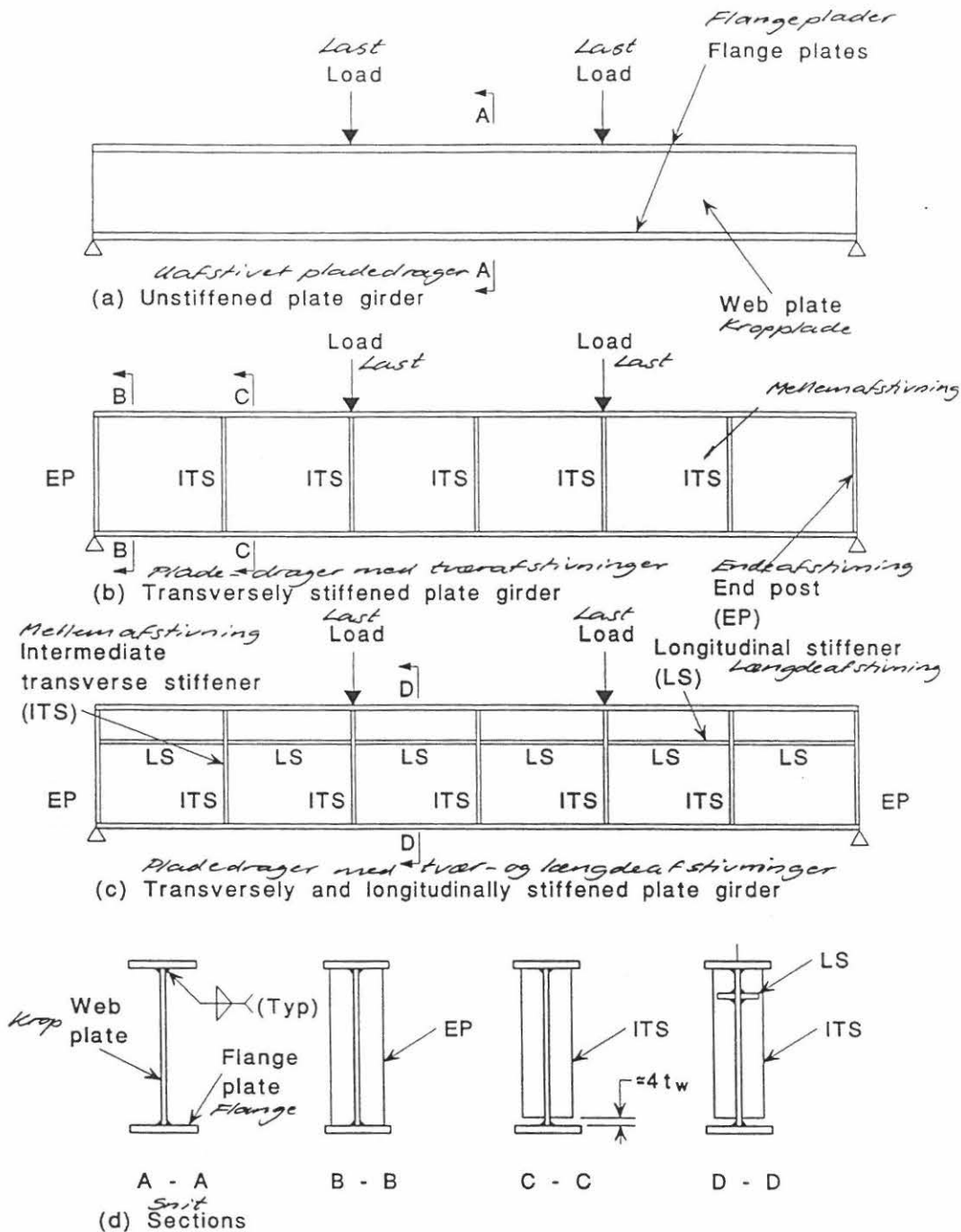
Den mest iøjnefaldende anvendelse er til brodragere, hvor man kan opnå spændvidder på over 200 meter med dragerhøjder fra 5 til 10 meter, oftest med forøget dragerhøjde i form af vouter ved understøtningerne. Da pladedragere normalt udformes og fremstilles til en konkret opgave, vil der i reglen ikke være færdige bæreevnetabeller til rådighed, og der må derfor i hvert tilfælde foretages en dimensionering, så den ønskede bæreevne opnås med så lille egenvægt som muligt.

Det er ofte hensigtsmæssigt at vælge en relativt stor dragerhøjde, idet det flangeareal, der er nødvendigt for at optage et givet moment  $M_{sd}$ , derved bliver passende lille. Kroppladen får naturligvis også ret stor højde, og da dens tværnsnitsareal hovedsageligt er bestemt af hensynet til optagelse af tværnsnittets forskydning,  $V_{sd}$ , fås dermed en relativt lille tykkelse (sammenlignet med forholdene i valsede profiler). Kroppladen bliver da ofte så slank, (udtrykt ved en høj værdi af forholdet  $d/t_w$  mellem dens højde og tykkelse), at der kan være fare for foldning. Det er derfor nødvendigt at inddrage en foldningsundersøgelse i dimensioneringen af drageren.

En effektiv foranstaltning (men ikke altid økonomisk attraktiv) til at forbedre bæreevnen af en slank plade er at forsyne den med afstivninger (se lektion 8.1); valget af afstivningstype m.v. indgår derfor som en vigtig del af dragerens dimensionering.

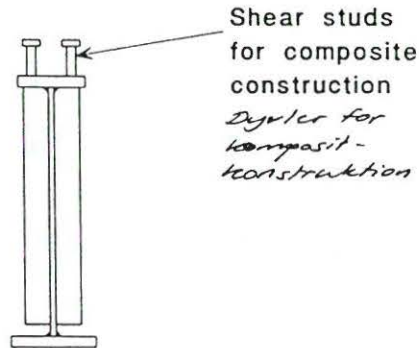
## 1.1 Tværsnitstyper

Pladedragere kan udformes på mange måder; *figur 2* viser tre forskellige typer - en uafstivet pladedrager, en drager med tværafstivninger og en drager med både tvær- og længdeafstivninger. Alle tre typer er på figuren vist med dobbeltsymmetrisk I-tværsnit, men der ikke noget i vejen for at have forskellig størrelse på overflange og underflange, således som det allerede er vist på *figur 1*.

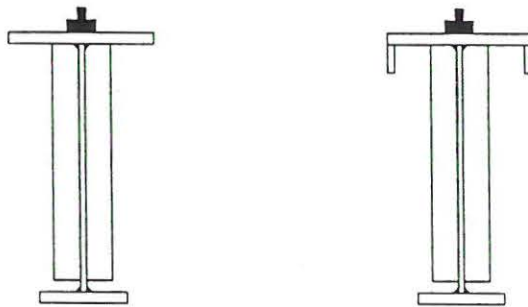


Figur 2. Uafstivede og afstivede pladedragere

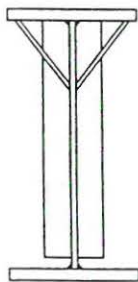
Typiske eksempler på sådanne enkeltsymmetriske tværsnit ses på *figur 3*, nemlig til brug i kompositkonstruktioner (ståldragere med overflange af beton, se lektion 10.2), hvor den til montage m.v. nødvendige ståloverflange normalt er væsentligt mindre end underflangen, samt til kransdragere (se lektion 14.4) hvor overflangen er den største. På *figur 3* ses også to andre, ikke så almindeligt anvendte variationer, nemlig en "delta"-drager og en drager med et rør som overflange. De kan begge komme ind i billedet, hvis der skal vælges tværsnit til en drager, hvis trykflange (her overflangen) er uden sideafstivning over en stor længde, således at der er fare for kipning (se lektion 7.9.1 og 7.9.2).



*Enkeltsymmetrisk plade drager med I-tværsnit*  
(a) Monosymmetric I-section plate girder



*Enkeltsymmetriske kransdragere*  
(b) Monosymmetric crane giders



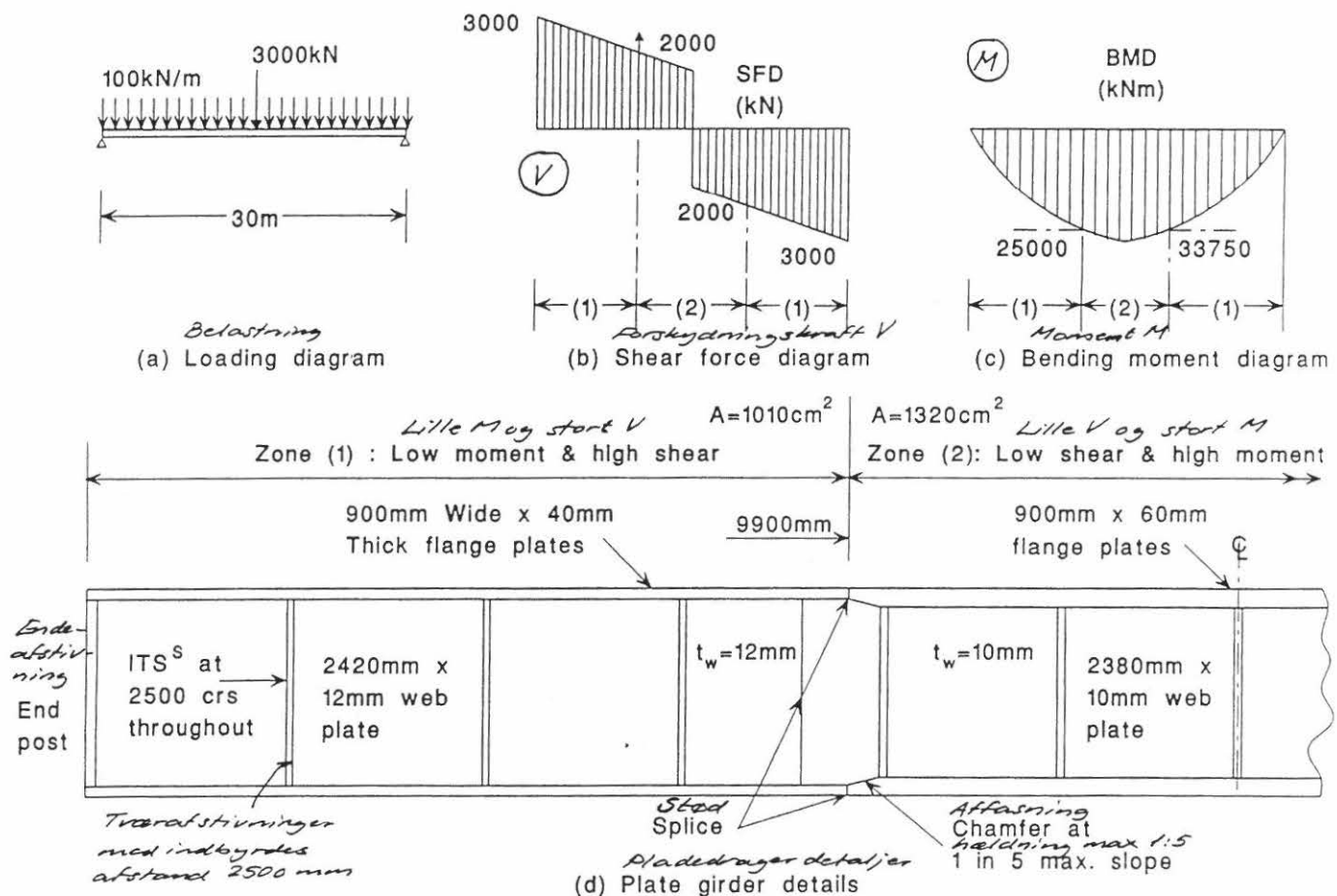
*Delta-drager*  
(c) Delta girder



*Drager med rør-overflange*  
(d) Tubular top flange girder

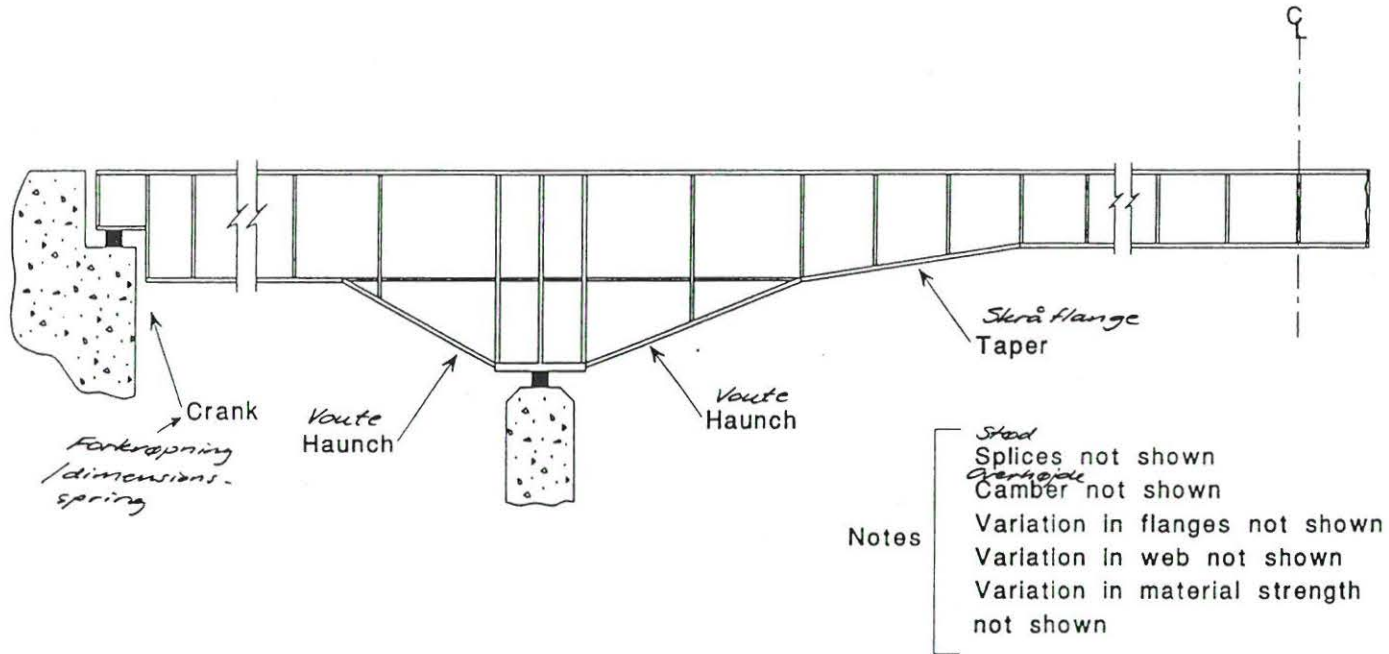
Figur 3. Tværsnit af pladedragere

Der er også gode muligheder for at variere tværsnittet i dragerens længderetning. For eksempel kan man vælge at reducere flangetykkelsen eller -bredden i et område, hvor momentet er lille, især når det kan kombineres med en af de i praksis uundgåelige montagesamlinger. Tilsvarende kan man i et område med stor forskydningskraft have brug for at forøge kroptykkelsen, se figur 4. Alternativt kan man klare problemet ved lokalt at bruge en større stålstyrke, f. eks Fe E355 i en drager, hvor der ellers bruges Fe E235. (Dette gælder naturligvis også områder med særlig stort moment). Desuden kan man vælge at benytte såkaldte hybrid-dragerer med forskellig stålstyrke i krop og flange, hvis denne løsning giver en mere optimal udformning.

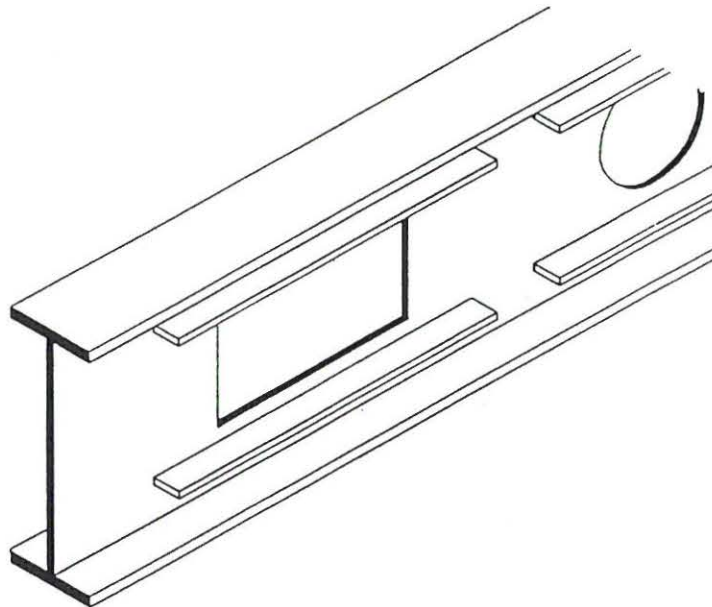


Figur 4. Platedrager med stød og med tværsnitsvariationer

I særlige tilfælde vælges udformninger, der giver mulighed for endnu større tvær-  
snitsvariation langs drageren, især inden for brobygning, eksempelvis dragere med  
kontinuerligt varierende højde, med spring i højden eller med vouter (se figur 5).  
Desuden bør nævnes dragere med huller i kroppen til brug for gennemføring af  
forskellige installationer, se figur 6.



Figur 5. Pladedrager med variationer i højden



Figur 6. Pladedrager med huller for installationer

## 1.2 Tværsnittets proportioner

Dimensioneringen indledes med valg af et eller flere af de mål, der karakteriserer tværsnittet. Selv om de indledende valg i princippet er helt frie, kan det have interesse at have et fingerpeg om, hvilke mål eller målforhold der normalt benyttes i praksis. For dobbeltsymmetriske I-profiler kan følgende vejledning opstilles (se også figur 7):

Dragerhøjde  $h$ :

Totalhøjden  $h$  vælges i området  $L_0/12 \leq h \leq L_0/8$ , hvor  $L_0$  er afstanden mellem momentkurvens nulpunkter. For broer med store spændvidder kan den nedre grænse dog sættes til omkring  $L_0/20$ .

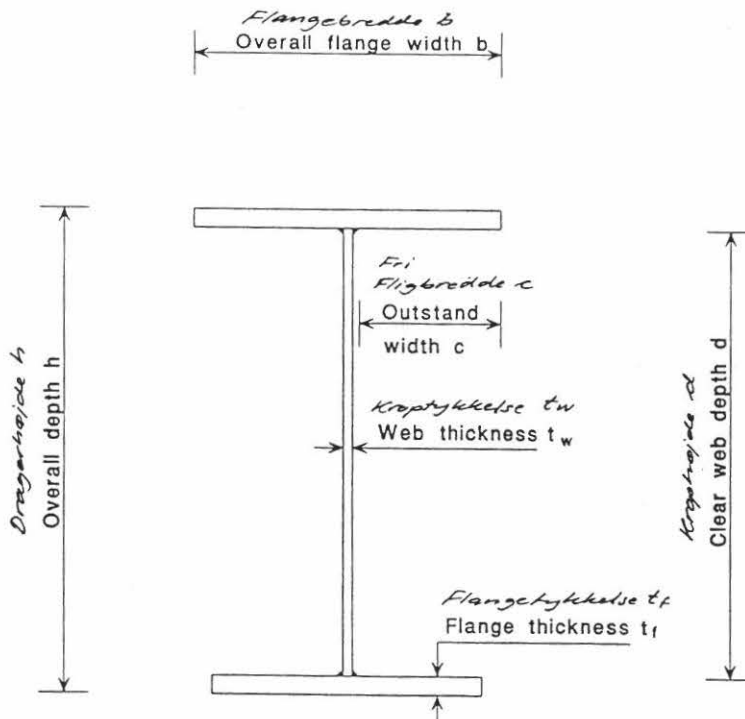
Flangebredde  $b$ :

Denne vælges normalt som et multiplum af 25 mm i området  $h/5 \leq b/3$ . For store bredder udskæres flangerne af en valset plade. Ved mindre bredder kan brede standard-fladprofiler komme i betragtning.

Flangetykkelse  $t_f$ :

Denne vælges normalt, så den tilfredsstiller kravet i Eurocode 3 til tværsnit i klasse 3 (semi-kompakte tværsnit), d.v.s.  $c/t_f \leq 14 \epsilon$ , hvor  $\epsilon = \sqrt{235/f_y}$ . Heraf fås  $c/t_f \leq 215/\sqrt{f_y}$  - eller eksplicit udtrykt:  $t_f \geq (c\sqrt{f_y})/215$ .

Størrelsen  $c$  fremgår af figur 7;  $t_f$  vælges naturligvis som en standard-plade-tykkelse.



Figur 7. Tværsnittets proportioner

Kroptykkelse  $t_w$ :

Fastlæggelsen af denne afgør, om kroppen skal regnes som "tyk" eller "tynd", hvilket har relation til foldning for forskydningspændinger (mere herom senere). En tynd krop vil ofte behøve afstivning i form af tvær- eller længderibber eller en kombination heraf, jævnfør *figur 2*. Afstivning med længderibber (i reglen kombineret med tværribber) er mest aktuell for store broer, hvor det i særlig grad gælder om at holde dragerens egenvægt så lav som muligt. Især gælder dette, når kroppens slankhed er stor, eksempelvis i området  $200 \leq d/t_w \leq 500$ .

Det understreges, at ovenstående retningslinier kun er vejledende, idet forhold som f. eks. særlig store eller små laster samt ydre begrænsninger i valg af dragerhøjde og/eller -bredde kan spille kraftigt ind på det endelige dimensionsvalg.

## 2 BEREGNING AF PLADEDRAGER

For en statisk belastet drager vil der normalt være brudgrænsetilstande (styrke og stabilitet), der er afgørende for dragerens dimensioner, medens anvendelsesgrænsetilstande såsom nedbøjning og vibrationer vil være mindre kritiske. Det må dog under alle omstændigheder tilrådes at overholde visse minimumskrav vedrørende de enkelte pladers tykkelse og slankhed for at sikre, at drageren er passende robust under opførelsen af bygværket.

En alment accepteret metode til dimensionering af et pladedragertværsnit, der er påvirket af et moment  $M_{ad}$  og en samtidigt virkende forskydningskraft  $V_{ad}$ , går ud på at antage hele momentet optaget af flangerne, medens kroppen dimensioneres for hele forskydningskraften. Metoden, der tillades anvendt i henhold til Eurocode 3, er naturligvis tilnærmet, men den giver et udmærket overslag over en dragers dimensioner.

Med den ovenfor beskrevne metode kan et vilkårligt snit i en sideafstivet pladedrager altså dimensioneres ved at bestemme flangestørrelse og kroptykkelse uafhængigt af hinanden (når M- og V-forløb er kendt). Eksempelvis bestemmes flangearealet således:

$$A_f = \gamma_{M0} M / [(h - t_f) f_y] \approx \gamma_{M0} M / (h f_y) \quad (1)$$

Ganske vist er  $t_f$  ikke kendt på forhånd (og  $f_y$  varierer en smule med den valgte tykkelse), men nogle få iterationer vil føre frem til et brugeligt resultat. Eftersom kroppen (normalt) vil være så slank, at det fulde tværsnits plastiske momentbæreevne alligevel ikke kan udnyttes, behøver flangens slankhedsforhold  $b/t_f$  blot opfylde kravene til en klasse 3 flange (semi-kompakt - i henhold til Eurocode 3, tabel 5.3.1). Tværsnittets momentbæreevne kan da beregnes af følgende udtryk:

$$M_{f,Rd} = b t_f (h - t_f) f_y / \gamma_{M0} \quad (2)$$

Hvad angår kroppladen, er det desværre ikke helt simpelt at vælge dennes dimensioner med økonomisk optimalt resultat. Det skal dog nævnes, at hvis kroppladen kan betragtes som tyk (dette begreb defineres senere), kan den

dimensioneres meget enkelt ved blot at antage, at forskydningsspændingerne  $\tau_y$  er jævnt fordelt over hele kroparealet. Svejsesømmene mellem krop og flanger (normalt kantsømme) skal da blot dimensioneres for den langsgående forskydningskraft mellem krop og flanger. (Sidstnævnte forenkling, hvor langsgående normalspændinger i svejsesømmene negligeres, er kun acceptabel for en statisk belastet konstruktion).

### 3 INSTABILITETSFÆNOMENERNES BETYDNING

Hvis slankheden af de enkelte plader, der udgør en pladedrager, er passende lille, kan dimensioneringen baseres udelukkende på materialets flydespænding. I reglen vil økonomiske og praktiske hensyn dog medføre, at kravene til (lille) slankhed ikke alle er opfyldt, og det vil derfor oftest være nødvendigt at tage hensyn til en række mulige former for instabilitet ved dragerens dimensionering. En liste over disse ses på *figur 8*.

#### 3.1 Foldning af kroppen for forskydning

Når slankhedsforholdet (mere korrekt: bredde/tykkelsesforholdet)  $d/t_w$  for en uafstivet kropplade overstiger en vis grænseværdi (der i Eurocode er sat til  $69\epsilon$ ), vil kroppen folde uden at opnå den fulde forskydningsbæreevne  $A_w\tau_y$ . Der dannes diagonale buler af den type, der er vist på *figur 8 (øverst)*; deres form skyldes, at der opstår et diagonalt tryk (samt et diagonalt træk) på grund af forskydningspåvirkningen. Fremkomsten af buler kan "forsinkes", d.v.s. bæreevnen kan forhøjes ved tilføjelse af vertikale afstivninger (se *figur 9*), idet den kritiske foldningslast ikke blot er en funktion af  $d/t_w$  men også af sideforholdet (forholdet mellem afstivningernes indbyrdes afstand og kroppladens højde).

#### 3.2 Kipping af drageren

Dette emne er dækket af lektion 7.9.1 og 7.9.2, hvortil der henvises.

#### 3.3 Lokal foldning af trykflangen

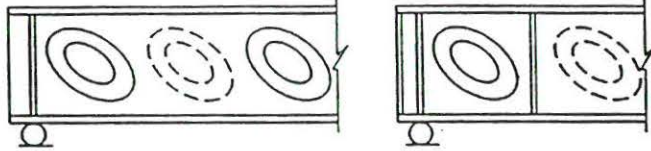


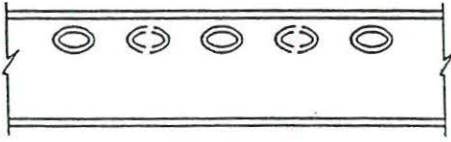
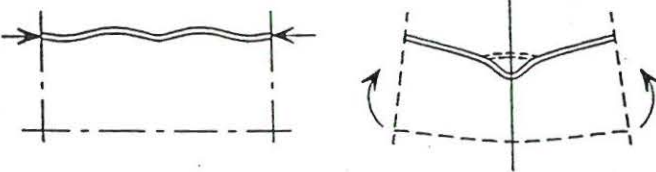
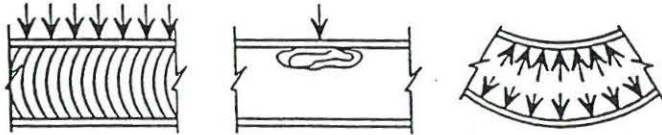
Når forholdet  $d/t_w$  for de udstikkende flige overholder det tidligere nævnte krav, d.v.s.  $c/t_f \leq 14 \epsilon$ , vil foldning af flangen ikke få indflydelse på dragerens momentbæreevne.

#### 3.4 Foldning af kropplade for bøjningsspændinger

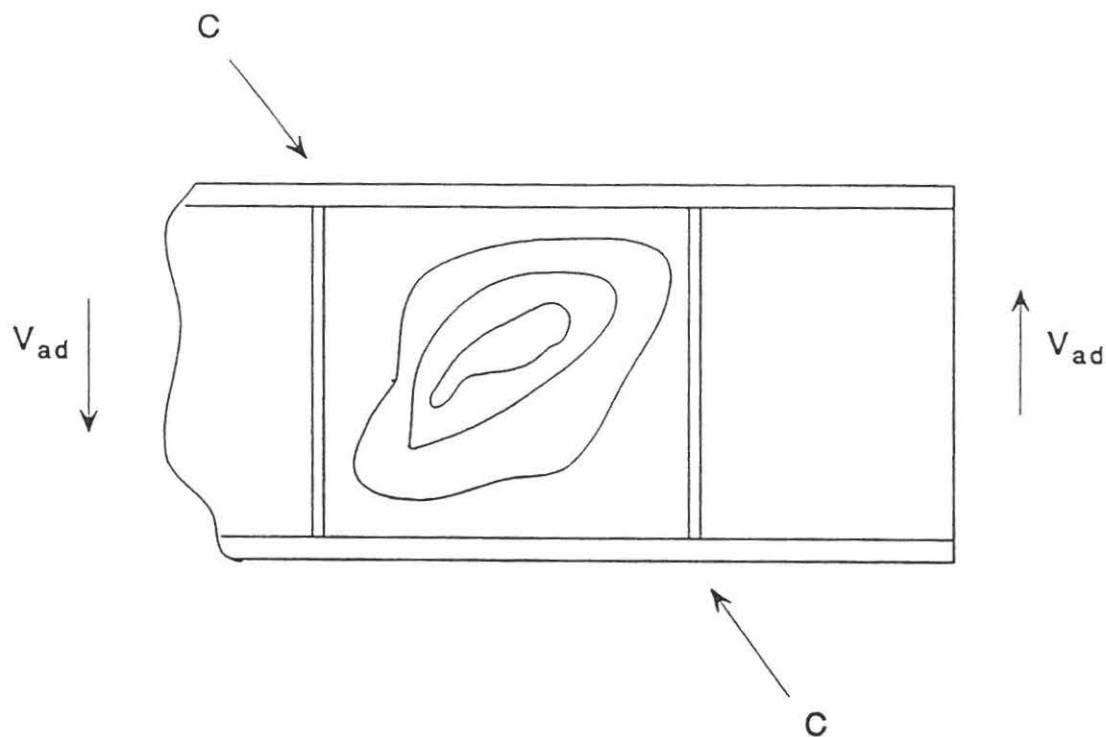
En kropplade, der udelukkende er påvirket af bøjningsspændinger (som et led i dragerens momentoptagelse), vil folde, før drageren opnår sin elastiske bæreevne, når forholdet  $d/t_w$  overstiger  $124\epsilon$ . Hvis der samtidig optræder en tryknormalkraft i kroppladen, vil grænsen for foldning ligge ved en lavere værdi end  $c/t_f = 124\epsilon$ . Hvis man ønsker at udnytte dragerens fulde, *plastiske* bæreevne, vil kravet til  $c/t_f$  være endnu strengere.

Det skal bemærkes, at hvis der samtidig optræder forskydning i det betragtede snit, bliver forholdene noget mere komplicerede. Tendensen er naturligvis, at den kombinerede påvirkning er "farligere" end den ovenfor beskrevne.



Type af instabilitet	Illustration	Henvisninger til [Eurocode 3] og til ESDEP-ktioner
Foldning af krop pga. forskydning		[5.6] Lektion 8.2
Kipning		[5.5.2 og Annex F] Lektion 7.9 og 7.9.2
Lokal foldning af trykflange		[5.3 og tabel 5.3.1 (blad 3)] Lektion 8.1 og 8.2
Foldning af krop pga. bøjnings-spændinger		Som ovenfor
Indtrykning (af flange i krop)		[5.7.7] Lektioner i kap. 8
Lokal foldning af krop pga. lodret last		[5.7.4, 5.7.5, 5.3.6, 5.4.10] Lektioner i kap. 8

Figur 8. Typer af instabilitet i pladedragere



Figur 9. Diagonalt tryk C hidrørende fra forskydningspåvirkning  $V_{ad}$

### 3.5 Foldning af kropplade som følge af indtrykning

Hvis kroppladen er meget slank, vil den ikke yde tilstrækkelig modstand imod, at trykflangen bøjer ud i kroppens plan som en søjle, der bøjer ud om sin svage akse. Denne udbøjningsform kan elimineres ved at specificere en passende maksimumsværdi af forholdet  $d/t_w$ . Tværafstivninger af kroppen har også en gunstig virkning.

### 3.6 Lokal foldning af kropplade forårsaget af tværkræfter

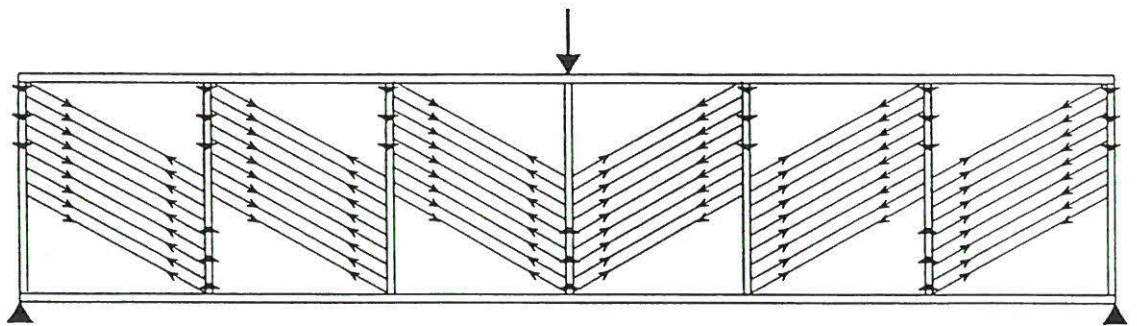
Lodret last, eventuelt koncentreret (f. eks. ved understøtninger eller under kranhjul), kan fremkalde foldning af kroppen som for en lodret trykstang. Størrelsen af den last, der kan optages, uden at kroppen folder, afhænger af en række forhold, bl. a. belastningsmåden, lastens udstrækning, kroppladens proportioner samt størrelsen af bøjningspåvirkningen i drageren i det betragtede snit.

## 4 OVERKRITISK BÆREEVNE AF KROPPEN

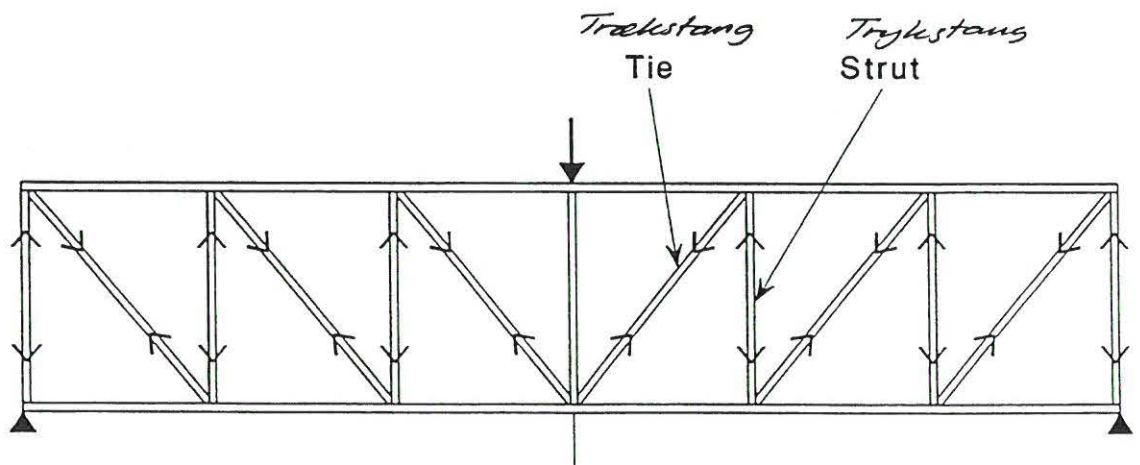
I modsætning til, hvad der er tilfældet for søjler, kan plader ofte bære laster, som ligger betydeligt ud over den last, der fremkalder den første udbøjning (foldning). Denne forøgede bæreevne benævnes den overkritiske bæreevne. For kroppe i pladedragere er det muligt at udnytte en særlig type: dannelse af trækfelter. Dette indebærer en ændring af den måde, drageren optager forskydningen på, nemlig fra den jævnt fordelte forskydningspænding, der er en relevant

beregningsmodel, når forskydningspåvirkningen er lille, til den ækvivalente gitterdrager (se figur 10), der tillader optagelse af langt større laster.

Virksomheden af kroppen som en ækvivalent gitterdrager baserer sig på følgende forhold: Flangerne udgør (naturligvis) gitterdragerens over- og underflange, tværafstivningerne fungerer som gittervertikaler, der tager tryk, og de diagonale trækbånd, der dannes i kroppen, fungerer som gitterdiagonaler, der tager træk. Trykbæreevnen af den anden diagonal i hvert pladefelt er praktisk taget elimineret ved de her aktuelle, store forskydningspåvirkninger. Nærmere beskrivelse af den dimensioneringsmetode, der udnytter denne beregningsmodel, findes i lektion 8.4.2.



*Trækfelt-virkning*  
(a) Tension field action



*N-gitter*  
(b) Pratt or N-truss

Figur 10. Overkritisk trækfeltvirkning

## 5. KORT OVERSIGT OVER EN PLADEDRAGERS VIRKEMÅDE

Hovedfunktionen af de enkelte dele, som en pladedrager er opbygget af, kan kort karakteriseres således:

Flangerne	- optager momentet
Kroppen	- optager forskydningen
Svejsninger mellem krop og flanger	- optager den langsgående forskydning i fugerne
Tværafstivninger	- forbedrer kroppens evne til at optage forskydning
Længdeafstivninger og/eller bøjning	- forbedrer optagelse af forskydning

## 6. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Opbygningen af en pladedrager er beskrevet, og de enkelte bestanddeles funktion er forklaret.
2. Et indledende overslag over en dragers dimensioner kan foretages ud fra den antagelse, at hele momentet optages af flangerne, og hele forskydningskraften optages af kroppen.
3. For dragere med relativt tynd krop (= stort forhold mellem højde og tykkelse) vil kroppen som regel begynde at folde ved en last, der er mindre end kroppens forskydningsstyrke - med det resultat at denne ikke kan udnyttes i fuldt omfang. Forekomsten af foldning betyder dog ikke nødvendigvis, at dragerens bæreevne er udtømt, idet der er mulighed for, at en forøget last kan optages ved trækfeltvirkning.
4. Kropafstivninger på tværs eller på langs af dragerens længderetning forhøjer kroppens modstandsevne mod foldning samt forøger dens overkritiske bæreevne.

## 7. LITTERATURHENVISNINGER

[1] Eurocode 3: "Design of Steel Structures". European Prestandard ENV 1993-1-1: Part 1, General rules and rules for buildings, CEN, 1992.

[2] Narayanan, R. (ed.), "Plated Structures; Stability and Strength", Applied Science Publishers, London, 1983,

Kapitel 1 dækker den grundlæggende behandling af pladedrageres virkemåde og udformning.

## 8. SUPPLERENDE LÆSNING

1. Dubas, P. and Gehri, E. (eds.), "Behaviour and Design of Plated Structures", ECCS, 1986, Publication No. 44.

Kapitel 4 og 5 behandler pladedragere mere detaljeret.



## Lektion 6.3: Elastisk instabilitet

### FORMÅL

At beskrive de grundlæggende former for elastisk instabilitet og udlede kritiske laster for søjler, bjælker og plader.

### FORUDSÆTNINGER

Lektion 6.1: Principper for stabil og ustabil elastisk ligevægt

### BESLÆGTEDE LEKTIONER

Lektion 6.6.1: Stabilitet af imperfekte konstruktionselementer I

Lektion 6.6.2: Stabilitet af imperfekte konstruktionselementer II

Lektion 7.7: Fri søjlelængde

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 6.1: Energimetoder I

Eksempel 6.2: Energimetoder II

### RESUMÉ

Denne lektion beskriver hvordan kritiske laster bestemmes ved løsning af differentiaalligningen for den deformerede konstruktion i ligevægt. De kritiske laster bestemmes for simple lastformer og randbetingelser i følgende tilfælde:

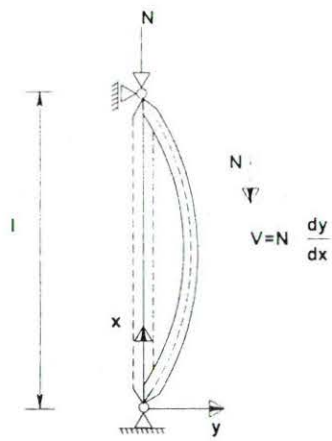
- søjleudknækning
- kipning af bjælker
- foldning af plader

Oversat og redigeret af S. Kloch, Aalborg Universitet, juli 1996.

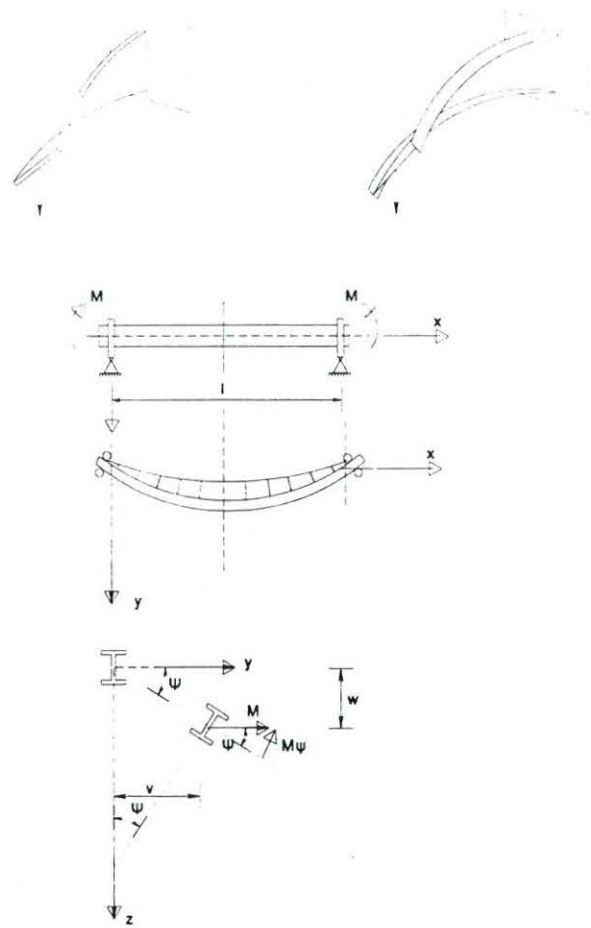
## 1. INDLEDNING

Instabilitet kan forekomme i alle systemer og konstruktionselementer, hvor der optræder trykspændinger. Den simpleste form for udknækning er den, der opstår, når en retliniet stang sammentrykkes med to lige store og modsat rettede kræfter (*figur 1*). Andre former for stabilitetsproblemer af stor praktisk betydning for stålkonstruktioner er:

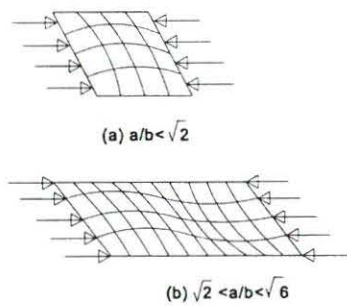
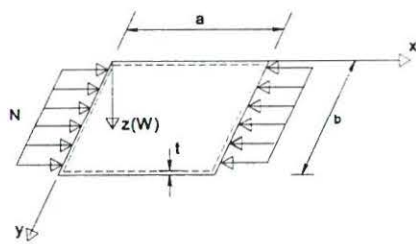
- kipning af bjælker (*figur 2*)
- foldning af plader (*figur 3*)
- foldning af skaller (*figur 4*)



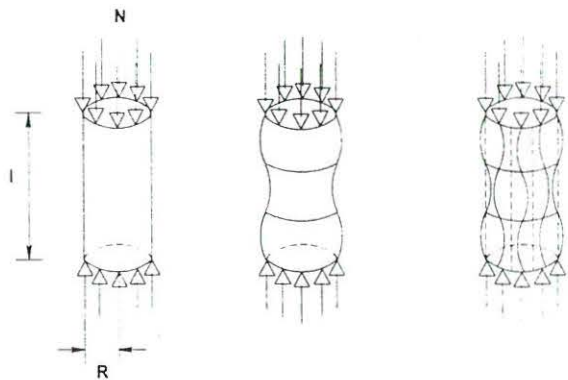
Figur 1 Bøjningsudknækning af søjle



Figur 2 Kipning af bjælker

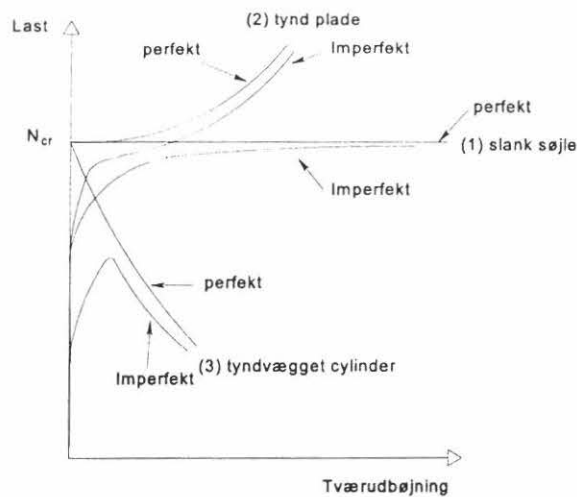


Figur 3 Foldning af cylinderskal



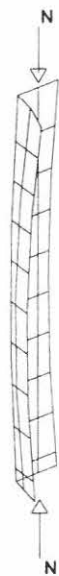
Figur 4 Foldning af pladefelt

Den grundlæggende forskel mellem virkemåden for søjler, plader og skaller fremgår af figur 5. I det elastiske område er der en rimelig overensstemmelse mellem den kritiske last og den maximale last, der kan bæres af en virkelig (imperfekt) søjle. For plader kan bæreevnen være større end den kritiske last, såfremt den overkritiske bæreevne nås ved rimeligt små udbøjninger. Derimod er den maximale bæreevne for en virkelig (imperfekt) tyndvægget cylinder meget mindre end den teoretiske kritiske last.

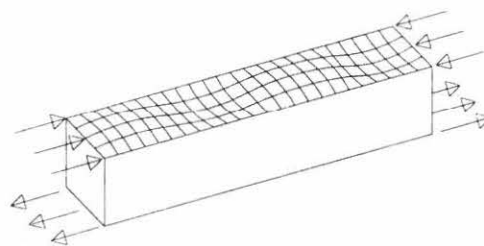


Figur 5 Elastisk foldning i det overkritiske område

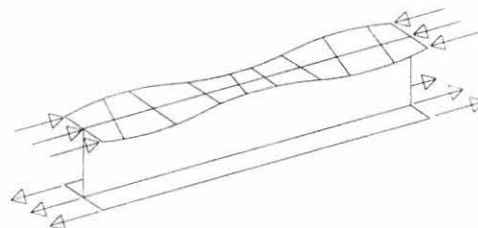
For trykstænger er den på *figur 1* viste bøjningsudknækning ikke den eneste mulige form for udknækning. I nogle tilfælde kan der optræde vridningsudknækning (*figur 6*) eller en kombination af vridnings- og bøjningsudknækning. Hvis et konstruktionselement er tyndvægget, kan der også forekomme foldning af tværsnittets pladefelter (*figur 7*), kombineret med global udknækning af hele elementet.



Figur 6 Vridningsfoldning af søjle



(a) kassedrager



(b) pladedrager

Figur 7 Foldning af pladefelter i bjælker

Bestemmelsen af den kritiske last ved hjælp af bifurcationsteorien udnytter, at den kritiske tilstand er forbundet med en neutral ligevægtstilstand. Ligevægtsbetingelsen for konstruktioner i svagt udbøjet tilstand fører til differentiaalligninger, der er simple at løse, i hvert fald for visse konstruktionstyper. Den kritiske last angiver stabilitetsniveauet for en konstruktion eller konstruktionselement. Den benyttes også som basisværdi ved beregning af bæreevnen for konstruktioner, hvor der er fare for instabilitet, som vist i en senere lektion. I denne lektion bestemmes de



kritiske laster ved løsning af de differentiaalligninger, der beskriver fænomenerne. Der udledes kun løsninger for de simpleste tilfælde af laster og randbetingelser. En generel metode til bestemmelse af kritiske laster, baseret på energibetragtninger, er anført i lektion 6.4.

## 2. BØJNINGSDUKNÆKNING AF SØJLER

For en retliniet søjle når den stabile ligevægt sin øvre grænse med den kritiske last, hvor søjlen er i ligevægt i udbøjet form (*figur 1*). I denne tilstand er bøjningsmomentet i et vilkårligt tværsnit i en simpelt understøttet søjle givet ved:

$$M = N \cdot y \quad (1)$$

Benyttes bøjningsteoriens differentiaalligning med hensyntagen til store flytninger, haves:

$$\frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = - \frac{M}{EI_z} \quad (2)$$

eller tilnærmelsen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EI_z} \quad (3)$$

som er tilstrækkelig nøjagtig for laster lige under den kritiske og når udbøjninger er små. Indsættes (1) heri, fås:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N \cdot y}{EI_z} = 0 \quad (4)$$

hvor  $EI_z$  er søjlens bøjningsstivhed i udknækningsretningen.

Den fuldstændige løsning til denne ligning er:

$$y = A \sin kx + B \cos kx \quad (5)$$

hvor

$$k^2 = \frac{N}{EI_z} \quad (6)$$

(kun positive værdier, d.v.s. trykkræfter, er interessante).

A og B er arbitrære integrationskonstanter, som bestemmes ved hjælp af randbetingelserne:

$$y = 0 \quad \text{for } x = 0 \quad (7a)$$

og

$$y = 0 \quad \text{for } x = \ell \quad (7b)$$

Den første randbetingelse giver  $B = 0$ , og den anden giver:

$$A \sin k \ell = 0 \quad (8)$$

som kræver enten  $A = 0$ , der er uinteressant, fordi der så ikke er nogen udbøjning, eller  $\sin k \ell = 0$ , der giver:

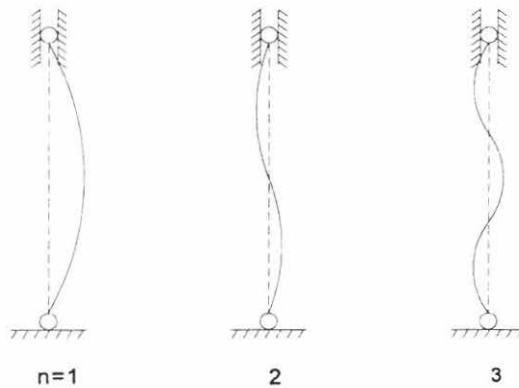
$$k \ell = n\pi \quad (9)$$

hvor  $n$  er et vilkårligt heltal.

Herefter kan den kritiske last bestemmes af:

$$N_{cr,n} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{\ell^2} \quad (10)$$

Figur 8 viser de 3 laveste udknækningsformer ( $n = 1, 2$  og  $3$ ).



Figur 8 Udknækningsformer for simpelt understøttet søjle

Den mindste værdi af  $k\ell$  - og dermed også af den kritiske last  $N_{cr}$  - der opfylder (9) fås ved at vælge  $n = 1$ . Denne kritiske last kaldes Eulerlasten. I de tilfælde, hvor der benyttes afstivninger, kan udbøjningsformer af højere orden blive afgørende.

Den kritiske last for simpelt understøttede søjler blev udledt af Leonhard Euler i 1744. Historisk set er det den første løsning på et stabilitetsproblem. Samme fremgangsmåde kan benyttes ved søjler med andre randbetingelser.

Den ovenfor anførte kritiske last tager ikke hensyn til virkningen af forskydningskræfterne. Dette kan gøres ved at tage hensyn til forskydningsdeformationen

$$\gamma = \frac{V}{GA_v} \quad (11)$$

hvor  $V$  er forskydningskraften givet ved:

$$V = N \frac{dy}{dx} \quad (12)$$

og  $A_v$  er tværsnittets forskydningsareal.

Tilføjes forskydningskraftens bidrag til udbøjningskurvens hældning, fås følgende differentialligning:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{N}{GA_v} \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{Ny}{EI_z} \quad (13)$$

der giver en kritisk last:

$$N_{cr}^* = \frac{N_{cr}}{1 + \frac{N_{cr}}{GA_v}} \quad (14)$$

Forskydningskraftens bidrag reducerer således den kritiske last i forhold til Eulerlasten. For massive søjler kan forskydningskraftens bidrag normalt negligeres, men for gittersøjler og trykstænger med tværafstivninger kan bidraget få betydning, og bør derfor tages i betragtning.

### 3. KIPNING

Når en bjælke påføres bøjning om den stærke akse, vil den normalt kun bøje ud i lastens plan. Imidlertid kan en bjælke, som ikke har tilstrækkelig bøjningsstivhed i tværretningen eller ikke fastholdes i tværretningen, knække ud af planen som vist på *figur 2*.

For en lige, elastisk bjælke er der ingen flytninger ud af planen, før momentet når den kritiske værdi, og bjælken kipper ved at den bøjer ud i tværretningen og vrides som vist på *figur 2*. Kipning vil derfor give anledning til både bøjning om den svage akse og vridning. I det enkleste tilfælde, hvor en simpelt understøttet bjælke med dobbeltsymmetrisk tværsnit påføres 2 lige store modsatrettede momenter ved bjælkeenderne, fås følgende differentialligninger:

- for bøjning om den svage akse:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M\psi}{EI_z} \quad (15)$$

- for vridning:

$$GI_t \frac{d\psi}{dx} - EI_w \frac{d^3\psi}{dx^3} = M \frac{dv}{dx} \quad (16)$$

hvor  $EI_z$  er bøjningsstivheden om den svage akse, og  $M\psi$  er det bøjende moment om den svage akse, der opstår på grund af vinkeldrejningen  $\psi$  om bjælkeaksen.  $GI_t$  er Saint-Venant vridningsstivheden,  $EI_w$  er hvælvningsstivheden, og  $M \frac{dv}{dx}$  vridningsmomentet, der stammer fra tværudbøjningen  $v$ .

Når begge disse ligninger opfyldes for ethvert punkt af bjælken, er denne i ligevægt i udbøjet og vredet tilstand. Ved at differentiere ligning (16) og indsætte resultatet i ligning (15) fås differentialligningen for kipning:

$$EI_w \frac{d^4 \psi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{M^2 \psi}{EI_z} \quad (17a)$$

eller

$$C_w \frac{d^4 \psi}{dx^4} - C \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{M^2 \psi}{EI_z} \quad (17b)$$

Dette udtryk blev første gang udledt af Prandtl i 1899. Den fuldstændige løsning til ligningen er :

$$\psi = A_1 \sinh k_1 x + B_1 \cosh k_1 x + A_2 \sinh k_2 x + B_2 \cosh k_2 x \quad (18)$$

hvor

$$k_1^2 = \frac{C}{2C_w} + \sqrt{\left(\frac{C}{2C_w}\right)^2 + \frac{M^2}{EI_z C}} \quad (19)$$

$$k_2^2 = -\frac{C}{2C_w} + \sqrt{\left(\frac{C}{2C_w}\right)^2 + \frac{M^2}{EI_z C}} \quad (20)$$

og  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  og  $B_2$  er integrationskonstanter, der skal tilfredsstille følgende randbetingelser:

$$\psi = 0 \text{ for } x = 0 \quad (21a)$$

og

$$\psi = 0 \text{ for } x = \ell \quad (21b)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0 \text{ for } x = 0 \quad (22a)$$

og

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0 \text{ for } x = \ell \quad (22b)$$

Ligningerne (21) og (22) udtrykker, at understøtningerne for en simpelt understøttet bjælke skal hindre såvel tværubøjningen som vridning, medens hvælvning af tværsnittene ved bjælkeenderne ikke er forhindret.

De 4 randbetingelser giver:

$$A_1 = B_1 = B_2 = 0 \quad (23)$$

og

$$A_2 \sin k_2 \ell = 0 \quad (24)$$

som giver enten  $A_2 = 0$ , der er uinteressant, fordi der så ingen vridning er, eller

$$\sin k_2 \ell = 0, \text{ og dermed} \quad (25)$$

$$k_2 \ell = n\pi$$

hvor  $n$  er et vilkårligt heltal.

Indsættes (25) med den mindste værdi for  $k_2 \ell$  i ligning (20), kan denne omskrives til følgende udtryk, der angiver bjælkens kritiske moment med hensyn til kipning:

$$M_{cr} = \frac{\pi \sqrt{EI_z \cdot C}}{\ell} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\rho^2} \frac{C_w}{C}} \quad (26)$$

#### 4. FOLDNING AF PLADER

Det simpleste eksempel på dette fænomen er en rektangulær plade, hvor de 4 rande er simpelt understøttet (fastholdt mod flytninger ud af planen, men ikke mod vinkeldrejninger), og påført tryk, som vist på *figur 3*. Ligesom ved trykstænger forbliver pladen plan, indtil den påførte last når den kritiske værdi, hvorefter den "buler" ud i tværretningen.

Differentialligningen for foldning af plader blev udledt af Bryan i 1891, og for det på *figur 3* viste tilfælde har den denne udformning:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (27)$$

hvor  $D$  er pladens bøjningsstivhed:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (28)$$

Den fuldstændige løsning til denne ligning er:

$$w = A \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (29)$$

der skal opfylde randbetingelserne

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{for } x = 0 \quad (30a)$$

og

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{for } x = a \quad (30b)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } y = 0 \quad (31a)$$

og

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } y = b \quad (31b)$$

Indsættes ligning (29) i ligning (27), fås:

$$N = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (32)$$

hvor  $m$  og  $n$  er antallet af halvbølger i henholdsvis retning  $x$  og  $y$ .

Den mindste værdi af  $N$  er pladens kritiske last  $N_{cr}$  som fås for  $n = 1$ . Det viser, at pladen vil folde på en sådan måde, at der kan være mange halvbølger i trykkraftens retningen, men kun een halvbølge vinkelret herpå. Derfor kan den kritiske last bestemmes af:

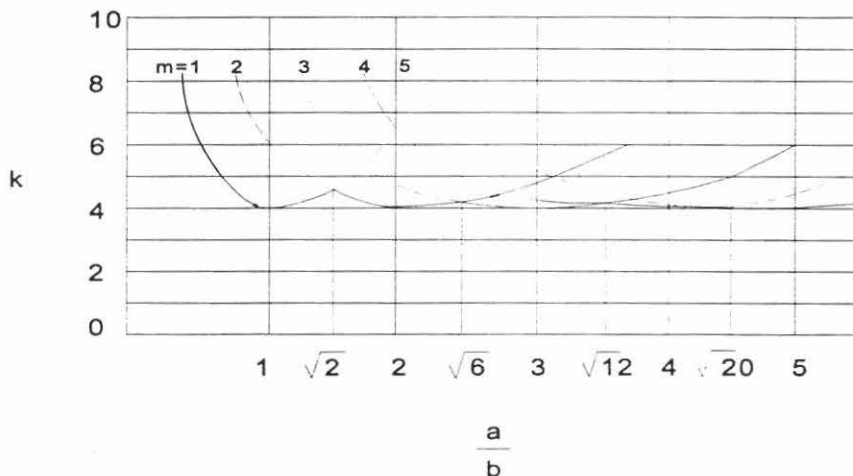
$$N_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (33)$$

hvor

$$k = \left( \frac{bm}{a} + \frac{a}{bm} \right)^2 \quad (34)$$

Hvis pladen folder i een halvbølge er  $m = 1$ , og  $k$  får sin minimumsværdi ( $k = 4$ ) når  $a = b$  (altså en kvadratisk plade).

Tilsvarende, hvis pladen folder i 2 halvbølger er  $m = 2$ , og  $k$  får sin minimumsværdi (også  $k = 4$ ), når  $a = 2b$ . Med  $m = 3, 4, \dots$  får man den serie af kurver, der er vist på *figur 9*. Det bemærkes, at for værdierne  $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \dots$  af forholdet  $a/b$  er der sammenfald mellem 2 foldningsfigurer.



Figur 9 Faktor  $k$  som funktion af pladens sideforhold  $a/b$

## 5. AFSLUTTENDE RESUMÈ

1. For trykpåvirkede elementer som trykstænger, bjælker, plader og skaller er den kritiske last lig med den øvre grænseværdi af bæreevnen for det virkelige (imperfekte) element.
2. Den kritiske last er knyttet til det elements neutrale (labile) ligevægtstilstand.
3. I simple tilfælde kan den kritiske last bestemmes ved løsning af de differentialligninger, der beskriver ligevægtstilstanden.

## 6. SUPPLERENDE LITTERATUR

1. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, 2nd edition, New York, 1961.
2. Allen, H.G. and Bulson, P.S., "Background to Buckling", McGraw-Hill, London, 1980.
3. Shanley, F.R., "Strength of Materials", McGraw-Hill, New York, 1957.
4. Murray, N.W., "Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures", Clarendon Press, Oxford, 1984.

## Lektion 6.6.1: Stabilitet af imperfekte konstruktions- elementer I

### FORMÅL

At beskrive hvorledes søjlers kritiske bæreevne påvirkes af stålmateriallets plastiske egenskaber og af de geometriske og konstruktive imperfektioner.

### FORUDSÆTNINGER

Lektion 2.3: Ståls materialeparametre

Lektion 6.3: Elastisk instabilitet

### LEKTIONER VEDRØRENDE BESLÆGTEDE EMNER

Lektion 7.5.1 & 7.5.2: Søjler

Lektion 7.10.1 & 7.10.2: Bjælkesøjler I og II

Lektion 7.12: *Trusses and Lattice Girders*

### RESUMÉ

Stabiliteten af en idealiseret trykstang, fx. en perfekt ret trykstang uden egenpændinger, analyseres for både ideal stiv-plastiske og ideal elastisk-plastiske materialer og for konstruktionsstål. Indflydelsen fra geometriske imperfektioner og fra egenpændinger samt kombinationer heraf undersøges.

Oversat og bearbejdet af S. Kloch, Aalborg Universitet, juli 1996

## 1. INDLEDNING

Virkelige konstruktionselementer opfører sig ikke nøjagtigt som den elastiske bifurcationsteori forudsætter. For det første er materialet ikke fuldstændig elastisk, og den elasto-plastiske virkemåde medfører, at udbøjningen bliver uelastisk. For det andet har konstruktionselementerne forskellige former for geometriske og mekaniske imperfektioner, som kan reducere bæreevnen betydeligt. Desuden vil stabilitetsfænomener medføre hurtige deformationsændringer ved forøgelse af den påførte last, og det giver anledning til 2. ordens effekter. Kombineret med de ikke-lineære materialeegenskaber medfører dette en ikke lineær virkemåde af hele konstruktionen.

For at illustrere betydningen af de vigtigste parametre i praksis betragtes i denne lektion den enkleste form for stabilitetsproblem, nemlig en simpelt understøttet søjle med konstant normalkraft og dobbeltsymmetrisk tværsnit (bøjningsudknækning).

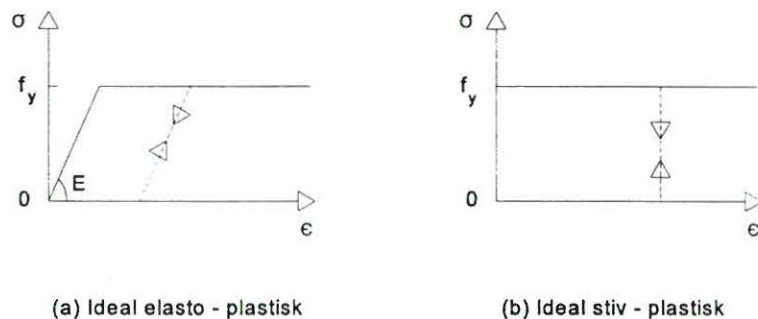
I lektion 6.3 gøres der rede for de parametre der bestemmer den elastiske virkemåde af en geometrisk perfekt trykstang, d.v.s. en trykstang uden forhåndskrumning eller ekscentriciteter. I denne lektion undersøges først, hvilken indflydelse de ikke-elastiske materialeegenskaber har, når der ikke samtidig optræder andre former for imperfektioner. Dernæst undersøges virkningen af



geometriske imperfektioner og egenspændinger. Tilslut vurderes effekten af de forskellige former for imperfektioner, når de optræder samtidigt.

## 2. MATERIALETS PLASTICITET

Forholdet mellem tøjninger og spændinger i stålqualiteter med lavt kulstofindhold beskrives normalt med den ideelle elasto-plastiske arbejdskurve vist på *figur 1a*. I tilfælde med små elastiske deformationer vil den ideelle stiv-plastiske model vist på *figur 1b* give en tilstrækkelig beskrivelse af materialets virkemåde (den vandrette gren repræsenterer flydespændingen  $f_y$ ).



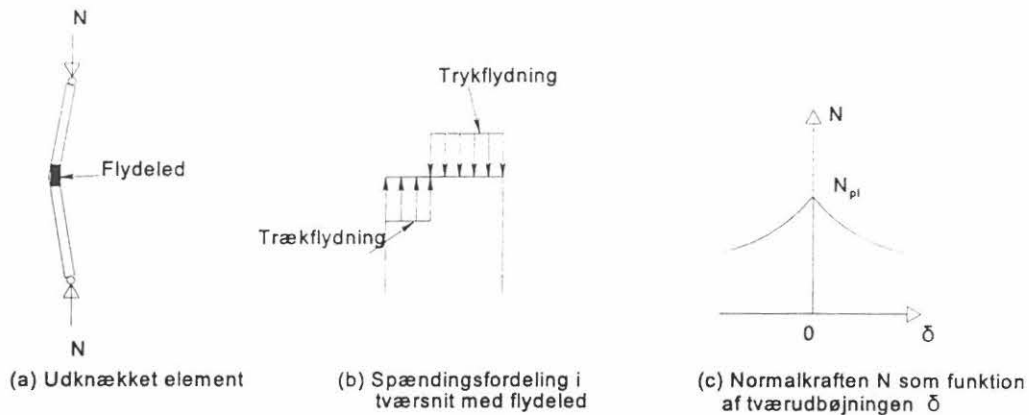
Figur 1 Idealiserede materialemodeller

### 2.1 Ideel stiv-plastisk materialemodel

Den stivplastiske arbejdskurve forudsætter, at der hverken optræder længde- eller tværdeformationer ved lave værdier af normalkraften  $N$ . I alle tværsnit optræder den samme jævnt fordelte trykspænding  $\sigma = N/A$ , og aksialdeformation er først mulig, når  $\sigma$  når op på flydespændingen  $f_y$ . Den hertil svarende normalkraft kaldes brudlasten og har værdien:

$$N_{pl} = A \cdot f_y$$

I denne situation vil enhver lille afvigelse resultere i en flytning i tværretningen og dermed også et bøjende moment. Søjlen bryder herefter sammen, idet der dannes et flydeled et eller andet sted på søjlen som vist på *figur 2a*. Spændingsfordelingen i flydeleddet fremgår af *figur 2b*, idet der optræder plastiske deformationer i både tryk og træksiden. Det udbøjede element kan kun forblive i ligevægt, såfremt  $N$  er mindre end flydelasten, fordi trykflydespændingen ikke længere optræder over hele tværsnittet. Jo større tværflytninger, der opstår, jo større bliver momentet i flydeleddet, og jo mindre bliver den tilhørende normalkraft (*figur 2c*).



Figur 2 Udknækning af perfekt simpelt understøttet trykstang af ideal stiv-plastisk materiale.

## 2.2 Ideal elastisk-plastisk materialemodel

Så længe den elasticitetsteoretiske kritiske last  $N_{cr}$  er mindre end brudlasten  $N_{pl}$ , forbliver søjlen ret og undergår kun elastiske aksialdeformationer. Når der indtræder kollaps på grund af elastisk udbøjning ved normalkraften  $N = N_{cr}$ , vil tværflytningen give et bøjende moment, der forøger spændingerne i den konkave side og reducerer dem i den konvekse side af søjlen. Der opstår trykflydning i den midterste del af søjlen og undertiden også trækflydning.

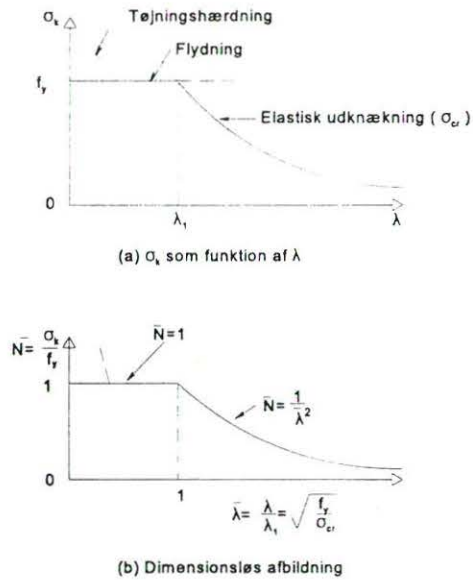
Hvis brudlasten  $N_{pl}$  i stedet er mindre end den elastiske kritiske last  $N_{cr}$ , vil søjlen opføre sig som den stiv-plastiske søjle, men med større aksial- og bøjningsdeformationer. I dette tilfælde vil bæreevnen være lig med brudlasten  $N_{pl}$ .

## 2.3 Bæreevnekurve for en ideal søjle

Den elastiske analyse viser, at slankhedsforholdet  $\lambda = \ell/i$  har afgørende betydning for søjlens bæreevne.  $\ell$  er den teoretiske søjleknæklængde, som for en simpelt understøttet søjle er lig med søjlens geometriske længde, og  $i = \sqrt{I/A}$  er inertiradius for den betragtede udknækningsretning. Ved at optegne den gennemsnitlige trykspænding ved kollaps,  $\sigma_k$ , som funktion af slankhedsforholdet  $\lambda$  fås en god forståelse af virkemåden i de to tilfælde, se figur 3a. Den elastiske kritiske spænding repræsenteres ved hyperbel  $\sigma = \sigma_{cr} = \pi^2 E/\lambda^2$ , der afskæres med den rette linie  $\sigma_k = f_y$  svarende til flydning over hele tværsnittet. De 2 kurver skærer hinanden for slankhedsforholdet  $\lambda_1$ , således at  $\pi^2 E/\lambda_1^2 = f_y$  eller

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{E/f_y} \quad (2)$$

Det fremgår, at kollaps sker som plastisk flydning, når  $\lambda < \lambda_1$ , og som elastisk udknækning, når  $\lambda > \lambda_1$ . Normalt optegnes bæreevnekurven på normaliseret form, idet  $\bar{N} = \sigma_k/f_y$  optegnes som funktion af  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_1$ , se figur 3b. Det medfører, at flydning ( $\bar{N} = 1$ ) og elastisk udknækning ( $\bar{N} = 1/\bar{\lambda}^2$ ) er sammenfaldende for  $\bar{\lambda} = 1$ .



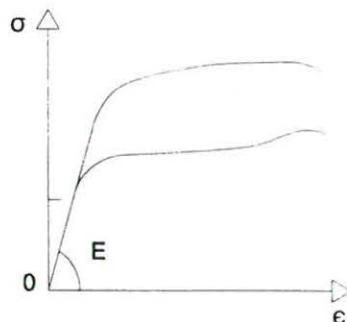
Figur 3 Søjlekurver for perfekte simpelt understøttede trykstænger af ideal elastisk-plastisk materiale.

## 2.4 Praktisk anvendelse af den elastisk plastiske materialemodel

Arbejdslinier for et par højstyrkestål er vist på figur 4. I forhold til den ideelle elastisk plastiske arbejdslinie er der 3 markante forskelle:

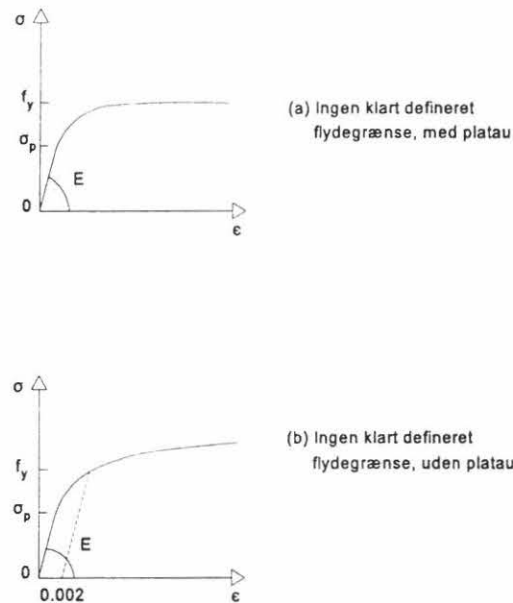
- ved store tøjninger opstår der deformationshærdning
- tøjningen begrænses af en brudværdi
- der er ingen klart defineret flydegrænse

Da stabilitetsbrud ikke opstår på grund af store deformationer, er materialets ductilitet og dermed punkt b) normalt uden betydning.



Figur 4 Arbejdslinier for højstyrke stål

Deformationshærdningen har ikke indflydelse på begyndende flydning, men forøger brudlasten. Denne effekt er naturligvis mest udtalt ved lave slankhedsforhold, hvor plastiske deformationer er dominerende. I forhold til *figur 3a* vil der ske en løftning af bæreevnekurven på den pågældende strækning, men i praksis negligeres fordelene ved tøjningshærdning dog.

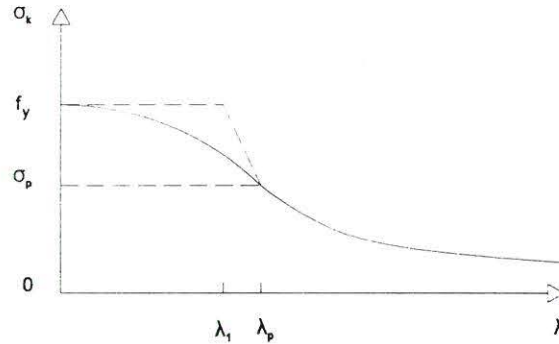


Figur 5 Ikke ideal elastisk-plastisk materialemodel (højstyrke stål)

Forskellige stållegeringer har forskellige arbejdslinier. Specielt højstyrkestål har normalt ingen klart defineret flydegrænse og kan klassificeres således:

1. Stål med arbejdslinier, hvor det elastiske område afgrænses af proportionalitetsgrænsen  $\sigma_p$ , og med et flydeplateau for  $\sigma = f_y > \sigma_p$  som vist på *figur 5a*.
2. Stål med samme egenskaber i det elastiske område, men uden flydeplateau og med tøjningshærdning i hele det ikke elastiske område. I dette tilfælde defineres flydespændingen normalt svarende til en blivende tøjning på 0.2% (*figur 5b*). Manglen på en klart defineret flydegrænse medfører følgende:
  - En slank søjle ( $\lambda \geq \lambda_p$  hvor  $\lambda_p = \pi\sqrt{E/\sigma_p}$ ) vil svigte ved elastisk udknækning, såfremt  $\sigma_{cr}$  ikke overstiger  $\sigma_p$ .
  - En kort og kompakt søjle vil svigte for flydelasten, uden at der opstår udknækning.
  - I det mellemliggende slankhedsområde ( $\lambda \leq \lambda_p$ ) vil materialets stivhed aftage progressivt med voksende spændinger i området  $\sigma > \sigma_p$ . Der kan opstå ikke elastisk udknækning for laster, der er lavere end både flydelasten og den elastisk kritiske værdi.

Bæreevnekurven bliver herefter som vist på *figur 6*, når der ikke tages hensyn til virkningen af tøjningshærdningen.



Figur 6 Søjlekurve for perfekte simpelt understøttede trykstænger med en ikke-ideal elasto-plastisk materialemodel

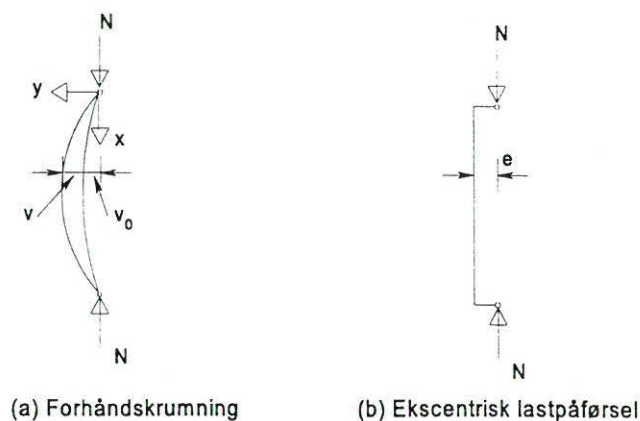
### 3. BÆREEVNE AF SØJLER MED IMPERFEKTIONER

I de foregående afsnit blev der opstillet idealiserede bæreevne modeller, som ikke umiddelbart kan anvendes på virkelige søjler på grund af de uundgåelige imperfektioner, der opstår i enhver fremstillingsproces. I de følgende afsnit vurderes det, hvilken indflydelse disse imperfektioner har på den virkelige bæreevne. Først betragtes imperfektionerne enkeltvis og dernæst i de kombinationer hvori de optræder i praktiske konstruktioner.

#### 3.1 Geometriske imperfektioner

Geometriske imperfektioner stammer dels fra elementets initialkrumning (*figur 7a*) og dels fra ekscentrisk påførte laster (*figur 7b*).

Da en udknækning er karakteriseret ved et dominerende flytningsfelt forbundet med udbøjningskurvens form, vil enhver initialudbøjning af elementet eller ekscentricitet i den påførte last øge instabiliteten. De resulterende 2. ordens effekter vil reducere bæreevnen i sammenlignet med det tilsvarende perfekte element.



Figur 7 Simpelt understøttede trykstænger med geometriske imperfektioner

Da disse imperfektioner ligger inden for rammerne af normal fabrikationstolerance, er de ikke synlige og kan ikke på forhånd fastlægges præcist. Der skal imidlertid ved dimensioneringen tages hensyn til dem på passende vis.

De 2 typer af geometrisk imperfektion, der er vist på *figur 7*, vurderes herefter nærmere; det drejer sig om:

- elementets initialkrumning i udknækningsplanen
- utilsigtede ekscentriciteter i den påførte aksialkraft

### 3.1.1 Forhåndskrumning

Forhåndskrumningen kaldes også for initialkrumningen og er vist på *figur 7a* for en søjle, der er simpelt understøttet i begge ender. Den giver anledning til et tillægsmoment, når der påføres en trykkraft. Dermed forøges udbøjningen, og momentarmen for den ydre last vokser yderligere. Det resulterer i en geometrisk ikke lineær virkemåde. En stabil ligevægt i udbøjet tilstand er mulig, så længe det ydre moment, d.v.s. produktet af trykkraften og tværudbøjningen, ikke overstiger tværsnittets modstandsevne i et vilkårligt snit. Søjleudknækning i forbindelse med initialkrumning er derfor ikke noget egentligt stabilitetsproblem, men indtræder på grund af uligevægt, i modsætning til "bifurcations-udknækningen" i en ideel trykstang.

Uanset lastniveauet udsættes ethvert tværsnit i en søjle for en kombination af moment og aksialkraft. Da der ikke længere er en lineær sammenhæng mellem flytninger og kræfter (ligevægten afhænger af udbøjningens form), kan den resulterende virkning af bøjning og aksialkraft ikke blot bestemmes ved superposition.

For nogle simple last- og understøtningsbetingelser kan man benytte en direkte metode, der baseres på integration af den differentiaalligning, der beskriver ligevægten for den udbøjede form. Den grundlæggende ligevægtsligning for en søjle med initialudbøjningen  $v_0(x)$  i udbøjningsplanen er (*figur 7a*):

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{N(v_0 + v)}{EI_z} = 0 \quad (3)$$

hvor  $v(x)$  den tillægsudbøjning, der stammer fra aksialkraften  $N$ . Da den første udbøjningsform for en simpelt understøttet søjle er en halvbølge, vælges initialudbøjningen tilsvarende, og det er derefter let at vise, at den resulterende udbøjning  $v_t$  i det kritiske tværsnit ( $x = 0.5 L$ ) er

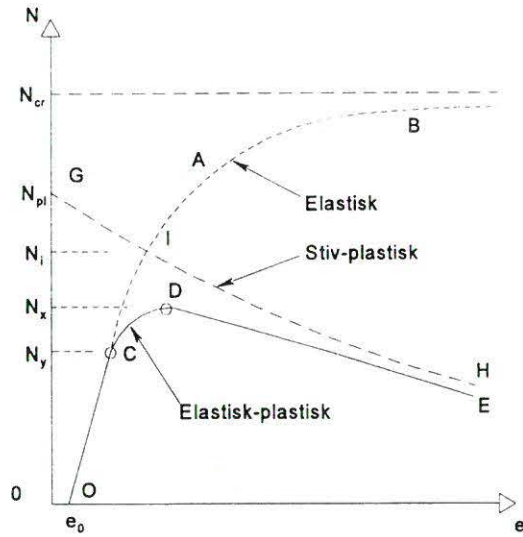
$$v_t = v_0 / (1 - N/N_{cr}) \quad (4)$$

hvor  $N_{cr} = \pi^2 EI_z / L^2$  er den elastiske kritiske last. Aksialkraften forøger således initialudbøjningen og dermed 1. ordens momentet  $Nv_0$  med faktoren  $1/(1 - N/N_{cr})$ :

$$M = Nv_t = Nv_0 / (1 - N/N_{cr}) \quad (5)$$

*Figur 8* (kurve O'AB) viser sammenhængen mellem aksialkraften  $N$  og den resulterende udbøjning  $v_t$  i udknækningsplanen. Udbøjningen går mod uendelig,

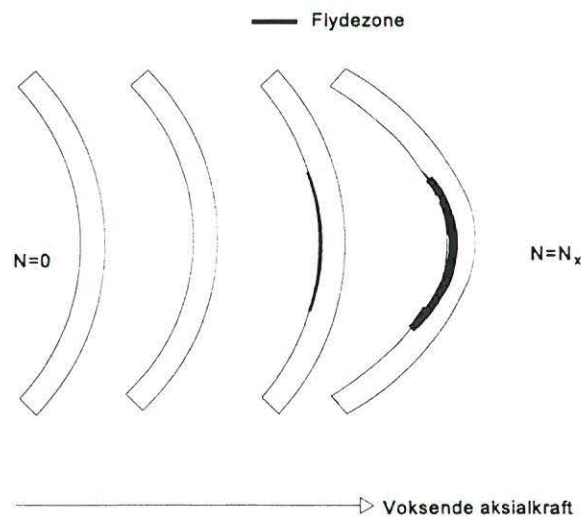
når  $N$  nærmer sig den elastiske kritiske last  $N_{cr}$ , medens der skal en uendelig stor trækraft til at rette søjlen ud.



Figur 8 Virkemåde for trykstang med forhåndskrumning (forudsat  $N_{pl} < N_{cr}$ )

Udbredelsen af det bøjende moment langs søjlen øges med udbøjningen. Bøjningsmomentet og spændingerne er størst i det kritiske tværsnit, og de største spændinger optræder i den konkave side af søjlen, hvor trykspændingerne fra aksialkraft og moment overlejres. Begyndende flydning vil starte her, når aksialkraften  $N$  øges til værdien  $N_y$ , der angiver grænsen for elastisk virkemåde (pkt. C på kurven O'AB på figur 8).

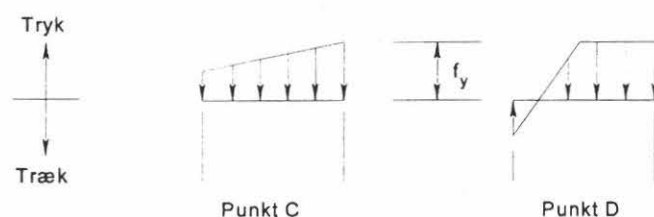
Forøges  $N$  over værdien  $N_y$  vil flydningen spredes, både på langs af søjlen og indad i tværsnittet som vist på figur 9. Det medfører en reduktion i søjlens stivhed, og når maximumsværdien  $N_k$  nås, vil søjlen bryde sammen (pkt. D på figur 8).



Figur 9 Spredning af flydezonen ved begyndende kollaps

Søjlels brudbæreevne er således en funktion af 2 forhold, der reducerer bøjningsstivheden: dels aksialkraften, der medfører instabilitet, og dels udbredelsen af den plastiske flydningen.

Spændingsfordelingen over søjletværsnittet svarende til pkt. C og D er vist på *figur 10*. Normalt vil der ikke opstå trækflydning i søjlels konvekse side ved kollaps.



Figur 10 Spændingsfordelingen i det kritiske tværsnit af en trykstang med forhåndskrumning

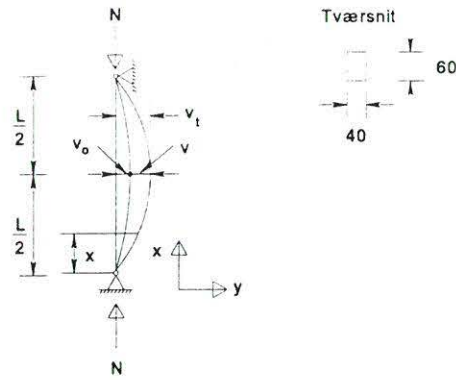
Efter at brudlasten er nået, vil forløbet DE være asymptotisk til den stiv-plastiske virkemåde GH (jvf. *figur 2c*), idet det på *figur 8* er forudsat, at  $N_{pl} < N_{cr}$ . Det er klart, at flydelasten  $N_y$  og brudlasten  $N$  må have både  $N_{cr}$  og  $N_{pl}$  som overgrænser, idet  $N_{cr}$  kan være både større og mindre end  $N_{pl}$ . Under alle omstændigheder vil brudlasten aldrig overstige værdien  $N_i$ , der svarer til skæringspunktet mellem elastisk og stiv-plastisk virkemåde (pkt. I). Hvor tæt  $N_y$  og  $N_k$  kan komme på  $N_{cr}$  og  $N_{pl}$  afhænger af søjlels slankhed og af størrelsen af forhåndskrumningen

Indflydelsen fra både slankhedsforhold og forhåndskrumning på den elasto-plastiske virkemåde er vist på *figur 11* for et rektangulært tværsnit. Herudfra kan der drages følgende slutninger:

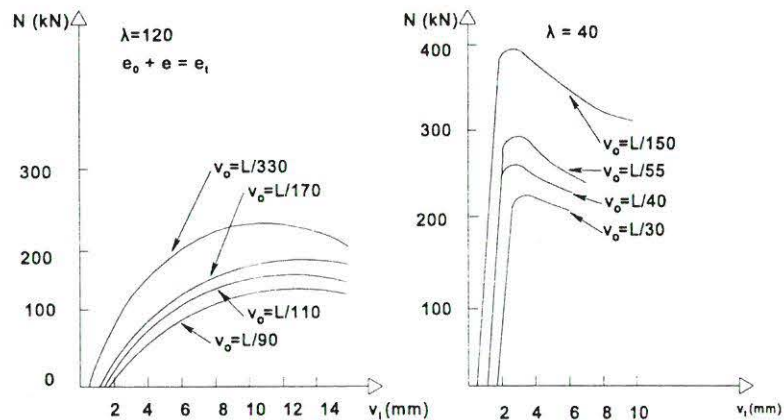
- Uanset slankhedsforholdet vil en forøgelse af forhåndskrumningen reducere brudlasten.
- For en given værdi af den relative initialudbøjning ( $v_0/L$ ) vil et aftagende slankhedsforhold give en stejlere kurve i det elastiske område.
- For slanke søjler er arbejdslinien efter svigt en langsomt aftagende kurve, såfremt forhåndskrumningen er moderat.
- For korte og kompakte søjler er virkemåden efter kollaps også en aftagende kurve, hvis stejlhed vokser med aftagende forhåndskrumning.

Hvis forhåndskrumningen kendes (hvis den f. eks. kan måles) er det muligt at konstruere en bæreevnekurve ud fra den beregnede brudlast. En sådan kurve har en form (a) som vist på *figur 12*. Hvis forhåndskrumningen har samme form som udbøjningskurven, vil bæreevnekurven starte ved  $\sigma_k = f_y$  for små slankhedsforhold og herefter ligge lavere end den bæreevnekurve, der gælder for retliniede søjler, men nærme sig denne ved voksende slankhedsforhold.





(a) Forhåndskrumning ved udknækning om svage akse

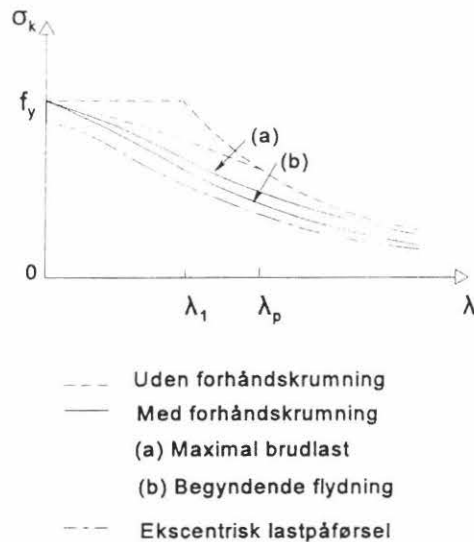


(b) Elasto-plastisk virkemåde ved forskellige værdier af forhåndskrumning ( $E=210000 \text{ N/mm}^2$ ;  $f_y=210 \text{ N/mm}^2$ )

Figur 11 Betydningen af slankhedsforhold og forhåndskrumningen i det elasto-plastiske område

På den anden side vil meget slanke søjler have en elastisk kritisk last  $N_{cr}$ , der er meget lavere end flydelasten  $N_{pl}$ , og i sådanne tilfælde kan pkt. C på figur 8 være placeret højt oppe på den elastiske del af kurven og brudlasten ligge tæt på  $N_{cr}$ . Indflydelsen fra forhåndskrumningen er især mærkbar for søjler med slankhedsforhold i det midterste område. Den største reduktion i bæreevne optræder i omegnen af værdien  $\lambda_1$ , hvor flydning og elastisk udknækning er næsten sammenfaldende, og derfor giver den farligste interaktion.

Hvis bæreevnekriteriet vælges svarende til begyndende flydning som  $N_y$  i stedet for som maximumslasten  $N_k$ , vil bæreevnekurven ligge lavere, men have samme form (kurve b på figur 12).



Figur 12 Søjlekurver

### 3.1.2 Ekscentrisk last

Påføres lasten  $N$  med en ekscentricitet  $v_0$  på enden af en retliniet og simpelt understøttet søjle (figur 7b), vil den introducere et 1. ordens moment, som vil få søjlen til at bøje ud på samme måde som for søjlen med initialkrumning, der blev analyseret ovenfor.

Differentialligningen for ligevægtstilstanden bliver i dette tilfælde:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{N(v_0 + v)}{EI} = 0 \quad (6)$$

Den eneste forskel fra ligning (3) er, at imperfektionen  $v_0$  ikke er en funktion af  $x$ . Løsningen af (6) viser, at 1. ordens momentet  $M_0 = N v_0$  bliver forøget med en faktor  $\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{N/N_{cr}}\right)$ .

Momentforøgelsesfaktorerne fra forhåndskrumning og fra lastekscentricitet minder meget om hinanden for praktisk forekommende værdier af forholdet  $N/N_{cr}$ . Derfor bliver sammenhængen mellem last og udbøjning for en ekscentrisk påvirket søjle nogenlunde som vist på figur 8, bortset fra at kurven starter i koordinatsystemets begyndelsespunkt.

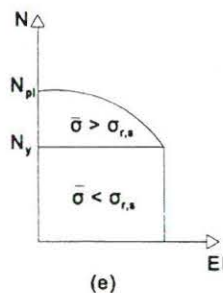
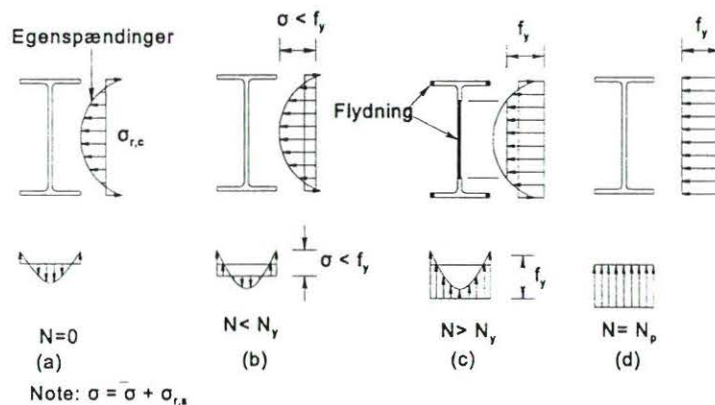
I modsætning til forhåndskrumningen, der er stærkt afhængig af søjlelængden, er ekscentriciteten i højere grad forbundet med tværsnittets størrelse. Desuden er 1. ordens bøjningsmomentet konstant over hele længden, således at bæreevnen for meget korte søjler bliver lavere end flydelasten, som antydtes med kurve c på figur 12.

### 3.2 Egenspændinger

Valsede stålprofiler og plader har indbygget egenspændinger som følge af uensartet afkøling efter valsningen. Også i opsvejste stålkonstruktioner opstår der egenspændinger på grund af lokal opvarmning og afkøling af svejsematerialet og det omgivende grundmateriale. Tilsvarende findes der egenspændinger i koldformede tværsnit som følge af de store plastiske deformationer, der påføres under formningsprocessen. For ubelastede elementer er der tale om en egenspændingstilstand.

Fordelingen og størrelsen af egenspændingerne afhænger af mange parametre som omtalt i lektion 7.5.1 og 7.5.2. I valsede og opsvejste profiler af normal størrelse vil der f. eks. optræde trækkegenspændinger i de områder, som afkøles sidst, og disse trækspændinger afbalanceres af trykspændinger i den resterende del af tværsnittet. Under forudsætning af, at pladetykkelsen i disse profiler ikke er for stor, kan man normalt antage, at egenspændingerne er konstante over tykkelsen. En typisk egenspændingsfordeling i et I-profil er vist på figur 13a.

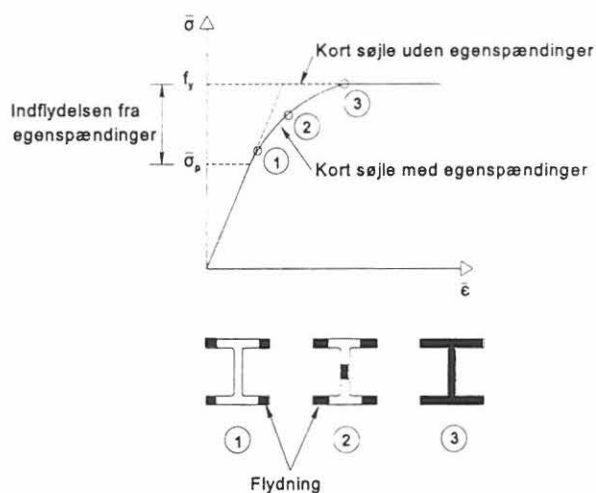
Egenspændinger medfører, at der tidligt opstår begyndende flydning, idet dette indtræffer, før den gennemsnitlige værdi af den påførte trykspænding  $\bar{\sigma}$  når op på materialets flydespænding  $f_y$ . Flydningen vil begynde i den eller de fibre, hvor den maximale egenspænding  $\sigma_{r,c}$  optræder for en last  $N_y$ , der giver  $\bar{\sigma}_p + \sigma_{r,c} = f_y$ .



Figur 13 Egenspændingernes indflydelse på stivheden af trykstænger under forudsætning af elasto-plastisk virkemåde.

Indtil dette lastniveau nås, er virkemåden elastisk. Den påførte, jævnt fordelte spænding  $\bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}_p$  vil overlejre egenspændingsfordelingen  $\sigma_{r,c}$ . Herefter vil enhver

yderligere last udover  $N_y$  medføre, at flydningen breder sig ud i tværsnittet. Fibrene, der flyder, har en reduceret stivhed i forhold til de, der forbliver elastiske, fordi de udsættes for en tøjning  $\epsilon$ , der er større en flydetøjningen  $\epsilon_y$ . Det betyder, at bøjningsstivheden for en søjle er konstant indtil begyndende flydning. Herefter reduceres den progressivt med voksende last (*figur 13e*) for helt at forsvinde ved flydelasten, såfremt der ses bort fra virkningen af deformationshærdning. Hele tværsnittet flyder, når middelværdien af den påførte spænding er lig med materialets flydespænding. Sammenhængen mellem middelværdien af den påførte aksialspænding  $\bar{\sigma}$  og middelværdien af aksialtøjningen  $\bar{\epsilon}$  er vist på *figur 14*. Denne kurve minder om  $\sigma - \epsilon$  kurven for et stålmateriale uden klart defineret flydegrænse, men med et flydeplatau (*figur 5a*). Det betyder, at en søjle med egenspændinger opfører sig, som om den er udført af et fiktivt stålmateriale med denne spændings-tøjningsrelation, og med en proportionalitetsgrænse  $\sigma_p$ , der er forskellig fra selve materialets proportionalitetsgrænse.



Figur 14 Arbejdslinie baseret på middelværdier af normalspændinger og tøjninger fundet ved forsøg med korte søjler.

Brudlasten for en kort og kompakt søjle bliver derfor ikke påvirket af egenspændinger, men er stadig lig med flydelasten. Tilsvarende vil meget slanke søjler med kritiske spændinger, der er mindre end  $\bar{\sigma}_p$ , opføre sig elastisk og ikke påvirkes af egenspændingerne. Påvirkningen fra egenspændinger er mest udtalt for søjler i midterste slankhedsområde. Her vil begyndende flydning opstå tidligt og formindske bøjningsstivheden, så søjlens udknækning bliver uelastisk og optræder for en last, der er mindre end både den elastiske kritiske last og flydelasten. Den hertil svarende bæreevnekurve får en form som vist på *figur 6*. Bemærk at koordinaterne i dette tilfælde repræsenterer den påførte middelspænding og aksialtøjningen, og at  $\bar{\sigma}_p$  erstatter  $\sigma_p$ .

Det største tab i bæreevne på grund af indflydelsen fra egenspændinger optræder igen i området  $\lambda \approx \lambda_1$ .

### 3.4 Kombineret virkning af imperfektioner

I praksis vil alle de forskellige former for imperfektioner, der er behandlet ovenfor, optræde samtidigt. Forhåndskrumning, ekscentricitet i lastpåførsel, egenspændinger og manglen på en klart defineret flydegrænse vil sænke søjlens bæreevnekurve i hele eller dele af slankhedsområdet. På den anden side vil virkningen af deformationshærdningen sandsynligvis hæve bæreevnekurven, dog kun i området med lave værdier af slankhedsforholdet. Den gunstige virkning heraf vil normalt mere end kompensere for tabet i bæreevne som følge af utilsigtede ekscentriciteter. I alle tilfælde afskæres søjlens bæreevnekurve med  $\bar{\sigma} = f_y$  således at denne bæreevnereserve ignoreres.

Forsøg og numeriske analyser viser klart, at:

- a) De separate bidrag fra egenspændinger og forhåndskrumning kan ikke blot adderes med henblik på bedømmelsen af deres samlede indflydelse på bæreevnen.
- b) For det midterste slankhedsområde og for små egenspændinger vil den kombinerede virkning normalt være mindre end summen af de enkelte bidrag, medens den i andre områder kan være større.
- c) Variationer i egenspændingsfordelingens form giver forskelle i bæreevnen, men mindre for søjler med forhåndskrumning end for søjler uden.
- d) Indflydelsen fra både forhåndskrumning og egenspændinger er størst for søjler i det midterste slankhedsområde. I dette område er trykbrudstyrken og den elastisk kritiske last næsten sammenfaldende. Bæreevnen afhænger af bøjningsstivheden, materialets flydespænding, størrelsen og fordelingen af egenspændinger samt forhåndskrumningen. Interaktionen mellem de to sidstnævnte former for imperfektioner kan betyde en kraftig reduktion i bæreevnen, sammenlignet med bæreevnen for den tilsvarende perfekte søjle.

Da al afvigelse fra den ideelle søjle og det ideelle materialemodel er underkastet statistiske variationer, er det ikke muligt præcist at forudsige den virkelige bæreevne af en given standardsøjle. Til brug ved dimensionering benyttes bæreevnekurver som med en foreskreven sandsynlighed sikrer, at den beregnede kritiske last ikke overstiger den virkelige bæreevne.

#### 4. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. En retliniet og centralt belastet søjle udført af et ideel elastisk-plastisk materiale uden egenspændinger kan kollapse enten ved plastisk flydning for  $\lambda < \lambda_1$  eller ved elastisk udknækning for  $\lambda > \lambda_1$ .
2. Bæreevnen er i praksis lavere på grund af geometriske og materialemæssige imperfektioner såsom forhåndskrumning, ekscentrisk lastpåførsel, egenspændinger og mangel på en klart defineret flydegrænse.
3. En vis forøgelse af bæreevnen optræder for meget lave slankhedsforhold på grund af materialets tøjningshærdning. Normalt ses der dog bort fra denne effekt, således at bæreevnen for meget korte og kompakte søjler bliver lig med trykstyrken.
4. Imperfektioner medfører en reduceret bæreevne for det søjler i det mellemste slankhedsområde. Den største reduktion optræder i området omkring slankhedsforholdet  $\lambda \approx \lambda_1$ , hvor trykbrudstyrken og den elastisk kritiske last er næsten sammenfaldende, og interaktionen derfor bliver størst.
5. Betydningen af imperfektionerne er lille for søjler med stor slankhed, og bæreevnen for disse søjler ligger derfor tæt på den elastisk kritiske værdi.
6. Slankhedsforholdet er den geometriske parameter, der danner grundlag for vurdering af virkemåde og brudformer.

#### 5. LITTERATURHENVISNINGER

1. Ballio G. and Mazzolani F., "Theory and design of Steel Structures", Chapman and Hall, London, 1983.
2. Dowling P.J., Knowles P. and Owens, G.W., "Structural Steel Design", Butterworths, London, 1988.
3. Galambos T.V. (editor), "SSRC Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", 4th Edition, John Wiley and Sons, New York, 1988.
4. McGuire W., "Steel Structures", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N-J., 1968.
5. Picard A. and Beaulieu D., "Calcul des charpentes en acier", Institut Canadien de la Construction en Acier, 1991.



## Lektion 6.6.2: Stabilitet af imperfekte konstruktionselementer II

### FORMÅL

At udbygge og generalisere konklusionerne fra lektion 6.6.1 vedrørende søjler og overføre dem på andre stabilitetsfænomener.

### FORUDSÆTNINGER

Lektion 6.3: Elastisk instabilitet

Lektion 6.6.1: Stabilitet af imperfekte konstruktionselementer I

### LEKTIONER VEDRØRENDE BESLÆGTEDE EMNER

Lektion 7.3: Foldning

Lektion 7.5.1 & 7.5.2: Søjler

Lektion 7.10.1 & 7.10.2: Bjælkesøjler

Lektion 8: Plader og skaller

Lektion 9: Tyndvæggede konstruktioner

### RESUMÉ

Denne lektion omhandler foldning af plader og foldningsfænomener, der medfører vridningsdeformationer. Desuden betragtes basale former for foldning af skalelementer som f. eks. den aksialt belastede cylinderskal. For hver type foldning beskrives fænomenet, og der gennemføres en analyse af virkemåden i det under- og overkritiske område samt af brudmåden. De styrende geometriske parametre identificeres, og endelig er der en kort omtale af, hvordan konstruktionselementerne kan forstærkes, så stabilitetsbrud undgås.

Oversat og bearbejdet af S. Kloch, Aalborg Universitet, juli 1996

## 1. INDLEDNING

Den betydning, som imperfektioner, materialets plasticitet og tøjningshærdningen har på den kritiske bæreevne af en søjle, er gennemgået detaljeret i den foregående lektion 6.6.1. Det er denne form for instabilitet, der er bedst undersøgt, og hvor man har opnået en næsten fuldstændig forståelse af fænomenet.

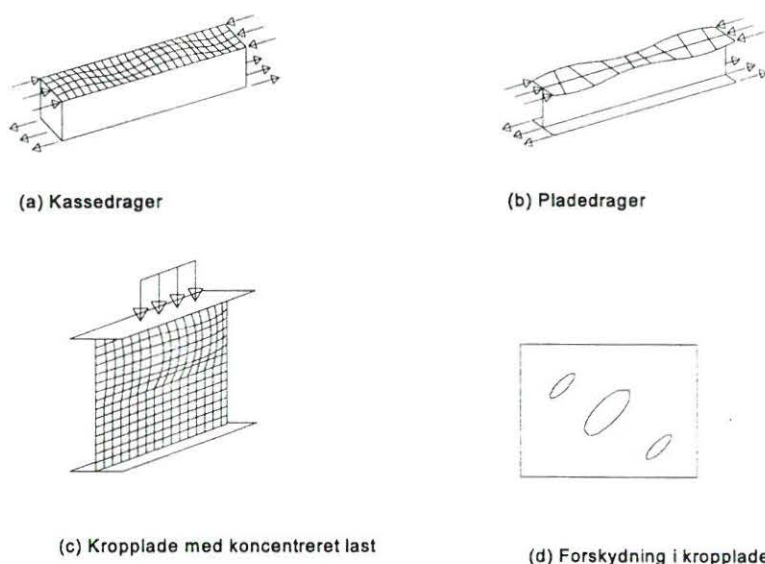
De fleste af konklusionerne fra den foregående lektion kan i store træk overføres på andre former for instabilitet. Disse er imidlertid karakteriseret ved andre deformationsformer, således at de imperfektioner, der er afgørende for bæreevnen, er forskellige fra tilfældet med søjlestabilitet. For at opnå indsigt i den virkelige kritiske last er det derfor nødvendigt at analysere virkningen af imperfektionerne på de enkelte konstruktionstyper.



Først undersøges foldning af pladefelter, fordi den ofte optræder i form af lokal instabilitet, f. eks. som foldning af et deltværsnit. Desuden hjælper det til forståelsen af vridningsudknækning af søjler, hvor foldningen optræder som en ren vridningsdeformation. Dernæst undersøges kombineret bøjnings- vridningsudknækning, hvor bøjnings- og vridningsdeformationerne er indbyrdes afhængige som ved kipning af bjælker. Også foldning af skaller behandles, idet dette meget komplekse fænomen illustreres ved at betragte det basale tilfælde med en aksialt belastet cylindrisk skal.

## 2. FOLDNING AF PLADER

Foldning af plader optræder, når tyndvæggede tværsnit udsættes for trykspændinger. Dette fænomen minder meget om søjleudknækning, men det involverer i højere grad flytning af de enkelte dele af pladetværsnittet end flytning af det samlede tværsnit. Trykspændinger opstår ikke kun på grund af aksialkræfter, men også fra momenter og eventuelt koncentrerede laster (figur 1a, 1b og 1c). Foldning kan også optræde i forskydningspåvirkede plader (figur 1d), idet forskydningen giver anledning til tryk- og trækspændinger.



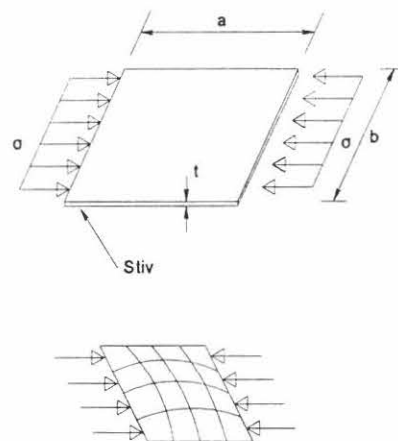
Figur 1 Eksempler på foldning af pladefelter

Koldformerede tværsnit og tyndpladetværsnit er mest udsat for foldning.

De elastiske foldningsformer med tilhørende kritiske spændinger for trykpåvirkede plader udledes på grundlag af ligningen for plader i udbøjet tilstand som vist i lektion 6.3.

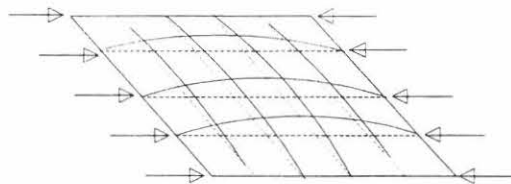
Det er forlængst erkendt, at pladens (teoretisk) kritiske last ikke er et tilfredsstillende mål for den virkelige plades bæreevne. Så snart pladen begynder at folde, vil

flytningerne ud af planen resultere i membrankræfter på grund af forlængelsen af pladens midterplan. For at indse dette betragtes en rektangulær plade uden imperfektioner, der er fastholdt mod flytninger ud af planen langs alle 4 rande, og belastet med en enakset, jævnt fordelt last. Det antages yderligere, at pladens sideforhold er valgt således, at foldningen sker som en enkelt bule (*figur 2*). Pladen tænkes opdelt i et system af strimler i 2 på hinanden vinkelrette retninger. De langsgående strimler påvirkes til tryk og vil derfor have tendens til udknækning. Så længe spændingen er under den elastisk kritiske værdi, vil strimlerne være rette, fordi pladen forbliver plan, og de bevarer deres stivhed, og trykspændingerne vil være jævnt fordelte. Når pladen begynder at folde, vil de langsgående strimler, der ligger ved randene, fastholdes mod udknækning, medens de øvrige er mere tilbøjelige til at bøje ud. Med andre ord bevarer de førstnævnte deres aksialstivhed, medens de sidstnævnte mister en del af den oprindelige stivhed.



Figur 2 Grundtilfældet for foldning af pladefelter

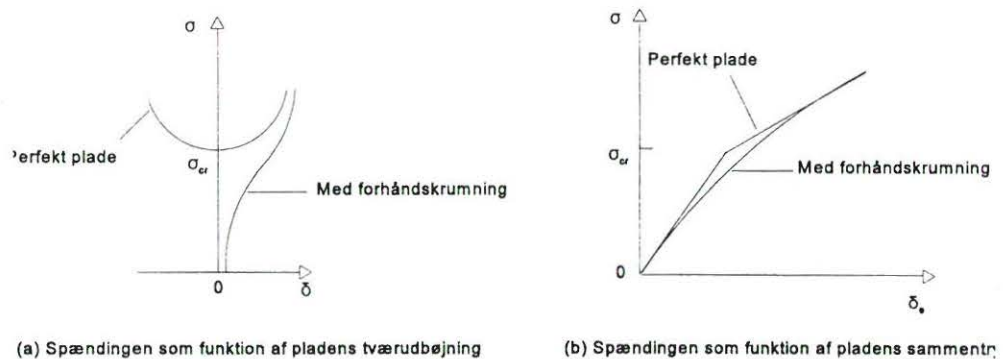
Foldningen af pladen betyder, at de tværgående strimler forlænges, fordi pladen er fastholdt mod flytninger i tværretningen af de langsgående rande. Det betyder, at der opstår trækspændinger i de tværgående strimler, og det har en stabiliserende effekt på de langsgående strimler (*figur 3*).



Figur 4 Foldning af trykpåvirket plade

Det er forklaringen på, at der kan optræde en stabil ligevægtstilstand, selv om pladen påføres spændinger, der er større end den elastisk kritiske, og at der således kan være en betydelig bæreevnereserve i det overkritiske område, såfremt der ikke forinden opstår flydning i pladen. Dette er den fundamentale forskel på foldning af plader og stabilitet af søjler, hvor der ikke findes en sådan bæreevnereserve.

Når der opstår foldning i pladen, vil der være interaktion mellem flytninger i planen og ud af denne, og det medfører, at virkemåden bliver ikke-liniær. Når der optræder store flytninger, kan pladens virkemåde kun udledes ved at betragte både kompatibiliteten og pladens ikke-liniære ligevægtsligning. Dette fremgår af *figur 4*, hvor den påførte middelspænding er afbildet, dels som funktion af pladens tværbøjning og dels som funktion af pladens sammentrykning. Sidstnævnte diagram er bi-liniært, såfremt pladen er perfekt plan, og hældningen angiver pladens aksialstivhed.



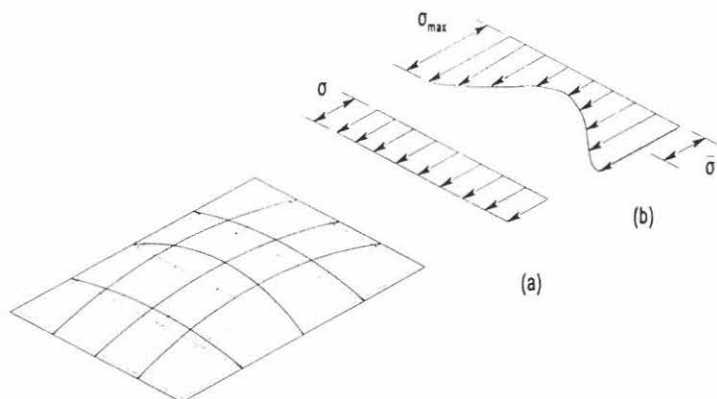
Figur 4 Virkemåde af plader der folder under tryk

Stivheden i det overkritiske område afhænger af, hvordan randene fastholder pladen mod flytninger i planen, og den varierer normalt mellem 40 og 75% af den oprindelige stivhed. Jo stivere randene er overfor flytninger i planen (primært de langsgående rande), jo kraftigere er den stabiliserende effekt fra membrankræfterne, og jo større den overkritiske bæreevnereserve.

Brudlasten nås først, når pladens stivhed er tilstrækkelig forringet på grund af flydning i materialet. Som nævnt ovenfor, vil foldning af plader resultere i en ujævn fordeling af membranspændingerne over pladens bredde, med de største spændinger ved de langsgående rande (*figur 5*). Derfor vil flydning først opstå ved disse rande og derefter hurtigt spredes, indtil brudlasten nås.

Overkritisk bæreevnereserve optræder især ved plader med stor slankhed, som hovedsageligt opfører sig elastisk. Brudlasten kan i sådanne tilfælde være adskillige gange større end den elastisk kritiske last. Virkemåden for plader med lille eller

moderat slankhed påvirkes i høj grad af materialets plasticitet. Jo kraftigere pladen er, desto større områder vil begynde at flyde, før pladen folder, og brudlasten kan eventuelt bliver mindre end den elastisk kritiske last.

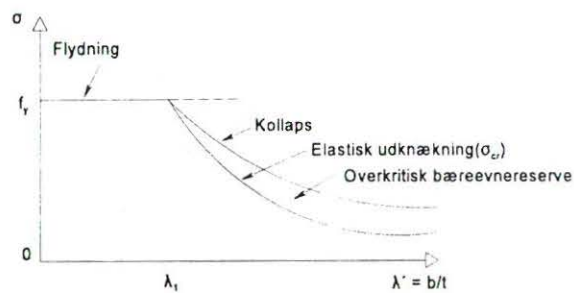


Figur 5 Spændingsfordeling (a) før og (b) efter pladen begynder at folde

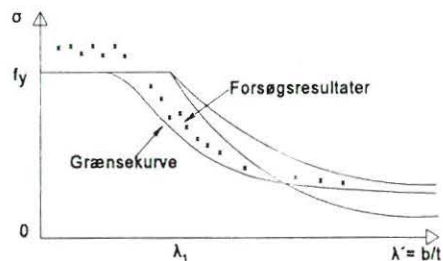
Ved fremstillingsprocessen og under udførelsen vil der uundgåeligt opstå geometriske imperfektioner og egenspændinger i pladerne. I de fleste tilfælde vil begge disse forhold få indflydelse på pladens opførsel både i det elastiske og i det overkritiske område.

Den vigtigste form for geometrisk imperfektion er forhåndskrumningen, som naturligvis har afgørende indflydelse på pladens foldning. Da pladen ikke er plan, vil udbøjningen begynde at vokse, så snart lasten påføres. Størrelsen af forhåndskrumningen har indflydelse på last-deformationskurven, men så længe virkemåden er elastisk, vil grænseværdien, med en vilkårlig værdi af forhåndskrumningen, svare til virkemåden i det overkritiske område for en ideal plan plade (*figur 4a*). For kurven, der viser pladens sammentrykning, vil forhåndskrumningen betyde, at knækket ved den kritiske spænding afrundes (*figur 4b*). Det er ikke kun størrelsen af forhåndskrumningen, men også formen, der har betydning for pladens virkemåde. Jo mere denne form minder om den ideelle plades foldningsform, desto lettere opstår og udvikler foldningen sig. Omvendt vil en forhåndskrumning, der i form afviger fra foldningsformen, have en tendens til at forsinke foldningen, men når den opstår, vil det ske pludseligt. På grund af den tilfældige natur, som kendetegner forhåndskrumningens form (ukendt under projekteringen), er det normal konservativ praksis at antage, at den har en form, der ligger tæt ved den foldningsform der svarer til den laveste kritiske spænding for pladen.

Egenspændingerne har også en tendens til at reducere pladens aksialstivhed og påvirke udviklingen af flydning.



(a) Perfekt plade



(b) Imperfekt plade

Figur 6 Slankhedsforholdets betydning for foldning af plader

Pladens slankhed er den geometriske parameter, der har afgørende betydning for brudlasten. Generelt kan brudlasten illustreres (*figur 6a*) ved at afbilde spændingens middelværdi ved brud som funktion af slankhedsforholdet  $\lambda' = t/b$ , hvor  $b$  er pladens bredde målt vinkelret på trykkraften. En elastisk plade uden imperfektioner folder for en kritisk spænding:

$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} [\pi^2 E / 12 (1 - \nu^2)] (1/\lambda')^2 \quad (1)$$

hvor  $k_{\sigma}$  er pladens foldningskoefficient og  $\nu$  er Poissons forhold. På grund af materialets plasticitet udgør flydelasten en grænse for pladens bæreevne og medfører derfor en afskæring af den elastiske kurve. Som forklaret ovenfor, kan middelværdien af spændingen ved brud, for en slank plade, være højere end den elastiske kritiske spænding på grund af den overkritiske bæreevnereserve. Det kan f. eks. være tilfældet for en plade, hvor  $\sigma_{cr}$  er lavere end flydespændingen  $f_y$ , og bæreevnekurven vil derfor ligge over kurven for den kritiske spænding.

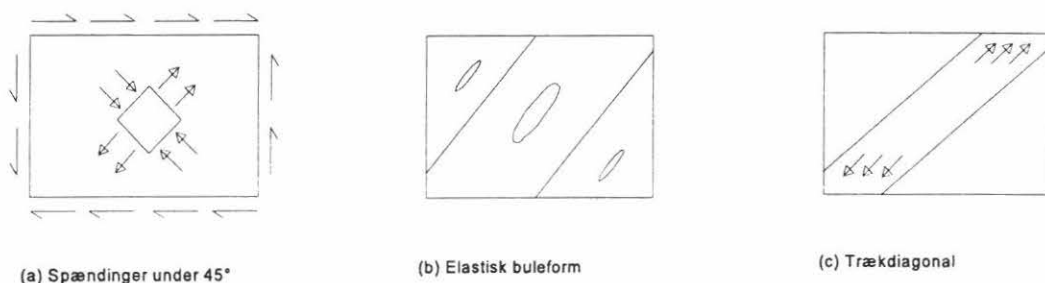
Overgangen mellem flydning og foldning sker for  $\sigma_{cr} = f_y$ , svarende til slankhedsforholdet:

$$\lambda_1' = \pi \sqrt{k_{\sigma} E / 12 (1 - \nu^2) f_y} \quad (2)$$

For en aflang simpelt understøttet plade, der påføres et jævnt fordelt tryk, vil foldningskoefficienten omtrent være  $k = 4$ , og den tilsvarende værdi af  $\lambda_1' = 1,9 \sqrt{E/f_y}$  vil ligge mellem 56 og 46 for de sædvanlige stålqualiteter Fe360 og Fe510. I andre tilfælde vil foldningskoefficienten  $k$  være anderledes, idet den afhænger af både af pladens sideforhold, belastningens art og understøtningsbetingel-

serne.

At der også er en overkritisk bæreevnereserve i forskydningspåvirkede plader, kan forklares fysisk ved at betragte et kvadratisk element, hvis sider er orienterede med vinklen  $45^\circ$  i forhold til pladefeltets rande, og som påføres trækspændingen  $\sigma_1$  og trykspændingen  $\sigma_2$  parvis på 2 modstående sider (*figur 7a*). Trykspændinger kan så bevirke, at der opstår foldning i form af buler, der er aflange i trækspændingernes retning (*figur 7b*). Den elastiske kritiske forskydningspænding  $\tau_{cr}$  angives med et lignende udtryk som det, der gælder for  $\sigma_{cr}$ , idet  $\tau_{cr}$  også afhænger af pladens sideforhold og dens understøtningsbetingelser.



Figur 7 Forskydningsfoldning

Så snart der opstår forskydningsfoldning i pladen, kan trykspændingerne ikke øges yderligere, men pladens stivhed i den retning, hvori trækspændingerne virker, er stadig næsten uændret. Derfor vil en forøgelse af forskydningskraften hovedsageligt optages gennem en forøgelse af trækspændingerne, hvorved bulerne bliver smallere. Pladen opfører sig som en række strimler i trækretningen, og der dannes et såkaldt trækfelt (*figur 7c*). Dette felt ændrer retning, efterhånden som spændingen øges, og nærmer sig pladens diagonalretning. Pladens forskydningsbrudlast nås, når der opstår flydning i disse strimler. Også i dette tilfælde kan fastholdelse mod flytninger i pladens plan have en betydelig indflydelse på den overkritiske bæreevnereserve.

Det kan derfor konkluderes, at forhåndskrumning, egenspændinger og deformationshærdning alle har indflydelse på pladens opførsel og på dens brudlast. Virkningen minder om den, der gælder for søjler, men med den enkelte og afgørende forskel, at for høje slankhedsforhold vil pladens bæreevne nærme sig den overkritiske kurve og ikke til den elastiske kritiske kurve.

Ovenstående konklusion kan rent kvalitativt udvides til at omfatte enhver del af en plade, som udsættes for trykspændinger, og kvantitativt kan det siges at størrelsen af bæreevnereserven kan variere betydeligt med lastens art og med pladens understøtningsbetingelser.

Ligesom for søjler er det normalt at afbilde bæreevnekurver for plader på dimensionsløs form (*figur 6b*). Det betyder, at brudspændingen divideres med materialets flydespænding, og at der defineres et normaliseret (relativt) slankhedsforhold:

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{f_y / \sigma_{cr}} \quad (3)$$

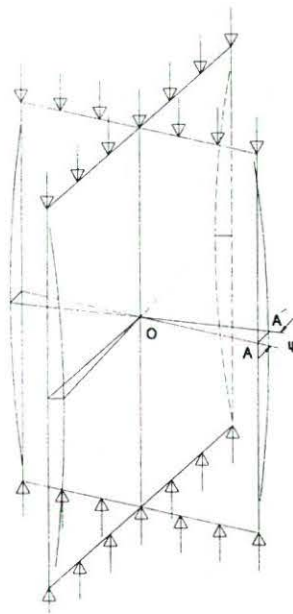
Benyttes ligning (1) bliver pladens normaliserede slankhedsforhold:

$$\bar{\lambda}_p = (b/t) (1,05/\sqrt{k}) \sqrt{f_y/E} \quad (4)$$

Heraf følger, at  $\bar{\lambda}_p = 1$  er den grænseværdi, der svarer til overgangen mellem flydning og foldning af pladen. Det normaliserede slankhedsforhold indeholder også pladens geometriske slankhedsforhold  $\lambda' = b/t$ , og gennem faktoren  $k$  indgår desuden både pladens sideforhold, belastningens art og understøtningsbetingelserne. På grund af imperfektionerne bør bæreevnekurver for plader vælges som undergrænsen for de foreliggende forsøgsresultater.

### 3. VRIDNINGSUDKNÆKNING AF SØJLER

Instabilitet på grund af vridningsudknækning kan kun opstå under særlige forhold. Denne form for foldning kan illustreres ved hjælp af en trykstang med korsformet tværsnit med 4 flige (*figur 8*). Hver flig er en tynd plade, der har tendens til at folde på grund af trykkraften. Hvis fligen er simpelt understøttet langs søjlens akse, vil den folde på en sådan måde, at enhver linie OA i fligen, vinkelret på akse, forbliver nogenlunde ret, men roterer om punktet O. Da alle flige er ens, vil de folde for den samme værdi af den påførte spænding.



Figur 8 Vridningsfoldning af korsformet tværsnit

Derfor er det muligt at bestemme en foldningsform, hvor de enkelte flige ikke forskydes indbyrdes, men alle tværsnit i den korsformede søjle drejer sig om O. De 4 flige vil fortsat mødes under en ret vinkel, så den omstændighed, at de er stift forbundne langs den fælles rand, har mindre betydning. Denne form for foldning, hvor søjlen forbliver ret, kaldes for "vridningsudknækning". Da der opstår vridning i forbindelse med udknækningen, vil den elastiske kritiske spænding dels afhænge af Saint-Venant vridningsstivheden, dels af hvælvningsstivheden. Hertil kommer, at søjlens fastholdelse mod vridning og hvælvning ved enderne, også spiller ind.

Vridningsudknækning forekommer kun for tværsnit, hvor forskydningscenter og tyngdepunktet er sammenfaldende, d.v.s. symmetriske tværsnit. Det er klart, at tyndvæggede tværsnit er særligt udsatte. Da der også er mulighed for bøjningsudknækning, er det nødvendigt at undersøge begge tilfælde for at fastlægge den laveste kritiske spænding.

Ligesom ved bøjningsudknækning er den elastiske kritiske værdi med hensyn til vridningsudknækning ikke et tilstrækkeligt mål for søjlens bæreevne. Der skal også her tages hensyn til de geometriske imperfektioner, egen-spændinger, materialets plasticitet og tøjningshærdningen. Man indser let, at de geometriske imperfektioner, som forhånds-vridning af søjlen og forhånds-krumning af det enkelte pladefelt, har stor betydning. De geometriske imperfektioner, egen-spændinger, materialets plasticitet og deformationshærdning medvirker alle til, at brudbæreevnen bliver lavere end den elastiske kritiske værdi. I modsætning til fænomenet søjleudknækning, der er veldokumenteret, kan bæreevnen med hensyn til vridningsudknækning ikke forudsiges med særlig stor nøjagtighed, fordi der mangler tilstrækkeligt veldokumenterede forsøgsresultater. Beregning af brudbæreevnen baseres i højere grad på ingeniørmæssige vurderinger end på fuldt fastlagte procedurer. Det er generelt accepteret, at den fremgangsmåde, der benyttes ved bøjningsudknækning, kan udvides til også at gælde for vridningsudknækning ved at antage, at reduktionen i bæreevne på grund af imperfektioner og plasticitet er ens for begge tilfælde, såfremt der benyttes dimensionsløse koordinater. Det normaliserede slankhedsforhold defineres således:

$$\bar{\lambda}_T = \sqrt{f_y / \sigma_{cr,T}} \quad (5)$$

hvor  $\sigma_{cr,T}$  er den elastiske kritiske værdi af spændingen med hensyn til vridningsudknækning.

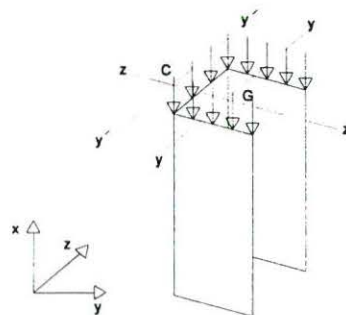
#### 4. BØJNINGSG- OG VRIDNINGSGUDKNÆKNING

Hvis tværsnittets tyngdepunkt og forskydningscenter ikke er sammenfaldende, vil der opstå en kombination af bøjnings- og vridningsudknækning. Det medfører en reduktion i bæreevnen sammenlignet med den kritiske last ved en ren bøjningsudknækning. Dette fænomen er specielt et problem i forbindelse med tværsnit af vinkelprofiler og U-profiler.

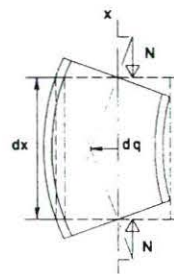
For at illustrere denne form for instabilitet betragtes et U-profil, der påføres en



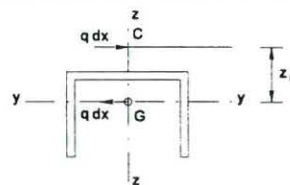
trykkraft i tværsnittets tyngdepunkt, således at der optræder en jævnt fordelt spænding i tværsnittet ved enderne (figur 9a). Det forudsættes, at inertimomentet  $I_{yy}$  om y-aksen er større end inertimomentet om z-aksen, således at udbøjningen om z-aksen bliver afgørende (figur 9b). Så snart trykstangen begynder en udknækning i y-retningen, d.v.s. bøjer om z-aksen, vil udbøjningen  $v(x)$  give et bøjende moment  $M(x) = N \cdot v(x)$  og dermed en forskydningskraft  $V = dM/dx = N(dv(x)/dx)$ . Det svarer helt til at trykstangen påføres en tværgående linielast  $q = -dV(x)/dx = -N(d^2v(x)/dx^2)$  virkende i yy-planet, der indeholder tyngdepunktet G, medens forskydningscenteret C ligger uden for (figur 9c). Derfor vil udbøjning om z-aksen og den deraf følgende forskydning introducere et vridende moment  $dM_t = q \cdot z_0 \cdot dx$ , hvor  $z_0$  er afstanden mellem tyngdepunkt og forskydningscenter. Det betyder, at ren bøjningsudknækning i y-retningen ikke er mulig, fordi der uundgåeligt sker en kobling af bøjnings- og vridningsdeformationer. Denne form for instabilitet kaldes kombineret bøjnings- og vridningsudknækning.



(a) U-profil med jævnt fordelt tryknormalspænding



(b) Bøjningsudknækning om z-aksen



(c) U-profil

Figur 9 Bøjnings- vridningsudknækning

Bøjnings- og vridningsudknækningen beregnes ud fra 3 differentialligninger, der indeholder de afledede af flytningerne  $v$ ,  $w$  i y- og z-retningen og af vridningsvinklen  $\psi$ . Den kritiske last afhænger derfor af de sædvanlige understøtningsbetingelser for

v og w ved enderne (simpelt understøttet eller indspændt), og af fastholdelserne mod vridning og hvælvning.

I det sædvanlige tilfælde, hvor trykstangen er simpelt understøttet, og hvælvningen ikke hindres ved enderne, d.v.s.  $v = v'' = 0$ ,  $w = w'' = 0$  og  $\psi = \psi'' = 0$ , bliver den kritiske spænding med hensyn til bøjnings- og vridningsudknækning for et enkeltsymmetrisk tværsnit ( $y_0 = 0$ ):

$$\sigma_{cr,FT} = \frac{\sigma_{cr,zz} + \sigma_{cr,T} \pm \sqrt{(\sigma_{cr,T} - \sigma_{cr,zz})^2 + 4 \sigma_{cr,zz} \sigma_{cr,T} (z_0/r_0)^2}}{2 [1 - (z_0/r_0)^2]} \quad (6)$$

hvor  $y_0$  og  $z_0$  er koordinater til forskydningscenteret, og  $r_0$  er tværsnittets polære inertiradius med hensyn til tyngdepunktet.

Det er tydeligt, at denne værdi altid vil være lavere end både den kritiske værdi med hensyn til bøjningsudknækning om z-aksen,  $\sigma_{cr,zz}$  og den kritiske værdi med hensyn til vridningsudknækning,  $\sigma_{cr,T}$ . Det skal også undersøges, om den er lavere end den kritiske værdi med hensyn til bøjningsudknækning om y-aksen,  $\sigma_{cr,yy}$  der er den anden rod i karakterligningen.

For et dobbelt symmetrisk tværsnit, hvor  $z_0 = y_0 = 0$ , er rødderne i (6)  $\sigma_{cr,T}$  og  $\sigma_{cr,zz}$  henholdsvis  $\sigma_{cr,T}$  og  $\sigma_{cr,yy}$  og den mindste af de 3 værdier -  $\sigma_{cr,T}$ ,  $\sigma_{cr,zz}$  og  $\sigma_{cr,yy}$  - bliver dermed den kritiske spænding.

Da der optræder deformationer svarende til både bøjnings- og vridningsudknækning, vil bæreevnen påvirkes af alle de typer af imperfektioner, der har indflydelse på disse 2 grundlæggende fænomener.

Ligesom i tilfældet med vridningsudknækning af søjler mangler der viden om, hvordan bæreevnen påvirkes af imperfektioner, egenspændinger og materialets plasticitet. Man kan dog også her generalisere ved at benytte de samme dimensionsløse bæreevnekurver som for bøjningsudknækning, og indføre det normaliserede slankhedsforhold for bøjnings- og vridningsudknækning:

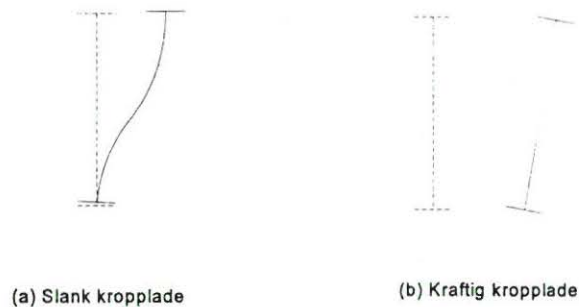
$$\bar{\lambda}_{FT} = \sqrt{f_y / \sigma_{cr,FT}} \quad (7)$$

## 5. KIPNING AF BJÆLKER

Når en bjælke udsættes for bøjning om den stærke akse, enten på grund af momenter virkende på enderne, eller mere normalt fra en tværlast, vil den ene flange og en del af kroppen være trykpåvirket og derfor have tendens til at knække ud.

Udknækning af trykflangen i kroppladens plan er normalt forhindret på grund af den store stivhed af kroppladen i egen plan. Derfor vil det oftest være udknækning i flangens eget plan der er kritisk, fordi kroppladen ikke yder nogen væsentlig modstand mod flytninger vinkelret på sit plan. Hvis kroppladen er meget slank, vil

den deformeres, så den ikke yder nogen væsentlig modstand, og kipningen minder meget om udknækning af flangen for bøjning om tværsnittets svage akse (figur 10a). Derimod vil en kraftig kropplade opføre sig som et stift pladeelement, og kipningen medfører vridning af tværsnittet (figur 10b). På grund af drejningen af hovedakserne i forhold til deres oprindelige retninger bliver de resulterende flytninger en kombination af vridning og tværubøjning.



Figur 10 Kipning af bjælker

For en perfekt bjælke, der udsættes for bøjning om den stærke akse, vil der opstå kipning for en kritisk værdi af det maximale bøjende moment eller den maximale trykspænding. Denne værdi påvirkes af mange faktorer såsom momentkurvens form, understøtningsbetingelserne (mod bøjning, vridning og hvælving), lastens angrebsniveau og eventuel manglende symmetri i tværsnittet. Da kipning medfører både vridning og bøjning om den svage akse, vil det kritiske moment være en funktion af bjækelængden  $L$ , vridnings- og hvælvningsstivhederne  $GJ$  og  $EI_w$  og bøjningsstivheden om den svage akse  $EI_{zz}$ .

Det elastiske kritiske bøjende moment er eksempelvis for I- og H-profiler:

$$M_{cr,LT} = C_1 [\pi^2 EI_{zz} / (kL)^2] [C_2 g + \sqrt{(C_2 g)^2 + (EI_w / EI_{zz}) [1 + GJ(kL)^2 / \pi^2 EI_w]}] \quad (8)$$

hvor  $C_1$ ,  $C_2$  og  $G$  er koefficienter, der tager hensyn til virkningen af de ovenfor nævnte faktorer, og  $g$  er afstanden mellem forskydningscenteret og lastens angrebepunkt. Den elastiske kritiske spænding med hensyn til kipning er herefter:

$$\sigma_{cr,LT} = M_{cr,LT} / W_{yy} \quad (9)$$

hvor  $W_{yy}$  er tværsnittets modstandsmoment for bøjning om den stærke akse.

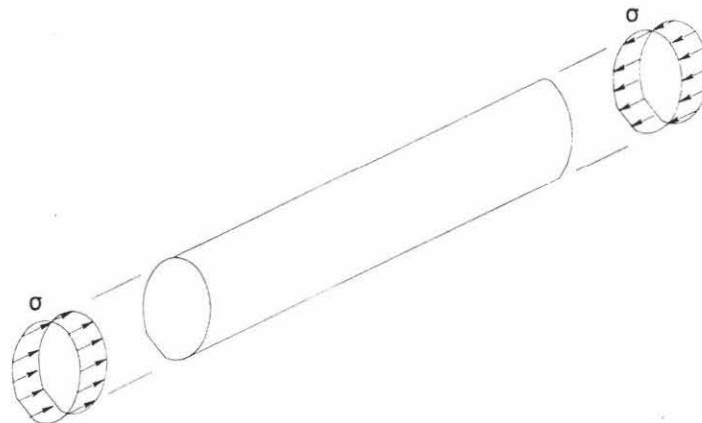
Udover materialets plastiske egenskaber vil egenspændinger og geometriske imperfektioner betyde en reduktion af bæreevnen i forhold til den elastiske kritiske værdi. Enhver form for imperfektion, der fremmer vridning og/eller bøjning om den

svage akse, må tages i betragtning. En nylig statistisk bearbejdning af forsøgsresultater udført i forbindelse med udarbejdelsen af baggrundsmateriale til Eurocode 3 har vist, at formen af bæreevnekurverne for bøjningsudknækning af imperfekte søjler også er velegnet til at beskrive kipningsfænomenet, forudsat at kurveparametrene kalibreres. Ligesom for de foregående stabilitetsfænomener defineres et normaliseret slankhedsforhold for kipning:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{f_y / \sigma_{cr,LT}} \quad (10)$$

## 6. FOLDNING AF SKALLER

Foldning af skaller er formentlig det mest komplekse stabilitetsfænomen. Ligesom ved foldning af plader er der i højere grad tale om en ændring af tværsnittets form end om flytning af tværsnittet som helhed. Som i de foregående tilfælde kan trykspændingerne opstå som følge af tryknormalkræfter, bøjning eller lokalt påførte koncentrerede laster. Hertil kommer, at skalkonstruktioner også kan udsættes for indvendigt eller udvendigt tryk (rør, siloer, beholdere, ben i off-shore platforme, etc.).



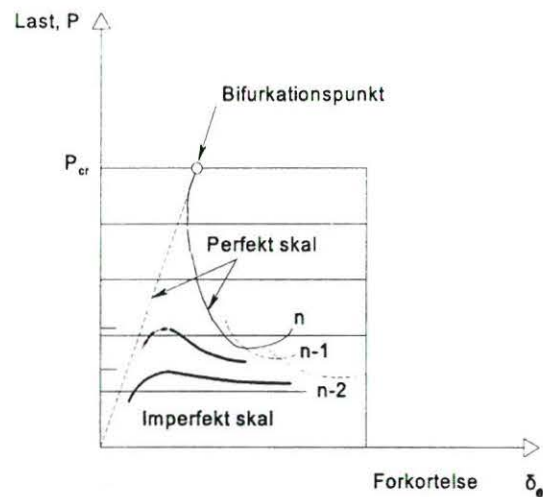
Figur 11 Cylinderskal udsat for aksialt tryk

Det simpleste tilfælde at analysere er en cylinderskal, der udsættes for aksialt tryk (*figur 11*). Den elastiske kritiske værdi er i dette tilfælde:

$$\sigma_{cr} = [1 / \sqrt{3(1 - \nu^2)}] Et/r \quad (11)$$

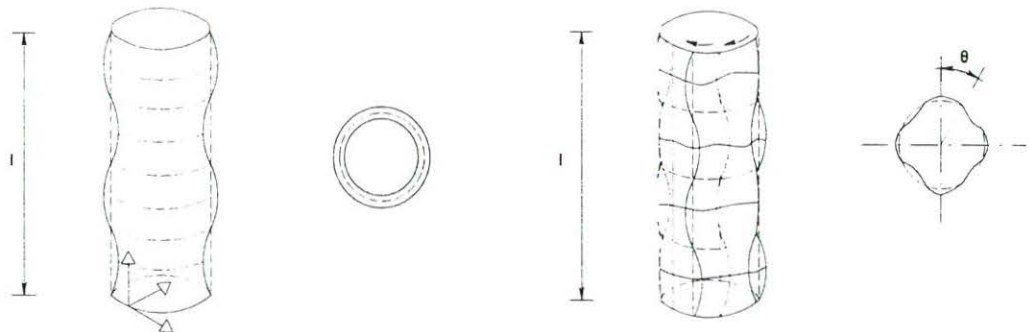
hvor  $t$  er vægtykkelsen og  $r$  cylinderens radius. Denne formel er velkendt på formen  $\sigma_{cr} = 0,605 Et/r$ , gældende for stålcylindre. Last-deformationskurven (*figur 12*) viser, at der opstår et drastisk fald i bæreevne, så snart den kritiske last nås. Når der indtræder foldning, vil cylinderskallen indtage en form, der er i ligevægt med den ydre trykkraft for en last, som er meget mindre en den kritiske. Dette er karakteristisk

for skaller uanset deres form og den påførte lasttype. I modsætning til plader er skaller ikke i stand til at udvikle nogen bæreevnereserve i det overkritiske område.



Figur 12 Cylinderskallers virkemåde ved aksialt tryk

Selv ubetydelige geometriske imperfektioner medfører en tidlig afvigelse fra last-deformationskurven (*figur 12*) for den perfekte skal, og giver normalt en kraftig reduktion i bæreevnen. Den teoretiske værdi af den elastiske kritiske last kan derfor ikke opnås for en virkelig skalkonstruktion. Imperfektionernes indflydelse på skalkonstruktioners bæreevne er et meget komplekst problem, der har været indgående udforsket.



Figur 13 Udknækningsformer for cylindreskal under aksialt tryk

Ifølge den klassiske teori for foldning af en perfekt cylindreskal kan denne enten folde aksesymmetrisk som en serie ringe eller i form af et skakbrætmønster (*figur 13a,b*).

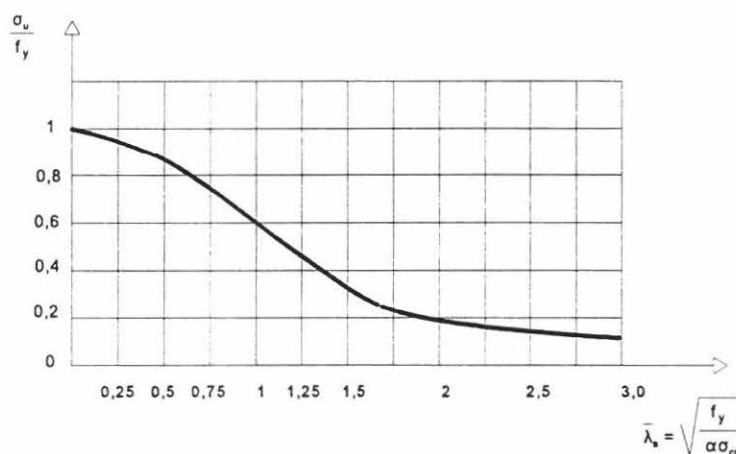
Afhængig af forholdene ved foldningen af cylinderskallen kan der eventuelt opstå en rhombeformet udbøjningsform i det overkritiske område. For at tage højde for imperfektioner benyttes der normalt ved dimensioneringen en reduktionsfaktor  $\alpha$  på den elastiske kritiske værdi af spændingen. Faktoren  $\alpha$  fastlægges ud fra forsøg med modeller i stor skala.

I henhold til ECCS rekommendationer afhænger værdien af denne faktor kun af cylinderskallens slankhedsforhold  $r/t$ , såfremt imperfektionerne holdes inden for et fastlagt niveau. Desuden benyttes en ekstra partialkoefficient,  $\gamma$ , for cylinderskaller udsat for meridiantryk på grund af den specielt ufordelagtige opførsel i det overkritiske område i dette tilfælde.

Indvirkningen af de forskellige former for imperfektioner på bæreevnen varierer meget afhængig af skallens form og typen af den påførte last. På samme måde som for søjler og plader, kan bæreevnekurven angives på dimensionsløs form ved forholdet

$\sigma/f_y$  som funktion af det normaliserede slankhedsforhold  $\bar{\lambda}_s = \sqrt{f_y/\alpha\sigma_{cr}}$ , (figur 14).

Det bemærkes, at for voksende værdier af  $\bar{\lambda}_s$  vil bæreevnekurven nærme sig den kritiske værdi reduceret med faktoren  $\alpha$ .



Figur 14 Slankhedsforholdets betydning for cylinderskallers stabilitet

## 7. FORBEDRING AF MODSTANDSEVNEEN MOD UDKNÆKNING

Der er forskellige muligheder for at øge en konstruktions eller et elements modstandsevne mod udknækning.

For en bestemt form for foldning vil en reduktion af slankhedsforholdet forøge brudbæreevnen. Dette opnås normalt ved at øge tværsnitsdimensionerne, men det kan også ske ved en ændring af materialefordelingen med hensyn til tyngdepunktet, uden at tværsnitsarealet ændres. Sidstnævnte kan imidlertid ændre virkemåden af et tværsnit eller element, således at andre former for udknækning bliver kritiske. Specielt vil en

reduktion af tykkelsen, for at opnå en bedre fordeling af materialet, ofte betyde, at lokal foldning bliver dimensionsgivende.

En anden måde at forbedre modstandsevnen mod udknækning er at forsyne elementet med ekstra fastholdelser, således at udknækningsformen modificeres. Den elastisk kritiske last for en simpelt understøttet centralt belastet søjle bliver for eksempel forøget med faktoren 4, hvis den fastholdes mod udbøjning på midten, således at udbøjningsformen bliver S-formet. Tilsvarende vil en simpelt understøttet bjælke, udsat for bøjning om den stærke akse, få øget bæreevne med hensyn til kipning, hvis der etableres bøjnings- og/eller vridningsindspændinger ved enderne, eller hvis den trykkede flange fastholdes mod flytninger i tværretningen med afstivninger. For en tynd trykpåvirket plade kan brudbæreevnen forøges betydeligt ved at forsyne den med langsgående og eventuelt også tværgående afstivningsribber. Forudsat at afstivningsribberne er tilstrækkeligt stive, vil pladen kun folde imellem afstivningerne, og med en højere elastisk kritisk spænding. Tilsvarende vil afstivninger på skaller medføre en forøget bæreevne.

Selv om den beregnede bæreevne relateres til brudspændingen og ikke til den elastisk kritiske spænding, kan ovenstående bemærkninger rent kvalitativt udvides til også at gælde for brudbæreevnen.

## 8. STABILITET AF RAMMER

Når man dimensionerer søjler, der indgår i rammekonstruktioner, ville det være hensigtsmæssigt, hvis man kunne betragte søjlerne isoleret. Imidlertid udsættes de fleste søjler, der indgår i rammekonstruktioner, for både normalkræfter og for bøjningspåvirkninger påført ved enderne. Disse bøjningsmomenter afhænger af den gensidige påvirkning mellem søjlen og de øvrige konstruktionselementer i rammen. I nogle tilfælde er det søjlen, der afstiver bjælken op til brud, som det f. eks. kan ske, når bjælken er dimensioneret plastisk, og den svigter, medens søjlen forbliver stabil og elastisk. I andre tilfælde er det bjælken, der afstiver søjlen, det gælder specielt hvis bjælken er dimensioneret, så virkemåden er elastisk op til brud fremtvunget af søjlens instabilitet.

De fleste søjler, der indgår i rammekonstruktioner, optræder som elementer, der er elastisk understøttet og udsat for en kombination af normalkraft og moment. De betegnes derfor som bjælkesøjler.

I de fleste bygninger med rammekonstruktioner er vandrette flytninger hindret ved hjælp af passende afstivningssystemer (fastholdt knudepunktsfigur). Det kan ske ved hjælp af afstivningsgitre i facader, trapper eller jernbetonskakte for installationer, ligesom søjlefodpunkterne forudsættes fastholdt mod vandrette flytninger. Stabilitet af rammer med fastholdt knudepunktsfigur reduceres hermed til en analyse af stabiliteten af de enkelte søjler. Der er således behov for passende regler vedrørende brudbæreevnen for elastisk understøttede, trykpåvirkede elementer, der tillige påføres momenter.

Undertiden skal de vandrette kræfter fra vindlast og eventuel jorskælvspåvirkning optages som bøjning i hele rammen (bevægelig knudepunktsfigur). Det giver vandrette flytninger, der normalt vokser i størrelse fra fodpunkterne og op mod toppen af konstruktionen, og søjlerne vil få en S-formet udbøjning. De vandrette flytninger vil betyde, at tyngdekraften giver tillægsmomenter, som normalt betegnes sekundære momenter, fordi de skyldes rammens udbøjning. Betegnelsen sekundær er faktisk ikke dækkende, fordi størrelsen af de sekundære momenter sjældent kan negligeres. At kontrollere rammens stabilitet ved at undersøge stabiliteten af de enkelte søjler virker derfor mere som en kogeboogsopskrift end som en fornuftig dimensioneringsprocedure, men den forsøger dog at tage hensyn til 2. ordens effekterne i rammekonstruktionen.

En fuldstændig behandling af disse komplekse problemer ligger uden for sigtet med denne lektion. De behandles mere detaljeret i lektionerne i gruppe 7 samt i enkelte andre lektioner, hvor specielle konstruktionssystemer betragtes.

## 9. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. De grundlæggende kendetegn for de stabilitetsfænomener, der er behandlet i det foregående, sammenfattes i nedenstående tabel.

Stabilitetsfænomen	Konstruktionselement	Belastning	Stivhedsparametre	Slankhedsforhold	Normaliseret Slankhedsforhold
Bøjningsudknækning	Søjler	Tryknormalkraft	$EI_{yy}$ eller $EI_{zz}$	$L/i_x$ or $L/i_y$	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr}}$
Vridningsudknækning	Søjler (åbene, dobbelsymmetriske eller punktsymmetriske tværsnit)	Tryknormalkraft	$GJ, EI_w$	-	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr,T}}$
Bøjnings- og vridningsudknækning	Søjler (åbne tværsnit, uden dobbelt- eller punktsymmetri)	Tryknormalkraft	$GJ, EI_w, EI_{yy}$ og/eller $EI_{zz}$	-	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr,FT}}$
Kipning	Bjælker	Bøjning om stærke akse	$GJ, EI_w, EI_{zz}$	-	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr,LT}}$
Foldning af plader	Tynd plade eller komponent	Tryk eller forskydning	$\frac{E t^3}{2(1-\nu^2)}$	b/t	$\sqrt{f_y/\sigma_{cr}}$
Foldning af skaller	Cylinderskal	Tryk	-	r/t	$\sqrt{f_y/\alpha\sigma_{cr}}$



2. Den mest effektive måde at forbedre modstandsevnen overfor udknækning er at forøge tværsnittets dimensioner og/eller at tilføje afstivninger, der modificerer udknækningsformen.
3. Stabiliteten af rammekonstruktioner med fastholdt knudepunktsfigur afhænger af stabiliteten af de enkelte trykpåvirkede konstruktionselementer.
4. Stabiliteten af rammekonstruktioner med bevægelig knudepunktsfigur afhænger af bøjningsstivheden af alle søjler og bjælker i konstruktionen og af stivheden af samlingerne.

## 10. SUPPLERENDE LITTERATUR

1. Ballio, G. and Mazzolani, F., "Theory and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, London, 1983.
2. Dowling, P.J., Knowles, P. and Owens, G.W., "Structural Steel Design", Butterworths, London, 1988.
3. Galambos, T.V. (editor), "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", John Wiley and Sons, New York, 1988.
4. McGuire, W., "Steel Structures", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.
5. Picard, A. and Beaulieu, D., "Calcul des charpentes en d'acier", Institut Canadien de la Construction en Acier, 1991.
6. ECCS Recommendations of Steel Shells, ECCS Publication No. 56, 1988.

## Lektion 7.5.1: Søjler I

### FORMÅL

At beskrive forskellige typer stålsøjler og forklare den fremgangsmåden, der benyttes ved dimensioneringen.

### FORUDSÆTNINGER

Lektion 6.1: Stabil og ustabil ligevægt  
Lektion 7.2: Klassifikation af tværsnit

### LEKTIONER VEDRØRENDE BESLÆGTEDE EMNER

Lektion 7.3: Lokal foldning  
Lektion 7.6: *Built-up Columns*  
Lektion 7.10.1 & 7.10.2: Bjælkesøjler  
Lektion 7.12: Gitterspær og -dragere

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 7.5: *Column Design*

### RESUMÉ

Forskellige former for trykstænger med konstant, variabelt og sammensat tværsnit beskrives. Forskellen i virkemåde mellem kompakte og slanke søjler forklares, og baggrunden for dimensioneringen med de europæiske søjlekurver gennemgås.

Oversat og bearbejdet af S. Kloch, Aalborg Universitet, juli 1996

## 1. INDLEDNING

Søjler er lodrette konstruktionselementer, der påvirkes med tryknormalkræfter. De indgår for eksempel i bygninger til understøtning af gulvkonstruktioner, tage og kraner. Hvis der, udover normalkraften, er en væsentlig momentpåvirkning, kaldes de for bjælkesøjler.

Betegnelsen trykstang benyttes normalt om konstruktionselementer, der kun påvirkes med en tryknormalkraft. Det kan være søjler i specielle lastkombinationer, men normalt anvendes betegnelsen om charnierforbundne trykpåvirkede stænger i gitterspær, gitterdragere eller afstivningsgitre.

I denne lektion behandles kun elementer udsat for ren trykpåvirkning, hvad der sjældent er tilfældet i praksis, idet ekscentrisk lastpåførslen, og fremfor alt tværbelastninger, normalt ikke kan negligeres. Trykpåvirkede elementer udgør imidlertid et grundtilfælde, der giver forståelse for behandlingen af bjælkesøjler (*lektion 7.10.1 og 7.10.2*), rammekonstruktioner (*lektion 7.11*) samt gitterspær og gitterdragere (*lektion 7.12*).

Da de fleste trykpåvirkede stålkonstruktioner er ret slanke, kan der opstå udknækning eller foldning. Det betyder at der, udover aksialkraften, optræder et bøjende moment som der skal tages hensyn til ved dimensioneringen.

I det følgende beskrives de forskellige typer trykpåvirkede konstruktionselementer kort, og virkemåden af både kompakte og slanke søjler gennemgås. De bæreevnekurver, der benyttes ved dimensionering af slanke søjler, introduceres.

## 2. OVERSIGT OVER TRYKPÅVIRKEDE ELEMENTER

### 2.1 Elementer med konstant tværsnit

Det optimale tværsnit for et trykpåvirket element har en stor inertiradius ( $i$ ) svarende til den akse, hvorom udknækningen kan ske. Cirkulære rørprofiler vil i den sammenhæng være de bedst egnede, idet de har samme maximale værdi af denne parameter for alle retninger. Samlinger med disse profiler er imidlertid dyre og vanskelige at dimensionere og udføre.

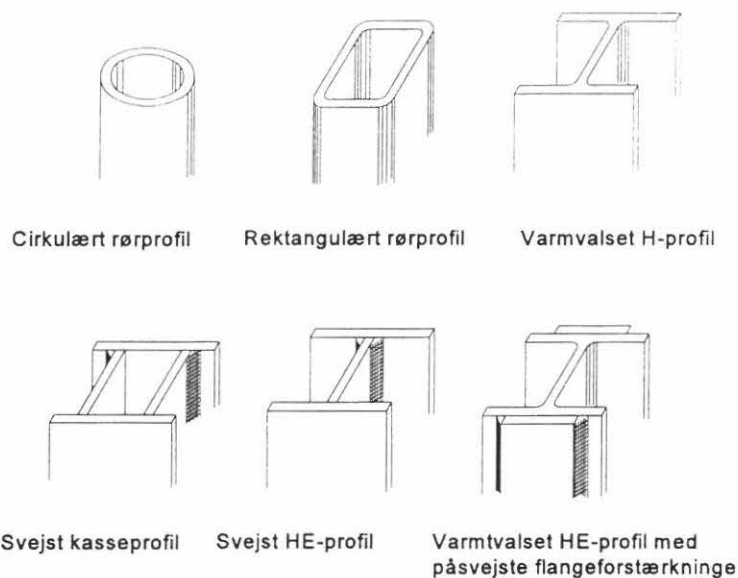
Kvadratiske eller rektangulære rørprofiler har også gode geometriske proportioner (de kvadratiske er de bedste), og samlingerne er lettere at designe, men igen dyre at udføre.

Valsede profiler er faktisk de mest anvendte tværsnit i trykstænger. De fleste har kraftige flanger, der er udformet, så de er velegnede til at optage trykkrafter. De har generelt en sådan form, at inertiradius  $i_z$  for udknækning om den svage akse er relativ stor, og flangetykkelsen er normalt stor nok til, at man undgår (lokal) foldning (der kan dog være problemer med spinkle H-profiler af højstyrkestål). Det åbne tværsnit, der fremkommer ved traditionel valseteknik, gør det let at udføre bjælke-søjle samlinger og andre samlinger.

Svejste kasse- og H-profiler er anvendelige, når der tages forholdsregler mod (lokal) foldning i flanger. De kan dimensioneres til at optage den nødvendige last, og det er let at udføre samlinger med andre konstruktionselementer. Der er også mulighed for at forstærke disse profiler med påsvejste plader.

*Figur 1* viser alle de ovenfor nævnte profiler. Bemærk at:

- understøtningsbetingelserne er vigtige ved dimensioneringen af en simpel trykstang, fordi de fastlægger den fri søjlelængde, der indgår i beregningen af den kritiske last. Cirkulære rørprofiler er ikke optimale, hvis den fri søjlelængde for de 2 hovedretninger er forskellig, i sådanne tilfælde vil et tværsnit, der ikke er rotationssymmetrisk, være at foretrække.
- udover aksialkraften er trykstænger ofte udsat for en bøjningspåvirkning, og i disse tilfælde kan I-profiler være at foretrække for H-profiler.

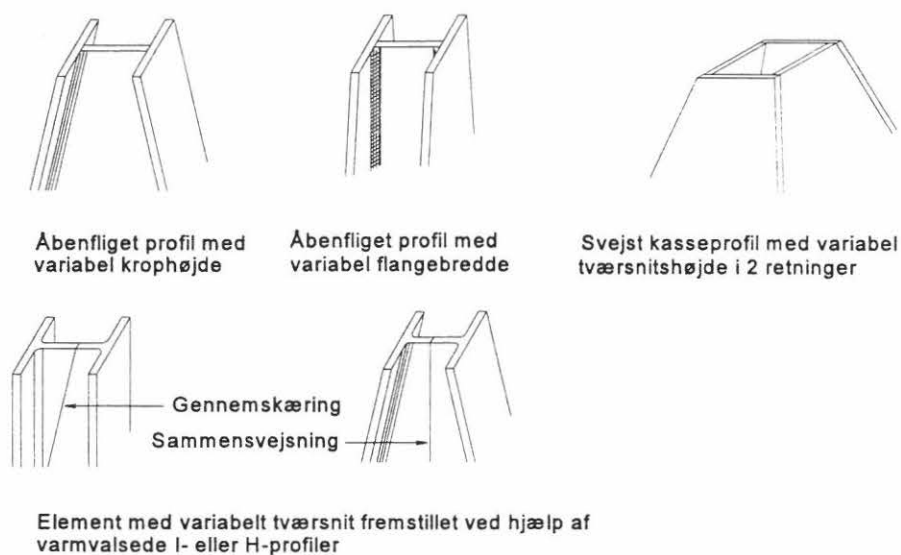


Figur 1. Eksempler på søjletværsnit

## 2.2 Elementer med variabelt tværsnit

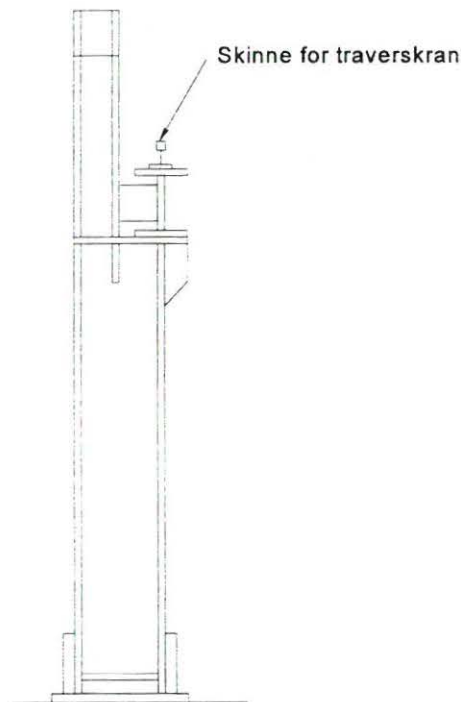
Elementer med variabelt tværsnit over længden kan udføres, så tværsnitsændringen enten foregår kontinuerligt eller trinvis.

I elementerne vist på *figur 2* sker tværsnitsændringen kontinuerligt over længden. Det kan være åbne eller kasseformede svejste profiler, og tværsnitsvariationen kan indføres med enten kropplade eller flanger eller eventuelt begge dele. Det klassiske eksempel er det, hvor et valset I- eller H-profil gennemskæres diagonalt, og de 2 dele vendes og sammensvejses igen.



Figur 2. Eksempler på kontinuerlig tværsnitsvariation

Søjler med trinvis ændring af tværsnittet er vist på *figur 3*. Et typisk eksempel på anvendelsen er industribygninger med traverskraner. Det reducerede tværsnit er tilstrækkeligt til at bære tagkonstruktionen, men må øges på grund af den ekstra last under kranens niveau. Denne søjletype kan også udnyttes i fleretages bygninger til at bære den større søjlelast i de nederste etager.



Figur 3. Søjle med trinvis ændring af tværsnit

### 2.3 Sammensatte søjler

Sammensatte søjler fremstilles af flere elementer og består af 2 eller flere hovedkomponenter, der med mellemrum er forbundet til en enhed (*figur 4*). U-profiler og vinkeljern benyttes ofte som hovedkomponenter, men også I- og H-profiler er anvendelige. De forbindes med gitter- eller tværafstivninger udført af fladstål, vinkeljern eller små U-profiler. På *figur 5* ses eksempler på anordning af gitter- og tværafstivninger samt kombinationer heraf. Sammensatte søjler kan også udføres med afstivningen der består af plader med udstansninger (*figur 6*).

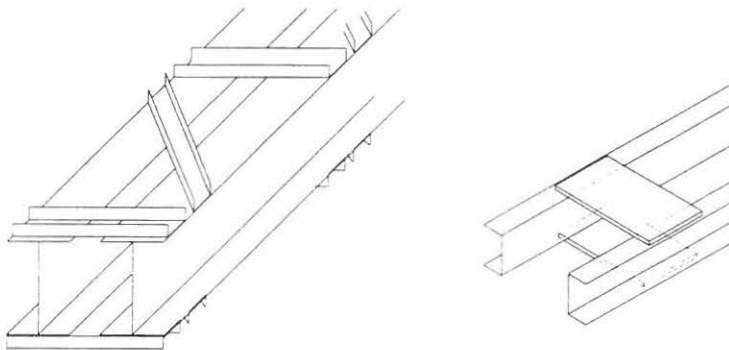
Fordelen ved de sammensatte søjler er, at de bliver relativt lette, fordi det meste af stålmaterialer kan placeres langt fra tyngdepunktet, og dermed får tværsnittet en relativ stor inertiradius. Den alvorligste ulempe er de høje fremstillingsomkostninger. Sammensatte søjler benyttes især ved store konstruktioner med lange trykstænger udsat for store laster. Det bemærkes, at de enkelte delelementer også skal undersøges for udknækning.



U eller vinkelprofiler som hovedkomponenter

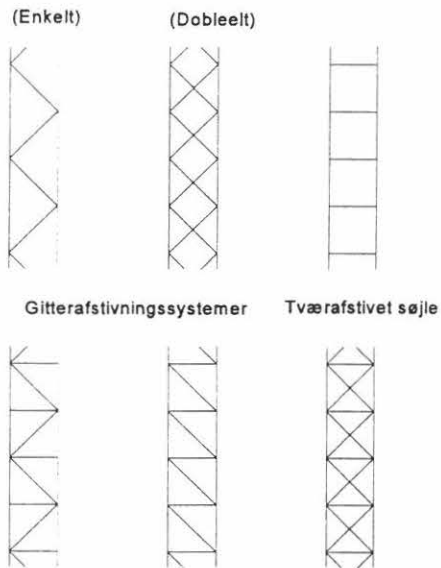


I- eller H-profiler som hovedkomponenter



I-profiler med gitterafstivning af U-profiler    U-profiler med tværafstivning af fladjernslaske

Figur 4. Eksempler på sammensatte søjletværsnit



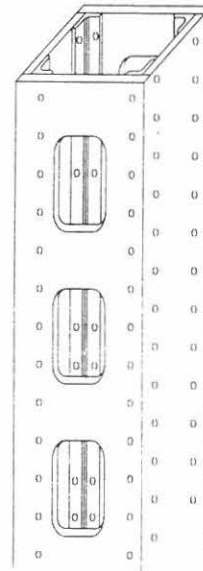
(Enkelt)

(Dobleelt)

Gitterafstivningssystemer

Tværafstivet søjle

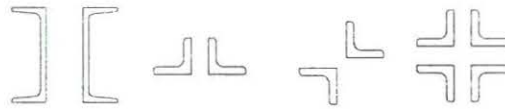
Kombinationer af gitter- og tværafstivninger



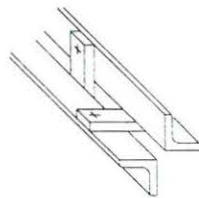
Figur 6. Sammensat søjle afstivet med udstansede plader

Figur 5. Gitter- og tværafstivninger i sammensatte søjler

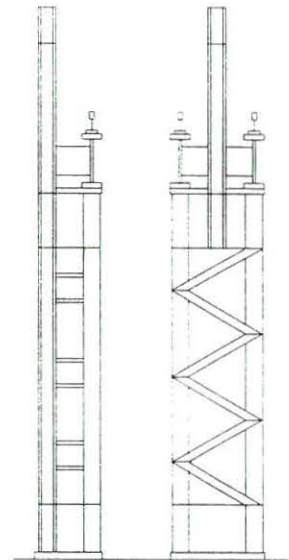
Figur 7 viser eksempler på sammensatte elementer, der er udført med tætsiddende profiler, og en samlingsdetalje i en korsformet trykstang. De er ikke så effektive som de foregående, fordi inertiradius bliver relativt mindre, men de har den fordel, at det er let at udføre samlinger med andre elementer. Under trykpåvirkning opfører de sig på lignende måde som de ovenfor beskrevne, derfor medtages de i dette afsnit.



Elementer sammensat af tætsiddende profiler



Detalje af tværafstivet korsformet element



Figur 7. Samensatte søjletværsnit

Figur 8. Sammensat søjle med varierende tværsnit

Sammensatte søjler kan have både konstant og varierende tværsnit, på figur 8 ses eksempler på sammensatte søjler med trinvis variation.

Dimensioneringen af sammensatte søjler behandles i lektion 7.6.

### 3. RENT TRYK UDEN FOLDNING

#### 3.1 Kompakte søjler

Korte og kraftige søjler er karakteriseret ved lav slankhed og har ikke tendens til udknækning, derfor kan de dimensioneres for flydespændingen  $f_y$ .

Hvis der ikke opstår lokal foldning (som det kan forudsættes for tværsnit klasse 1, 2 og 3), kan brudmåden for sådanne elementer betragtes som værende perfekt plastisk for hele tværsnittet, hvilket teoretisk set indtræder når alle fibre i tværsnittet når spændingen  $f_y$ . Det må bemærkes, at egenspændinger og geometriske imperfektioner praktisk taget ingen indflydelse har på brudstyrken for denne type søjler, og at de fleste forsøg med kompakte søjler viser større styrke end svarende til flydespændingen på grund af tøjningshærdningen.

Den maximale trykkraft  $N_{\max}$  er derfor lig med tværsnittets plastiske modstandsevne:

$$N_{\max} = N_{pl} = A_{\text{eff}} f_y \quad (1)$$

$A_{\text{eff}}$  er tværsnittets effektive areal, se afsnit 3.2.

I henhold til Eurocode 3 betragtes søjler som kompakte, når den dimensionsløse slankhed  $\bar{\lambda}$  er  $\leq 0,2$  ( $\bar{\lambda}$  er defineret i afsnit 5.1). På ECCS-kurverne repræsenteres de ved flydeplatauet, se afsnit 5.2.

### 3.2 Effektivt areal

For tværsnit klasse 1, 2 og 3, der dimensioneres for tryk, kan det effektive areal beregnes på grundlag af bruttotværsnittets foreskrevne dimensioner. Huller, der indgår i boltesamlinger, skal ikke fradrages.

## 4. STABILITET AF SLANKE SØJLER

### 4.1 Kritisk spænding (Euler)

Hvis  $\ell$  er den kritiske længde (fri søjlelængde), bliver den kritiske søjlekraft (Eulerlasten)  $N_{\text{cr}}$ :

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2} \quad (2)$$

og tilsvarende defineres den kritiske Eulerspænding  $\sigma_{\text{cr}}$  som:

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{N_{\text{cr}}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2 A} \quad (3)$$

Indføres inertiradius  $i = \sqrt{I/A}$ , og slankhedsforholdet  $\lambda = \ell/i$ , for den relevante udknækningsform, kan ligning (3) omskrives til:

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4)$$

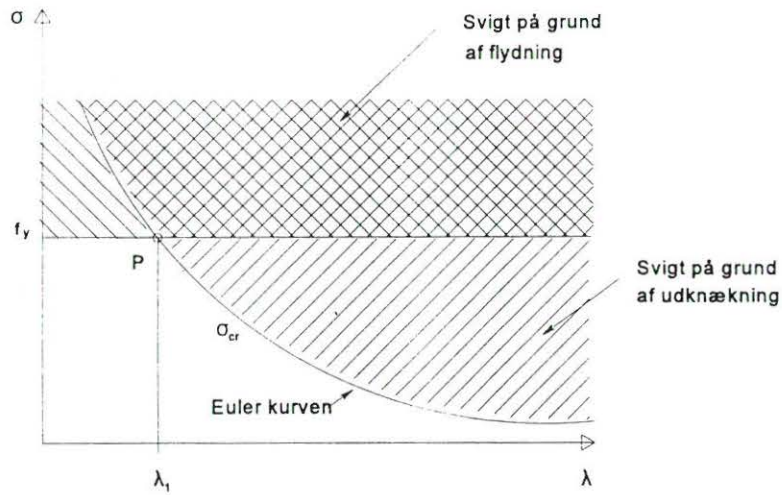
Optegnes kurven for  $\sigma_{\text{cr}}$  som funktion af  $\lambda$  (figur 9), sammen med en linie der repræsenterer fuld flydning,  $\sigma = f_y$ , er det interessant at betragte de idealiserede områder, hvor svigt opstår på grund af udknækning henholdsvis flydning. Skæringspunktet P for de 2 kurver angiver den teoretisk største værdi af slankhedsforholdet for en søjle med styrke svarende til trykflydning. Dette slankhedsforhold (kaldet Euler slankheden) betegnes med  $\lambda_1$  i Eurocode 3, og er lig med:

$$\lambda_1 = \pi [E/f_y]^{1/2} = 93,9\epsilon \quad (5)$$

$$\text{hvor: } \epsilon = [235/f_y]^{1/2} \quad (6)$$

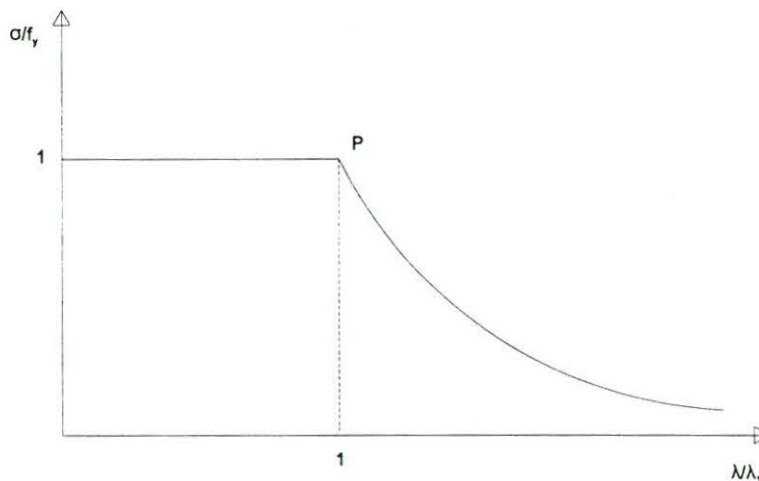
$\lambda_1$  er lig med 93,9 for stålstyrke Fe 235 og 76,4 for stålstyrke Fe 355.





Figur 9. Søjlekurve og svigtkriterier

En dimensionsløs udgave af diagrammet fås ved at optegne  $\sigma/f_y$  som funktion af  $\lambda/\lambda_1$  (figur 10) og er den form, der benyttes til ECCS-kurverne (se afsnit 5.2). Koordinaterne til punkt P bliver derfor (1,1).

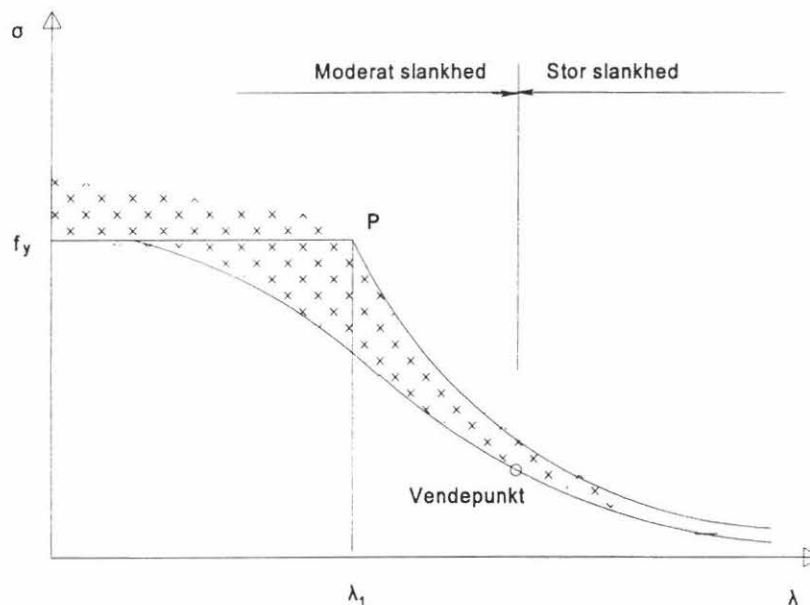


Figur 10. Dimensionsløs søjlekurve

## 4.2 Udknækning af virkelige søjler

Den virkelige opførsel af stålsøjler er ret forskellig fra den, der er beskrevet i det foregående, idet der normalt opstår svigt som følge af ikke-elastisk udknækning, inden Eulerlasten nås. Forskellen fra den teoretiske virkemåde skyldes forskellige former for imperfektioner i de virkelige søjler. Det drejer sig om forhåndskrumning, egenspændinger, ekscentricitet i lastpåførsel og deformationshærdning, og alle disse imperfektioner påvirker udknækningsforløbet og dermed søjlens brudlast. Resultater fra forsøg med virkelige søjler er vist på figur 11. Søjler med moderat

slankhed udviser større afvigelser fra de teoretiske kurver end søjler med stor slankhed. I området med moderate værdier af slankhedsforholdet  $\lambda$  (der i praksis repræsenterer de fleste søjler), er virkningen af imperfektionerne signifikant og må vurderes omhyggeligt. Den største reduktion i forhold til de teoretiske værdier optræder i nærheden af Eulerslankheden  $\lambda_1$ .



Figur 11. Forsøgsresultater med virkelige søjler

Den viste grænsekurve er fastlagt ud fra en statistisk behandling af forsøgsresultaterne og repræsenterer en sikker undergrænse for lasten.

a. Slanke søjler

En søjle kan betragtes som værende slank, hvis dens slankhedsforhold er større end det, der svarer til vendepunktet på grænsekurven vist på figur 11.

Brudlasten for en slank søjle ligger tæt på den kritiske Eulerlast  $N_{cr}$ . Da denne ikke afhænger af flydespændingen, bliver slanke søjler ofte dimensioneret på grundlag af forholdet  $\lambda^2 = (A \ell_{cr}^2) / I$ , der er en rent geometrisk størrelse, hvori den mekaniske styrke ikke indgår.

Tværsnit, der består af et enkelt vinkeljern eller korsformet sammensatte vinkeljern eller af tynde plader, har normalt et lille inertimoment for udbøjning om den svage akse, i forhold til deres areal. Det resulterer i store slankhedsforhold med tendens til udknækning, og er begrundelsen for, at afstivningsgitre, der udføres med disse tværsnit, kun dimensioneres for træk ("slappe diagonaler").

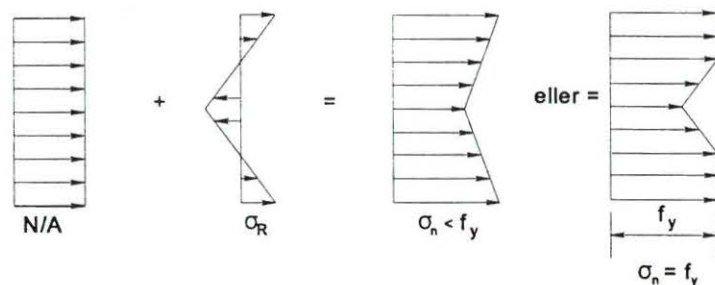
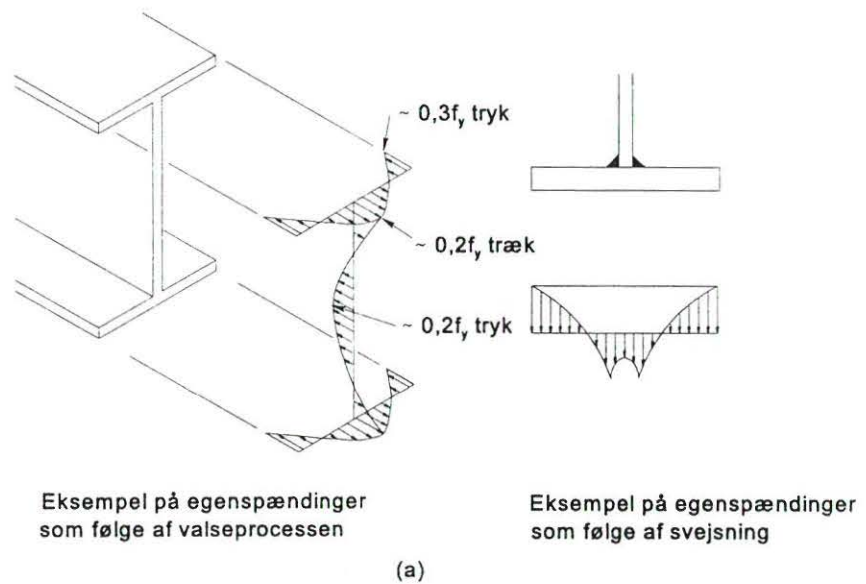
b. Søjler med moderat slankhed

Søjler med moderat slankhed er dem, der afviger mest fra Eulers teori. Når der opstår udknækning, har nogle fibre allerede nået flydespændingen,

og brudlasten er ikke blot en funktion af slankhedsforholdet. Jo flere imperfektioner der optræder, jo større vil afvigelsen fra den teoretiske virkemåde være. Forhåndskrumning og egenspændinger er de imperfektioner, der har størst indflydelse på virkemåden af denne gruppe søjler.

Egenspændingerne kan være fordelt på forskellig måde over tværsnittet. De opstår ved svejsning, varmvalsning, flammeskæring eller koldformning. *Figur 12a* viser eksempler på nogle egenspændingsmønstre, der kan forekomme.

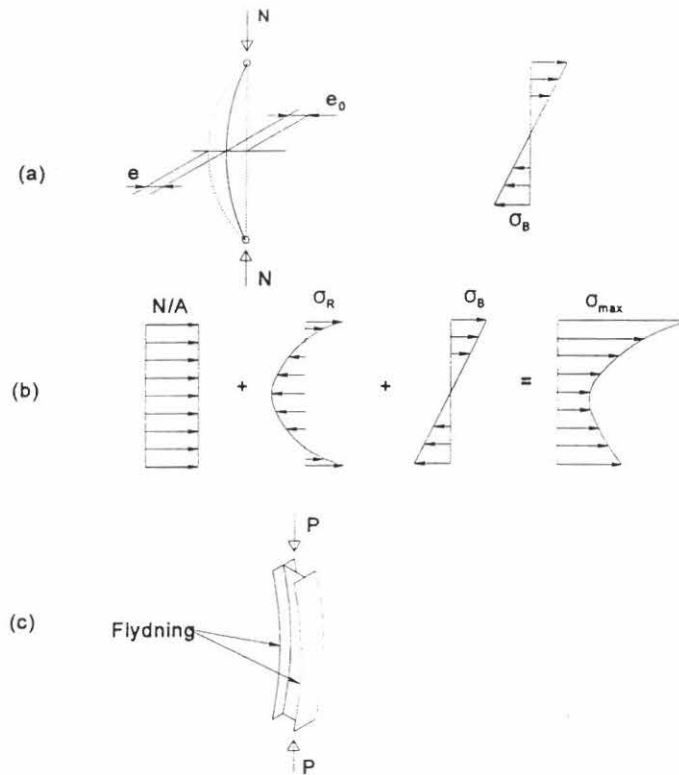
Kombinationen af egenspændinger og aksialspændinger er vist på *figur 12b*. Hvis den maximale spænding  $\sigma_n$  når flydespændingen  $f_y$ , vil der opstå begyndende flydning i tværsnittet, og det effektive areal til optagelse af den voksende normalkraft bliver dermed reduceret.



Figur 12. Eksempler på virkningen af egenspændingsfordelinger

Tilsvarende vil en forhåndskrumning med pilhøjden  $e_0$  give et bøjende moment med en maximal spænding  $\sigma_B$  (se *figur 13a*), der sammen med egenspændingen  $\sigma_R$  giver en spændingsfordeling som vist i *figur 13b*. Hvis

den maximale spænding  $\sigma_{\max}$  overstiger flydespændingen, vil den resulterende fordeling være delvis plastisk på grund af trykflydning som vist på figur 13c.



Figur 13. Trykstang ved begyndende flydning

## 5. DE EUROPÆISKE BÆREEVNEKURVER

### 5.1 Den dimensionsløse slankhed $\bar{\lambda}$

Det normaliserede slankhedsforhold eller den dimensionsløse slankhed  $\bar{\lambda}$  er en parameter, der for tværsnit i klasse 1, 2 og 3 er defineret således:

$$\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_1 \quad (7)$$

hvor  $\lambda$  og  $\lambda_1$  er defineret i afsnit 4.1.  $\bar{\lambda}$  kan også skrives på følgende form:

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{f_y}{E} = \frac{f_y}{\sigma_{cr}} \quad (8)$$

eller 
$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (9)$$

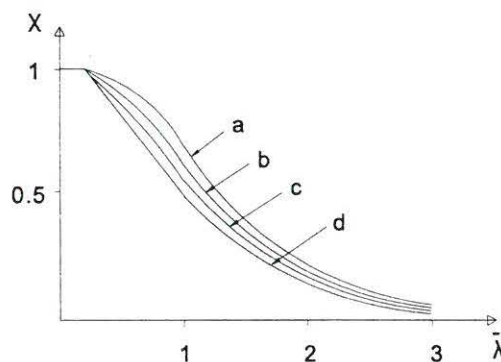
## 5.2 Grundlaget for ECCS's søjlekurver

Siden 1960 har ECCS gennemført et internationalt forsøgsprogram for at studere virkemåden af standardsøjler. Der er udført mere end 1000 forsøg med søjler med forskellige typer af tværsnit (I, H, T, U, cirkulære og rektangulære rør -profiler) og med forskellige slankhedsforhold (mellem 55 og 160). En probalistisk behandling af de eksperimentelt bestemte styrker kombineret med teoretiske analyser har vist, at det er muligt at optegne kurver, der beskriver søjlebæreevnen som funktion af den dimensionsløse slankhed. De former for imperfektioner, der er taget hensyn til, er dels en sinusformet forhåndskrumning med en pilhøjde på 1/1000 af søjlens længde, og dels virkningen af egenspændinger svarende til den pågældende profiltype.

De europæiske bæreevnekurver (a, b, c og d) er vist på *figur 14*. De angiver værdien af reduktionsfaktoren  $\chi$  for bæreevnen af søjlen som funktion af den dimensionsløse slankhed for forskellige typer tværsnit (refererende til værdien af imperfektionsfaktoren  $\alpha$ ). Det matematiske udtryk for er  $\chi$ :

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{1/2}} \leq 1 \quad (10)$$

$$\text{hvor: } \phi = 0,5 [1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] \quad (11)$$



Figur 14. De europæiske søjlekurver

I *tabel 1* angives værdier for reduktionsfaktoren  $\chi$  som funktion af den dimensionsløse slankhed  $\bar{\lambda}$ .

Imperfektionsfaktoren  $\alpha$  afhænger af den betragtede søjles tværsnitsform, retningen hvori udknækningen kan ske (y- eller z-aksen), og af fabriktionsprocessen (varmvalset, svejst eller koldformet). Værdier af  $\alpha$ , der vokser med størrelsen af imperfektionerne, er givet i *tabel 2*.

**Kurve a** repræsenterer delvist perfekte tværsnitsformer, det er valsede I-profiler med  $h/b > 1,2$ , og hvor udknækningen sker om den stærke akse, samt valsede rørprofiler.

**Kurve b** repræsenterer tværsnitsformer med moderate imperfektioner. Det drejer sig om det fleste svejste kasseprofiler, valsede I-profiler ved udknækning om den svage akse, svejste I-profiler med tynde flanger ( $t_f \leq 40$  mm) og om valsede I-profiler med moderat flangetykkelse ( $40 \text{ mm} \leq t_f \leq 100$  mm), såfremt udknækningen sker om den stærke akse. Desuden gælder det hule koldformede profiler, hvor stålets middelstyrke efter formningsprocessen benyttes.

**Kurve c** repræsenterer tværsnitsformer med større imperfektioner. Til denne kategori hører U, L og T-formede profiler. Desuden gælder det svejste kasseprofiler med stor godstykkelse, koldformede hule profiler, der dimensioneres på basis af grundmaterialets flydespænding, og valsede H-profiler med  $h/b < 1.2$ ,  $t_f \leq 100$  mm ved udknækningen om den svage akse. Kurve c benyttes også til visse svejste I-profiler med  $t_f \leq 40$  mm ved udknækning om den svage akse, eller med  $t_f > 40$  mm ved udknækning om den stærke akse.

**Kurve d** repræsenterer tværsnitsformer med maximale imperfektioner. Den benyttes til valsede I-profiler med meget tykke flanger ( $t_f > 100$  mm) og til svejste I-profiler med  $t_f > 40$  mm ved udknækning om den svage akse.

*Tabel 4* kan benyttes til at vælge den korrekte kurve som funktion af tværsnits type, dimensionsgrænser og udknækningsretning. For koldformede hule profiler er  $f_{yb}$  trækflydespændingen og  $f_{ya}$  middelflydespændingen. Hvis et tværsnit ikke falder inden for de anførte kategorier, må det klassificeres tilsvarende.

Det er vigtigt at bemærke, at bæreevnekurverne er opstillet for simpelt understøttede søjler påført last ved enderne. Hvis understøtningsbetingelserne afviger herfra, er det derfor nødvendigt at fastlægge den fri søjlelængde, se *afsnit 7.7*.

### 5.3 Ækvivalent geometrisk imperfektion

For at analysere en søjle efter 2. ordens teorien er det nødvendigt at fastlægge de geometriske imperfektioner (forhåndskrumning og ekscentricitet i lastpåførsel) og de mekaniske imperfektioner (egenspændinger og variation i flydespænding). Eurocode 3 foreslår værdier af forhåndskrumningens pilhøjde  $e_0$ , der tager højde for begge de 2 nævnte geometriske imperfektioner.

Hvis søjlen dimensioneres på grundlag af en elastisk analyse, vælges  $e_0$  til:

$$e_0 = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) W_{pl}/A \text{ ved plastisk dimensionering af tværsnit}$$

eller

$$e_0 = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) W_{el}/A \text{ ved elastisk dimensionering af tværsnit} \quad (12)$$

Dimensioneres søjlen derimod på grundlag af en elasto-plastisk analyse (elasto-plastisk eller elastisk perfekt-plastisk), er  $e_0$  en funktion af den fri søjlelængde  $L$ , se *tabel 3*.

### 5.4 Fremgangsmåde ved dimensionering af trykstænger

Ved dimensionering af en simpel trykstang er det først nødvendigt at fastlægge den fri søjlelængde for udknækning om begge hovedakser, bl. a. under hensyntagen

til understøttingsforholdene ved enderne. På grundlag af den kritiske Eulerkraft beregnes dernæst det nødvendige inertimoment for at få en ide om det mindste tværsnit, der teoretisk set kan anvendes. Herefter gennemføres følgende procedure:

- ud fra tværsnitskonstanterne og flydespændingen beregnes den dimensionsløse slankhed  $\bar{\lambda}$  (ligning 9).
- $\chi$  beregnes under hensyntagen til forrningsprocessen, tværsnitsform og godstykkelse, enten ved hjælp af bæreevnekurverne eller med ligning (10) og (11)

Trykstangens kritiske bæreevne er herefter:

$$N_{b.Rd} = \chi A f_y / \gamma_{M1}$$

den plastiske bæreevne bliver:

$$N_{pl.Rd} = A f_y / \gamma_{M0}$$

og bæreevnen med hensyn til (lokal) foldning bliver:

$$N_{o.Rd} = A_{eff} f_y / \gamma_{M1}$$

Er disse værdier alle større end søjlens regningsmæssige normalkraft, er det valgte tværsnit i orden, ellers må beregningen gentages med et større tværsnit.

Det er desuden nødvendigt at sikre sig, at søjlen er fastholdt mod vridningsudknækning og kombineret vridnings- bøjningsudknækning.

## 6. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Mange forskellige former for tværsnit anvendes som trykstænger, både enkelte og sammensatte profiler samt tværsnit, der varierer kontinuerligt eller trinvist.
2. En kompakt søjle (med  $\bar{\lambda} \leq 0.2$ ) har den fulde plastiske bæreevne af tværsnittet og skal ikke kontrolleres mod udknækning.
3. Hvis  $\bar{\lambda} > 0.2$ , skal der tages hensyn til reduktionen i bæreevnen på grund af udknækning. Søjler med moderat slankhed svigter ved en ikke elastisk udknækning, medens slanke søjler svigter ved elastisk udknækning.
4. De europæiske bæreevnekurver angiver reduktionsfaktoren for den relevante udknækningsform afhængig af tværsnittets form, fremstillingsprocessen, den dimensionsløse slankhed og udknækningsretningen. De er baseret på eksperimentelle og teoretiske overvejelser og giver pålidelige resultater.

## 7. LITTERATURHENVISNINGER

1. Dowling P.J., Knowles, P. and Owens G.W., "Structural Steel Design", The Steel Construction Institute, Butterworths, 1988.
2. European Convention for Constructional Steelwork, "Manual on Stability of Steel Structures", June 1976.
3. Structural Stability Research Council, "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", Edited by B.G. Johnson, John Wiley & Sons, 1976.
4. Trahair, N.S. and Bradford, M.A., "The Behaviour and Design of Steel Structures", 2nd Edition, Chapman & Hall, 1988.
5. Mac Ginley T.J. and Ang T.C., "Structural Steelwork: Design to Limit State Theory", Butterworths, 1987.



**Tabel 1 Reduktionsfaktor**

$\bar{\lambda}$	Reduktionsfaktor $\chi$			
	Kurve a	Kurve b	Kurve c	Kurve d
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,9	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,0	0,6656	0,5970	0,5399	0,4671
1,1	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,4	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,6	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,1	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,3	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,9	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

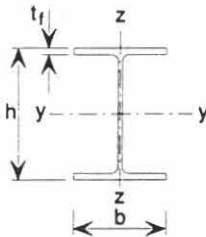
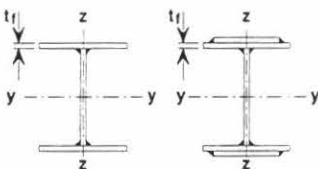

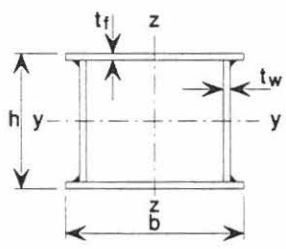

**Tabel 2 Imperfektionsfaktor**

Bæreevnekurve	a	b	c	d
Imperfektionsfaktor $\alpha$	0,21	0,34	0,49	0,76

**Tabel 3 Ækvivalent geometrisk imperfektion**

Bæreevnekurve	Elasto-plastisk	Elastisk-perfekt plastisk
a	L/600	L/400
b	L/380	L/250
c	L/270	L/200
d	L/180	L/150

Tabel 4: Valg af bæreevnekurve for tværsnit

Tværsnit	Dimensionsgrænser	Udknækningsakse	Bæreevne kurve
Valsede I-profiler 	$h/b > 1,2:$ $t_f \leq 40\text{mm}$	y - y z - z	a b
	$40\text{mm} < t_f \leq 100\text{mm}$	y - y z - z	b c
	$h/b \leq 1,2:$ $t_f \leq 100\text{mm}$	y - y z - z	b c
	$t_f > 100\text{mm}$	y - y z - z	d d
Svejste I-profiler 	$t_f \leq 40\text{mm}$	y - y z - z	b c
	$t_f > 40\text{mm}$	y - y z - z	c d
Rørprofiler 	valset	alle	a
	koldformet - når $f_{yb}$ anvendes	alle	b
	koldformet - når $f_{ya}$ anvendes	alle	c
Svejste kasseprofiler 	generelt (undtagen nedenstående)	alle	b
	tykke svejdesømme og $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	y - y z - z	c c
U-, L-, T- og massive profiler 		alle	c



## Lektion 7.5.2: Søjler II

### FORMÅL

At forklare anvendelsen af de Europæiske søjlekurver for stålsøjler, og at introducere begreberne vridnings- og bøjningsvridnings-udknækning.

### FORUDSÆTNINGER

Lektion 6.1: Stabil og ustabil ligevægt  
Lektion 6.6.1: Søjler med imperfektioner I  
Lektion 7.5.1: Søjler I

### LEKTIONER VEDRØRENDE BESLÆGTEDE EMNER

Lektion 7.2: Klassifikation af tværsnit  
Lektion 7.10.1: Bjælkesøjler I

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 7.5: Søjledimensionering

### RESUMÉ

I lektionen gennemgås de former for imperfektioner, der indgår ved udledelsen af Ayrton-Perrys formel og de Europæiske søjlekurver for stålsøjler. Vridnings-udknækning og kombineret bøjnings- og vridningsudknækning introduceres for simple trykpåvirkede konstruktionselementer.

Oversat og bearbejdet af S. Kloch, Aalborg Universitet, juli 1996

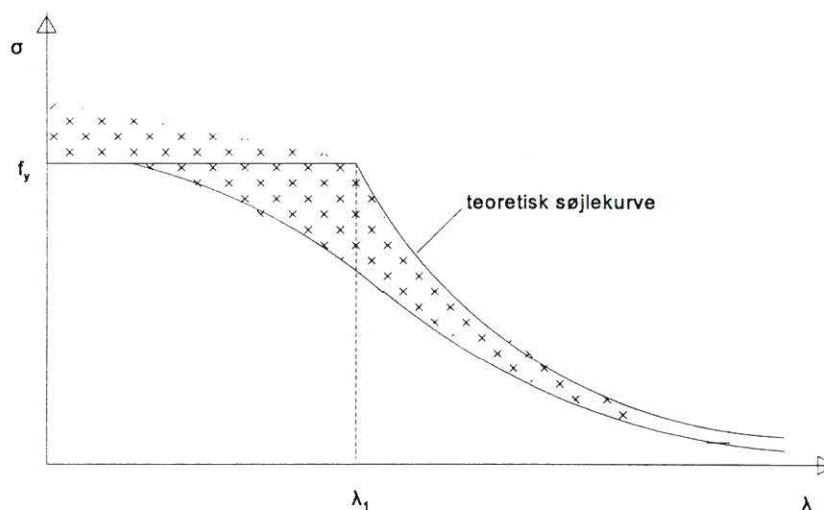
## 1. INDLEDNING

Den måde, virkelige stålkonstruktioner fungerer på, er forskellig fra de teoretiske antagelser. De vigtigste årsager til afvigelserne er følgende:

- geometriske imperfektioner såsom forhåndskrumning, flanger, der ikke er parallelle, asymmetriske tværsnit etc.
- materialemæssige imperfektioner på grund af egenspændinger fra valse- eller fabrikationsprocessen samt uelastiske materialeegenskaber.
- den påførte lasts angrebepunkt og retning afviger fra den teoretiske antagelse som følge af imperfekte samlinger, montagetolerancer og manglende udførelsesnøjagtighed.

Nogle af ovennævnte årsager er vigtige for udknækningen af slanke søjler (geometriske imperfektioner), andre for bæreevnen af korte og kraftige søjler (uelastiske materialeegenskaber) og andre igen for udknækningen af søjler i det mellemliggende slankhedsområde (geometriske imperfektioner og egenspændinger). Virkemåden af disse tre typer søjler er behandlet i lektion 7.5.1.

I virkelige søjler optræder alle former for imperfektioner sammen, og virkning afhænger af den enkelte imperfektions størrelse og af søjlens slankhedsforhold. Resultatet af en eksperimentel undersøgelse af et stort antal søjler med forskellige karakteristika er vist på *figur 1*. Resultaterne må forventes at ligge under Eulerkurven, fordi forhåndskrumning, ekscentrisk lastpåførsel og egenspændinger alle formindsker den kritiske last. For søjler med lavt slankhedsforhold er det imidlertid muligt at opnå resultater, der ligger over flydegrænsen, fordi der kan opstå tøjningshærdning i materialet. En sikker dimensioneringskurve, bestemt gennem en statistisk analyse af resultaterne, vil altid forløbe under de eksperimentelt bestemte værdier og have den form, der er vist på *figur 1*. Den vandrette afskæring er nødvendig for at begrænse den tilladelige spænding til flydegrænsen. Denne kurve er den grundlæggende form, som benyttes i de Europæiske søjlekurver.



Figur 1 forsøgsresultater med virkelige søjler

## 2. UDLEDNING AF DE EUROPÆISKE SØJLEKURVER

### 2.1 Forhåndskrumning

Hvis det forudsættes, at forhåndskrumningen for en simpelt understøttet søjle med længden  $l$  har form som en halv sinusbølge med værdien  $e_0$  på midten (*figur 2*), kan udbøjningen beskrives som:

$$y_0 = e_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1)$$

Differentialligningen for udbøjningen af en sådan søjle belastet med aksialkraften  $N$  er:

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} + \frac{N(y + y_0)}{E I} = 0 \quad (2)$$

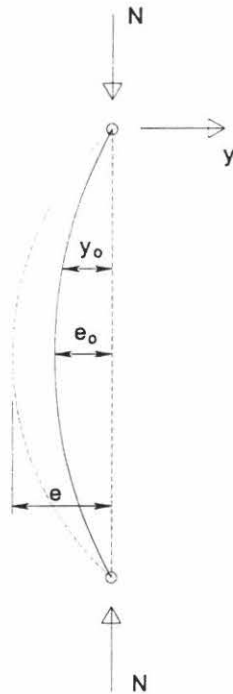
Indsættes udtrykket for  $y_0$ , og indføres randbetingelserne, fås løsningen:

$$y = \frac{e_0}{(N_{cr}/N - 1)} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3)$$

Den resulterende udbøjning på midten af søjlen bliver herefter:

$$e = e_0 + \frac{e_0}{N_{cr}/N - 1} = \frac{1}{1 - N/N_{cr}} e_0 \quad (4)$$

hvor forholdet  $1/(1 - N/N_{cr})$  normalt betegnes "momentforøglesfaktoren".



Figur 2 simpelt understøttet søjle med forhåndskrumning

Når der tages hensyn til det maximale bøjende moment,  $Ne$ , på grund af udbøjningen, vil søjlen være i ligevægt for:

$$\frac{N}{A} + \frac{N e}{W} = f_y \quad (5)$$

hvor  $f_y$  er flydespændingen. Hvis  $N$  er den maximale normalkraft med hensyn til udknækning, og  $\sigma_b$  den tilsvarende normalspænding ( $\sigma_b = N/A$ ), fås:

$$\frac{N}{A} + \frac{N}{A} \frac{e A}{W} = \sigma_b + \sigma_b \frac{e A}{W} = f_y \quad (6)$$

indføres heri Eulerspændingen  $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$  ( $\lambda = \sqrt{l/A}$ ) og udtrykket (4) for  $e$ , fås:

$$\sigma_b + \sigma_b \frac{e_o}{1 - \sigma_b/\sigma_{cr}} \frac{A}{W} = f_y \quad (7)$$

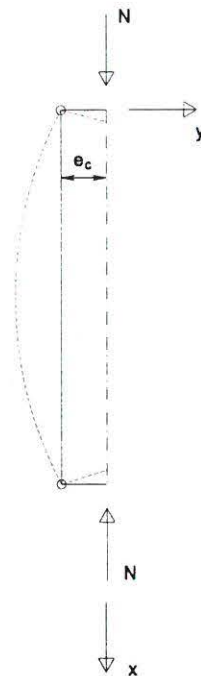
der kan omskrives til:

$$(\sigma_{cr} - \sigma_b) (f_y - \sigma_b) = \sigma_b \sigma_{cr} e_o \frac{A}{W} \quad (8)$$

Denne ligning er grundformen af Ayrton-Perry's formel.

## 2.2 Ekscentrisk virkende last

Hvis tryknormalkraften påføres med en ekscentricitet  $e_c$  på en simpelt understøttet søjle uden forhåndskrumning (figur 3), vil der opstå et bøjende moment ( $N e_c$ ), der vil forøge tendensen til udknækning. Det er indlysende, at denne effekt øges med den påførte normalkrafts størrelse.



Figur 3 simpelt understøttet søjle med ekscentrisk virkende last

Det kan vises, at søjlens maximale udbøjning  $e$  i dette tilfælde bliver:

$$e = e_c - \frac{e_c}{\cos [\ell/2 (N/EI)^{1/2}]} \quad (9)$$

svarende til en "forøgelsesfaktor" på:  $1/\cos [\pi/2 (N/N_{cr})^{1/2}]$

Betragtes den samlede effekt af både forhåndskrumning og ekscentrisk påført last, bliver spændingen med tilnærmelse:

$$\sigma_b + \sigma_b \frac{e_o + e_c + 0,23 e_c \sigma_b / \sigma_{cr}}{1 - \sigma_b / \sigma_{cr}} \frac{A}{W} = f_y \quad (10)$$

Dette udtryk er korrekt med få procents afvigelse for alle værdier af  $\sigma_b$  i intervallet 0 til  $\sigma_{cr}$ .

### 2.3 Ayrton-Perry's formel

Den klassiske form på Ayrton-Perry's formel er:

$$(\sigma_{cr} - \sigma_b) (f_y - \sigma_b) = \eta \sigma_{cr} \sigma_b \quad (11)$$

der svarer til ligning (8) idet  $\eta = (e_o A) / W$

Koefficienten  $\eta$  repræsenterer imperfektionen fra søjlens forhåndskrumning, men kan også indeholde andre former for imperfektioner såsom egenspændinger, og kaldes så for den generaliserede imperfektionsfaktor.

Ayrton-Perry's formel kan skrives på formen:

$$(\sigma_{cr} / f_y - \bar{N}) (1 - \bar{N}) = \eta \bar{N} \sigma_{cr} / f_y \quad (12)$$

hvor  $\bar{N} = \sigma_b / f_y$ .

Indføres  $\bar{\lambda}^2 = f_y / \sigma_{cr}$ , fås ved division med  $\sigma_{cr} / f_y$ :

$$(1 - \bar{N} \bar{\lambda}^2) (1 - \bar{N}) = \eta \bar{N} \quad (13)$$

eller

$$\bar{\lambda}^2 \bar{N}^2 - \bar{N} (\bar{\lambda}^2 + \eta + 1) + 1 = 0 \quad (14)$$

Det er denne form, der benyttes ved opstillingen af de Europæiske søjlekurver.

### 2.4 Den generaliserede imperfektionsfaktor

Den generaliserede imperfektionsfaktor tager hensyn til alle relevante former for imperfektioner, der har indflydelse på udknækningen af virkelige søjler, d.v.s geometriske imperfektioner, ekscentrisk lastpåførsel og egenspændinger. De uelastiske materialeegenskaber medtages ikke, idet disse kun har indflydelse på meget korte søjler. Den generaliserede imperfektionsfaktor kan udtrykkes med koefficienten  $\eta$ , der repræsenterer virkningen af udbøjningen:

$$\eta = \frac{\ell A}{\gamma W} \quad (15)$$

hvor faktoren  $\gamma = \ell / e_o$  angiver den ækvivalente geometriske imperfektion, dvs forholdet mellem søjlens længde og den ækvivalente værdi af forhåndskrumningen.

Benyttes herefter  $\ell = \lambda i$ ,  $W = I / i$  og  $i^2 = I / A$ , kan  $\eta$  skrives som:

$$\eta = \frac{\lambda}{\gamma (i/v)} \quad (16)$$



hvor  $v$  er den maximale afstand fra tyngdepunktet og  $(i/v)$  er den relative diameter af inertiellipsen i udbøjningsretningen.

Med  $\lambda = \bar{\lambda} \pi (E/f_y)^{1/2}$  og ved introduktion af plateauet  $\bar{N} = 1$  hvor  $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0$ , kan relationen omskrives til:

$$\eta = \frac{90.15 (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)}{\gamma (i/v)} \quad (17)$$

idet alle de Europæiske søjlekurver er baseret på et materiale med  $f_y = 255$  MPa (den virkelige værdi af flydespændingen har meget ringe betydning for resultatet).

### 2.3 De Europæiske søjlekurver

Benyttes  $\eta$  udtrykt ved:

$$\eta = \alpha (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) \quad (18)$$

fås den mindste værdi ved løsning af ligning (14) som:

$$\bar{N} = \frac{1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2 - \{[1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2]^2 - 4\bar{\lambda}^2\}^{1/2}}{2\bar{\lambda}^2} \quad (19)$$

Ved at multiplicere med det konjugerede led og samtidig indføre betingelsen  $\bar{\lambda}_0 = 0,2$  kan udtrykket omskrives på den form, der benyttes til de Europæiske søjlekurver:

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{1/2}} \leq 1 \quad (20)$$

hvor

$$\phi = 0,5 [1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] \quad (21)$$

$\chi$  er den reduktionsfaktor, der benyttes i Eurocode 3.

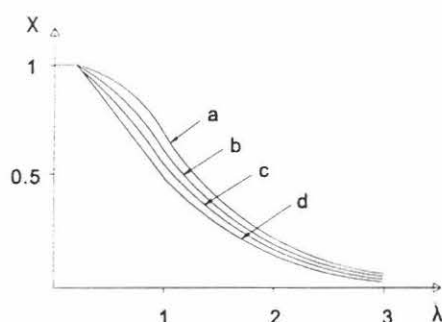
De forskellige tværsnitsformer, der benyttes ved projektering af stålkonstruktioner, har en koefficient  $\alpha$ , der varierer fra 0,21 til 0,76, og det er muligt at beskrive den faktiske virkemåde af alle traditionelle søjleprofiler ved at benytte de 4 kurver (a, b, c og d) vist på figur 4. Faktoren  $\alpha$  vokser med imperfektionernes størrelse.

$\alpha$  indeholder 2 former for imperfektioner, nemlig geometriske og mekaniske. Skrives den som  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ , repræsenterer  $\alpha_1$  de mekaniske og  $\alpha_2$  de geometriske imperfektioner. Betragtes alene de geometriske imperfektioner, så er de Europæiske søjlekurver baseret på en forhåndskrumning svarende til  $L/1000$  (lektion 7.5.1), der giver  $\alpha_2 = 90.15/[1000 (i/v)]$ .

Ved at sætte forhåndskrumningen  $e_0 = L/\gamma$  i relation til den generaliserede imperfektionsfaktor  $\eta$  (ligning (15)), fås ved at benytte ligning (18):

$$e_0 = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) W/A \quad (22)$$

der angiver den ækvivalente geometriske imperfektion for en simpelt understøttet søjle med bidrag fra både initial forhåndskrumning og fra egenpændinger. Disse bidrag skal tages i regning ved 2. ordens analyser. Regningsmæssige værdier for hver af de 4 Europæiske søjlekurver er angivet i *tabel 1*.



Figur 4 de europæiske søjlekurver

### 3. VRIDNINGS- OG BØJNINGSVRIDNINGS-UDKNÆKNING

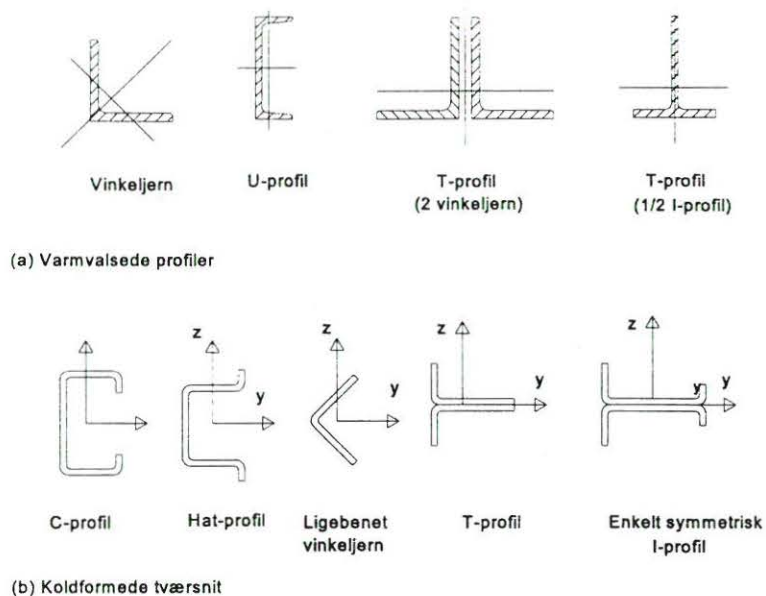
For varmtvalsede stålprofiler med de tværsnitsformer, der sædvanligvis benyttes i trykstænger, er det normalt bøjningsudknækningen, der er relevant. Der er imidlertid tilfælde, hvor vridnings- eller bøjningsvridnings-udknækningen er afgørende, og tværsnit med lille vridningsstivhed skal derfor undersøges for disse forhold.

#### 3.1 Tværsnit påvirket til vridnings- eller bøjningsvridnings-udknækning

I centralt belastede søjler kan der ske bøjningsudknækning om en af hovedakserne (klassisk søjlestabilitet), vridning om forskydningscenteret (vridningsudknækning) eller en kombination af både bøjning og vridning (bøjningsvridnings-udknækning).

Vridningsudknækning kan kun opstå, hvis forskydningscenteret og tyngdepunktet er sammenfaldende, og hvis tværsnittet har mulighed for at dreje sig om sin egen akse. Vridningsudknækning kan optræde i Z-profiler og I-profiler med brede flanger, og trykstænger, udført af vinkeljernsprofiler, skal ligeledes undersøges for denne form for instabilitet. Symmetriske tværsnit, hvor normalkraften ikke angriber i symmetriplanen skal undersøges for bøjningsvridningsudknækning. Det gælder også usymmetriske tværsnit som C-profiler, Hat-profiler, ligebenede vinkeljernsprofiler, T-profiler og enkeltsymmetriske I-profiler, d.v.s tværsnit hvor forskydningscenteret og tyngdepunktet ikke er sammenfaldende.

*Figur 5* viser eksempler på tværsnit, der skal undersøges for vridningsudknækning eller kombineret bøjningsvridningsudknækning.



Figur 5 typiske tværsnit der skal kontrolleres for vridningsudknækning eller bøjningsvridnings udknækning

### 3.2 Vridningsudknækning

Vridningsudknækning er et komplekst fænomen, og teorien er for omfattende til at gengives her. Den kritiske spænding afhænger af understøtningsbetingelserne, og det er særdeles vigtigt at vurdere muligheden for, at der kan optræde rotationer ved enderne. Den kritiske spænding afhænger både af elementets vridningsstivhed og af modstanden mod hvælvningsdeformationer i elementet selv og fra understøtningerne.

Differentialligningen for vridningsudknækning er:

$$G I_D \frac{d^4 \theta}{dx^4} - E I_w \frac{d^2 \theta}{dx^2} = - N r_o^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (23)$$

og den kritiske last for ren vridningsudknækning,  $N_{cr\theta}$ , bliver:

$$N_{cr\theta} = \frac{1}{r_o^2} \left[ G I_D + \frac{\pi^2 E I_w}{\ell_{cr}^2} \right] \quad (24)$$

hvor  $r_o$  er den polære inertiradius,  $G$  forskydningsmodulet,  $N$  normalkraften,  $\theta$  vridningsvinklen,  $I_D$  vridningsinertimomentet ( $I_v$ ) og  $I_w$  hvælvningsinertimomentet. I lektion 7.9.2 er der en mere detaljeret beskrivelse af den fysiske betydning og beregningen af hvælvningsinertimomentet.

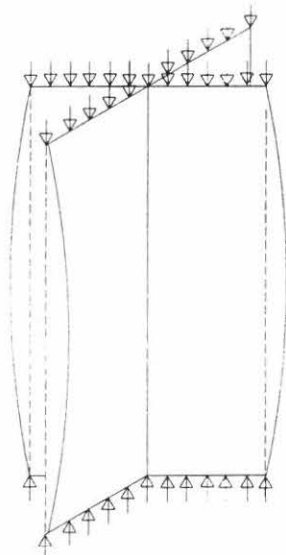
For at kontrollere et trykpåvirket konstruktionselement for vridningsudknækning indføres et nyt dimensionsløst slankhedsforhold  $\bar{\lambda}$  :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{f_y / \sigma_{cr\theta}} \quad (25)$$

hvor  $\sigma_{cr\theta}$  er den elastiske kritiske spænding for bøjningsudknækning beregnet for den kritiske last  $N_{cr\theta}$  (ligning (24)).

Generelt indtræder bøjningsudknækning for en lavere kritisk spænding end vridningsudknækning.

Figur 6 illustrerer fænomenet vridningsudknækning i en trykstang med korsformet tværsnit.



Figur 6 vridningsudknækning af korsformet trykstang

### 3.3 Bøjningsvridnings-udknækning

Kombinationen af bøjningsudknækning og vridningsudknækning er et alt for komplekst fænomen til, at der kan gennemføres en fuldstændig analyse her.

De 3 grundlæggende ligninger, der beskriver denne form for udknækning, er:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -N (w + y_o \theta) \quad (26)$$

$$E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -N (v + z_o \theta) \quad (27)$$

$$E I_w \frac{d^4 \theta}{dx^4} - (G I_D - r_o^2 N) \frac{d^2 \theta}{dx^2} - N y_o \frac{d^2 w}{dx^2} + N z_o \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (28)$$

hvor  $y_o$  og  $z_o$  er koordinaterne til forskydningscenteret, og  $v$  og  $w$  er udbøjningerne, som vist i figur 7.

Den kritiske last for ren vridningsudknækning fås som den mindste af rødderne i følgende ligning:

$$r_o^2 (N_{cr} - N_{crz}) (N_{cr} - N_{cry}) (N_{cr} - N_{cr\theta}) - \dots$$

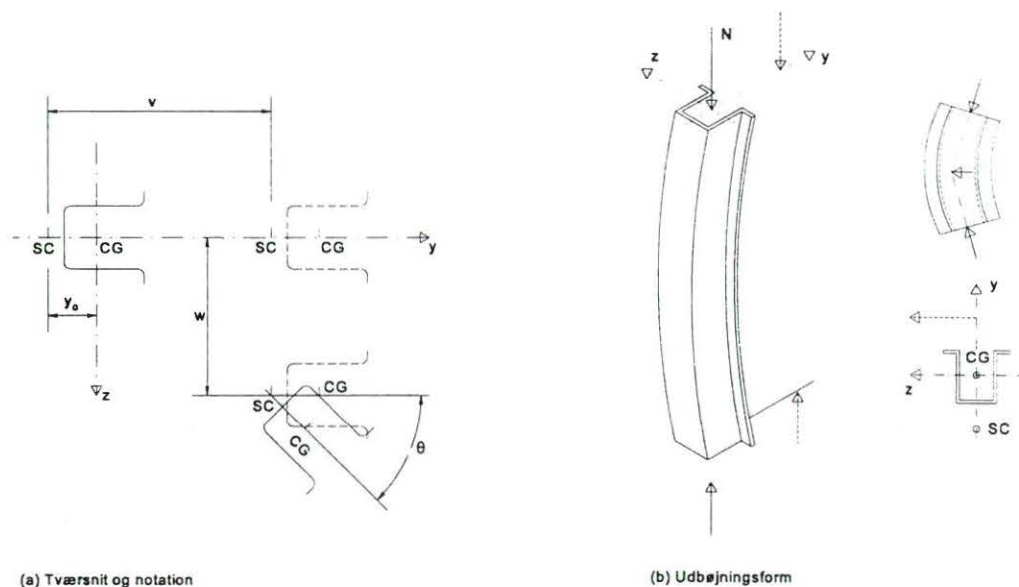
$$\dots N_{cr}^2 z_o^2 (N_{cr} - N_{cry}) - N_{cr}^2 y_o^2 (N_{cr} - N_{crz}) = 0 \quad (28)$$

hvor  $N_{cry}$  og  $N_{crz}$  er den kritiske last for ren bøjningsudknækning om henholdsvis y-aksen og z-aksen, og  $N_{cr\theta}$  er defineret ved ligning (24).

For tværsnit med 1 (eller 2) symmetriakser er  $y_o = 0$  og/eller  $z_o = 0$ , og det medfører en forenkling af ovenstående ligning. For eksempel vil et tværsnit med 2 symmetriakser give:

$$(N_{cr} - N_{crz}) (N_{cr} - N_{cry}) (N_{cr} - N_{cr\theta}) = 0 \quad (29)$$

og udknækningen vil ske for den laveste af de kritiske laster uden interaktion mellem de forskellige stabilitetsfænomener.



Figur 7 bøjningsvridnings-udknækning af trykstang af hat-profil

I denne lektion behandles kun den indflydelse, imperfektioner har på trykpåvirkede stålsøjlers virkemåde, og der regnes derfor kun med momentpåvirkninger fra ekscentricitet i lastpåførsel og fejl i tværsnit, men ikke evt. ydre momenter påført ved søjlens ender.

For at undersøge en trykstang mod bøjningsvridnings-udknækning indføres et nyt dimensionsløst slankhedsforhold  $\bar{\lambda}$  på tilsvarende måde som det sker ved vridningsudknækning (ligning (25)). I dette tilfælde vil  $\sigma_{cr\theta}$  være den elastisk kritiske spænding ved bøjningsudknækning, der fås for en kritisk last svarende til bøjningsvridning-udknækning.

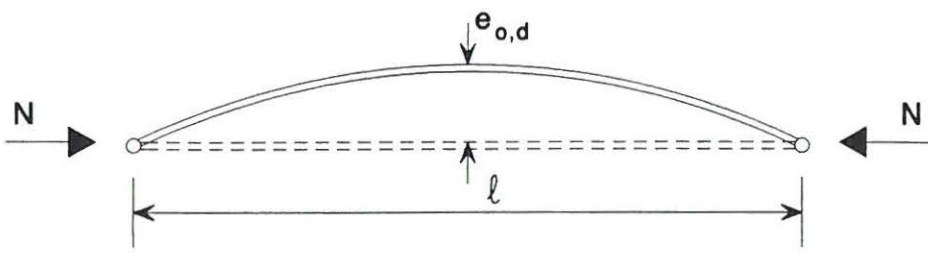
#### 4. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Virkningen af imperfektioner på stabilitetsfænomenet beskrives. Forhåndskrumning, ekscentrisk lastpåførsel og egenspændinger har afgørende betydning for udknækning af slanke søjler og søjler med moderat slankhed.
2. Ayrton-Perry's formel beskriver virkelige søjlers opførsel. Den udgør grundlaget for de Europæiske søjlekurver.
3. Udledelsen af de Europæiske søjlekurver gennemgås. Der indføres en generaliseret imperfektionsfaktor.
4. Vridningsudknækning og kombineret bøjnings-vridningsudknækning introduceres.

#### 5. LITTERATURHENVISNINGER

1. Dowling, P.J., Knowles, P. and Owens, G.W., "Structural Steel Design", The Steel Construction Institute, Butterworths, 1988.
2. European Convention for Construction Steelwork, "Manual on Stability of Steel Structures", June 1976.
3. Structural Stability Research Council, "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", Edited by B. G. Johnson, John Wiley & Sons, 1976.
4. Maquoi, R. and Rondal, J., "Mise en Equation des Nouvelles Courbes Européennes de Flambement", Revue Construction Métallique, no. 1, 1978.
5. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., "Theory of Elastic Stability", 2nd Edition, McGraw-Hill, 1961.

Tabel 1 Regningsmæssige værdier af ækvivalent initial pilhøjdeimperfektion  $e_{o,d}$  (fra figur 5.5.1, Eurocode 3)



Tværsnit		Global beregningsmetode				
Metode brugt til eftervisning af modstandsevne	Profiltype og -akse	Elastisk eller stiv-plastisk eller elastisk-perfekt plastisk		Elasto-Plastisk (plastisk zone metode)		
Elastisk [5.4.8.2]	Alle	$\alpha(\bar{\lambda} - 0,2)k_y W_{el}/A$		-		
Lineær plastisk [5.4.8.1(12)]	Alle	$\alpha(\bar{\lambda} - 0,2)k_y W_{pl}/A$		-		
Ikke-liniær plastisk [5.4.8.1(1) - (11)]	I-profil yy-akse	$1,33\alpha(\bar{\lambda} - 0,2)k_y W_{pl}/A$		$\alpha(\bar{\lambda} - 0,2)k_y W_{pl}/A$		
	I-profil zz-akse	$2,0 k_y e_{eff}/\epsilon$		$k_y e_{eff}/\epsilon$		
	Rektangulært rørprofil	$1,33\alpha(\bar{\lambda} - 0,2)k_y W_{pl}/A$		$\alpha(\bar{\lambda} - 0,2)k_y W_{pl}/A$		
	Cirkulært rørprofil	$1,5 k_y e_{eff}/\epsilon$		$k_y e_{eff}/\epsilon$		
$k_y = (1 - k_\delta) + 2 k_\delta \bar{\lambda}$ men $k_y \geq 1,0$						
Søjlekurve	$\alpha$	$e_{eff}$	$k_\delta$			
			$\gamma_{M1} = 1,05$	$\gamma_{M1} = 1,10$	$\gamma_{M1} = 1,15$	$\gamma_{M1} = 1,20$
a	0,21	$l/600$	0,12	0,23	0,33	0,42
b	0,34	$l/380$	0,08	0,15	0,22	0,28
c	0,49	$l/270$	0,06	0,11	0,16	0,20
d	0,76	$l/180$	0,04	0,08	0,11	0,14
Elementer med varierende tværsnit:						
Brug værdien af $W_{el}/A$ eller $W_{pl}/A$ ved midten af den fri søjlelængde $l$						

## Lektion 7.7: Fri søjlelængde

### FORMÅL

At introducere begrebet fri søjlelængde og forklare anvendelsen heraf ved dimensionering af normalt forekommende søjler.

### FORUDSÆTNINGER

Lektion 6.3:                      Elastisk instabilitet  
Lektion 7.5.1 og 7.5.2:        Søjler I og II.  
Lektion 7.6:                      Built-up Columns

### LEKTIONER VEDRØRENDE BESLÆGTEDE EMNER

Lektion 7.11:                    Frames  
Lektion 7.12:                    Trusses and Lattice Girders

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 7.7                      Effective Lengths

### RESUMÉ

For simpelt understøttede søjler er den fri søjlelængde lig med den faktiske længde; denne type søjler er dog i praksis ret sjældne. Ved beregning af bæreevnen for søjler med andre understøtningsforhold regnes med en fri søjlelængde  $L_E$ , som normalt er forskellig fra den faktiske længde.

$L_E$  er længden af en simpelt understøttet søjle med samme tværsnit og samme elastisk kritiske søjlekraft som den aktuelle søjle. I denne lektion angives tilnærmede værdier for den fri søjlelængde for en lang række understøtningsforhold til brug ved dimensioneringen.

Oversat og bearbejdet af: Peter Ehlers, Ingeniørhøjskolen i Århus, august 1996.

## 1. INDLEDNING

Ved bestemmelse af den elastisk kritiske last, Eulerlasten:

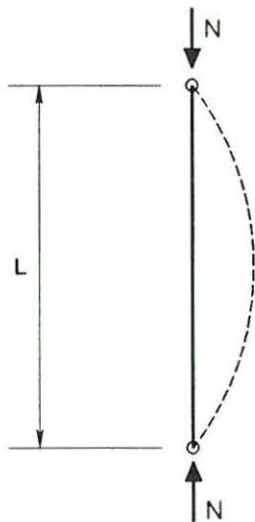
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \quad (1)$$

forudsættes det (lektion 6.1. og 7.5.1), at begge søjlens ender er simpelt understøttede som vist på figur 1. I praksis vil understøtningerne ofte give en vis indspænding, og det påvirker størrelsen af den kritiske last i betydelig grad. To egenskaber ved understøtningerne skal tages i betragtning:

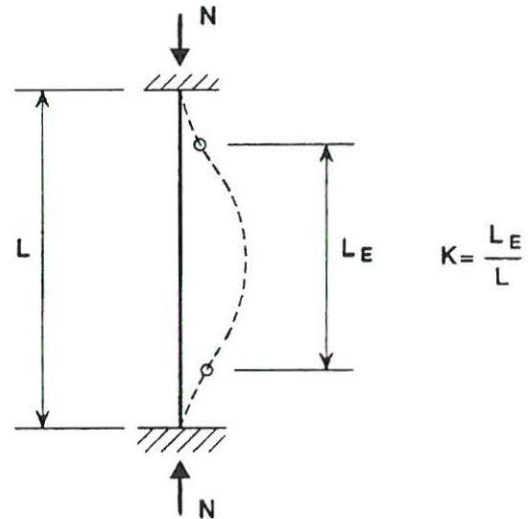
- indspændingsgraden (mod vinkeldrejning), som kan variere fra 0 til  $\infty$  (fra charniere til fuld indspænding)
- Den sideværts fastholdelse (fastholdt eller ikke fastholdt knudepunktsfigur).



Den normale fremgangsmåde ved beregning af søjler med forskellige grader af indspænding og fastholdelse er, at søjlen ækvivaleres med en simpelt understøttet søjle, idet længden korrigeres med længdefaktoren  $K$ .



Figur 1. Udknækning af simpelt understøttet søjle.



Figur 2. Fri søjlelængde.

## 2. SØJLER

Den fri søjlelængde  $L_E$  af et element med simpel understøtning (charniere) i begge ender er lig med afstanden mellem understøtningerne. For elementer med andre randbetingelser er den fri søjlelængde  $L_E$  lig med længden af et simpelt understøttet element med samme søjlebæreevne som det betragtede element.

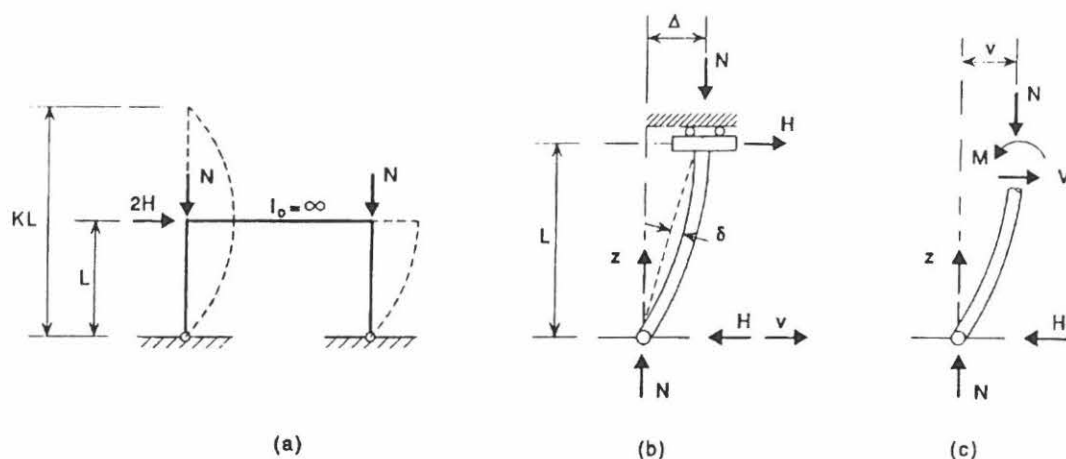
Anvendelse af ovenstående definition er ikke så let i praksis. Numeriske beregninger viser, at begrebet fri søjlelængde kan udledes ved hjælp af den elastiske søjleteori. Længdefaktoren  $K$  er forholdet mellem den fri søjlelængde ( $L_E$ ) af den ækvivalente søjle og længden af den aktuelle søjle ( $L$ ):  $L_E = K \cdot L$ . Længden af den ækvivalente søjle er lig med afstanden mellem 2 vendetangentpunkter (momentnulpunkter) i den aktuelle søjle, se *figur 2*.

For den simpelt understøttede søjle med konstant  $E \cdot I$ , se *figur 1*, er længdefaktoren  $K = 1$ , og afstanden mellem momentnulpunkterne er lig med den faktiske søjlelængde.

Som et mere generelt tilfælde betragtes søjlerne i rammen på *figur 3a*. Hvis det antages, at bjælkens bøjningsstivhed er meget større end søjlernes, vil søjlerne være fastholdt mod vinkeldrejning foroven, når rammen (bjælken) bevæges i vandret retning. Denne situation er vist på *figur 3b*.

For et vilkårligt punkt i søjlen er

$$M = N v + H z \quad \text{se figur 3c.}$$



figur 3. Bestemmelse af den fri søjlelængde

Søjle differentialligning bliver:

$$\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{M}{EI} = \frac{-(Nv + Hz)}{EI} \quad (2)$$

idet  $k^2 = N/EI$ , omskrives ligningen til:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2 v = -\frac{k^2 Hz}{N} \quad (2b)$$

Løsningen til ligning (2b) er:

$$v = A \cos kz + B \sin kz - \frac{Hz}{N} \quad (3)$$

Randbetingelserne anvendes nu til at bestemme konstanterne A og B:

Før  $z = 0$  er  $v = 0$ ; derfor er

$$A = 0$$

Før  $z = L$  er  $\frac{dv}{dz} = 0$ ; ved løsning af den differentierede ligningen findes at:

$$B k \cos kL = 0 \quad (4)$$

Af ligning (4) ses det, at enten er  $B = 0$ , eller også er  $\cos kL = 0$ .

Hvis  $B = 0$ , er  $v = -Hz/N$  og  $d^2v/dz^2 = 0$ ; i dette tilfælde er momentet  $M = 0$  i ethvert punkt af søjlen. Denne løsning er irrelevant.

Den anden mulighed er, at  $\cos kL = 0$ ; for at opfylde dette kræves at

$$k = n\pi/2L \quad \text{hvor } n = 1, 3, 5, \dots \quad (5)$$

Idet den mindste værdi,  $n = 1$ , anvendes, fås  $kL = \pi/2$  og dermed  $k = \pi/2L$ .

I ligning (2b) er  $k^2 = N/EI$ . Når (2b) og (5) kombineres, fås:

$$N_{cr} = k^2 EI = \pi^2 EI/4L^2 = \pi^2 EI/(2L)^2 \quad (6)$$

Ved at sammenligne ligning (6) og (1) ser man, at længdefaktoren  $K$  er lig med 2, og at søjlens fri søjlelængde er to gange den aktuelle længde. Med andre ord er den kritiske søjlekraft for søjlen med længden  $L$  på figur 3 lige så stor som den kritiske søjlekraft for en simpelt understøttet søjle med længden  $2L$ . Sammenhængen er skitseret på figur 3a.

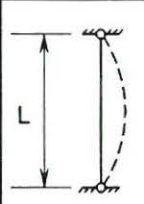
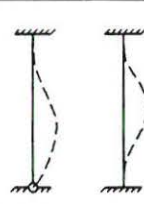


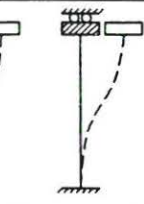

Ved at beregne den fri søjlelængde opnås en simpel måde at relatere søjlens virkemåde til grundtilfældet: den simpelt understøttede søjle. Beregningsgangen ved dimensionering af søjler er den samme for simpelt understøttede søjler (se lektion 7.5.1) som for søjler med andre randbetingelser. Men for de sidstnævnte søjler anvendes slankhedstallet  $L_e/r_y$  (i stedet for  $L/r_y$ ) ved aflæsning på søjlekurverne.

I tabel 1 er angivet teoretiske  $K$ -værdier for idealiserede tilfælde, hvor fastholdelsen (indspændingen) ved søjleenderne enten er 100% eller 0. Alle værdier er beregnet på samme måde som i eksemplet ovenfor.

Samtidig er angivet nogle anbefalede  $K$ -værdier, som er lig med eller lidt højere end de teoretiske. Når der anbefales en højere  $K$ -værdi end den teoretiske, skyldes det, at det i praksis vil være svært at opnå fuldstændig fastholdelse mod vinkeldrejning eller flytning.

Sammenligning af tilfælde (b) og (e) i tabel 1 viser, hvordan en fastholdelse påvirker søjlens kritiske last. Tilfælde (e) svarer til søjlen i figur 3a, hvor vandret flytning er mulig, mens tilfælde (b) viser en situation, hvor søjlen er fastholdt mod flytning foroven. Den kritiske søjlekraft øges med en faktor 8 ( $2,0^2/0,7^2$ ), når søjlen fastholdes mod flytning. Derfor er det absolut nødvendigt, at der skelnes mellem fastholdte og ikke fastholdte rammer.

I henhold til Eurocode 3 kan et system (en ramme) klassificeres som fastholdt, hvis dets respons på vandrette kræfter i planen er tilstrækkelig stift, således at det er acceptabelt at se bort fra alle snitkræfter, der stammer fra vandrette flytninger af dets knudepunkter. Alle andre systemer (rammer) skal klassificeres som ikke fastholdte, og virkningerne af de vandrette flytninger af knudepunkterne skal tages i betragtning ved dimensioneringen af systemerne.

	Med vandret fastholdelse			Uden vandret fastholdelse		
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Ideelle randbetingelser						
Teoretiske $K$ -værdier	1,0	0,7	0,5	2,0	2,0	1,0
Anbefalede $K$ -værdier når randbetingelser er tilnærmede	1,0	0,8	0,65	2,0	2,0	1,2

Tabel 1. Længdefaktor for centralt påvirkede søjler med forskellige randbetingelser.

Lektionerne 14.1.1 til 14.15 indeholder en yderligere uddybning af forskellen mellem fastholdte og ikke fastholdte systemer.

En søjle i en fastholdt ramme er forhindret i at flytte sig vandret i toppen. Ved udknækning vil søjlen i en sådan ramme normalt få en udbøjningskurve, som har mindst et vendetangentpunkt mellem de to ender, svarende til tilfælde (b) og (c) i *tabel 1*. Hvis rammen er simpelt understøttet og har charnierer i hjørnerne, fås en simpel søjle, svarende til tilfælde (a) i *tabel 1*. *Figur 4* viser nogle mulige udknækningsfigurer for fastholdte rammer. Længdefaktoren  $K$  er altid mindre end eller lig med 1 ( $0,5 \leq K \leq 1$ ).

I en ikke fastholdt ramme bevæger toppen af søjlen sig i forhold til bunden. Tilfælde (d), (e) og (f) i *tabel 1* viser udknækningsformer for en ikke fastholdt ramme, som illustreret på *figur 5*. Længdefaktoren  $K$  for denne type rammer er altid større end eller lig med 1, og kan teoretisk set blive uendelig stor ( $1 \leq K \leq \infty$ ).

Ovenstående betragtninger over rammer i én etage kan generaliseres og udvides til at omfatte rammer i flere etager.

De fuldstændig ueftergivelige indspændinger i søjleenderne (*figur 4b, 4d, 5b og 5d*) kan kun sjældent opnås i praksis; delvis indspænding er langt mere almindelig.

I tilfælde af delvis indspænding kan længdefaktoren  $K$  bestemmes enten med en generel 2. ordens vinkeldrejningsmetode eller ved hjælp af stabilitetsfunktioner (se [1]).

Løsningen kan udtrykkes på formen:

$$K = f(\eta_t, \eta_b) \quad (7)$$

hvor  $\eta_t$  and  $\eta_b$  er elastiske indspændingskoefficienter i top og bund af den betragtede søjle.

Der er udviklet forenklede metoder til bestemmelse af længdefaktoren  $K$  (se [2], [3], [4], [5] og [6]).

Med Donnell's tilnærmede formel (se *figur 6* og [2]) fås:

$$K = 1/\sqrt{n} \quad (8)$$

$$\text{hvor } n = \frac{1 + 2,9(f_1 + f_2) + 7,2 f_1 f_2}{1 + 1,4(f_1 + f_2) + 1,8 f_1 f_2} \quad (9)$$

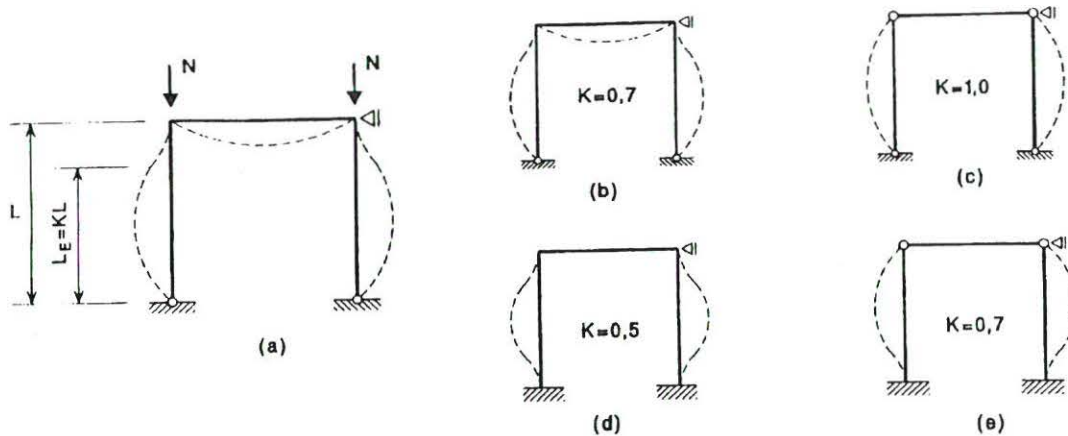
$$\text{og } f_i = \frac{1}{6,5 EI} \frac{M_i}{\Theta_i} \quad (10)$$

For en trykstang i en gitterdrager er:

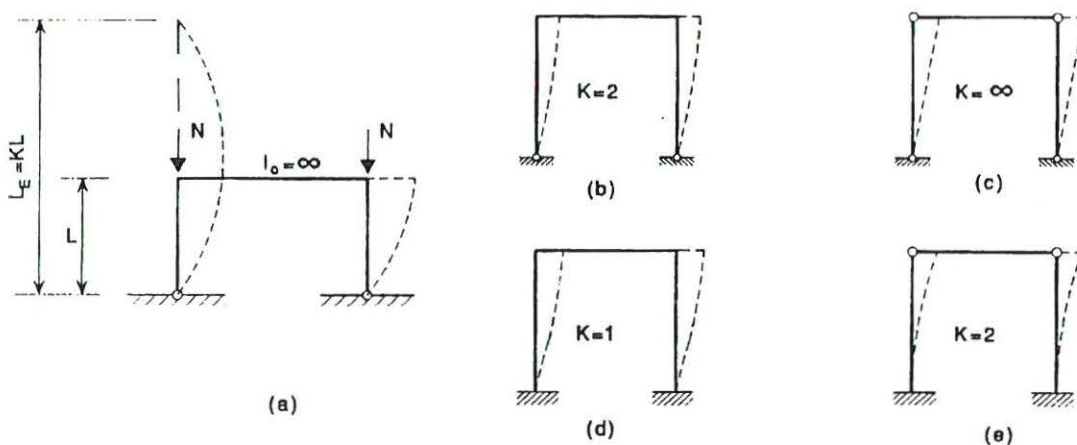
$$f_i = \frac{1}{6,5 EI} R_i \quad (11)$$

$$\text{hvor } R_i = \sum_j 3 \frac{EI_j}{l_j} \quad (12)$$

angiver fastholdelsen (indspændingen) fra de tilstødende stænger, "j".

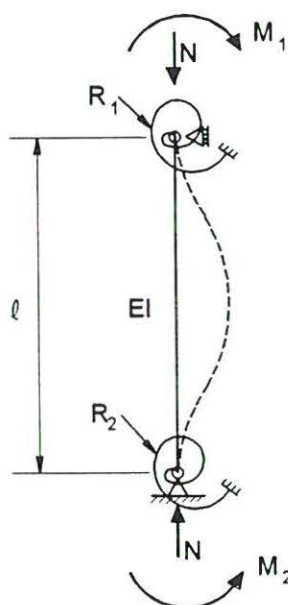


Figur 4. Udknækning af søjler i en fastholdt ramme.



Figur 5. Udknækning af søjler i en ikke fastholdt ramme.

Figur 6. Statisk system for søjlen i Donnell's formel.



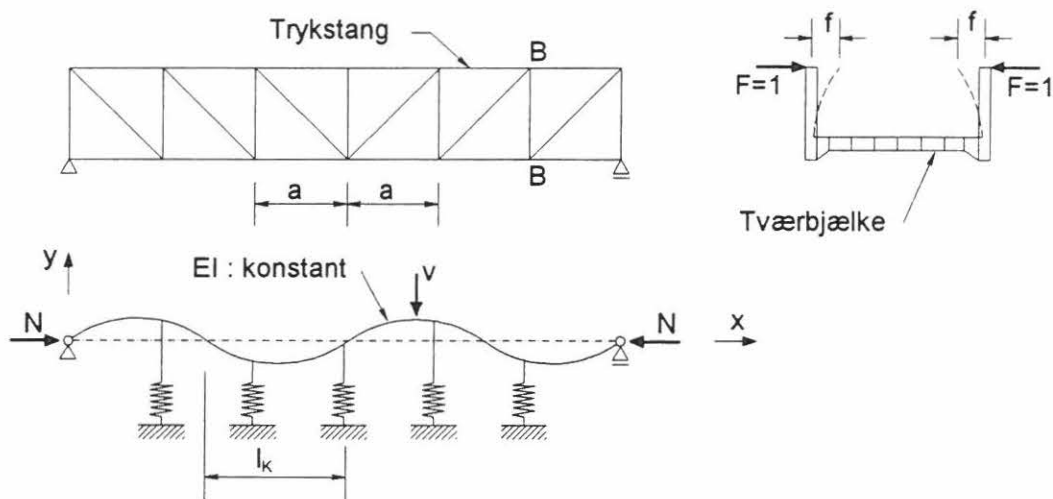
Wood [3] og Johnston [4] har udviklet andre forenklede metoder, som kun afviger fra ovenstående i opstilling og notation.

I Eurocode 3 er valgt den fremgangsmåde, som Wood har foreslået, og der betragtes to tilfælde: fastholdte rammer og ikke fastholdte rammer.

I nogle tilfælde er en trykstang elastisk fastholdt i en række punkter fordelt over stangens længde. F. eks. viser *Figur 7* en trykstang i en dobbelt gitterdrager, hvor de elastiske fastholdelser opnås ved hjælp af tværgående bjælker. I et sådant tilfælde er trykstangens fri søjlelængde større end afstanden "a" mellem tværbjælkerne og beregnes af nedenstående formel (se [7]):

$$l_k = \pi^4 \sqrt{\frac{1}{4} EI f a} \quad (13)$$

hvor  $f = 1/k_r$  er udbøjningen af en fjeder (mellemunderstøtning) for en enhedslast.



Figur 7. Udknækning af trykstang med elastiske fastholdelser.

### 3. SØJLER I FASTHOLDTE RAMMER

Wood [3] betragter et delelement af en fastholdt ramme som vist på *figur 8b* (stang AB)

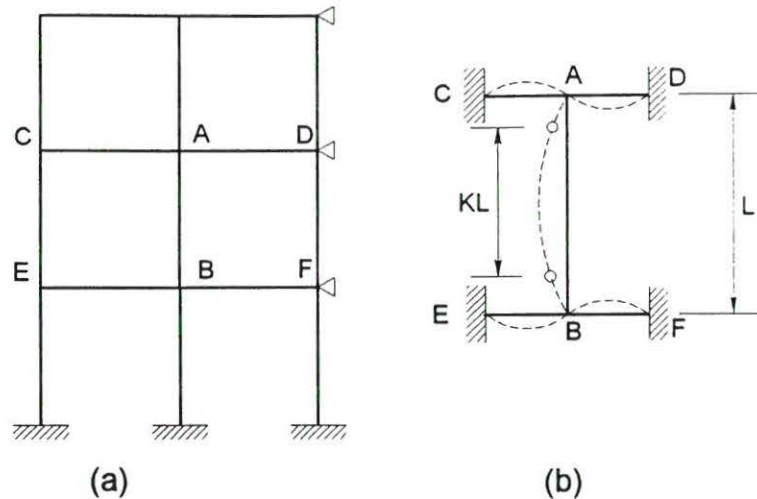
De to elastiske indspændingskoefficienter  $\eta_t$  and  $\eta_b$  (som er stort set analoge med Cross-momentfordelingstallene ved toppen og bunden af søjlen) beregnes ved hjælp af følgende formler:

$$\eta_t = K_C / (K_C + \Sigma K_{b,t}) \quad (14)$$

$$\eta_b = K_C / (K_C + K_{b,b}) \quad (15)$$

hvor  $K_C$  er søjlens stivhed  $I/L$

$\Sigma K_b$  er summen af effektiv bjælkestivhed i en samling  
indeks b og t angiver bund hhv. top af søjlen.



Figur 8. Fastholdt ramme med elastisk indspændte søjler.

Når bjælkerne ikke er påvirket af normalkraft, kan deres effektive stivhed bestemmes ud fra *tabel 2*, forudsat at de forbliver elastiske for den regningsmæssige last.

Når det regningsmæssige moment i en eller flere af bjælkerne for en given lastkombination overstiger bjælkens elastiske bæreevne, skal der regnes med charniere i disse bjælker ved bestemmelse af søjlelængden for den betragtede lastkombination.

Når en bjælke er fastgjort med halvtstive samlinger, skal dens effektive stivhed reduceres tilsvarende.

Når bjælkerne er påvirket af normalkraft, skal deres effektive stivhed reduceres, idet den effektive stivhed kan beregnes ved hjælp af stabilitetsfunktioner. Som et simpelt alternativ kan der på den sikre side ses bort fra den forøgede stivhed på grund af træknormalkraft, og virkningen af tryknormalkraft kan indregnes ved hjælp af de konservativt tilnærmede formler i *tabel 3*.

Indspændingsforhold i bjælkens modsatte ende	Effektiv bjælkestivhed
Indspændt i modsatte ende	$1,0 \cdot I/L$
Simpelt understøttet i modsatte ende	$0,75 \cdot I/L$
Vinkeldrejning lige så stor og med samme fortegn som i det betragtede knudepunkt (s-formet udbøjning)	$1,5 \cdot I/L$
Vinkeldrejning som i det betragtede knudepunkt, men med modsat fortegn (ensidig udbøjning)	$0,5 \cdot I/L$
Generelt tilfælde: Vinkeldrejning $\theta_a$ i knudepunktet og $\theta_b$ i modsatte ende	$(1 + 0,5 \theta_b/\theta_a) \cdot I/L$

Tabel 2. Effektiv stivhed af bjælke (det forudsættes, at bjælken forbliver elastisk for den regningsmæssige last).

Indspændingsforhold i bjælkens modsatte ende	Effektiv bjælkestivhed
Indspændt i modsatte ende	$1,0 \cdot I/L(1 - 0,4 N/N_{cr})$
Simpelt understøttet i modsatte ende	$0,75 \cdot I/L(1 - 1,0 N/N_{cr})$
Vinkeldrejning lige så stor og med samme fortegn som i det betragtede knudepunkt (s-formet udbøjning)	$1,5 \cdot I/L(1 - 0,2 N/N_{cr})$
Vinkeldrejning som i det betragtede knudepunkt, men med modsat fortegn (ensidig udbøjning)	$0,5 \cdot I/L(1 - 1,0 N/N_{cr})$

Tabel 3. Tilnærmede formler for effektiv stivhed af bjælker med tryknormalkraft.  
 $N_{cr} = \pi^2 E I/L^2$ .

Ved at betragte et delelement som angivet på *figur 8b* og anvende fordelingskoefficienter som angivet ovenfor, når man frem til et resultat, som kan præsenteres grafisk [3] med kurverne på *figur 9*. Kurverne er beregnet af nedenstående formel:

$$K = \frac{1 + 0,145 (\eta_b + \eta_t) - 0,265 \eta_b \cdot \eta_t}{2 - 0,364 (\eta_b + \eta_t) - 0,247 \eta_b \cdot \eta_t} \quad (16)$$

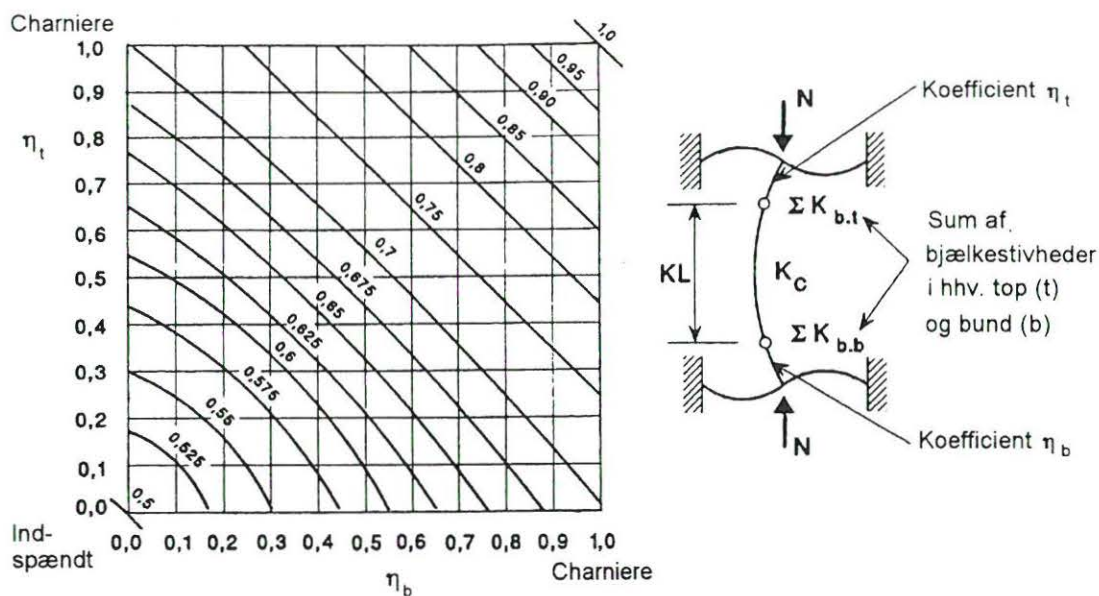
Beregningsmodellen kan også tilpasses dimensionering af kontinuerte søjler, idet det forudsættes, at alle dele af søjlen er belastet til den samme værdi af forholdet ( $N/N_{cr}$ ). For det generelle tilfælde, hvor ( $N/N_{cr}$ ) varierer, fører dette til en konservativ værdi af  $K$  for den hårdest påvirkede del af søjlen.

For hver del af en kontinuert søjle kan denne forudsætning indføres i beregningen ved at anvende den model, som er vist på *figur 10*, og beregne indspændingskoefficienterne  $\eta_t$  og  $\eta_b$  med nedenstående formler:

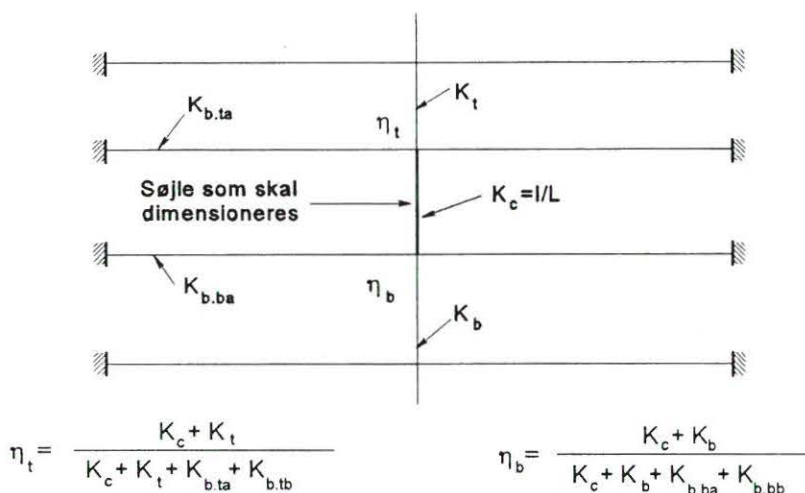
$$\eta_t = \frac{K_c + K_t}{K_c + K_t + \sum K_{b,t}} \quad (17)$$

$$\eta_b = \frac{K_c + K_b}{K_c + K_b + \sum K_{b,b}} \quad (18)$$





Figur 9. Længdefaktor for søjler i fastholdte rammer.



Figur 10. Elastiske indspændingskoefficienter for kontinuerte søjler.

#### 4. SØJLER I IKKE FASTHOLDTE RAMMER

I ikke fastholdte rammer (og visse fastholdte rammer) kan søjletoppen bøje ud til siden. Længdefaktoren  $K$  er derfor større end 1 og kan gå imod uendelig, hvis den vandrette bjælke har meget ringe bøjningsstivhed.

$K$  kan beregnes på samme måde som for fastholdte rammer. Men resultaterne for ikke fastholdte rammer må anses at være endnu mere tilnærmede end for fastholdte rammer.

Wood's metode giver kun acceptable resultater for ikke fastholdte rammer, hvis de er regelmæssige; d. v. s. at søjlernes højder, inertimomenter og normalkræfter må ikke afvige væsentligt fra hinanden.

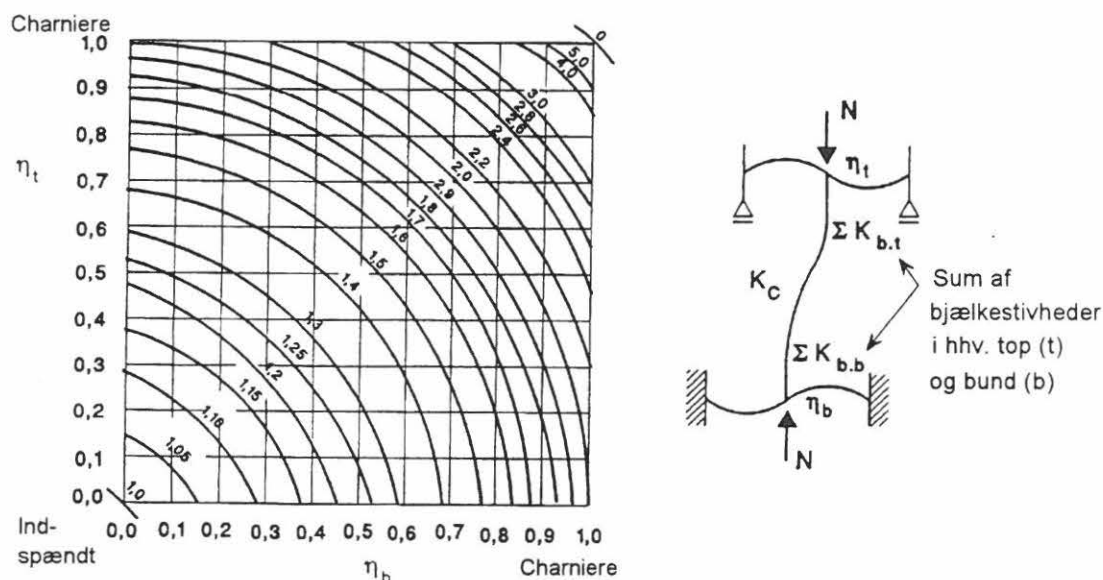
Længdefaktoren for en søjle i en ikke fastholdt ramme kan findes ved hjælp af figur 11 eller formel (19):

$$K = \sqrt{\frac{1 - 0,2 (\eta_t + \eta_b) - 0,12 \eta_t \eta_b}{1 - 0,8 (\eta_t + \eta_b) + 0,6 \eta_t \eta_b}} \quad (19)$$

De elastiske indspændingskoefficienter  $\eta_t$  og  $\eta_b$  beregnes på samme måde som for fastholdte rammer.

Dimensionering af søjler i ikke fastholdte rammer ud fra deres fri søjlelængde indebærer, at 2. ordens effekterne (på grund af søjletoppens udbøjning) tilnærmet indregnes ved hjælp af længdefaktoren  $K$ , som er større end 1. Fordelen ved denne fremgangsmåde er, at den er simpel, men man skal være opmærksom på, at gyldighedsområdet er begrænset, og at resultaterne i nogle tilfælde kan være upræcise.

En beregningsmetode, hvor den samlede konstruktionen betragtes, og hvor bærevnen beregnes ud fra tilnærmede metoder til bestemmelse af den elastisk kritiske last, må betragtes som mere pålidelig. Beregningsmetoder, som følger dette princip, indregner de tillægsmomenter og -normalkræfter fra den nedadrettede last, der opstår som følge af de vandrette flytninger. Lektion 7.11, *Frames*, giver yderligere oplysninger om dette emne.



Figur 11. Længdefaktor for søjler i ikke fastholdte rammer.

## 5. AFSLUTTENDE RESUMÉ

1. Omregning af en søjles længde til fri søjlelængde medfører, at bæreevnekurver for simpelt understøttede søjler kan anvendes ved dimensionering af søjler med en lang række andre randbetingelser.
2. Der findes flere forenklede metoder til bestemmelse af en trykstangs fri søjlelængde.
3. For en søjle i en ikke fastholdt ramme er den fri søjlelængde større en søjlens fysiske længde.
4. For en søjle i en fastholdt ramme er den fri søjlelængde mindre end eller lig med den fysiske længde.

## 6. LITTERATURHENVISNINGER

- [1] Livelysey, R.K. og Chandler, P.B., "Stability Functions for Structural Frameworks", Manchester University Press, 1956.
- [2] Massonnet, Ch., "Flambement des Constructions Formées de Barres Droites". Note technique B10.52, CRIF, Bruxelles, 1955.
- [3] Wood, R.H., "Effective Lengths of Columns in Multistorey Buildings". The Structural Engineer, vol. 52, 1974 (pp. 235-244; 295-302; 341-346).
- [4] Johnston, G., "Design Criteria for Metal Compression Members". John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.
- [5] Djalaly, H., "Longueur de Flambement des Eléments de Structures". Construction métallique, no. 4, 1975.
- [6] Kamal Hassan., "Zur Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstrelen", IVBH Anhandlungen 28-I-1968.
- [7] SIA 161, Constructions Métalliques 1979.

## Lektion 7.10.1: Bjælkesøjler I

### FORMÅL

At introducere den principielle virkemåde af bjælkesøjler og deres dimensionering ved interaktion mellem tryk- og bøjningsbidrag.

### FORUDSÆTNINGER

Lecture 7.2: *Cross-Section Classification*  
Lektion 7.5.1 og 7.5.2: Søjler I og II  
Lektion 7.8.1 og 7.8.2: Bjælker fastholdt mod sideudbøjning I og II

### LEKTIONER VEDRØRENDE BESLÆGTEDE EMNER

Lecture 7.11: *Frames*

### TILHØRENDE TALEKSEMPLER

Eksempel 7.10: Bjælkesøjler

### RESUMÉ

De grundlæggende begreber for interaktion mellem bøjnings- og trykpåvirkning beskrives med hovedvægt på eenakset bøjningen og plan udknækning. Det betyder at begreber som momentforøgselsfaktor, interaktionsudtryk og anvendelsen af bøjningsbæreevne kan behandles uden hensyntagen til komplicerede fænomener som vridning og rumlig udknækning.

Oversat og bearbejdet af S. Kloch, Aalborg Universitet, august 1996

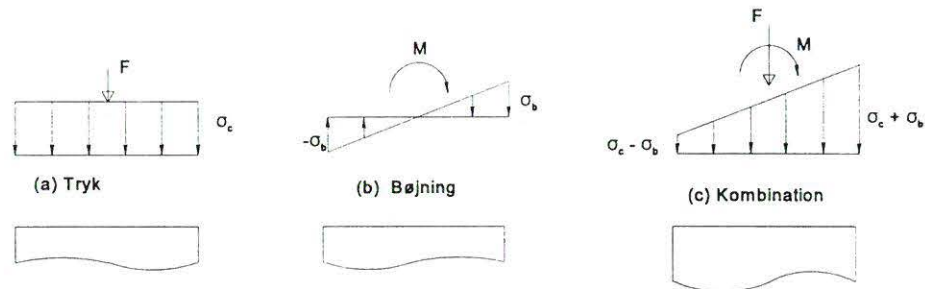
## 1. INDLEDNING

Bjælkesøjler er konstruktionselementer der belastes med en kombination af bøjning og tryk. I princippet kan alle elementer i rammekonstruktioner betragtes som bjælkesøjler, men med specialtilfældene bjælker ( $F=0$ ) og søjler ( $M=0$ ) som de to grænsetilfælde. En bjælkesøjles virkemåde vil variere afhængig af den måde hvorpå lasten overføres til elementet, og af dets understøtningsbetingelser og af tværsnitsform.

Den simpleste virkemåde omfatter bøjning om kun en hovedakse så bjælkesøjles udknækningen sker i det plan hvori momentet virker. I denne lektion behandles kun dette specielle tilfælde medens de mere komplekse problemer behandles i lektion 7.10.2.

## 2. TVÆRSNITTETS VIRKEMÅDE

Figur 1 viser spændingsfordelingen i et snit i en søjle med H-formet tværsnit hvor tryknormalkraften giver en jævn fordelt og momentet om y-aksen en variabel spændingsfordeling som det ses på figur 1a og figur 1b.



Figur 1. Elastisk spændingsfordeling i tværsnit

Ved elastisk virkemåde kan superpositionsloven benyttes for de to spændingsbidrag som vist på figur 1c. Begyndende flydning vil derfor opstå ved den kant hvor den maximale bøjningstrykspænding optræder svarende til:

$$f_y = \sigma_c + \sigma_b \quad (1)$$

hvor  $f_y$  er materialets flydespænding

$$\sigma_c = N/A \quad \text{er spændingen fra tryknormalkraften } N$$

$$\sigma_b = \frac{M h/2}{I} \quad \text{er den maximale trykspænding fra momentet } M, h \text{ er tværsnittets højde og } I \text{ inertimomentet om } y\text{-aksen.}$$

Hvis der istedet tillades fuld plasticitet vil brudbetingelsen være som vist i figur 2, og den hertil svarende kombination af normalkraft og moment bliver:

a. For  $y_n \leq (h-2t_f)/2$  [neutrale akse i kroppen]

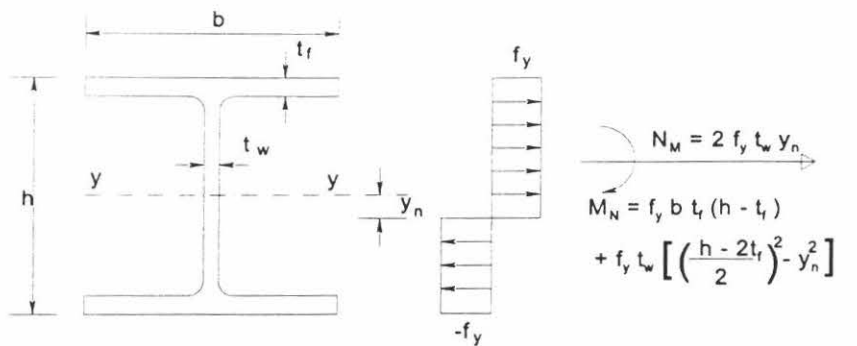
$$N_M = 2f_y t_w y_n$$

$$M_N = f_y b t_f (h-t_f) + f_y \left( \left( \frac{h-2t_f}{2} \right)^2 - y_n^2 \right) t_w \quad (2)$$

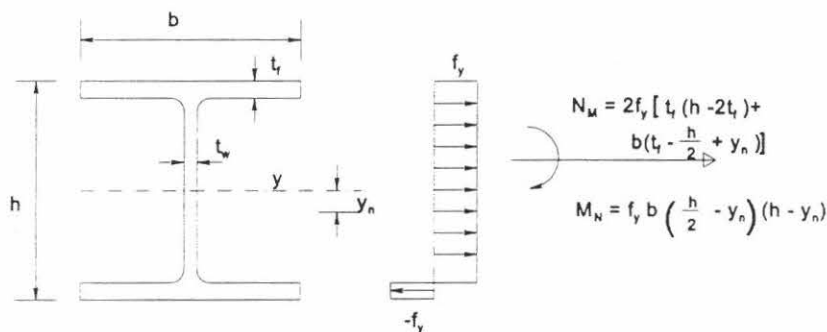
b. For  $y_n > (h-2t_f)/2$  [neutrale akse i flange]

$$N_M = f_y \left[ t_w (h-2t_f) + 2b \left( t_f - \frac{h}{2} + y_n \right) \right]$$

$$M_N = f_y b \left( \frac{h}{2} - y_n \right) (h - y_n) \quad (3)$$



(a)  $y_n < (h - 2t_f)/2$



(b)  $y_n > (h - 2t_f)/2$

Figur 2. Spændingsfordeling ved fuld plasticitet

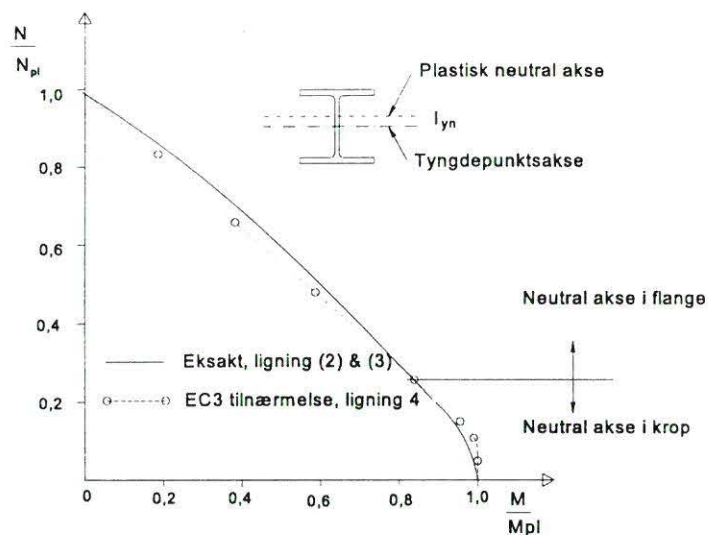
I figur 3 er der foretaget en sammenligning af ligning (2) og (3) med den tilnærmelse Eurocode 3 benytter:

$$M_{Ny} = M_{pl,y} (1 - n) / (1 - 0,5a) \quad (4)$$

hvor  $n = N_{sd} / N_{pl,Rd}$  er forholdet mellem normalkraft og flydelast ( $f_y A$ ), og

$$a = (A - 2bt_f) / A \leq 0,5$$

I tabel 1 er der angivet tilnærmede udtryk for  $M_{Ny}$  for en række almindeligt forekommende tværsnit. I alle tilfælde må  $M_N$  naturligvis ikke overskride størrelsen af det plastiske moment  $M_{pl}$ .



Figur 3. Interaktion ved fuld plasticitet for HE-450A profil

Tværsnit	Reduceret plastisk moment $M_N$
Valsede I- eller H-profiler: udbøjning om stærke akse udbøjning om svage akse	$M_{N,y} = 1.11 M_{pl,y} (1 - n)$ $M_{N,z} = 1.56 M_{pl,z} (1 - n)(n + 0.6)$
Kvadratisk rør-profil:	$M_N = 1.261 M_{pl} (1 - n)$
Rektangulært rør-profil: udbøjning om stærke akse udbøjning om svage akse	$M_{N,y} = 1.33 M_{pl,y} (1 - n)$ $M_{N,z} = 1.11 M_{pl,z} (1 - n)/(0.5 + ht/A)$
Cirkulært rør-profil:	$M_N = 1.04 M_{pl} (1 - n^{1.7})$

Tabel 1 Tilnærmede udtryk for det reducerede plastiske moment

### 3. GLOBAL STABILITET

Ved behandlingen af tværsnittets virkemåde i det foregående blev der ikke taget hensyn til den måde hvorpå momentet  $M$  var genereret. *Figur 4* viser en bjælkesøjle hvor tværudbøjningen skyldes en kombination af tryknormalkraften og to ligestore, modsat rettede momenter påført ved enderne.

Momentet vil overalt langs søjlen bestå af to komponenter:

det primære moment  $M$   
det sekundære moment  $Nv$

En elasticitetsteoretisk analyse af dette problem giver en maximal udbøjning af

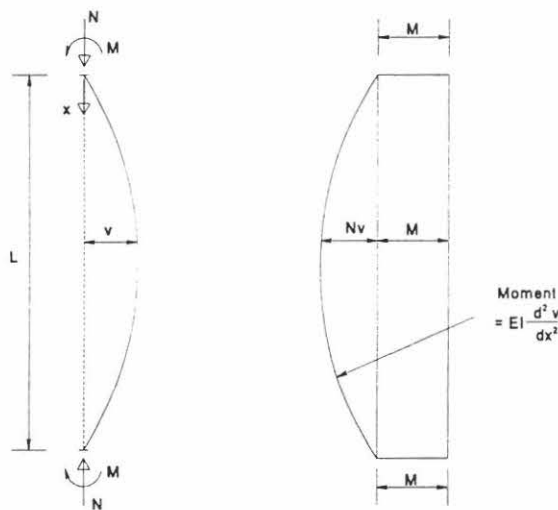
søjleens midtpunkt på:

$$v_{\max} = \frac{M}{N} \left( \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{N/P_{Ey}} - 1 \right) \quad (5)$$

hvor  $P_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}$  er Eulerlasten for udknækning om den stærke akse

og det maximale moment bliver:

$$M_{\max} = M \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{N/P_{Ey}} \quad (6)$$



Figur 4. Primært og sekundært moment

Sekant-ledet i ovenstående udtryk, der fungerer som en "forøgelsesfaktor" kan erstattes med tilnærmelsen (7). Både 1. ordens udbøjningen (fra momenterne M ved enderne alene) og 1. ordens momentet M (bestemt ved normal bjælketeori), vil med tilnærmelse, blive forøget med faktoren:

$$1/(1 - N/P_{Ey}) \quad (7)$$

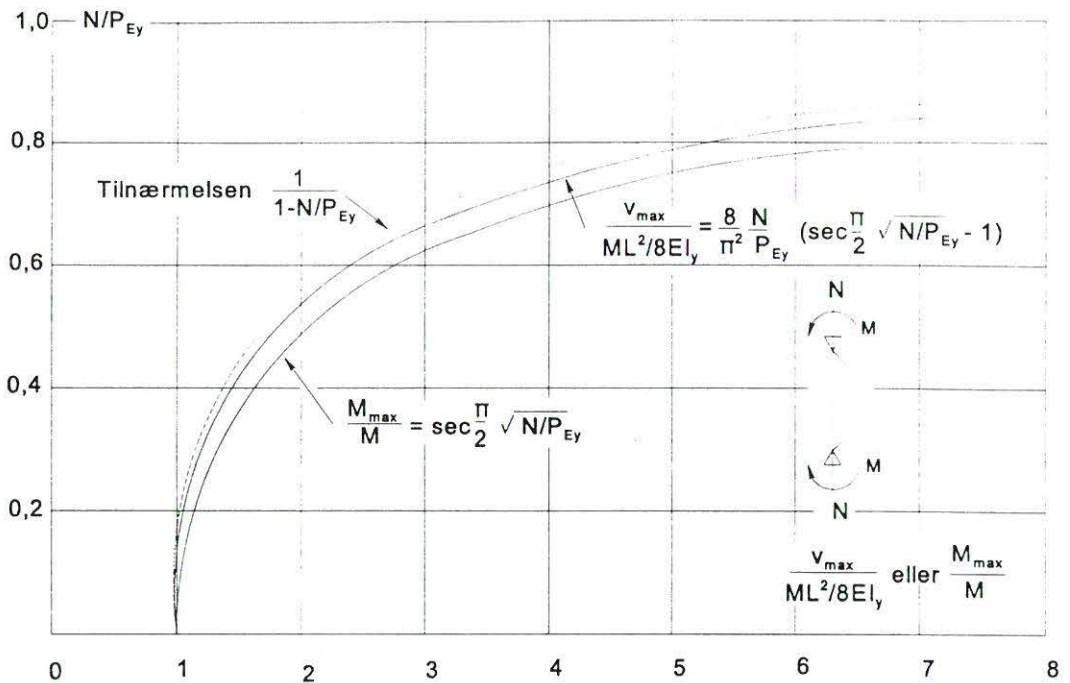
som vist på figur 5. Ved omskrivning af (5) og (6) fås de tilnærmede udtryk:

$$v_{\max} = (ML^2/8EI_y) \left( \frac{1}{1 - N/P_{Ey}} \right) \quad (8)$$

og

$$M_{\max} = M \left( \frac{1}{1 - N/P_{Ey}} \right) \quad (9)$$





Figur 5. Maximal udbøjning og maksimalt moment i bjælkesøjle med konstant moment (advarsel: kurverne er ikke nøjagtige)

Da den maximale spænding efter elasticitetsteorien er:

$$\sigma_{\max} = \sigma_c + \sigma_b \frac{M_{\max}}{M} \quad (10)$$

kan ligning (10) omskrives til:

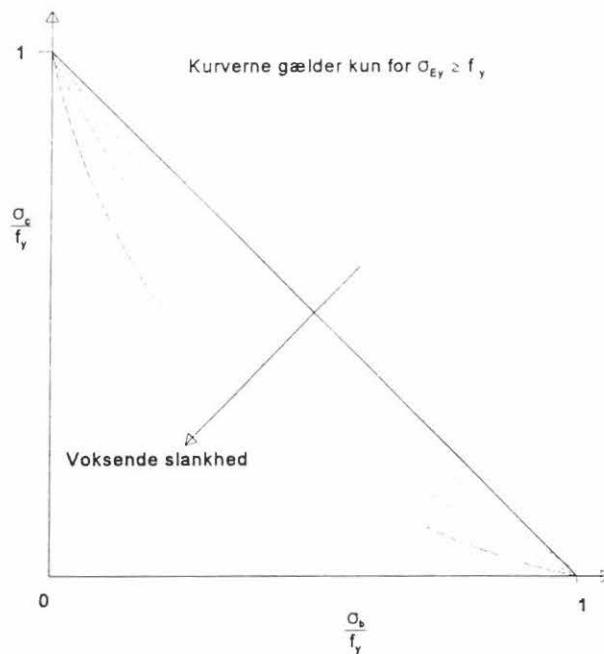
$$\frac{\sigma_c}{f_y} + \frac{\sigma_b}{f_y(1 - N/P_{Ey})} = 1,0 \quad (11)$$

Ligning (11) kan løses for værdier af  $\sigma_c$  og  $\sigma_b$  svarende til begyndende flydning, for forskellige værdier af  $P_{Ey}$  (der afhænger af slankhedsforholdet  $L/r_y$ ). Det giver en række kurver, se figur 6, der viser, at for  $\sigma_b \rightarrow 0$ , vil  $\sigma_c$  nærme sig til materialets flydespænding  $f_y$ . Ligning (11) sikre imidlertid ikke mod udknækning ved ren normalkraftpåvirkning hvor den kritiske spænding  $\sigma_{Ey}$  er:

$$\text{eller } \sigma_{Ey} = P_{Ey} / A \quad (12)$$

$$\sigma_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} \quad (13)$$

Derfor er det nødvendigt at benytte både ligning (11) og (12) som er kombineret i kurverne vist på figur 7 (udeladt i denne udgave).



Figur 6 Kurver baseret på ligning 11

#### 4. IMPLEMENTERING I NORMER

Ligning (11) og (13) er udtrykt ved hjælp af spændinger, og de er opstillet under forudsætning af, at svigt defineres enten som begyndende flydning eller som elastisk udknækning af det perfekte konstruktionselement. I normer der baseres på grænsetilstande benyttes brudlasten normalt som dimensioneringskriterie for statisk virkende laster. Derfor skal ligningerne omskrives så der indgår normalkræfter og momenter i stedet for spændinger. Samtidig er det også nødvendigt, at der tages hensyn til de forhold i virkelige stålkonstruktioner, der blev set bort fra i det foregående, for eksempel forhåndskrumningen, egenspændinger etc. Det er naturligvis vigtigt, at der er konsistens i interaktionsudtrykkene for den kombineret last således, at grænsetilfældene hvor moment eller normalkraft har værdien 0 svarer til dimensioneringen af henholdsvis en centralt belastet søjle og en bjælke.

Den tilnærmelse der benyttes i Eurocode 3 (ved bøjning om y-aksen) er:

$$\frac{N_{sd}}{\chi_y A f_y} + \frac{k_y M_{y, sd}}{W_{pl, y} f_y} \leq 1 \tag{14}$$

hvor  $\chi_y$  er reduktionsfaktoren for søjle udknækning

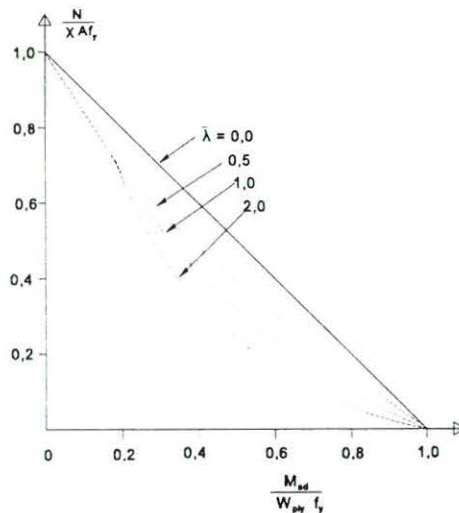
$k_y$  er en dimensionsløs faktor

Værdien af  $k_y$  afhænger på en ret kompliceret måde af følgende:

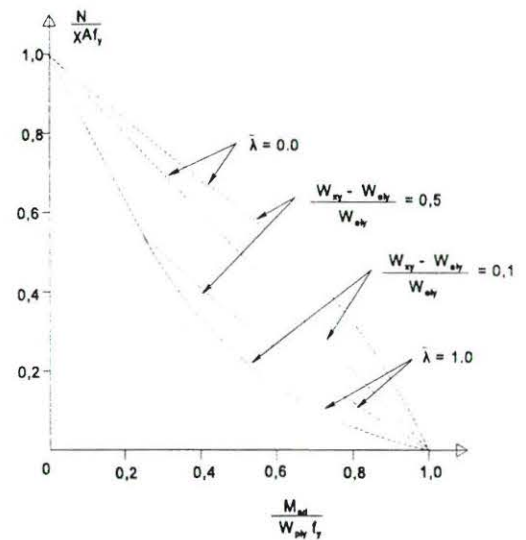
- normalkraftens niveau mål ved forholdet  $N_{sd} / \chi_y A f_y$ .
- slankhedsforholdet  $\lambda_y$ .

- forskellen mellem tværsnittets plastiske og elastiske modstandsmoment ( $W_{pl}$  og  $W_{el}$ )
- den primære momentkurves form

Kombineres alle disse forhold på den mest ugunstige måde vil  $k_y$ , på den sikre side, få værdien 1.5. Formålet med at indføre  $k_y$  er at tage hensyn til 2. ordens effekten fra bøjning, omtalt tidligere, og at kompensere for at momentkurven ikke er konstant. *Figur 8-10* viser at interaktionskurver kan være både konkave og konvekse afhængig af det valgte tilfælde. Ved optegning af disse kurver er dimensioneringsudtrykkene fra afsnit 5.5.4(1) i Eurocode 3 benyttet.



Figur 8. Interaktionskurver (slankhedens indflydelse)



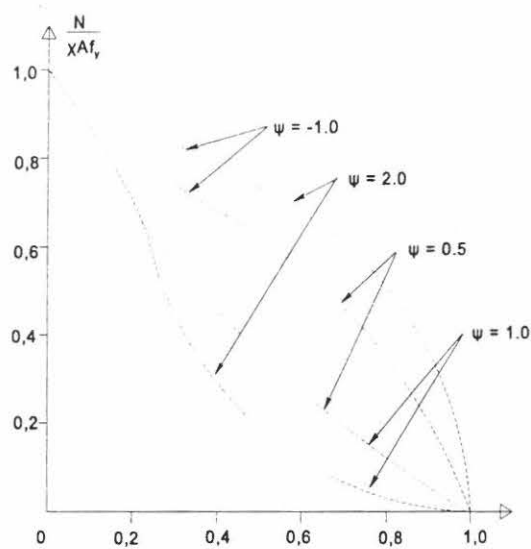
Figur 9. Interaktionskurver (tværsnitformens indflydelse)

## 5. INDFLYDELSEN FRA DEN PRIMÆRE MOMENTKURVENS FORM

For det specielle tilfælde med to ligestore modsatrettede momenter ved enderne, viser *figur 4* hvordan det primære moment forøges fordi normalkraften  $N$  virker med en ekscentricitet svarende til tværubøjningen  $v$ . Hvis den primære momentkurve har en anden form vil summationen af de to bidrag ikke have samme effekt, fordi det primære moment ikke nødvendigvis har sit maximum samme sted som det sekundære moment. *Figur 11* viser situationen med endemomenterne  $M$  og  $\psi M$ , hvor  $\psi$  kan antage værdier mellem +1 (konstant krumning) og -1 (S-formet krumning). På figuren har  $\psi$  en værdi svarende til ca. -0.5.

I det viste eksempel optræder det maximale moment stadig indenfor søjlens længde, men situationen er klart mindre alvorlig end tilfældet på *figur 4*, såfremt alle forhold ivotrigt er identiske, bortset fra værdien af faktoren  $\psi$ . Det er almindelig praksis, at tage hensyn til dette forhold i dimensioneringen ved at reducere bidraget fra momentet

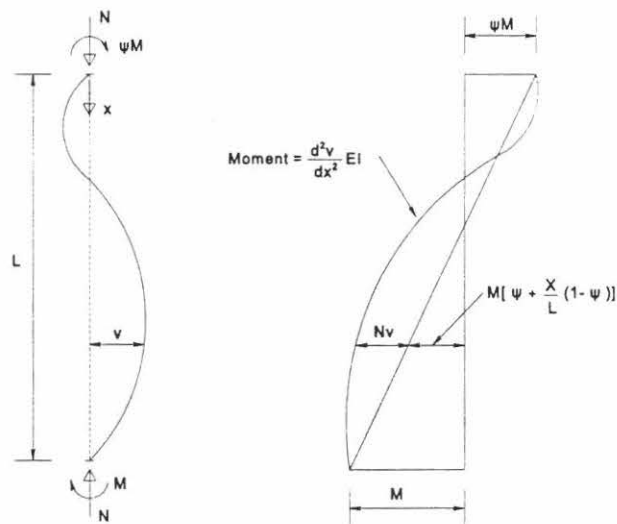
ved interaktion. I Eurocode 3 er faktoren  $k_y$ , der indgår i ligning (14), således afhængig af  $\psi$ , som det fremgår af *figur 10*. Den nøjagtige fremgangsmåde er beskrevet i Eurocode 3, afsnit 5.5.4 og figur 5.5.3.



Figur 10. Interaktionskurver (indflydelsen fra momentkurvens form)

Da tilfældet med konstant krumning er det farligste, er det klart at det er på den sikre side at benytte proceduren med  $\psi = 1.0$ .

Af *figur 11* fremgår, at det maximale moment eventuelt kan optræde i det endepunkt af søjlen hvor det største primære moment angriber.



Figur 11. Eksempel på uens endemomenter

Dette er sædvanligvis tilfældet når normalkraften er lille og/eller slankheden lille således, at virkningen af 2. ordens udbøjningen bliver beskeden. I disse tilfælde skal dimensioneringen også omfatte en eftervisning af tværsnittets bæreevne ved enden af søjlen. De tilnærmede bæreevneudtryk i tabel 1, svarende til det aktuelle tværsnit kan anvendes. I de tilfælde hvor der dimensioneres for konstant moment ( $\psi = 1.0$ ) vil kontrollen med ligning (14) dog altid være mindst ligeså krævende som en simpel bæreevnekontrol af endetværsnittet.

## 6. AFSLUTTENDE RESUMÉ

De væsentligste forhold vedrørende bjælkesøjlers virkemåde og dimensionering blev præsenteret. Enakset bøjning blev forudsat således at udknækningen kun kan ske i det plan hvori momentet virker. Følgende forhold bør understreges:

1. For det enkelte tværsnit kan interaktionen mellem normalkraft og bøjende moment behandles enten elastisk ved hjælp af superposition, eller plastisk ved en ligevægtsbetragtning for spændingsblokkene.
2. For elementet som helhed skal der tages hensyn til 2. ordens effekter.
3. Analysen som trykstang kan eventuelt benyttes som udgangspunkt for vurderingen af de overordnede parametre.
4. Dimensionering gennemføres normalt ved hjælp af interaktionsudtryk, der som en vigtig forudsætning har elementets bæreevne, dels bjælke og dels søjle.

## 6. LITTERATURHENVISNINGER

1. Chen, W. F. and Atsuta, T., "Theory of Beam-Columns" Vol. 1, McGraw-Hill, 1976.  
Comprehensive treatment of the beam-column problem for the in-plane case, with an emphasis on methods of analysis for the determination of the maximum load carrying capacity.
2. Trahair, N. S. and Bradford, M. A., "Behaviour and Design of Steel Structures", 2nd edition, Chapman and Hall, 1988.  
Chapter 7 refers to beam-columns, including a comparison of the subject's treatment in three design codes (not including Eurocode 3).
3. Ballio, G. and Mazzolani, F. M., "Theory and Design of Steel Structures", Chapman and Hall, 1983.  
Gives basis of original European approaches to the use of interaction formulae, including derivations.
4. Galambos, T. V., "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", 4th edition, Wiley Interscience.  
Chapter 8 presents a comprehensive review of theoretical, experimental and design-oriented contributions to the topic
5. Dowling, P. J., Owens, G. W. and Knowles, P., "Structural Steel Design", Butterworths, 1988.  
Chapter 24 deals with beam-column behaviour and design, including explanations of the physical significance of the concepts of interaction and slenderness.
6. Nethercot, D. A., "Limit State Design of Structural Steelwork", 2nd edition, Chapman and Hall, 1991.  
Chapter 6 deals with beam-column behaviour and design.

