Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Eksempel på dimensionering af en jernbetonbjælke mod brud

Albertsen, A.

Publication date:
1987

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Link to publication from Aalborg University

Citation for published version (APA):
Albertsen, A. (1987). *Eksempel på dimensionering af en jernbetonbjælke mod brud*. (2. udgave udg.) Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. U/ Nr. U8402

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

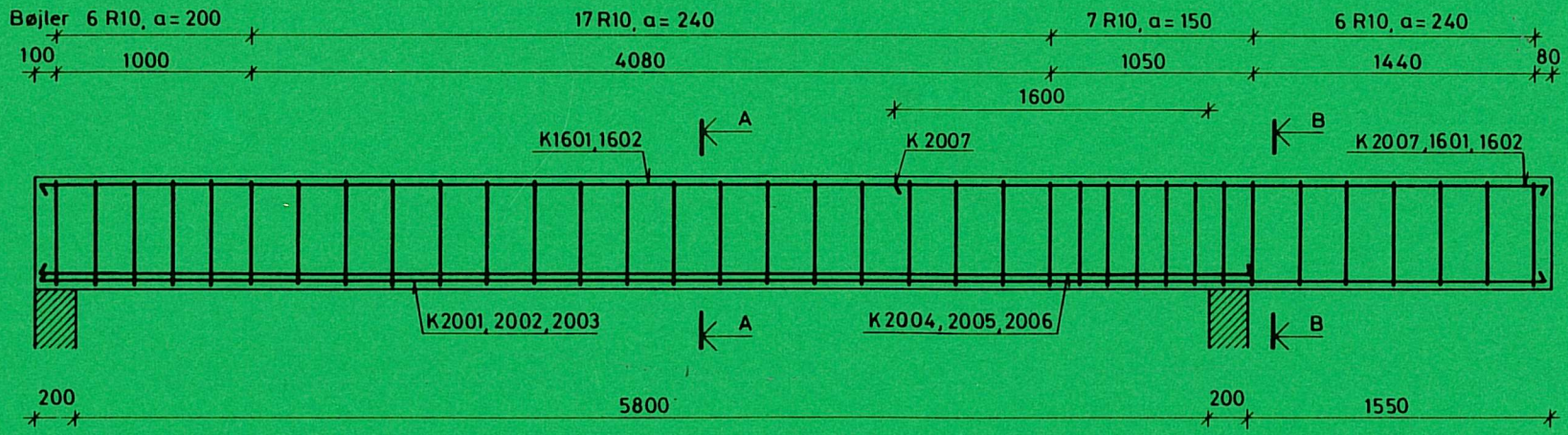
- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from vbn.aau.dk on: April 23, 2024

24,25

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK
INSTITUTE OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITETSCENTER · AUC · AALBORG · DANMARK



A. ALBERTSEN

EKSEMPEL PÅ DIMENSIONERING AF EN JERNBETONBJÆLKE MOD BRUD

2. UDGAVE FEBRUAR 1987 ISSN 0105-8185 U8402

Teksten er maskinskrevet af Ulla Pedersen.
Figurerne er tegnet af Ingrid Christensen
og Susanne Sand Jørgensen.

2. udgave, februar 1987.
Enkelte rettelser.

Forord: Dette eksempel tager udgangspunkt i øvelsesopgave 20.2.11 fra G. Heshe's "BÆRENDE KONSTRUKTIONER, ØVELSESOPGAVER, HÆFTE II". Behovet for en revision af opgaven og den dertil hørende løsning er opstået ved fremkomsten af 3. udgave af DS 411, norm for betonkonstruktioner.
Der er lagt særlig vægt på dimensionering for forskydning samt fastlæggelse af trækarmeringens afkortning.

OPGAVETEKST

Givet: En jernbetonbjælke med det på fig. 1 og 3 viste udseende.

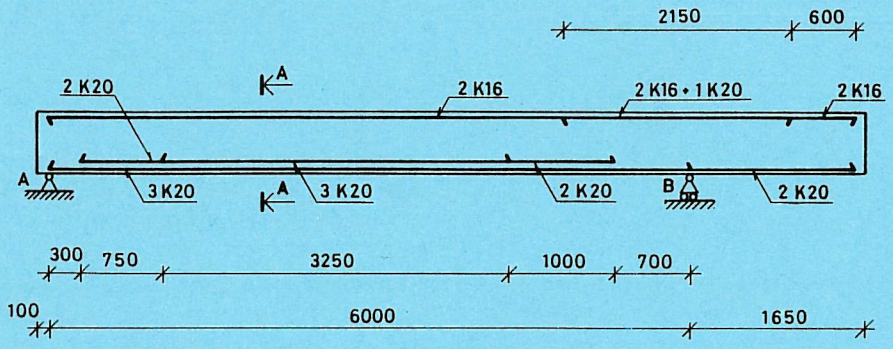


Fig. 1. Standrids. Mål i mm. Bøjler ikke vist.

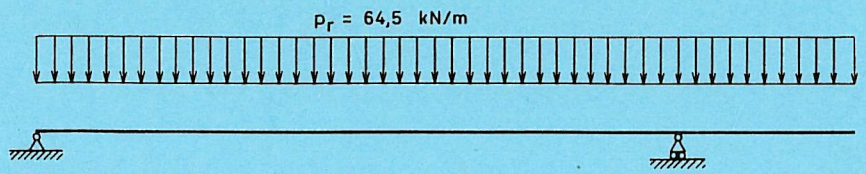


Fig. 2. Lastfigur.

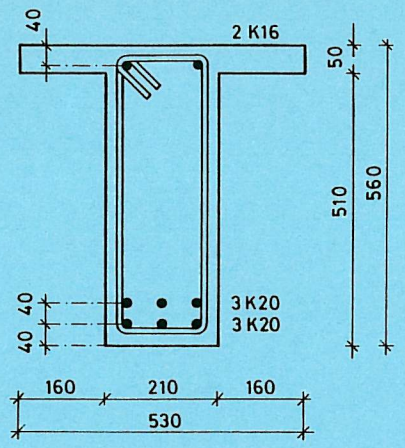


Fig. 3. Snit a-a. Mål i mm.

Materialespecifikationer:

Beton: f_{ck} = 20 MPa ε_u = 3,5 ‰
f_{tk} = 1,4 MPa

Armering: $E_{sk} = 2{,}0 \cdot 10^5$ MPa
$f_{yk} = f_{yck}$ = 420 MPa for hovedarmering } *)
f_{yk} = 240 MPa for bøjler }

Spørgsmål 1: Undersøg, om bjælkens sikkerhed mod bøjningsbrud er tilstrækkelig i snittene mod max. positivt henholdsvis max. negativt moment.

Spørgsmål 2: Undersøg bjælken for forskydning og beregn den nødvendige bøjlearmering (lodrette bøjler). Indtegn denne på en figur (1:20). Kontroller hovedarmeringens afkortning.

---

*) De her benyttede værdier svarer til betonnormens 2. udgave. Efter 3. udgave bør benyttes f_{yk} = 410 MPa for kamstål KS 410 og f_{yk} = 235 MPa for Fe 360.
Det er dog ikke fundet nødvendigt at omarbejde noten under hensyn til dette.

Der regnes med moderat miljøklasse, normal sikkerhedsklasse og normal kontrol, dvs. med partialkoefficienter

γ_c = 1,8 (beton)

γ_s = 1,4 (armering)

LØSNING

Styrkedata m.v.:

Beton: $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{20}{1,8} = 11,1$ MPa

Hovedarmering: $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{420}{1,4} = 300$ MPa

$\varepsilon_y = \frac{f_{yk}}{E_{sk}} = \frac{420}{2 \cdot 10^5} = 2,1 \cdot 10^{-3}$

Bøjler: $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{240}{1,4} = 171$ MPa

Reaktioner og snitkræfter: Der ses bort fra udkragningen (0,10 m) ved A.

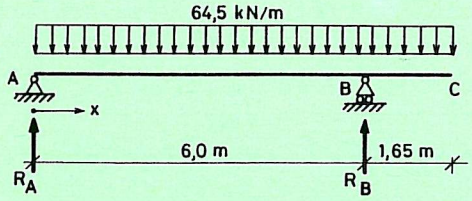


Fig. 4.

Reaktioner:

$R_B = (\frac{1}{2} \cdot 64,5 \cdot 7,65^2) : 6,0 = 314,6$ kN

$R_A = 64,5 \cdot 7,65 - 314,6 = 178,8$ kN

Forskydningskræfter:

$V_x = 178,8 - 64,5 \cdot x$ for $0 \leq x < 6,0$ m

$V_x = 493,4 - 64,5 \cdot x$ for $6,0 < x \leq 7,65$ m

$M = M_{max}$ for $V_x = 0 \Rightarrow x = \frac{178,8}{64,5} = 2,77$ m

$M_{max} = 178,8 \cdot 2,77 - \frac{1}{2} \cdot 64,5 \cdot 2,77^2 = 247,8$ kNm

$M_{min} = -\frac{1}{2} \cdot 64,5 \cdot 1,65^2 = -87,8$ kNm

$M_x = 178,8 \cdot x - 32,25 \cdot x^2$ for $0 \leq x \leq 6,0$ m

$M_x = 178,8 \cdot x - 32,25 \cdot x^2 + 314,6 \cdot (x-6,0)$
$= -1887,6 + 493,4 \cdot x - 32,25x^2$ for $6,0 \leq x \leq 7,65$ m

Snitkraftkurver:

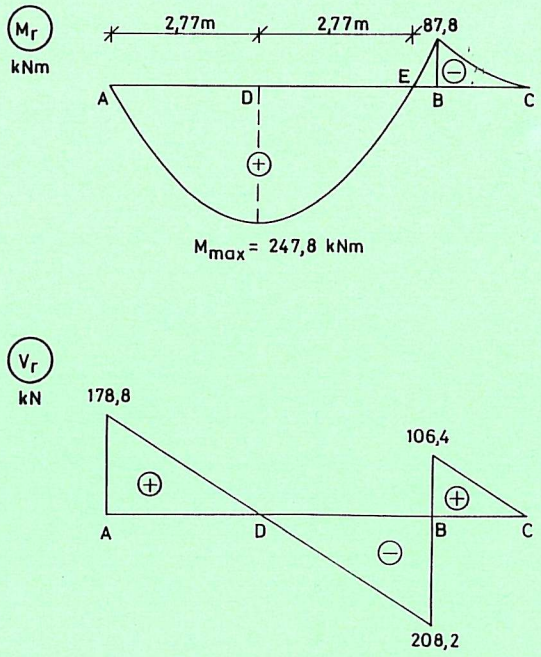


Fig. 5. Snitkraftkurver.

Spørgsmål 1

Bæreevneundersøgelse for $M = M_{max}$

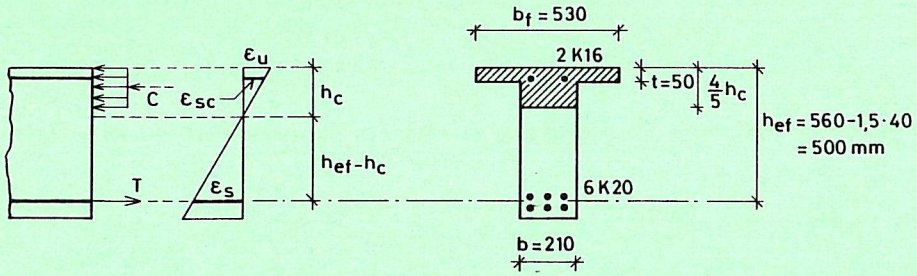


Fig. 6. Spændings- og tøjningsfordeling.

Beregning a. Der tages ikke hensyn til trykarmeringen (2K16). Tværsnittet skønnes normaltarmeret, dvs. $\varepsilon_s > \varepsilon_y = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$

$$T = A_s \cdot f_{cd} = 1884 \cdot 300 = 565 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Da C = T (ren bøjning) fås

$$C = (b_f \cdot t + b \cdot (\tfrac{4}{5}h_c - t)) \cdot f_{cd}$$

$$= (530 \cdot 50 + 210 \cdot (\tfrac{4}{5} \cdot h_c - 50)) \cdot 11{,}1 = 565000 \qquad (1)$$

$\Rightarrow \underline{h_c = 208 \text{ mm}}$ $\quad \frac{4}{5} h_c = 166 \text{ mm} > t$ altså korrekt at regne med tynd plade

Desuden er $h_c < h_{c,bal} = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} \cdot h_{ef} = \frac{0{,}0035}{0{,}0035 + 0{,}0021} \cdot 500 = 312$ mm

altså er tværsnittet normaltarmeret.

$$M_{ur} = b_f \cdot t \cdot f_{cd} \cdot (h_{ef} - \tfrac{t}{2}) + b \cdot (\tfrac{4}{5}h_c - t) \cdot f_{cd} \cdot (h_{ef} - \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{4}{5}h_c + t))$$

$$= 530 \cdot 50 \cdot 11{,}1 \cdot (500 - 25) + 210 \cdot (\tfrac{4}{5} \cdot 208 - 50) \cdot 11{,}1 \cdot (500 - \tfrac{1}{2} \cdot 216))$$

$$= 246{,}1 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = \underline{246{,}1 \text{ kNm}} < M_r = 247{,}8 \text{ kNm}$$

Bæreevnen er altså ikke fuldt til stede, uden at trykarmeringens bidrag medregnes.

Beregning b. Trykarmeringen (2K16) medtages i beregningen. Trykarmeringen skal iflg. DS 411 fastholdes af bøjler med max. afstand a = min {15d = 240 mm el. 350 mm} = 240 mm.
Tværsnittet skønnes at være normaltarmeret.

Det antages, at der ikke er flydning i trykarmeringen. Spændingen i denne er da

$$\sigma_{sc} = E_{sd} \cdot \varepsilon_{sc} = \frac{E_{sk}}{\gamma_s} \cdot \varepsilon_u \cdot \frac{h_c - 40}{h_c} = \frac{2 \cdot 10^5}{1{,}4} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{h_c - 40}{h_c}$$

$$= 500 \cdot \frac{h_c - 40}{h_c}$$

Projektionsligningen (1) får herefter følgende udseende:

$$(530 \cdot 50 + 210 \cdot (\tfrac{4}{5} \cdot h_c - 50)) \cdot 11{,}1 + 500 \cdot \frac{h_c - 40}{h_c} \cdot 402 = 565000$$

$\Rightarrow h_c = 132$ mm $\qquad t < \frac{4}{5}h_c < \frac{4}{5} \cdot h_{c,bal}$ er opfyldt

$$\sigma_{sc} = 500 \cdot \frac{132 - 40}{132} = 348 \text{ MPa} > f_{yd}$$

Trykarmeringen flyder altså, dvs. $\sigma_{sc} = f_{yd} = 300$ MPa

Projektionsligningen ændres til

$$(530 \cdot 50 + 210 \cdot (\tfrac{4}{5}h_c - 50)) \cdot 11{,}1 + 300 \cdot 402 = 565000$$

$\Rightarrow \underline{h_c = 143 \text{ mm}} > \frac{5}{4} t$ $\qquad \varepsilon_{sc} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{143 - 40}{143} = 2{,}6 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_{sy}$

$$M_{ur} = 530 \cdot 50 \cdot 11{,}1 \cdot (500 - 25) + 300 \cdot 402 \cdot (500 - 40)$$

$$+ 210 \cdot (\tfrac{4}{5} \cdot 143 - 50) \cdot 11{,}1 \cdot (500 - \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{4}{5} \cdot 143 + 50))$$

$$= 257{,}9 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = \underline{257{,}9 \text{ kNm}} > M_r = 247{,}8$$

Indre momentarm

$$h_{int} = \frac{M_{ur}}{T} = \frac{257{,}9 \cdot 10^6}{565000} = \underline{456 \text{ mm}}$$

Bæreevneundersøgelse for $M = M_{min}$

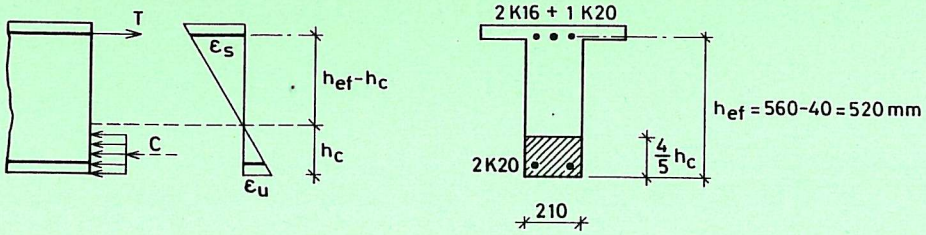


Fig. 7. σ- og ε-fordeling for neg. moment.

a) Tværsnittet skønnes normaltarmeret.
Der tages ikke hensyn til trykarmeringen.

$$\Phi = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot h_{ef} \cdot f_{cd}} = \frac{716 \cdot 300}{210 \cdot 520 \cdot 11,1} = 0,177$$

$$\Phi_{bal} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_{sy}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{0,0035}{0,0035+0,0021} = 0,500 > \Phi$$

$$h_{int} = h_{ef} \cdot (1 - \tfrac{1}{2}\Phi) = 520\ (1 - \tfrac{1}{2} \cdot 0,177) = \underline{474 \text{ mm}}$$

$$M_{ur} = T \cdot h_{int} = 716 \cdot 300 \cdot 474 = 101,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = \underline{101,8 \text{ kNm}} > M_r = 87,8$$

b) For øvelsens skyld undersøges bæreevnen, når undersidearmeringen, 2K20, medregnes som trykarmering. Dette vil medføre, at h_c bliver mindre. Tværsnittet vil da stadig være normaltarmeret.
Det antages, at der ikke er flydning i armeringen.
Som før fås

$$\sigma_{sc} = 500 \cdot \frac{h_c - 40}{h_c}$$

$$T = 716 \cdot 300 = 214,8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$C = \frac{4}{5} \cdot 210 \cdot h_c \cdot 11,1 + 500 \cdot \frac{h_c - 40}{h_c} \cdot 628 = 214800$$

$\Rightarrow h_c = 60$ mm $\quad \Rightarrow \sigma_{sc} = 500 \cdot \frac{60-40}{60} = 167 \text{ MPa} < f_{yd}$

$$M_{ur} = \frac{4}{5} \cdot 210 \cdot 60 \cdot 11,1 \cdot (520 - \frac{2}{5} \cdot 60) + 167 \cdot 628 \cdot (520-40)$$

$$= 105,8 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = \underline{105,8 \text{ kNm}}$$

Spørgsmål 2

Spørgsmålet opdeles i delproblemer. Opdelingen afspejler en beregningsstrategi:

a. Bestemmelse af forskydningsspændingskurven.

b. Valg af revnevinkel, og beregning af skrå betonspænding.

c. Bestemmelse af den nødvendige bøjlearmering under hensyntagen til reglerne for minimumsarmering.

d. Optegning af kurve for nødvendig trækkraft.

e. Kontrol af den forudsatte afkortning af hovedarmeringen.

f. Undersøgelse af armeringens forankring ved endevederlag.

g. Optegning af det endelige armeringsarrangement.

2a. Den formelle forskydningsspænding beregnes af

$$\tau = \frac{V}{b \cdot h_{int}}$$

Her sættes for nemheds skyld og på den sikre side $h_{int} = 456$ mm overalt.

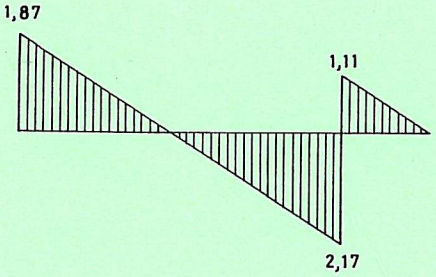


Fig. 8. τ-diagram. Enhed MPa.

2b. Ved dimensioneringen af bjælken skal det sikres, at den skrå betontrykspænding σ_c opfylder betingelsen

$$\sigma_c \leq \nu \cdot f_{cd} \qquad (2) \qquad \text{(Normen, pkt. 6.2.2.1)}$$

hvor $\nu = 0{,}60$ svarende til $f_{ck} = 20$ MPa.

For at studere virkningen af valget af revnevinkel deles beregningen herefter i to sideløbende beregninger svarende til 2 forskellige værdier af revnevinklen θ. I begge tilfælde regnes bøjlevinklen $\beta = 90^\circ$, dvs. der benyttes bøjler vinkelret på bjælkeaksen.

Revnevinkel $\theta = 45^\circ$ ($\cot\theta = 1$)	Revnevinkel $\theta = 26{,}6^\circ$ ($\cot\theta = 2$)
$\sigma_c = \frac{1 + \cot^2 45^\circ}{\cot 45^\circ + \cot 90^\circ} \cdot \tau = 2 \cdot \tau$	$\sigma_c = \frac{1 + \cot^2 26{,}6^\circ}{\cot 26{,}6^\circ + \cot 90^\circ} \cdot \tau = 2{,}5 \cdot \tau$
(2) er da ensbetydende med	
$\tau \leq 0{,}30 \cdot f_{cd} = 3{,}33$ MPa	$\tau \leq 0{,}24 \cdot f_{cd} = 2{,}67$ MPa
$\tau_{max} = 2{,}17$ MPa $< 3{,}33$ *)	$\tau_{max} = 2{,}17$ MPa $< 2{,}67$ *)
Betondimensionerne er altså tilstrækkelige	

*) τ_{max} er her beregnet som $\frac{|V|_{max}}{b \cdot h_{int}}$ hvilket er lidt på den sikre side

θ = 45°

2c. Bestemmelse af bøjlearmering

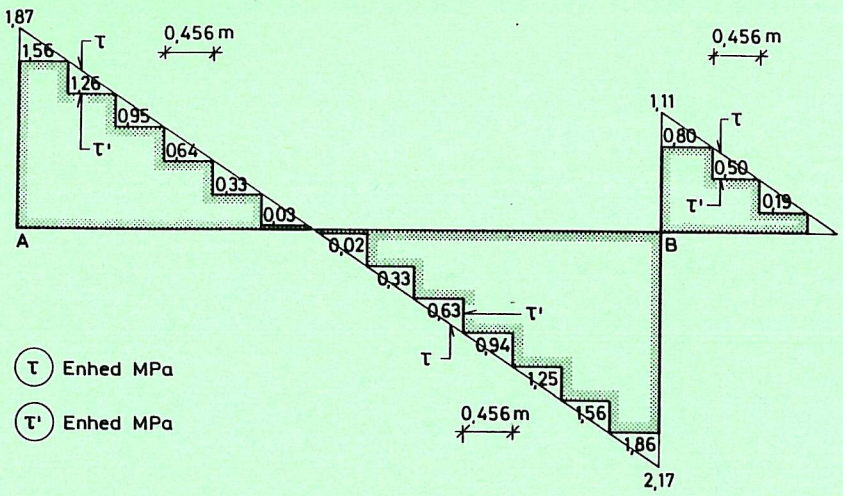


Fig. 9. Dimensionerende τ-kurve.

τ'-kurven fremkommer af τ-kurven ved at aftrappe denne i trin med længden $h_{int} \cdot \cot\theta = h_{int} = 0{,}456$ m.

τ'-kurven kan benyttes til at finde den nødvendige bøjlearmering på delstrækninger $\ell' = h_{int} = 0{,}456$ m. I praksis er man dog interesseret i at have samme bøjlearmering over en længere strækning, og det bliver da max-værdien af τ' på den pågældende delstrækning, der bliver bestemmende for bøjlearmeringen. Hvis den strækning, hvorpå bøjlearmeringen ønskes konstant, vælges til $\ell = 2 \cdot h_{int} \cdot \cot\theta = 0{,}912$ m, svarer dette til, at der dimensioneres ud fra τ-kurvens middelværdi på strækningen.

θ = 26,6°

2c. Bestemmelse af bøjlearmering

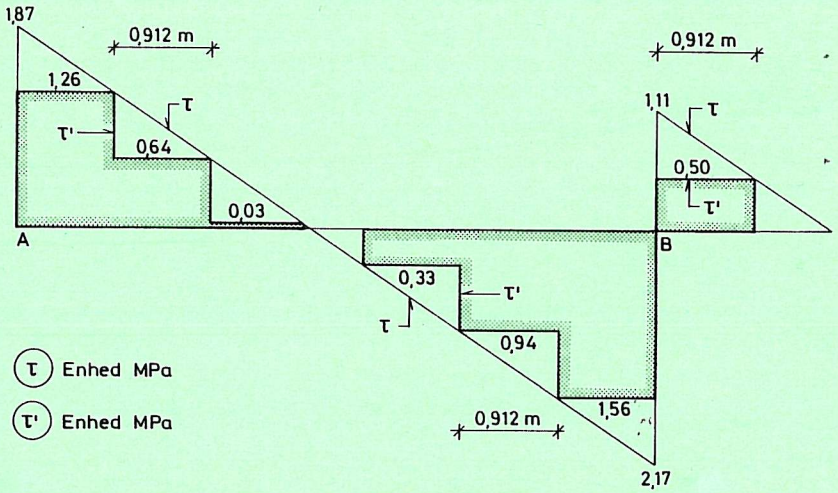


Fig. 10. Dimensionerende τ-kurve.

τ'-kurven fremkommer af τ-kurven ved at aftrappe denne i trin med længden $h_{int} \cdot \cot\theta = 2 \cdot h_{int} = 0{,}912$ m.

τ'-kurven kan benyttes til at finde den nødvendige bøjlearmering på delstrækninger $\ell' = 2 \cdot h_{int} = 0{,}912$ m. I praksis er man dog ofte interesseret i at have samme bøjlearmering over en længere strækning, og det bliver da max-værdien af τ' på den pågældende delstrækning, der bliver bestemmende for bøjlearmeringen. Hvis den strækning, hvorpå bøjlearmeringen ønskes konstant, vælges til $\ell = 2 \cdot h_{int} \cdot \cot\theta = 1{,}824$ m, svarer dette til, at der dimensioneres ud fra τ-kurvens middelværdi på strækningen.

$\theta = 45^{o}$

Her vælges at forskydningsarmere ensartet på 1,0 m lange delstrækninger.

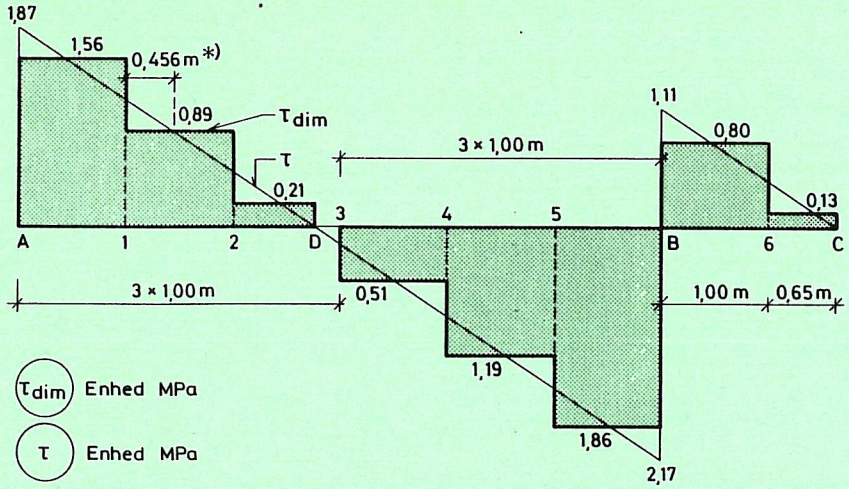


Fig. 11. Praktisk benyttelse af τ_{dim}.

*) Bemærk, at den dimensionerende værdi af τ, τ_{dim}, for hver delstrækning á 1,00 m måles på τ-kurven i det punkt, hvis afstand er 0,456 m fra punktet med størst τ-værdi.

Til dimensioneringen af bøjlearmeringen benyttes normens udtryk

$$N_{td} \cdot \sin\beta \cdot (\cot\theta + \cot\beta) \geq \tau_{dim} \cdot \ell \cdot b$$

Med $N_{td} = A_{st} \cdot f_{yd} \cdot \ell$ og $\beta = 90^{o}$ samt $\theta = 45^{o}$ fås til bestemmelse af det nødvendige bøjleareal pr. længdeenhed

$$\varphi_b = \frac{A_{st}}{b} = \frac{\tau_{dim} \cdot \tan\theta}{f_{yd}} = \frac{\tau_{dim}}{f_{yd}} = \frac{\tau_{dim}}{171}$$

(A_{st} = bøjletværsnit pr. længdeenhed af vandret snit i bjælkekroppen.)

$\theta = 26{,}6^{o}$

Her vælges at forskydningsarmere ensartet på 1,0 m lange delstrækninger.

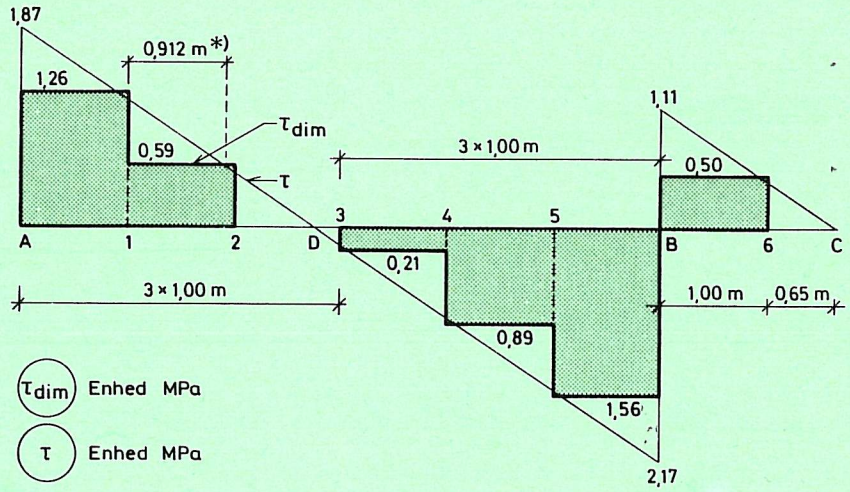


Fig. 12. Praktisk benyttelse af τ_{dim}.

*) Bemærk, at den dimensionerende værdi af τ, τ_{dim}, for hver delstrækning á 1,00 m måles på τ-kurven i det punkt, hvis afstand er 0,912 fra punktet med størst τ-værdi.

Dimensionering af bøjlearmering, jfr. side 11:

$$\varphi_b = \frac{A_{st}}{b} = \frac{\tau_{dim} \cdot \tan\theta}{f_{yd}} = \frac{\tau_{dim}}{2 \cdot f_{yd}} = \frac{\tau_{dim}}{342}$$

$\theta = 45^{o}$

Ved bestemmelsen af det nødvendige bøjleareal tages der hensyn til normens bestemmelse om minimumsbøjlearmering:

$$\varphi_b \geq 0{,}2 \cdot \frac{f_{tk}}{f_{yk}} = 0{,}2 \cdot \frac{1{,}4}{240} = 0{,}0012$$

Det vælges at benytte 2-snits bøjler med diameter d = 10 mm.
Bøjleafstanden a bestemmes af

$$\varphi_b = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2}{a \cdot b} \Rightarrow a_{nødv} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot d^2}{b \cdot \varphi_b} = \frac{0{,}748}{\varphi_b}$$

Bøjleafstanden må dog i henhold til normen ikke blive større end $0{,}7 \cdot h = 0{,}7 \cdot 560 = 392$ mm.
Desuden kræves på den strækning, hvor der regnes med trykarmering

$$a \leq \left\{ \begin{matrix} 350 \\ 15 \cdot d_s = 240 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \leq 240 \text{ mm.}$$

Beregningerne er opstillet i nedenstående skema:

Delstrækning			A-1	1-2	2-3		3-4	4-5	5-B	B-6	6-C
					2-D	D-3					
Længde ℓ		mm	1000	1000	770	230	1000	1000	1000	1000	650
τ_{dim}		MPa	1,56	0,89	0,21	0	0,51	1,19	1,86	0,80	0,13
$\varphi_b = \frac{\tau_{dim}}{171}$		dim.løs	0,0091	0,0052	0,0012	0	0,0030	0,0070	0,0108	0,0047	0,0008
$\varphi_{b,min}$		dim.løs	0,0091	0,0052	0,0012		0,0030	0,0070	0,0108	0,0047	0,0012
Bøjler	d	mm	10	10	10		10	10	10	10	10
	$a_{nødv}$	mm	82	144	623		249	107	69	159	623
	valgt a *)	mm	80	140	240		240	100	60	140	200

*) Se figur side 27

$\theta = 26{,}6^{o}$

Minimumsbøjlearmering (som side 13)

$$\varphi_b \geq 0{,}0012$$

Bestemmelse af bøjleafstand for 2-snits bøjler med d = 10 mm (som side 13)

$$a_{nødv} = \frac{0{,}748}{\varphi_b}$$

dog $a \leq 392$ mm
samt ved trykarmering $a \leq 240$ mm.

Beregninger vedr. bøjlearmering:

Delstrækning			A-1	1-2	2-3		3-4	4-5	5-B	B-6	6-C
					2-D	D-3					
Længde ℓ		mm	1000	1000	770	230	1000	1000	1000	1000	650
τ_{dim}		MPa	1,26	0,59	0	0	0,21	0,89	1,56	0,50	0
$\varphi_b = \frac{\tau_{dim}}{342}$		dim.løs	0,0037	0,0017	0	0	0,0006	0,0026	0,0046	0,0015	0
$\varphi_{b,min}$		dim.løs	0,0037	0,0017	0,0012		0,0012	0,0026	0,0046	0,0015	0,0012
Bøjler	d	mm	10	10	10		10	10	10	10	10
	$a_{nødv}$	mm	202	440	623		623	288	162	534	623
	valgt a *)	mm	200	240	240		240	240	160	240	240

*) Se figur side 28

$\theta = 45^{o}$

2d. Bestemmelse af trækkraftkurve

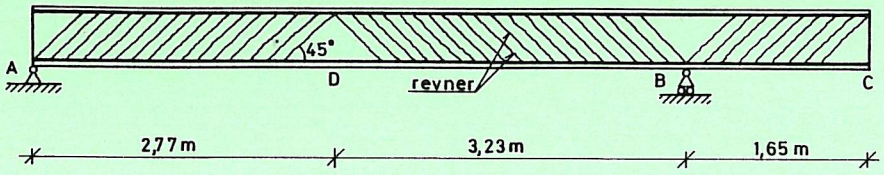


Fig. 13. Beregningsmodel. (Bøjler ikke vist).

Trækkraften N_{sd} i armeringen fås af udtrykket

$$N_{sd} = \frac{|M|}{h_{int}} + \frac{1}{2} \cdot |V| \cdot (\cot\theta - \cot\beta) = \frac{|M|}{0,456} + \frac{1}{2} \cdot |V|$$

Trækkraftkurven kan bestemmes på flere måder. Her skal angives 4 forskellige:

1. Benyttelse af de analytiske udtryk for M og V.
2. Tabellering af M og V - og dermed N_{sd} - i en række udvalgte punkter.
3. Grafisk konstruktion.
4. Forskydning af $\frac{M}{h_{int}}$ - kurven stykket $\frac{1}{2} h_{int} \cot\theta$ vandret i den retning, der for hver delstrækning giver øget trækkraft. (Denne metode er lidt på den usikre side, når lasten som her er jævnt fordelt).

Bemærk, at der på en strækning med momenter af samme fortegn højst kan optræde en trækkraft = $M_{max}:h_{int}$. (Dette følger implicit af den benyttede gittermodel).

Her demonstreres metode 1 og 3.

$\theta = 26,6^{o}$

2d. Bestemmelse af trækkraftkurve

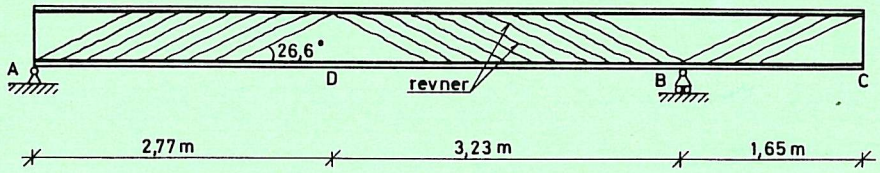


Fig. 14. Beregningsmodel. (Bøjler ikke vist).

Trækkraften N_{sd} i armeringen fås af udtrykket

$$N_{sd} = \frac{|M|}{h_{int}} + \frac{1}{2} \cdot |V| \cdot (\cot\theta - \cot\beta) = \frac{|M|}{0,456} + |V|$$

Bemærk forskellen fra side 15!

Tekst se iøvrigt side 15

$\theta = 45^{o}$

Metode 1. De analytiske udtryk for M og V fås fra side 1 og 2. Mellemregninger overspringes her.

Strækning

AD $0 \leq x \leq 2{,}77$ m: $M \geq 0$; $V \geq 0$

$$N_{sd} = 89{,}4 + 359{,}9 \cdot x - 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (a)$$

DE $2{,}77 \leq x \leq 5{,}54$ m: $M \geq 0$; $V \leq 0$

$$N_{sd} = -89{,}4 + 424{,}4 \cdot x - 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (b)$$

EB $5{,}54 \leq x \leq 6{,}00$ m: $M \leq 0$; $V \leq 0$

$$N_{sd} = -89{,}4 - 359{,}9 \cdot x + 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (c)$$

BC $6{,}00 \leq x \leq 7{,}65$ m: $M \leq 0$; $V \geq 0$

$$N_{sd} = 4386{,}2 - 1114{,}3 \cdot x + 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (d)$$

For positive momenter fås $\max.N_{sd} = \frac{247{,}8}{0{,}456} = 543$ kN

- negative - - $\max.N_{sd} = \frac{87{,}8}{0{,}456} = 193$ kN

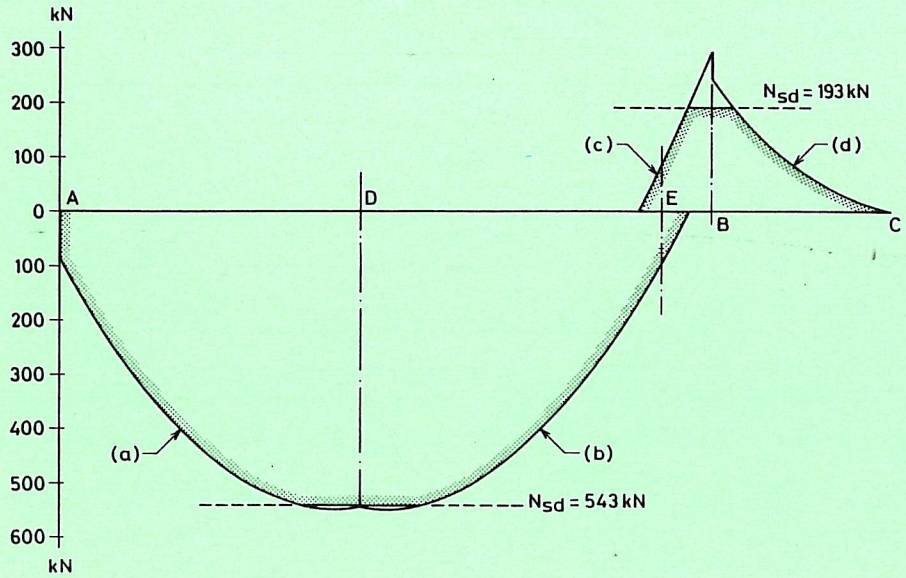


Fig. 15. Trækkraftkurve (metode 1). Signaturen ▒▒▒ angiver kurven efter afskæring for $\max.N_{sd}$.

$\theta = 26{,}6^{o}$

Metode 1.

Strækning

AD $0 \leq x \leq 2{,}77$ m: $M \geq 0$; $V \geq 0$

$$N_{sd} = 178{,}8 + 327{,}6 \cdot x - 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (a)$$

DE $2{,}77 \leq x \leq 5{,}54$ m: $M \geq 0$; $V \leq 0$

$$N_{sd} = -178{,}8 + 456{,}6 \cdot x - 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (b)$$

EB $5{,}54 \leq x \leq 6{,}00$ m: $M \leq 0$; $V \leq 0$

$$N_{sd} = -178{,}8 - 327{,}6 \cdot x + 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (c)$$

BC $6{,}00 \leq x \leq 7{,}65$ m: $M \leq 0$; $V \geq 0$

$$N_{sd} = 4632{,}9 - 1146{,}5 \cdot x + 70{,}72 \cdot x^2 \qquad (d)$$

For positive momenter fås $\max.N_{sd} = 543$ kN
- negative - - $\max.N_{sd} = 193$ kN

} se side 17

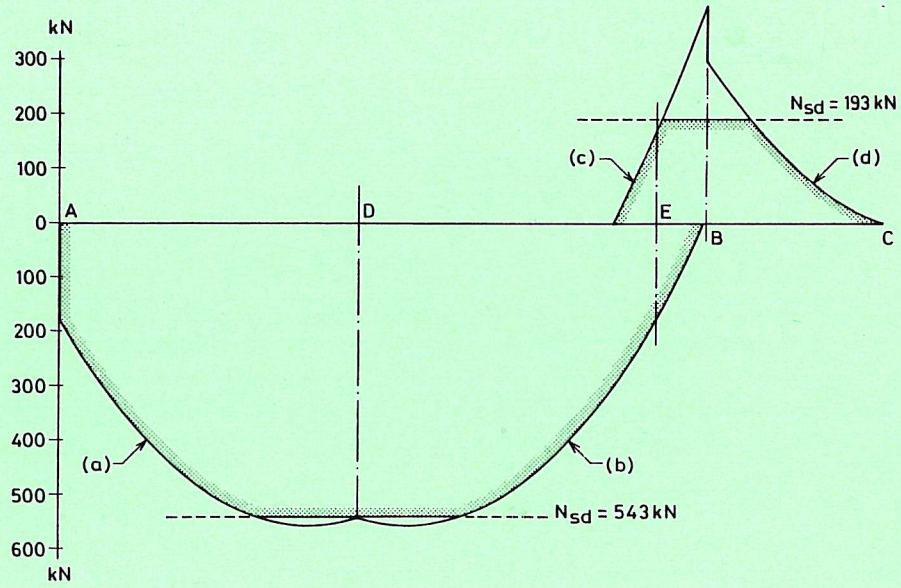


Fig. 16. Trækkraftkurve (metode 1).

$\theta = 45^{o}$

Metode 3.

Når trækkraftkurven er en 2. grads parabel, kan den let konstrueres ud fra nogle få bestemmende punkter. Disse er trækkraften i A, D, E, B og C; desuden behøves kendskab til pilhøjden af kurven på den betragtede strækning.

Momentkurvens pilhøjde på dellængden ℓ er $\Delta M = \frac{1}{8} \cdot p \cdot \ell^2$.

Forskydningskraftkurvens pilhøjde er nul (ret linie!).

Pilhøjden i trækkraftkurven er derfor

$$\Delta N_{sd} = \frac{\Delta M}{0,456} = \frac{64,5 \cdot \ell^2}{8 \cdot 0,456} = 17,68 \cdot \ell^2 \ (kN)$$ Se iøvrigt skema

Punkt/strækning		A	AD	D	DE	E	EB	B	BC	C
|M|	kNm	0	-	248	-	0	-	88	-	0
|V|	kN	179	-	0	-	179	-	208/106	-	0
N_{sd}	kN	89	-	543	-	89	-	297/246	-	0
ℓ	m	-	2,77	-	2,77	-	0,46	-	1,65	-
ΔN_{sd}	kN	-	136	-	136	-	4	-	48	-

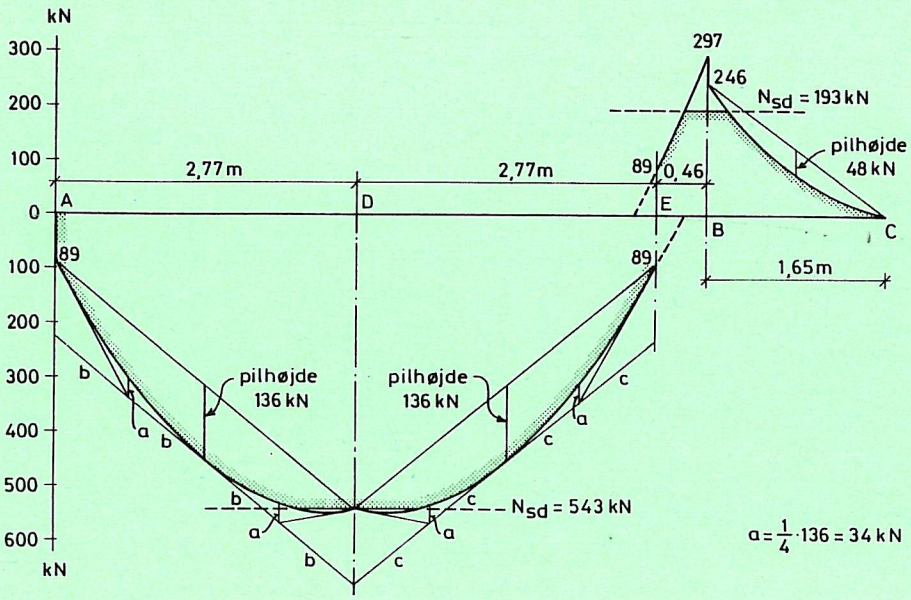


Fig. 17. Trækkraftkurve (metode 3).

$\theta = 26,6^{o}$

Se side 19

Pilhøjden i trækkraftkurven er (som side 18)

$\Delta N_{sd} = 17,68 \cdot \ell^2$ (kN)

Punkt/strækning		A	AD	D	DE	E	EB	B	BC	C
|M|	kNm	0	-	248	-	0	-	88	-	0
|V|	kN	179	-	0	-	179	-	208/106	-	0
N_{sd}	kN	179	-	543	-	179	-	401/299	-	0
ℓ	m	-	2,77	-	2,77	-	0,46	-	1,65	-
ΔN_{sd}	kN	-	136	-	136	-	4	-	48	-

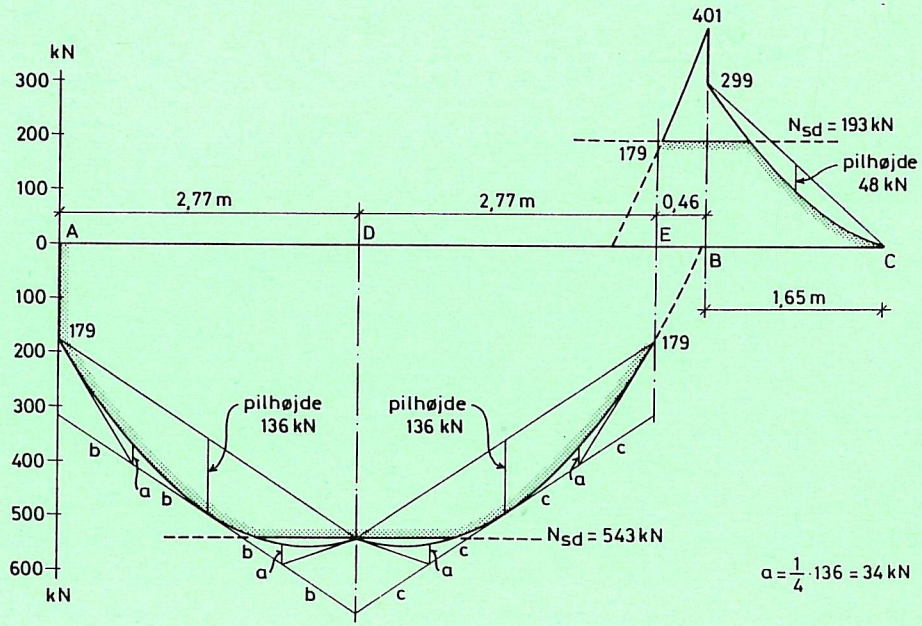


Fig. 18. Trækkraftkurve (metode 3).

$\theta = 45^{o}$

2e. Kontrol af armeringens afkortning

1 K20 kan optage $314 \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 94$ kN

1 K16 - - $201 \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 60$ kN

Forankringslængder (træk) $\ell \geq \begin{cases} \frac{0,09}{\zeta} \cdot \frac{f_{yk}}{f_{tk}} \cdot d_s \\ \frac{30}{\zeta} \cdot d_s \end{cases}$

K20: $\ell = 670$ mm K16: $\ell = 530$ mm

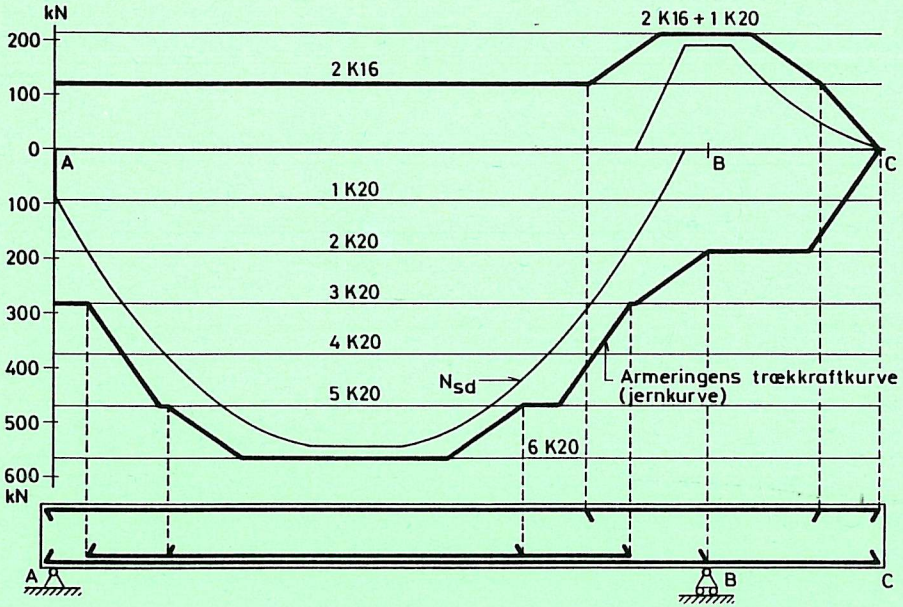


Fig. 19. Trækkraft- og jernkurve.

Optegningen af jernkurven kan evt. lettes ved at benytte en hjælpefigur, jfr. lærebogen. Her er den vist for K20.
Forankringen ved A undersøges særskilt, se side 23.

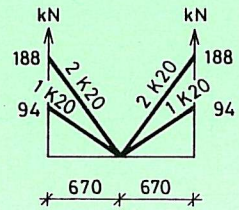


Fig. 20.

$\theta = 26,6^{o}$

2e. Kontrol af armeringens afkortning

Ang. kraft pr. armeringsjern samt forankringslængder: se side 21.

Bemærk, at medens trækkraftkurven (nødv. trækkraft N_{sd}) er afhængig af θ, er jernkurven uafhængig af θ. Den kan da straks optegnes på basis af figuren side 21.

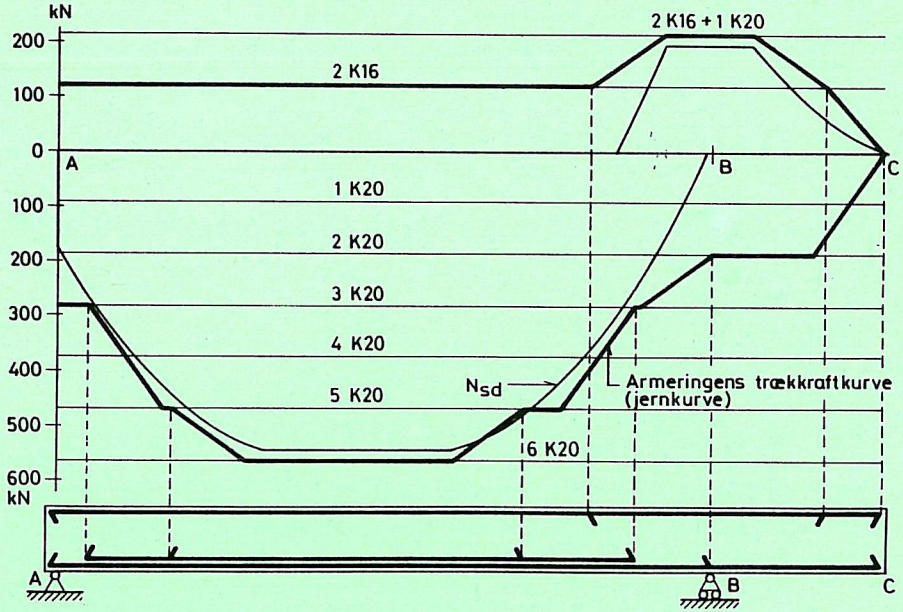


Fig. 21. Trækkraft- og jernkurve.

Betonnormen foreskriver, at der ikke må anvendes afkortet armering, når man vælger $\cot\theta > 1,5$.
Den forudsatte afkortning er derfor ikke tilladelig. Dette indebærer bl.a., at alle 6 K20 skal føres hen til endeunderstøtningen.
Forankringen ved denne undersøges særskilt, se side 24.

$\theta = 45^{o}$

2f. Armeringens forankring ved endevederlag

Bjælken er understøttet på en 200 mm tyk væg, der regnes påvirket med en jævnt fordelt lodret spænding

$$\sigma_o = \frac{R}{b \cdot t} = \frac{178800}{210 \cdot 200} = 4{,}26 \text{ MPa}$$

Ved kanten af væggen haves $M = 17{,}6$ kNm og $V = 172{,}4$ kN, hvortil svarer trækkraften

$$N_{sd} = \frac{17{,}6}{0{,}456} + \frac{172{,}4}{2} \cdot 1{,}0 =$$

$$\underline{124{,}8 \text{ kN}}$$

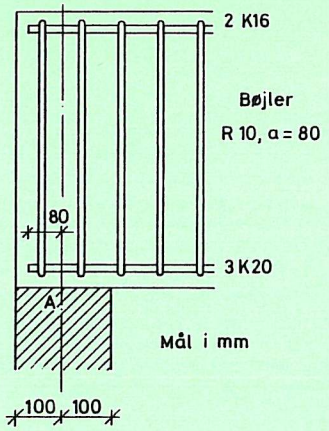


Fig. 22.

Forankringsevnen beregnes som summen af et kohæsionsbidrag og et friktionsbidrag

Kohæsion: $T_k = \frac{\ell}{\ell_a} \cdot A_s \cdot f_{yd} = \frac{180}{670} \cdot 3 \cdot 314 \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 76$ kN

Friktion: $T_f = \mu \cdot \P \cdot \sigma_o \cdot \ell \cdot d_s =$

$1{,}4 \cdot \P \cdot 4{,}26 \cdot 180 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 67$ kN

$T = T_k + T_f = 143 \text{ kN} > 124{,}8$

Forankringen er altså tilstrækkelig. { NB / Se også side 25

NB Da det forsøgsmateriale, denne beregning grunder sig på, er sparsomt, tilrådes der forsigtighed med at "gå til grænsen".*) Hertil kommer, at tildannelse og placering af armering sjældent er helt nøjagtig, hvorved den faktiske forankringslængde kan blive mindre end forudsat ved beregningerne.

---

*) Desuden kan det nævnes, at man ved beregning efter normens 1973-udgave forankrede for $N_{sd} = R$ (svarende til revnevinkel $\theta = 26{,}6^{o}$).

$\theta = 26{,}6^{o}$

2f. Armeringens forankring ved endevederlag

Kontakttryk (som side 23)

$\sigma_o = 4{,}26$ MPa

Trækkraft ved kant af væg:

$$N_{sd} = \frac{17{,}6}{0{,}456} + \frac{172{,}4}{2} \cdot 2{,}0 =$$

$$\underline{211{,}0 \text{ kN}}$$

Kohæsion: $T_k = \frac{180}{670} \cdot 6 \cdot 314 \cdot 300 \cdot 10^{-3}$

$= 152$ kN

Friktion: $T_f = 67$ kN, idet friktionsbidraget for en sikkerheds skyld ikke regnes større end for 1 lag armering, jfr. side 23.

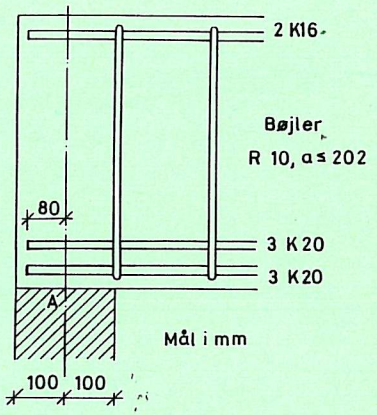


Fig. 23.

$T = T_k + T_f = 219 \text{ kN} > 211.$

Forankringen er altså tilstrækkelig.

Hvis dette ikke havde været tilfældet, kunne man som beskrevet på side 25 have forøget tværarmeringen.

Andre muligheder for at opnå bedre forankring er:

1) Forlængelse af bjælken ud over understøtningen.
2) Afslutning af armeringen med U-bøjler ("sløjfeforankr.").
3) Anvendelse af påsvejst forankringsplade.

Ad 1: Tilsvarende virkning opnås naturligvis ved at flytte understøtningen mod højre.
I begge tilfælde er det en forudsætning, at andre hensyn (f.eks. brugsmæssige eller arkitektoniske) ikke stiller sig i vejen.

$\theta = 45^{o}$

Som konstruktiv foranstaltning kan det anbefales at indlægge vandrette bøjler, jfr. lærebogen side 432.

Bøjlernes indflydelse

Den nødvendige bøjleafstand er

$$a = 55 \cdot \frac{d_{st}^2}{d_{st}} = 55 \cdot \frac{10^2}{20} = 275 \text{ mm}$$

Da den faktiske bøjleafstand er 80 mm $< \frac{1}{3} \cdot 275$, kan forankringslængden ℓ_a iflg. normen sættes 25% ned. Dette er ensbetydende med, at kohæsionsbidraget T_k kan sættes 33% højere, dvs.

$$T = T_k + T_f = 1{,}33 \cdot 76 + 67 = 168 \text{ kN}$$

Tværarmering i flig (plade)

Overføring af kræfter mellem krop og flige i bjælken nødvendiggør, at der indlægges en tværarmering. Beregningen heraf forbigås i dette eksempel; blot skal det nævnes, at bestemmelserne om minimumsarmering bliver afgørende.

$\theta = 26{,}6^{o}$

Ad 2: Ved anvendelse af liggende U-bøjler kan der opnås fuld forankring, såfremt trykket p ikke bliver for stort. Se fig. 24.

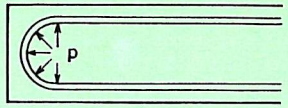


Fig. 24. Vandret snit. Bøjler ikke vist.

Ad 3: Der svejses en forankringsplade på armeringen. Den dimensioneres for den teoretiske trækkraft = R = 178,8 kN.

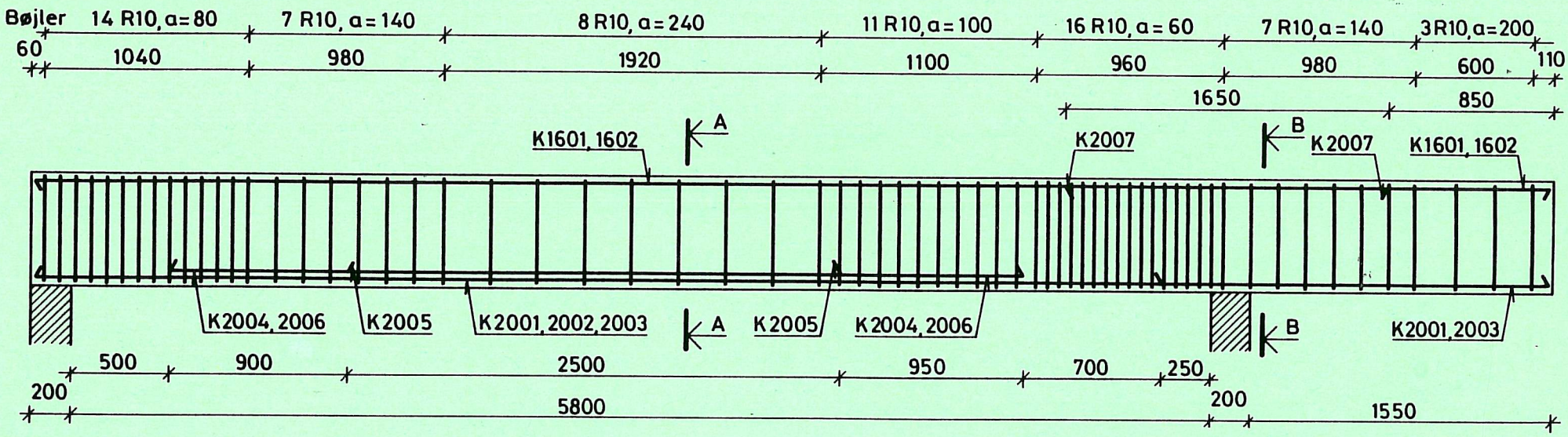
Tværarmering i flig (plade)

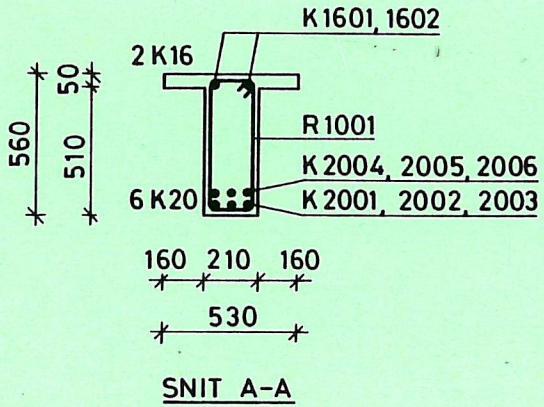
Se side 25.

2g. Endeligt armeringsarrangement

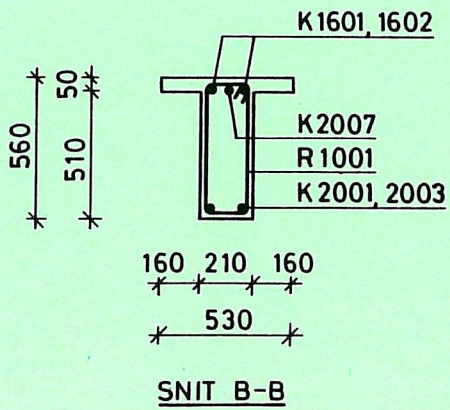
Længdearmering: Afkortningen er justeret, så den passer bedst muligt med trækkraftkurven side 21.

Tværarmering: Bøjleafstanden respekterer de krav, der fremgår af side 13 og 25. Desuden er der taget praktiske hensyn (runde tal, ensartethed).





SNIT A-A



SNIT B-B

Mål i mm.
Armering i plade ikke vist.

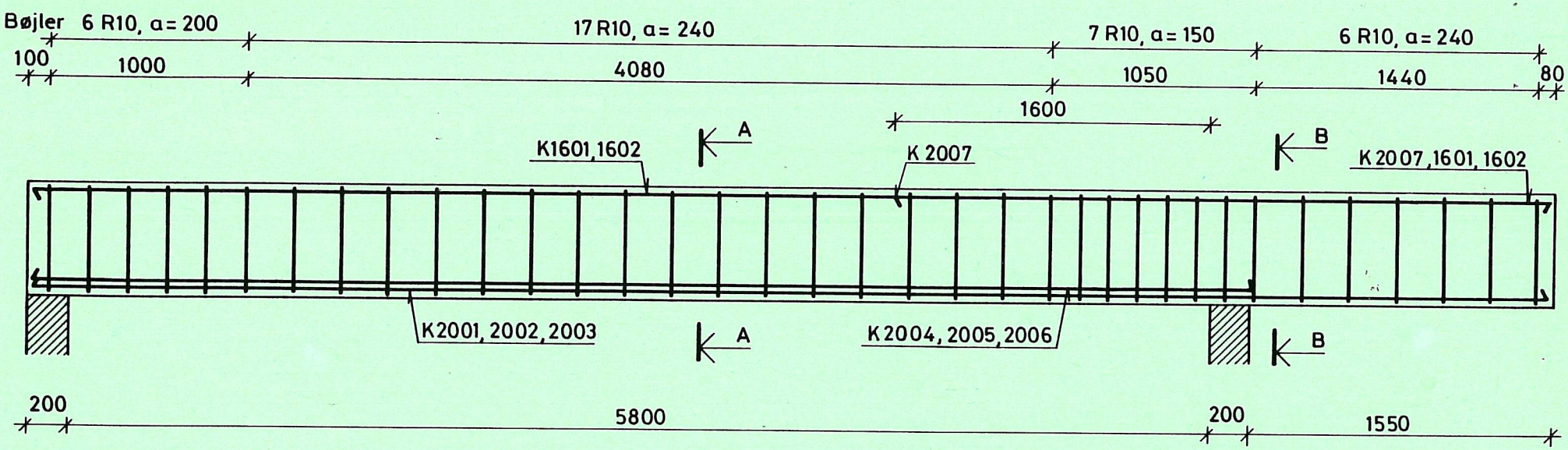
$\theta = 45^{\circ}$

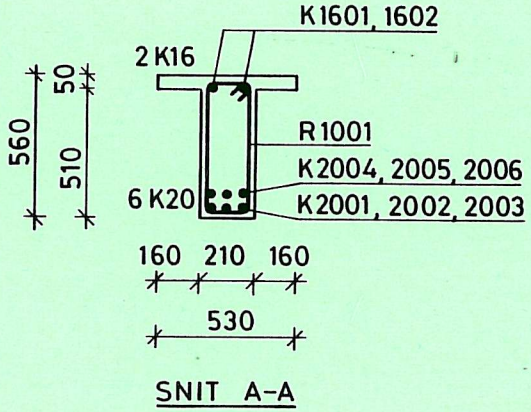
Fig. 25. Armeringstegning.

2g. Endeligt armeringsarrangement

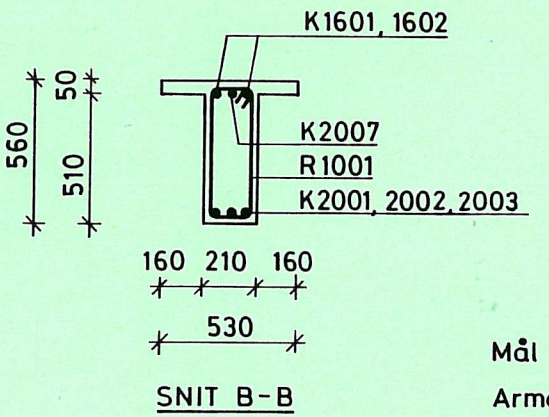
Længdearmering: Armeringen er kun afkortet, hvor det kan ske uden fare for forskydningsbrud.

Tværarmering: Bøjleafstanden respekterer de krav, der fremgår af side 14 og 25. Desuden er der taget praktiske hensyn (runde tal, ensartethed).





SNIT A-A



SNIT B-B

Mål i mm.

Armering i plade ikke vist.

$\theta = 26{,}6^{\circ}$

Fig. 26. Armeringstegning.