

Aalborg Universitet



**AALBORG  
UNIVERSITY**

## **Brud i beton : State-of-the-Art**

*1. del, brudforløb og brudmodeller*

Ulfkjær, Jens Peder

*Publication date:*  
1990

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Ulfkjær, J. P. (1990). *Brud i beton : State-of-the-Art: 1. del, brudforløb og brudmodeller*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. Fracture and Dynamics Bind R9001 Nr. 16

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

1990-1.


---

**INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK**  
INSTITUTE OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITETSCENTER · AUC · AALBORG · DANMARK

---

183654

DANMARKS TEKNISKE BIBLIOTEK  
178715  
300007281130 03



**FRACTURE AND DYNAMICS**  
**PAPER NO. 16**

---

**JENS PEDER ULFKJÆR**  
**BRUD I BETON - STATE-OF-THE-ART**  
1. del, brudforløb og brudmodeller  
JANUAR 1990

ISSN 0902-7513 R9001

---

R/INS

The FRACTURE AND DYNAMICS papers are issued for early dissemination of research results from the Structural Fracture and Dynamics Group at the Institute of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg. These papers are generally submitted to scientific meetings, conferences or journals and should therefore not be widely distributed. Whenever possible reference should be given to the final publications (proceedings, journals, etc.) and not to the Fracture and Dynamics papers.

# Brud i beton - State-of-the-Art

J.P. Ulfkjær & R. Brincker

## Indholdsfortegnelse

<b>1</b>	<b>INDLEDNING</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>HISTORISK OVERSIGT</b>	<b>2</b>
2.1	Lineær elastisk brudmekanik . . . . .	2
2.2	Revnedannelse i beton . . . . .	5
<b>3</b>	<b>BRUDFORLØBET I BETON</b>	<b>6</b>
3.1	Beton påvirket til tryk . . . . .	6
3.2	Beton påvirket til træk . . . . .	8
<b>4</b>	<b>BRUDMODELLER</b>	<b>9</b>
4.1	Den Fiktive Revne Model (FCM) . . . . .	12
4.1.1	Forbindelse med lineær elastisk brudmekanik . . . . .	14
4.2	Revnebånd modellen . . . . .	14
4.2.1	Begrænsninger ved brug af revnebåndmodellen . . . . .	17

## 1 INDLEDNING

De betonkonstruktioner, der i dag anvendes i bygningskonstruktioner, dimensioneres oftest uden hensyntagen til betons trækstyrke, der sættes lig nul. Dette giver i de fleste tilfælde ingen anledning til problemer, specielt hvis spændingsniveauet er lavt. For visse brudtilfælde, hvor trækstyrken har betydning, optræder der imidlertid en markant størrelseseffekt, som det ikke er muligt at forklare ud fra de sædvanlige dimensionerings redskaber (elasticitets- og plasticitetsteori) [9]:

1. Bøjningsbrud af uarmerede eller svagt armerede betonkonstruktioner.
2. Forskydnings- og forankringsbrud.
3. Brudforhold i meget store betonkonstruktioner fx. dæmninger.

For at kunne forklare disse brudtyper, er det nødvendigt at tage hensyn til, hvorledes brud i beton forløber. Dette gøres ved at tage hensyn til betons fuldstændige arbejdskurve. Betragtes arbejdskurven for beton, når den ydre belastning er kraftstyret, observeres et forløb som skitseret på figur 1. Er den ydre belastning istedet deforma-

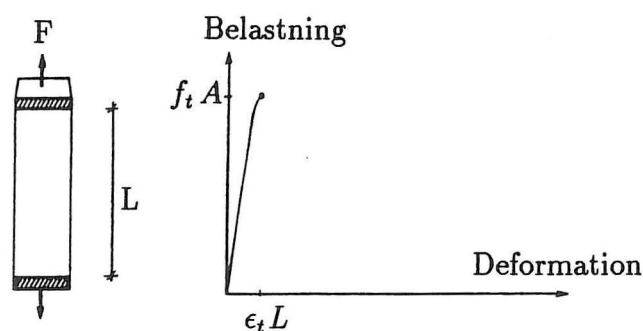


Figure 1: Betons arbejdskurve når den ydre belastning er kraftstyret, [9]

tionsstyret, vil det være muligt at bestemme hele arbejdskurven, se figur 2. Den gren inden for mekanikken, der beskæftiger sig med konstruktioner, der er revnede, betegnes brudmekanik.

## 2 HISTORISK OVERSIGT

### 2.1 Lineær elastisk brudmekanik

Den første, der anvendte brudmekanik, var Griffith [14], der i 1920 foreslog, at brud i skøre materialer så som glas opstår pga. inhomogeniteter i materialet fx. små revner

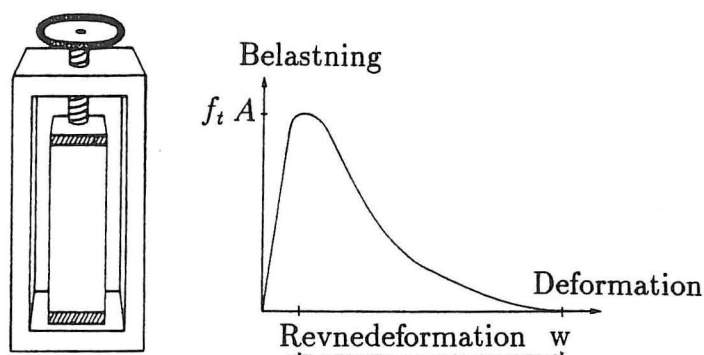


Figure 2: Betons arbejdskurve når den ydre belastning er deformationsstyret, [9] .

(Griffith cracks). Disse inhomogeniteter gav anledning til lokale spændingskoncentrationer, som det fremgik af Inglis's [20] løsning af spændingsfeltet omkring et elliptisk hul.

Griffith introducerede en nødvendig energibetingelse for, hvornår en revne løber. Betingelsen formuleres som en ulighed imellem, hvor stor en energimængde der frigøres, når en revne løber, kaldet **energifrigørelsesgraden**,  $\mathcal{G}$ , og den energi der er nødvendig for at danne en enhed fri revneoverflade, kaldet **den specifikke overfladeenergi**,  $\gamma$ . Griffith antog, at  $\gamma$  var en materialekonstant.

I 1957 foreslog Irwin [21], at revnevækst opstår på baggrund af spændings-singulariteten i nærheden af en allerede eksisterende revne<sup>1</sup>. Ved at anvende Westergaards [39] løsning af spændingsfeltet i nærheden af en revne i et lineært elastisk materiale<sup>2</sup>, se figur 3.

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1)$$

hvor

$f_{ij}(\theta)$  en trigonometrisk funktion.

$\sigma_{ij}$  spændingstensoren,  $[N/m^2]$ .

$r$  afstanden fra revnespidsen,  $[m]$ .

$K_I$  en faktor der afhænger af den ydre belastning, legemets geometri samt revnens geometri,  $[N/m^{3/2}]$ .

indså Irwin, at spændingsfeltets form i revnens nærhed altid er givet ved denne inverse kvadratrods singularitet, samt at størrelsen af spændingsfeltet er givet ved faktoren

<sup>1</sup>i modsætning til Griffiths energi betragtning

<sup>2</sup>heraf navnet lineær elastisk brudmekanik

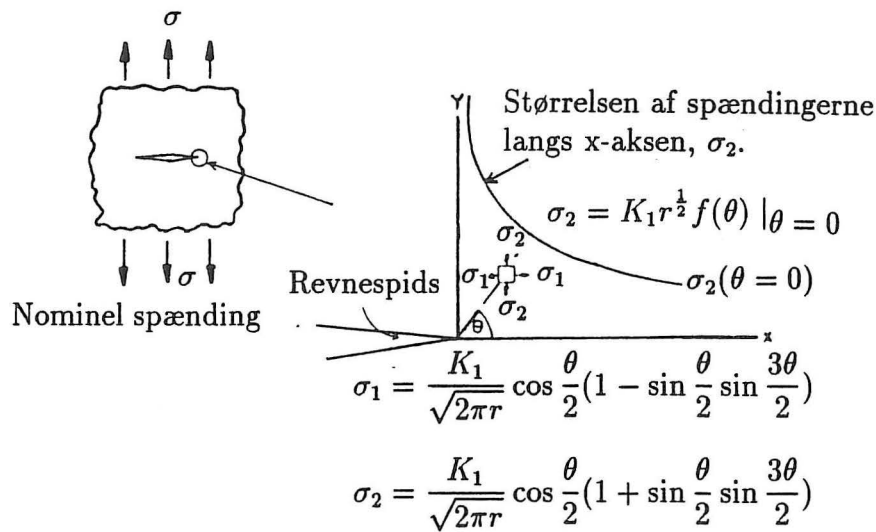


Figure 3: Spændingsfeltet i nærheden af en revne, [33].

$K_I$ , der benævnes **spændingsintensitets faktoren**. Ønskes spændingerne i et givet punkt bestemt i revnespidsens nærhed, er det dermed kun nødvendigt at fastlægge  $K_I$ . Spændingsintensitetsfaktoren er givet ved følgende udtryk:

$$K_{IC} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} g(\text{geometrien}) \quad (2)$$

hvor

$g(\text{geometrien})$  en funktion der er fastlagt ud fra legemets geometri.

$\sigma_0$  den ydre belastning,  $[N/m^2]$ .

$a$  revnelængden,  $[m]$ .

Irwin foreslog endvidere, at når  $K_I$  opnår en kritisk værdi, den kritiske spændingsintensitetsfaktor eller brudsejheden  $K_{IC}$ , vil revnen begynde at løbe. Irwin antog, at brudsejheden var en materialekonstant. Endvidere bevidste han relationen:

$$K_{IC} = \sqrt{\mathcal{G}_C} E = \sigma_c \sqrt{\pi a} g(\text{geometrien}) \quad (3)$$

hvor

$\mathcal{G}_C$  Den kritiske tøjningsenergi rate ( $\mathcal{G}_C = 2\gamma$ ).

$E$  Elasticitetsmodulet.

$\sigma_c$  den ydre belastning der fører til kollaps.

## 2.2 Revnedannelse i beton

Revnedannelse af cement og beton, har været genstand for seriøs forskning siden 1928, hvor Richardt o.a. [29] undersøgte revneudviklingen i beton påvirket til tryk.

Den første, der anvendte lineærelastisk brudmekanik, LEFM<sup>3</sup>, på beton, var så vidt vides Kaplan [23], der i 1963 udførte en række forsøg. Kaplan udførte bjælkeforsøg med bjælker der havde en initial kærv, påvirket i tre og fire punkts bøjning. Ud fra disse forsøg forsøgte Kaplan at bestemme brudsejheden ud fra ligning (2), og han konkluderede, at brudsejheden ikke varierede med kærv længden. Istedet observeredes en markant størrelses effekt, som han tillagde langsom revnevækst<sup>4</sup>.

I en diskussion af Kaplans artikel afviser Blakey og Bersford [3] Kaplans fortolkninger, istedet foreslår de, at Kaplans resultater kan forklares med ideer så som: størrelseseffekter, variationen i belastningstyper samt energidissipation.

I en diskussion af Glücklich [11], støtter Glücklich Kaplans arbejde. Han nævner dog tre begrænsninger for hans tilnærmelser:

- Langsom revnevækst.
- Usikkerhed med hensyn til hvilken revne, der vil være den kritiske i en stor beton konstruktion.
- Graden af ubestemthed af konstruktionen.

I en tredje diskussion af dette pionerarbejde, støttes Kaplan i sine konklusioner af Irwin [22]. Irwin mener, at der er nødvendigt at måle den effektive revnelængde, for at kunne bestemme  $K_{IC}$  korrekt.

I 1966 målte Hughes og Chapman som de første, den fuldstændige arbejdskurve for beton i træk.

Siden da har et betydeligt antal forfattere forsøgt at bestemme brudsejheden, samt at fastlægge om beton er kærvfølsom (dvs. om  $K_{IC}$  er konstant overfor ændringer i den relative kærvlængde). De fleste forskere anvendte kærvede betonbjælker påvirket til tre-eller fire-punkts bøjning. En detaljeret gennemgang af denne litteratur findes i [24,25,5]. I det følgende gennemgås resultaterne fra tre af de vigtigste af disse arbejder.

I 1976 påstod Walsh [37], at kun når et legeme er så tilstrækkelig stort, at zonen med spændingsforstyrrelser bliver forholdsvis lille, kan denne antages at være omgivet af et spændingsfelt, hvis størrelse er i overensstemmelse med den ideelle spændingsfordeling opnået ved LEFM. Walsh var den første, der satte spørgsmålstegn ved om effekten fra langsom revnevækst var skyld i variationen af  $K_{IC}$ . Han mente, at det i stedet skyldes, at prøvelegmerne var for små.

---

<sup>3</sup>linear elastic fracture mechanics

<sup>4</sup>revnevækst som ikke fører til endeligt kollaps



Higgins og Bailey [16], udførte brudforsøg med cementpasta og fandt, at  $K_{IC}$  øgedes med prøveemnets størrelse. De konkluderede, at LEFM ikke er anvendelig for hærdnet cement med prøveemner af den størrelse de anvendte, idet størrelsen af zonen med spændingsforstyrrelser er sammenlignelig med prøveemnets størrelse.

Samme år udførte Schmidt [32] forsøg med Indiane Limestone, og målte brudsejheden ved tre punkts bøjning. Han fandt, at  $K_{IC}$  øgedes med størrelsen af den relative revnelængde og legemets størrelse indtil en maksimal værdi, som Schmidt betragtede som værende en grænseværdi.

Specielt i firserne har der været afholdt en del internationale konferencer, der har beskæftiget sig med brudforhold og brudmekanik for beton:

- Fracture Mechanics of Concrete, Editor: F.H. Wittman, Elsevier, 1-680 (1983)
- Fracture Mechanics of Concrete: Material Characterization and Testing, Editors: Carpinteri, A.R. Ingraffea, The Hague, Nijhoff (1984).
- Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, Editor: S.P. Shah, Nijhoff, 1-714 (1985)
- Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, Editor F.H. Wittman, Elsevier, 1-699 (1986)
- Brittle Matrix Composites, Editor A.M. Brandt, Elsevier, 1986.
- Fracture and Damage of Concrete and Rock, Editor H.P. Rossmanith, Pergamon Press, 1988.
- Brittle Matrix Composites 2, Editor A.M. Brandt, Elsevier, 1989.
- Fracture of Concrete and Rock- Recent developments, Editors: S.P. Shah, S.E. Swartz and B. Barr, Elsevier, 1-756 (1989)

Det skal nævnes, at der ligeledes har været afholdt bilaterale konferencer.

I det følgende gives en gennemgang af de senere års forskningresultater, idet hovedvægten er lagt på brudforløb og brudmodeller.

### 3 BRUDFORLØBET I BETON

#### 3.1 Beton påvirket til tryk

Både cementpasta og beton er kompositmaterialer, der består af stærke partikler, der er fordelt i en svagere matrice<sup>5</sup>. I cementpasta er uhydratiserede cementkorn fordelt i ce-

<sup>5</sup>i normal styrke beton

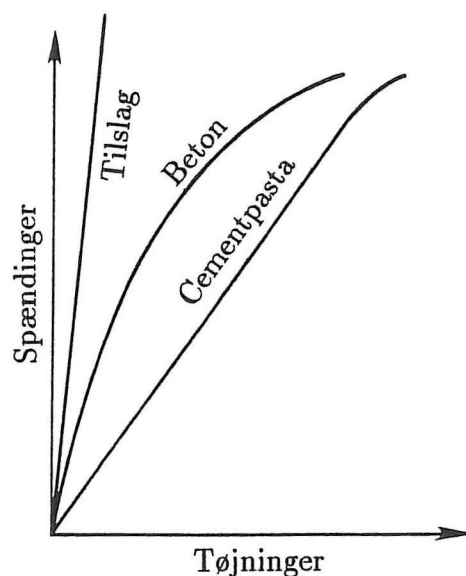


Figure 4: Arbejdskurver for tilslagsmaterialet, cement og beton [24].

menthydrater (C-S-H). I beton er tilslagsmaterialet (sand og sten) fordelt i cementpastaen [24,41]. Betragtes arbejdskurven for tilslagsmaterialet, se fig 4, i kraftstyret tryk, observeres et stort set lineært forløb indtil peaklasten samt, at materialet er sprødt. Det samme forløb haves for cementpasta indtil ca 95% af peaklasten. Trykarbejdskurven for beton er derimod ikkelineær, og der observeres desuden en lang nedadgående gren efter peaklasten. Denne ikkelinearitet skyldes delvist vekselvirkningen imellem de to materialer, idet sammenhængen (adhæsionen) i materialet er særdeles imperfekt. Derudover er der en betydelig revnevækst i cementpastaen, når belastningen øges (70-90% af brudlasten) [19]. Det mere lineære forløb af arbejdskurven for cementpastaen skyldes en væsentlig bedre sammenhæng imellem de uhydrerede cementkorn og C-S-H.

Arbejdskurven for beton påvirket til tryk kan inddeles i fire områder, [12] se fig. 5, samt den nedadgående del af kurven. T.T.C Hsu o.a [19] observerede ved hjælp af mikroskop og røntgenteknikker, at allerede inden lasten bliver påført, er der en betydelig mængde adhæsionsrevner<sup>6</sup>. Ifølge [34] forøges det specifikke revneareal med 26% over hele revneforløbet, hvilket svarer til, at 80% af alle revner er initialrevner.

Disse stammer formentlig fra svelning af betonen, idet svelning netop giver anledning til tangentielle adhæsionsrevner, hvorimod svind giver anledning til radiære revner i cementpastaen,[41]. Tangentielle adhæsionsrevner kan ligeledes dannes i forbindelse med bleeding af betonen, især hvis betonen ikke er velgraderet og hvis der anvendes et ru tilslagsmateriale [15]. Dette bekræftes af Dhir og Sangha [7] som observerede, at revnetætheden er størst i den horisontale retning, ved alle spændingsniveauer.

<sup>6</sup>revner imellem tilslaget og cementpastaen

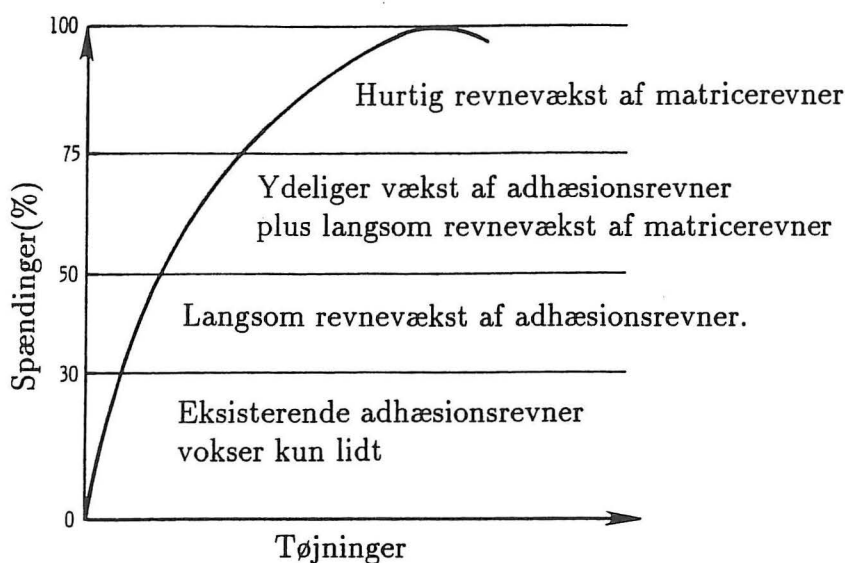


Figure 5: Arbejdskurven for beton i tryk inddelt i fire regioner, [24].

For belastninger under ca. 30% af peaklasten,  $\sigma_{ult}$ , er der stort set ingen vækst af disse revner, og trykarbejdskurven er næsten lineær, se fig 5. Efterhånden som adhæsionsrevnerne begynder at løbe og deres antal øges - henholdsvis pga. spændingsintensiteterne og pga. tilslaget og cementpastaen har forskellig stivheder [35] - bliver arbejdskurven stadig mere ikkelineær. Når belastningen er ca 50% af  $\sigma_{ult}$ , vil der udover adhæsions revnevækst opstå revner i cementpastaen løbende imellem tilslaget og nogenlunde parallelt med belastningsretningen. Ved ca. 75% af  $\sigma_{ult}$  begynde et mere komplekst revnesystem at udvikle sig og revnerne i cement-pastaen møder efterhånden adhæsions-revnerne, og revnesystemet er til sidst så udbredt, at endeligt brud udvikles.

### 3.2 Beton påvirket til træk

Betragtes arbejdskurven i træk observeres et lidt anderledes forløb, idet det bemærkes, at betons brudforhold i træk stadig ikke er fuldt ud klarlagt. Arbejdskurven er stort set lineær op til ca 80% af peaklasten,  $\sigma_t$  [41]. Derefter vil allerede eksisterende mikrorevner begynde at løbe, og nye revner vil dannes. Dette vil foregå inden for en bestemt lokal zone, og man taler om, at tøjningerne lokaliseres<sup>7</sup>. Størrelsen af denne zone er endnu ikke fastlagt. Disse mikrorevner vil efterhånden vokse sammen og danne en makrorevne. Ved yderligere deformation vil den spændingsoverførende mekanisme gradvist ændre sig. Ved peaklasten er spændingskapaciteten nået (trækstyrken), hvis størrelse afhænger af matricens styrke samt adhæsionen imellem matricen og tilslaget<sup>8</sup>. Så snart en kontinuert makrorevne er dannet, består den spændingsoverførende mekanisme udelukkende af glidningsfriktion imellem de to revneoverflader. Disse kræfter

<sup>7</sup>strain localization

<sup>8</sup>for normal styrke beton

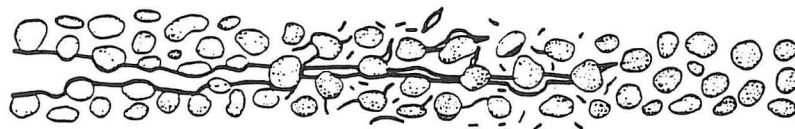


Figure 6: Revnebilledet i nærheden af kærven på en Betonbjælke påvirket til trepunktsbøjning, [6].

skyldes at stenene skal rives ud af matricen (aggregate interlock). For mellemliggende stadier består den spændingsoverførende mekanisme af en kombination af de to nævnte mekanismer. Betragtes fx. en uarmeret betonbjælke med en initial kærve, påvirket til trepunkts bøjning, vil revnebilledet i fig. 6 kunne observeres.

## 4 BRUDMODELLER

I 1983 foreslog Wittman [40], at beton betragtes på tre niveauer, mikroniveauet, hvor hærdet cementpasta behandles, mesoniveauet, hvor hovedaspektet er store luftporer, eksisterende revner og inklusioner og makroniveauet, hvor beton behandles som et kontinuum. I det følgende betragtes beton på makroniveauet.

Betragt en betonstang med længden  $l_t$ , som vist i fig 7. Stangen er påvirket af en

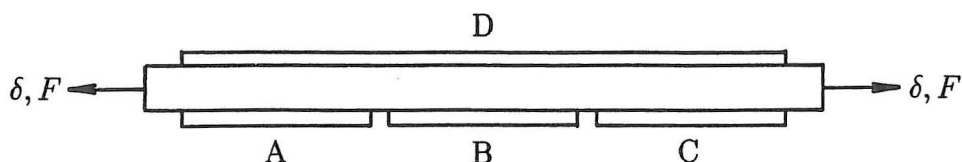


Figure 7: Betonstang påvirket af en deformationsstyret trækraft, [17].

deformationsstyret trækraft, og tøjningerne måles af straingagene A-B-C-D. Strain-gage A-B-C har længden  $l = \frac{l_t}{3}$  medens straingage D har længden  $l_t$ . Antages det, at der dannes en revne under straingage B, vil arbejdskurverne i fig. 8 opnås. Arbejdskurverne

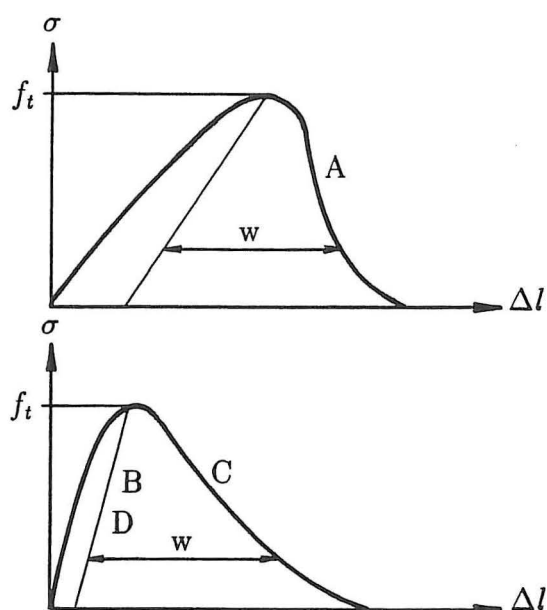


Figure 8: Arbejdskurver målt af de fire straingage, [17].

for straingage A og C er ens, hvorimod der er stor forskel på straingage B og D. Dette søges forklaret i det følgende. I den første fase af forsøget forøges spændingerne samtidig med, at deformationen,  $\delta$ , forøges. Denne del af arbejdskurven betegnes den opadgående del. Hvis det antages, at legemet er homogent, vil den relative forlængelse være den samme langs hele legemet, dvs. deformationen af stangen kan beskrives ved tøjningen  $\varepsilon = \frac{\delta}{l_0}$ , dette ses tydeligt af de tre arbejdskurver.

Efter peaklasten er nået, kommer den nedadgående del af arbejdskurven (post peak), hvor en forøgelse af deformation,  $\delta$ , formindsker spændingerne. Dette skyldes som tidligere nævnt, at den forøgede deformation forøger ødelæggelsen af materialet i en smal zone (proceszonen), der i dette tilfælde ligger ved gage B. Den formindskede evne til at overføre spændinger foregår i proceszonen. Områderne der ligger uden for denne, kaldet bulkzonen, vil dermed aflaste og deformationerne vil falde. Da de fleste dele af stangen aflaster, medens hele stangen bliver længere, må den forøgede deformation dermed foregå i proceszonen. Dette fænomen betegnes tøjningslokalisering. Da spændings tøjningsrelationerne er forskellige for forskellige dele af stangen, er det ikke muligt at beskrive materialet ved hjælp af én relation.

En model der beskriver betons brudforhold bør derfor indeholde følgende, [10]

- A En beskrivelse af hvad der sker i bulkzonen.
- B En beskrivelse af hvad der sker i proceszonen.
- C En beskrivelse af lokaliseringen.

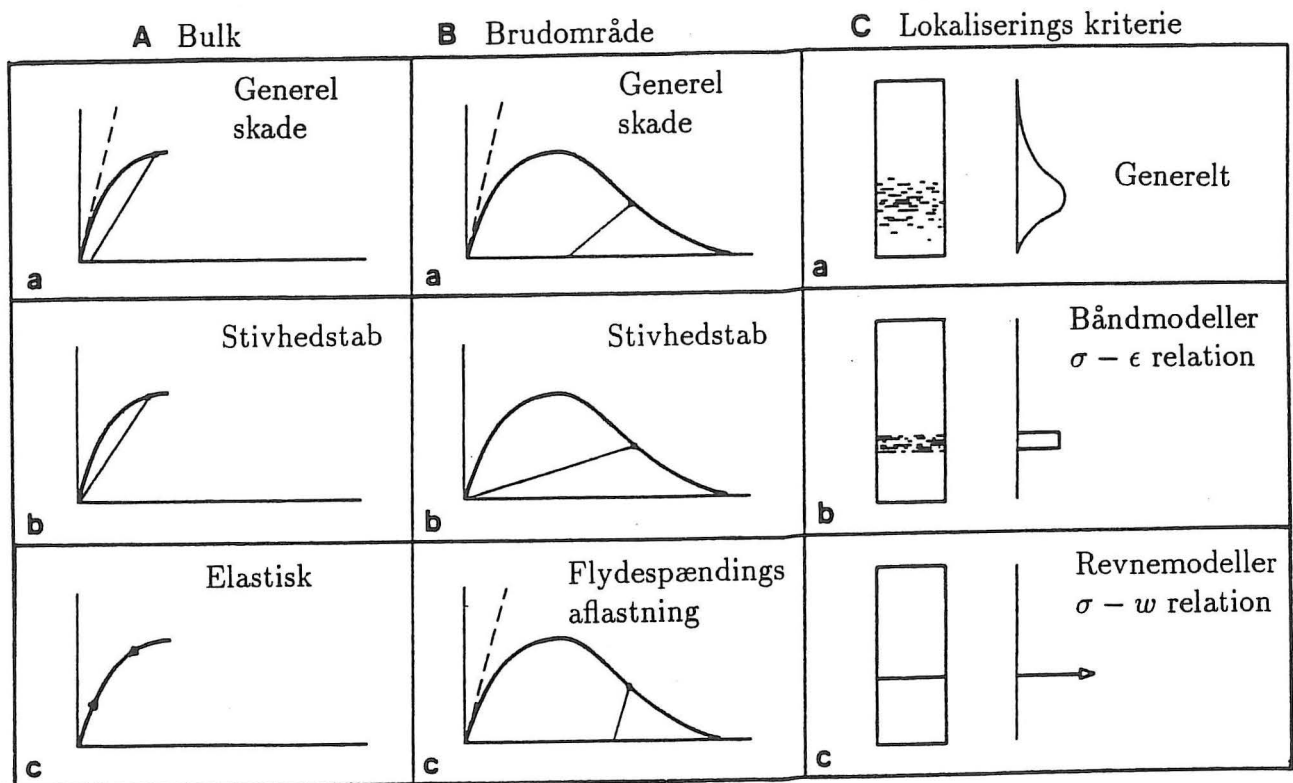


Figure 9: Klassifikations skema, [10].

I det følgende gennemgås tre alternativer til hver beskrivelse, og en given model kan herefter klassificeres ud fra disse se fig. 9.

### 1. Bulkzonen.

Generelt vil der være tale om energidissipation i bulkzonen, kaldet generel skade. En mulighed ville være at antage lineær aflastning til nulpunktet, stivhedstab, medens en anden mulighed er at antage, at bulkzonen er elastisk. Da der altid vil være tale om aflastning i en del af legemet, er det essentielt for modellen, hvorledes bulk materialet modelleres.

### 2. Proceszonen.

For materialet i proceszonen opstilles igen tre tilfælde: generel skade, stivhedstab og flydespændings fald. De forskellige betegnelser henfører til, hvorledes materialet opfører sig ved aflastning. Hvis belastningen (deformationen) er monotont stigende er de tre modeller identiske, idet der så vil være tale om et monotont spændingsfald.

### 3. Tøjningslokalisering.

Som tidligere nævnt er det stadig ikke klarlagt i hvor stor en zone tøjningslokaliseringen foregår. I en generel model må man forestille sig, at tøjningslokaliseringen vil være givet ved en kontinuert funktion med maksimum der, hvor den endelig revne dannes.

Sædvanligvis antages lokaliseringen at foregå i en smal zone (et smalt bånd), eller i en linie (en revne).

I det følgende beskrives de to mest anvendte modeller, der i deres simpleste form er klassificeret ved en  $(c,x,c)$ <sup>9</sup> model og en  $(c,x,b)$  model. Den første betegnes Den Fiktive Revnes model udviklet af Hillerborg o.a. [17]. Den anden betegnes Revne Bånd modellen og er udviklet af Bazant [2].

#### 4.1 Den Fiktive Revne Model (FCM)

Grundlaget for FCM er en kohæsiv revne, der blev opfundet så tidligt som i 1959 af Barenblatt [1]. Dugdale [8] foreslog i 1960 en matematisk lignende, men dog grundlæggende anderledes model, der sikrede endelige spændinger i nærheden af en kærvi i et stållegeme. Rice [28] opfattede de tidligere modeller på en ny måde, og antog for elastiske materialer en modholdsspænding, hvis størrelse var afhængig af separationsafstanden, og relaterede disse størrelser til den kritiske tøjningsenergi rate,  $\mathcal{G}_c$ .

I FCM antages materialet i bulkzonen at være isotropt og lineært elastisk, og er dermed entydigt bestemt ud fra elasticitetsmodulet,  $E$ , og Poissons forhold,  $\nu$ . Revneinitieringen foregår ved, at den største hovedspænding bliver lig  $\sigma_t$ <sup>10</sup>. På dette tidspunkt udvikles en kohæsiv revne vinkelret på retningen for den største hovedspænding. Revneinitieringen foregår altså uafhængigt af triaksialitet.

Når den kohæsive revne er dannet antages det, at der overføres spændinger igennem denne, hvis størrelse er afhængig, af hvor stor afstanden er imellem de to revneflader. En revne, der kan overføre spændinger, er naturligvis ikke en virkelig revne, og denne revne betegnes derfor en fiktiv revne, heraf stammer navnet FCM. For monoton revneåbning antages størrelsen af de overførte spændinger at være givet ved:

$$\sigma = f(w) \quad (4)$$

hvor  $f(w)$  er en monotont aftagende funktion der implicit beskriver ødelæggelsen af materialet.  $f(w)$  er en *materiale funktion* se fig. 10. For  $w = 0$  haves  $\sigma = \sigma_t$  og for  $\sigma = 0$  haves  $w = w_c$  hvor  $w_c$  betegnes den kritiske revneåbning, der angiver hvornår den fiktive revne ikke længere overfører spændinger. Størrelsen:

$$\int_0^{w_c} f(w)dw \quad (5)$$

angiver den mængde energi, der er nødvendig for at danne en arealenhed ny revne, og betegnes brudenergien,  $G_F$ . Betragtes et emne, der er påvirket til åbningsmode (Mode I), kan følgende spændingsfordeling dermed observeres, se fig. 11. Følgende karakteristiske størrelser, med dimensionen længde, kan herefter defineres [17]:

<sup>9</sup>x angiver at der ikke er taget stilling til hvorledes denne del modelleres

<sup>10</sup>Rankines brudbetingelse

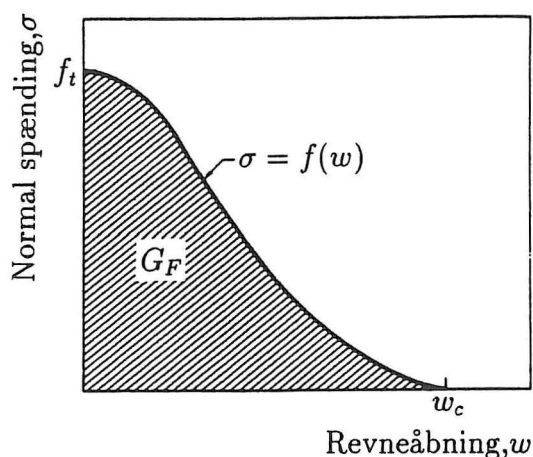


Figure 10: Materialefunktionen  $f(w)$ , der beskriver spændings overførslen i den fiktive revne, [10].

$$w_{ch} = \frac{G_F}{f_t} \text{ karakteristisk revneåbning}$$

$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2} \text{ karakteristisk længde}$$

I begge størrelser indgår elastiske og brudmekaniske karakteristika. Gøres disse to karakteristiske størrelser dimensionsløse, fortæller disse noget om konstruktionens sejhed[15]

#### 4.1.1 Forbindelse med lineær elastisk brudmekanik

Brudenergien bruges typisk som approksimation for den kritiske tøjningsenergi rate,  $\mathcal{G}_C$ . Dette er dog kun en tilnærmelse, idet de to størrelser er defineret forskelligt.  $\mathcal{G}_C$  er kun defineret for elastiske materialer, medens  $G_F$  er defineret for FCM. Dette har givet anledning til en smule forvirring, idet visse forfattere ikke skelner imellem de to størrelser [17,18,38,13,36]. Det eneste tilfælde hvor de to størrelser er ens, er for elastiske materialer, hvor energidissipationen foregår i en forsvindende lille zone omkring revnespidsen. Forholdet imellem de størrelser  $G_F$   $\mathcal{G}_C$ , må dermed være et godt mål for hvornår LEFM beskriver brud af betonlegemet. Jo tættere kvotienten er på 1.0, jo bedre er den lineære approksimation. For LEFM er følgende eksakte resultat opnået for en bjælke påvirket til trepunkts bøjning,[31,27]:

$$\mathcal{G}_C = rG_F \quad (6)$$

hvor  $r$  er en dimensionsløs størrelse, der varierer imellem 0.6 og 2.0 med kærvlængden.



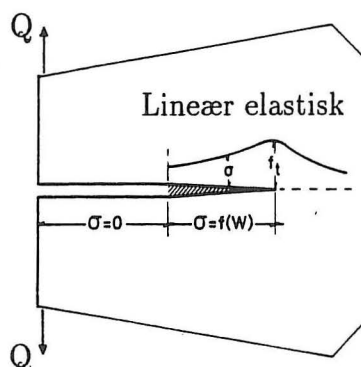


Figure 11: Spændingsfordeling i betonemne med initial kærnv påvirket til åbning, [10].

Ved at anvende en perturbationsteknik på asymptotisk uendeligt store legemer har [10] vist, at FCM løsningen konvergerer imod den lineært elastiske løsning<sup>11</sup>. Disse asymptotiske analyser viste endvidere, at størrelsen af legemet, karakteriseret ved  $D$ , skulle være stor i forhold til  $l_{ch}$ . Kvotienten  $D/l_{ch}$  bliver nemlig uendelig stor for vilkårlig  $l_{ch}$  når  $D \rightarrow \infty$

## 4.2 Revnebånd modellen

Revnebåndmodellen beskrevet af Rots o.a., [30] og de Borst, [4] er stort set sammenfaldende med modellen beskrevet af Bazant og Oh [2], bortset fra at den sidst nævnte tillader energidissipation i bulkzonen samt triaksiale effekter. Beskrivelsen givet i det følgende, følger den af de Borst. Som i FCM kræves en beskrivelse af bulkzonen, revneinitieringen samt revneudbredelsen. I tilgift skal tykkelsen af båndet,  $h_c$ , som antages at være en materiale parameter, fastlægges, se fig. 12.

### Bulkzonen

Materialer uden energidissipation udviser elastisk opførsel. For beton antages det, at materialet er lineært elastisk, og dermed entydigt fastlagt ved elasticitetsmodul,  $E$ , samt Poissons forhold,  $\nu$ .

### Revnebånds dannelse

For isotrope materialer antages materialet i et givet punkt som regel at være elastisk indtil det tidspunkt, hvor den største hovedspænding overstiger trækstyrken. På dette tidspunkt starter bruddet som en zone tætte og ensfordelte revner i retningen, der

<sup>11</sup>Dette ville man også intuitivt fornemme, idet proceszonens størrelse dermed bliver lille i forhold til øvrige størrelser. Dette var også hvad Walsh regnede med [37]

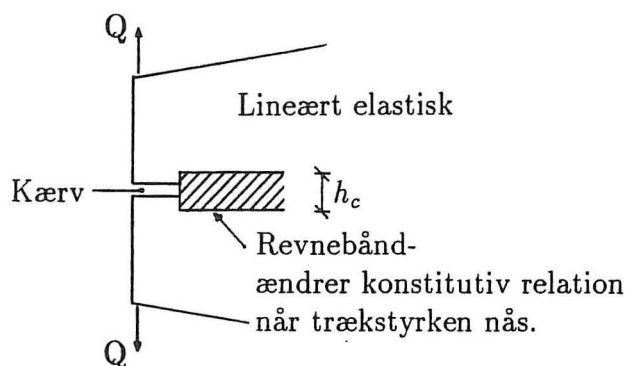


Figure 12: Betonemne påvirket til åbning, revnebåndmodellen

er normal til den største hovedspænding, og fordelt over bredden  $h_c$ . Som i FCM er revneinitieringen uafhængig af treksede spændings tilstande. Der er dog opstillet mere generelle modeller der tager hensyn til treksede spændingstilstande.

### Revneudvikling

Når revnebåndet er dannet, forbliver revneretningen konstant, og det antages at tøjnings og spændingstensorerne forbliver konstante over hele båndet. Som i FCM antages det, at spændingsvektoren der virker på revneplanerne, på en eller anden måde specificeres ud fra middelværdien af revneåbningen per enhed bånd. I revnebåndmodellen er det nødvendigt med en tensoriel beskrivelse, hvis modellen skal anvendes til numeriske beregninger, hvilket gør modellen sværere at tilegne sig end FCM.

### Matematisk formulering af revne bånd modellen

Som lige nævnt antages det at proceszonen kan beskrives ved adskillige parallelle revner. Betragt et element af et revnebånd, hvis retning er defineret ved dens normal  $\mathbf{n}$ , se fig. 13. Deformationen fra revneåbningerne alene ses i fig.13c, hvor den totale revneåbning over elementet er givet ved vektoren  $\mathbf{w}$ . Revneåbningen pr. enhed bånd tykkelse er dermed givet ved:

$$\mathbf{e}^c = \frac{\mathbf{w}}{h_c} \quad (7)$$

Tøjningstensoren induceret ved revneåbning,  $\epsilon^c$  er givet ved:

$$\epsilon^c = (\mathbf{e}^c \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^c)/2 \quad (8)$$

hvor  $\otimes$  er det dyadiske produkt.

Den totale tøjning er dermed givet summen af tøjninger induceret ved revneåbning, samt de elastiske tøjninger af materialet imellem revnerne,  $\epsilon^e$ :

$$\epsilon = \epsilon^c + \epsilon^e \quad (9)$$

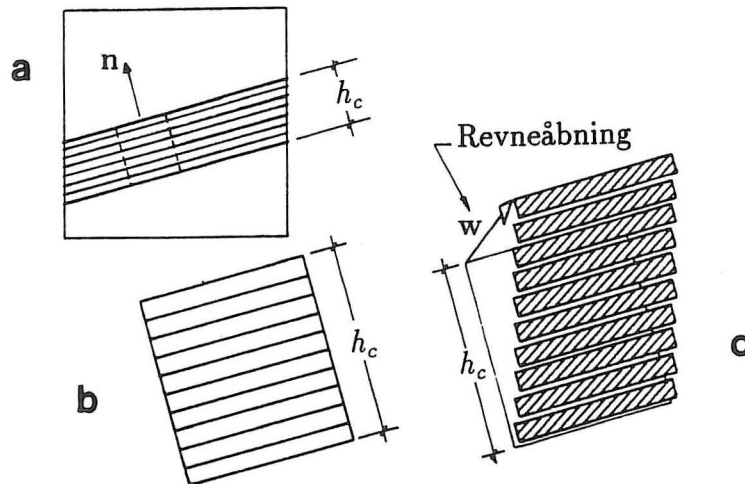


Figure 13: a. Revne bånd i et element. b. Udeformeret bånd element. c. Deformeret bånd element pga. revnedannelse, [10].

Ligning 7-9 angiver de kinematiske relationer for revnebåndmodellen.

De kinematiske ligninger skal suppleres med konstitutive relationer. Spændingerne der overføres igennem revnerne, givet ved  $t$ , antages at afhænge af det tidslige forløb af  $e$ , og spændingerne er relaterede til de tilhørende tøjninger ved en isotrop elastisk relation. Da der samtidig gælder:  $t \cdot \sigma = n$  fås:

$$\sigma = \lambda \text{tr} \epsilon \mathbf{E} + 2\mu \epsilon - \lambda (\mathbf{e}^c \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E} - \mu (\mathbf{e}^c \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^c) \quad (10)$$

og

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{t} = \Phi[\mathbf{e}^c; \mathbf{n}] \quad (11)$$

hvor  $\lambda$  og  $\mu$  er de sædvanlige Lamé konstanter,  $\mathbf{E}$  er enhedsmatricen og  $\Phi[\mathbf{e}^c; \mathbf{n}]$  er en vejafhængig funktional af ændringen af  $\mathbf{e}^c$ .

Ligning 11, er blot den relation der beskriver spændingsoverførslen i revnerne, og er altså identisk med  $\sigma - w$  relationen fra FCM på nær en skaleringsfaktor.

Energiudviklingen per enhedsvolumen revnebånd er givet ved:  $\sigma d\epsilon$ . Anvendes ligning 9,10 og 11 fås:

$$\sigma \cdot d\epsilon = \sigma \cdot \epsilon^e + \mathbf{t} \cdot d\mathbf{e}^c \quad (12)$$

Det første led er den elastiske energi i lagene imellem revnerne, medens det sidste er den energimængde, der er nødvendig for at åbne en volumen enhed revnebånd. Arbejdet per arealenhed revnebånd der er nødvendigt for at øge revneåbningen, er:

$$dW_f = h_c t d\mathbf{e}^c \quad (13)$$

$$dW_f = \mathbf{t} \cdot d\mathbf{w} \quad (14)$$

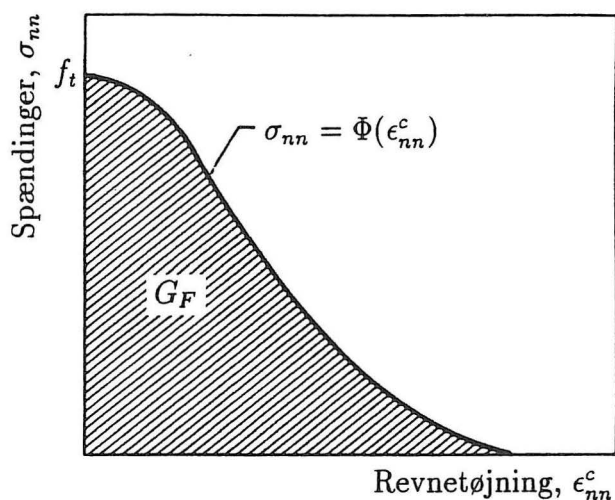


Figure 14: Spændings overførsels kurve for revnebånd modellen, [10].

hvilket er identisk med resultatet fra FCM. For ren åbning haves  $t = \sigma_{nn} \mathbf{n}$ , der for monoton revneåbning, 11, giver:

$$\sigma_{nn} = \Phi(\epsilon_{nn}^c) = f(h_c \epsilon_{nn}^c) \quad (15)$$

hvor  $f(w)$  er  $\sigma - w$  relationen for den ækvivalente FCM. Funktionen for  $f(h_c \epsilon_{nn}^c)$  bliver dermed som vist i fig. 14: Arealet under kurven er brudenergien pr. volumen,  $g_F$  og er relateret til  $G_F$  ved:

$$G_F = h_c g_F \quad (16)$$

#### 4.2.1 Begrænsninger ved brug af revnebåndmodellen

Af den foregående fremstilling ses det, at revnebånd modellen er fuldstændig parallel til FCM, og de begrænsninger, der er tilknyttet FCM må derfor også være tilknyttet revnebånd modellen. Derudover er der flere svagheder ved modellen. For det første er der ingen eksperimentelle beviser for, at revnedannelsen foregår i et bånd ensformigt fordelt over dets tykkelse. Værdien af  $h_c$  er sat til ca. tre gange den største sten størrelse, forslået af Bazant. Dette er baseret på kurvetilpasning af hele prøveemner og er dermed en indirekte estimeret værdi. Det har desuden vist sig ved numeriske beregninger, at disse beregninger stort set er uafhængige af båndets tykkelse, når den samme  $\sigma - w$  relation betragtes. Dette indikerer at bånd tykkelsen ikke er en værdi, der kan tillægges særlig stor fysisk betydning.

Da modellen baseres på, at revnen initieres i bånd, er beskrivelsen en ikke lokal beskrivelse, dvs. hvad der foregår i et punkt er afhængigt af hvad der foregår i andre punkter placeret i endelig afstand fra dette, hvilket indikerer, at bånd modeller ikke passer ind

i almindelig kontinuummekanik.

Det eneste der retfærdiggør båndmodellens eksistens, er dens gode muligheder i numeriske teknikker.

## References

- [1] Barenblatt G.J. *The Mathematical Theory of Equilibrium Crack in the Brittle Fracture*, Adv. in Applied Mechanics, 7, pp. 55-125 (1962).
- [2] Bazant Z.P. and Oh B.H. *Crack Band Theory for Fracture of Concrete Materials and Structures*, 16, pp. 155-177 (1983)
- [3] Blakey F.A. and Beresford F.D. *Discussion of the Paper Kaplan M.F. Crack Propagation and the Fracture of Concrete*, JACI, 58 (11), pp. 591-610 (1961)., JACI, 59, pp. 919-923 (1962).
- [4] Borst R. de *Computational Aspects of Smeared Crack Analysis*, in Constitutive Modelling of Concrete Structures, Pineridge Press, Swansea, (1986)
- [5] Carpinteri A. *Application of Fracture Mechanics to Concrete Structures*, Jour. Struc. Eng. Div., ASCE, Vol. 108, No. St4, pp. 833-848 (1982).
- [6] Carpinteri A. *Influence of Material Parameters and Geometry on Cohesiv Crack Propagation* in Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, Editor F.H. Wittman, Elsevier, pp. 117-135 (1986).
- [7] Dhir R.K. and Sangha C.M. *Development and Propagation of Microcracks in Plain Concrete*, Materiaux et Constructions, 7, pp. 17-23 (1974).
- [8] Dugdale D.S. *Yielding of Steel Sheets Containing Slits* J. Mech. and Phys. of Solids, 8, pp. 100-104 (1960).
- [9] Elfgren L. (ed.) *Fracture Mechanics of Concrete Structures-From theory to applications*, RILEM Report, Chapman and Hall, pp. 1-5 (1989)
- [10] Elices M. and Planas J. *Material Models*, in L. Elfgren (ed) *Fracture Mechanics of Concrete Structures-From theory to applications*, RILEM Report, Chapman and Hall, pp. 16-66 (1989)
- [11] Glücklich J. *Discussion of the Paper Kaplan M.F. Crack Propagation and the Fracture of Concrete*, JACI, 58 (11), pp. 591-610 (1961)., JACI, 59, pp. 919-923 (1962).
- [12] Glücklich J. *The Effect of Microcracking on Time-Dependent Deformations and the Long-Term Strength of Concrete*, in A.E. Brooks and K. Newmwan (eds.), *The Structure of Concrete*, Proceedings of an International Conference, London, 1965, Cement and Concrete Association, London, pp. 176-189 (1968)

- [13] Go G.C., Swartz S.E. *Energy Methods for Fracture Toughness Determination in Concrete*, Proc., V Int. Congress on Eksperimental Mechanics, Montreal, Canada, pp. 453-459 (1984), også i Eksperimental Mechanics, 26 (3), pp. 773-782 (1986).
- [14] Griffith A.A. *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Phil. Trans. R. Soc. London, Series A221, pp. 163- 198 (1920)
- [15] Herholdt A.D. o.a. *Beton-Bogen*, Cementfabrikkernes oplysningskontor, Aalborg Portland, 1979.
- [16] Higgins D.D., Bailey J.E. Fracture Measurements on Cement Paste, Jour. of Materials Science, Vol. 11, pp. 1995-2003 (1976).
- [17] Hillerborg A., Modeer M. and Petersson P.E. *Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics an Finite Elements*, Cement and Concrete Rsearch, pp. 773-782 (1976).
- [18] Hillerborg A. *Analysis of one Single Crack*, in F.H. Wittman (ed) *Fracture Mechanics of Concrete*, Elsevier Sciencs Publishers, Amsterdam, pp. 223-249 (1983).
- [19] Hsu T.T.C., Slate G.M., Sturman and Winter G., *Microcracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve*, Jour. of ACI, 60, pp. 209- 224 (1963)
- [20] Inglis C.E. *Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners*, Trans. Inst. Nav. Archit., 55, pp. 219-241 (1913)
- [21] Irwin G.R. *Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate*, Jour. of App. Mech., Vol. 24, pp. 361-364 (1957)
- [22] Irwin G.R. *Discussion of the Paper Kaplan M.F. Crack Propagation and the Fracture of Concrete*, JACI, 58 (11), pp. 591-610 (1961)., JACI, 59, p. 929 (1962).
- [23] Kaplan M.F. *Crack Propagation and the Fracture of Concrete*, JACI, 58 (11), pp. 591-610 (1961).
- [24] Mindess S. *The Application of Fracture Mechanics to Cement and Concrete: A Historical Review*, in *Fracture Mechanics of Concrete*, Editor F.H. Wittmann, Elsevier, pp. 1-31 (1983)
- [25] Mindess S. *The Cracking and Fracture of Concrete-An Annotated Bibliography*, pp. 1982-1985, 627-695 (1986)
- [26] Petersson P.E. *Fracture Energy of Concrete: Method of Determination, Practical Performance and Eksperimental Results*, Cem. Concr. Res., 10, pp. 471-474 (1980).

- [27] Plati E., Williams J.G. *The Determination of the Fracture Parameters of Polymers in Impact*, Polymer Eng. Sci., 15, pp. 470-477 (1975).
- [28] Rice J.R. *Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, J. of Applied Mech., 35, pp. 379-386 (1968)
- [29] Richart A., Brandtzaeg A. and Brown R.L., Bulletin No. 185, Engineering Experiment Station, University of Illinois, pp. 163-198 (1928).
- [30] Rots J.G., Nauta P., Kusters G.M.A. and Baauwendraad J. *Smearred Crack Approach and Fracture Localization in Concrete*, Heron, 30.
- [31] Turner C.E. *Fracture Toughness and Specific Fracture Energy :A Re-analysis of Results*, Mater. Sci Eng., 11, pp. 275-282 (1973)
- [32] Schmidt R.A. *Fracture Toughness Testing of Limestone*, Eksperimental Mechanics, pp. 161-167 (May 1976).
- [33] Shah S.P. *Dependence of Concrete Fracture Toughness on Specimen Geometry and on Composition*, in (Editors) A. Carpinteri, A.R. Ingraffea: *Fracture Mechanics of Concrete: Material Characterization and Testing*, The Hague, Nijhoff, pp. 111-135 (1984).
- [34] Stroeven P., Conference on "The Influence of Volume Change on the Design and Technology of Modern Building Structures", Karlovy Vary, CSSR (1975)
- [35] Swamy R.N. *Aggregate-Matrix Interaction in Concrete Systems*, in M. te'eni (ed.) *Structure, solid Mechanics and Engineering Design*, Proceeding of the Southampton 1969 Civil Engineering Materials Conference, Wiley-Interscience, pp. 301-315 (1971)
- [36] Swartz S.E., Rood S.M. *Fracture Toughness Testing of Concrete Beams in Three-Point Bending: Phase 1, Small Beams*, in Proc. SEM Spring Conference on Eksperimental Mechanics, Society for Eksperimental Mechanics, Las Vegas, pp. 119-126 (1985).
- [37] Walsh P.F. *Crack Initiation in Plain Concrete*, Magazine of Concrete Research, Vol. 28, pp.37-41 (1976).
- [38] Wecharatana M, Swartz S.E. *Review of Current Notations on Fracture Toughness Testning of Concrete and Rock*, Report to the Technical Commitee on Fracture Mechanics of Concrete and Rock, Society of Eksperimental Mechanics, Las Vegas June 1985.
- [39] Westergaard H.M. *Bearing pressures and cracks* , Jour. of App. Mech. Vol. 24, pp. 361-364 (1957)
- [40] Wittman F.H. *Structure of Concrete with Respect to Crack Formation*, in *Fracture Mechanics of Concrete*, Editor F.H. Wittmann, Elsevier, pp. 43-74 (1983)

- [41] Ziegeldorf S. *Phenomenological Aspects of the Fracture of Concrete*, in *Fracture Mechanics of Concrete*, Editor F.H. Wittmann, Elsevier, pp. 31-43 (1983)



## FRACTURE AND DYNAMICS PAPERS

PAPER NO. 1: J. D. Sørensen & Rune Brincker: *Simulation of Stochastic Loads for Fatigue Experiments*. ISSN 0902-7513 R8717.

PAPER NO. 2: R. Brincker & J. D. Sørensen: *High-Speed Stochastic Fatigue Testing*. ISSN 0902-7513 R8809.

PAPER NO. 3: J. D. Sørensen: *PSSGP: Program for Simulation of Stationary Gaussian Processes*. ISSN 0902-7513 R8810.

PAPER NO. 4: Jakob Laigaard Jensen: *Dynamic Analysis of a Monopile Model*. ISSN 0902-7513 R8824.

PAPER NO. 5: Rune Brincker & Henrik Dahl: *On the Fictitious Crack Model of Concrete Fracture*. ISSN 0902-7513 R8830.

PAPER NO. 6: Lars Pilegaard Hansen: *Udmattelsesforsøg med St. 50-2, serie 1 - 2 - 3 - 4*. ISSN 0902-7513 R8813.

PAPER NO. 7: Lise Gansted: *Fatigue of Steel: State-of-the-Art Report*. ISSN 0902-7513 R8826.

PAPER NO. 8: P. H. Kirkegaard, I. Enevoldsen, J. D. Sørensen, R. Brincker: *Reliability Analysis of a Mono-Tower Platform*. ISSN 0902-7513 R8839.

PAPER NO. 9: P. H. Kirkegaard, J. D. Sørensen, R. Brincker: *Fatigue Analysis of a Mono-Tower Platform*. ISSN 0902-7513 R8840.

PAPER NO. 10: Jakob Laigaard Jensen: *System Identification 1: ARMA Models*. ISSN 0902-7513 R8908.

PAPER NO. 11: Henrik Dahl & Rune Brincker: *Fracture Energy of High-Strength Concrete in Compression*. ISSN 0902-7513 R8919.

PAPER NO. 12: Lise Gansted, Rune Brincker & Lars Pilegaard Hansen: *Numerical Cumulative Damage: The FM-Model*. ISSN 0902-7513 R8920.

PAPER NO. 13: Lise Gansted: *Fatigue of Steel: Deterministic Loading on CT-Specimens*.

PAPER NO. 14: Jakob Laigaard Jensen, Rune Brincker & Anders Rytter: *Identification of Light Damping in Structures*. ISSN 0902-7513 R8928.

PAPER NO. 15: Anders Rytter, Jakob Laigaard Jensen & Lars Pilegaard Hansen: *System Identification from Output Measurements*. ISSN 0902-7513 R8929.

# FRACTURE AND DYNAMICS PAPERS

PAPER NO. 16: Jens Peder Ulfkjær: *Brud i beton - State-of-the-Art. 1. del, brudforløb og brudmodeller.* ISSN 0902-7513 R9001.

**Institute of Building Technology and Structural Engineering**  
**The University of Aalborg, Sohngaardsholmsvej 57, DK 9000 Aalborg**  
**Telephone: 45 98 14 23 33    Telefax: 45 98 14 82 43**