



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Aalborg Universitet

Marin Hydrodynamik

Brorsen, Michael

Publication date:
1997

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):
Brorsen, M. (1997). *Marin Hydrodynamik*. Institut for Vand, Jord og Miljøteknik, Aalborg Universitet.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

MARIN HYDRODYNAMIK ULINEÆRE BØLGER

Michael Brorsen

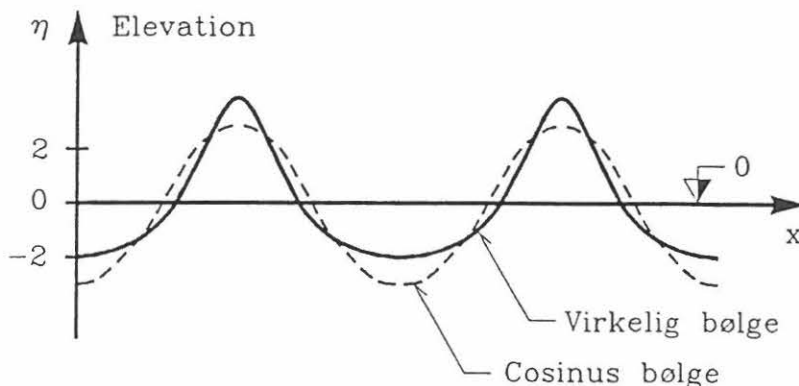
Februar 1997
Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning
Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik
Aalborg Universitet

Indholdsfortegnelse

1	Bølger med endelig bølgehøjde	3
2	Stokes bølger	6
2.1	Anden ordens Stokes bølger	7
2.2	Tredje ordens Stokes bølger	10
2.3	Femte ordens Stokes bølger	10
2.4	Generelle bemærkninger vedrørende Stokes bølger	13
3	Strømfunktionsteori	14
3.1	Bølger uden strøm ($U = 0$)	14
3.2	Bølger kombineret med strøm ($U \neq 0$)	17
4	Litteraturliste	19
Appendix		2
A.1	Løsning af ligningssystem vha. Newton-Raphsons metode	2
A.2	Eksempel på opstilling og løsning af ligningssystem	3
A.3	Beregning af $\eta(x)$ efter Strømfunktionsteorien	6
A.4	Beregning af hastighed og acceleration efter Strømfunktionsteori	7

1 Bølger med endelig bølgehøjde

Man kommer ofte ud for bølger, hvis stejthed H/L er så stor, at resultaterne fra 1. ordens teorien ikke kan anvendes pga. ringe nøjagtighed.



Figur 1: Sammenligning af virkelig bølge og cosinus bølge.

Da 1. ordens problemet blev løst, skete det ved en *eksakt* løsning af Laplaces ligning med *tilnærmede* (lineariserede) randbetingelser. Herved fik man bl.a.

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (2)$$

$$\varphi = -\frac{Hc}{2} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (3)$$

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \quad (4)$$

og

$$w = -\frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (5)$$

idet følgende betegnelser er benyttet:

η	overfladeelevation
T	bølgeperioden
L	bølgelængden
H	bølgehøjden

$c = L/T$	fasehastigheden
h	vanddybden
$k = 2\pi/L$	bølgetal
$\omega = 2\pi/T$	cyklisk frekvens
t	tid
x	vandret koordinat
z	lodret koordinat
φ	hastighedspotential
$u = \partial\varphi/\partial x$	vandret partikelhastighed
$w = \partial\varphi/\partial z$	lodret partikelhastighed

se fx Svendsen & Jonsson (1980).

Ligningerne blev lineariseret ved at foretage størrelsesordensbetragtninger og bortkaste de led, der var $o(H/L)$ mindre end de øvrige led, idet $o(\quad)$ betyder størrelsesordenen af udtrykket af udtrykket i parentes.

Ved den frie overflade blev ligningerne lineariseret således:

$$\text{kinematisk RB : } \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad \text{ved } z = \eta \quad (6)$$

$$\text{linearisering} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} \simeq \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad \text{ved } z = 0 \quad (7)$$

$$\text{dynamisk RB : } g\eta + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{ved } z = \eta \quad (8)$$

$$\text{linearisering} \quad \Rightarrow \quad g\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \simeq 0 \quad \text{ved } z = 0 \quad (9)$$

Herved fik man overalt lineære RB på en kendt rand, og Laplaces ligning (DL):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

kunne nemt løses.

Selv om man normalt har bølgestejlheder $H/L < 0,08$ viser målinger, at ovennævnte lineariseringer alligevel kan være uacceptable, når fx cosinus-bølgen sammenlignes med et målt overfladeprofil, se figur 1.

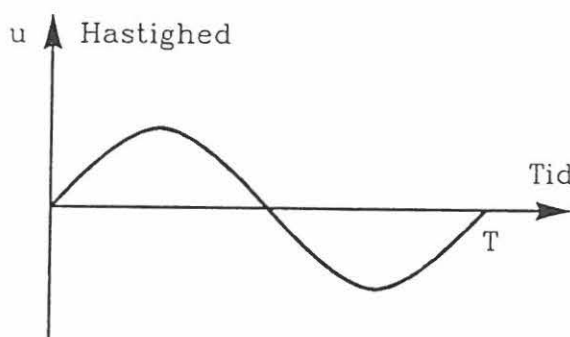
Det ses, at både bølgetop og bølgedal i virkeligheden er hævet i forhold til cosinus-profilet. Resultatet af dette er, at bølgetoppen (strækningen hvor $\eta > 0$) bliver kortere og stejlere, hvorimod bølgedalen ($\eta < 0$) bliver længere og mindre stejl end cosinus-profilet.

Ønsker vi derfor at beskrive disse bølger mere korrekt end 1. ordensteorien tillader, må vi derfor medtage nogle flere led i RB, når Laplaces ligning løses.

Man skal også bemærke, at det er nødvendigt at indføre en ekstra randbetingelse, når ulineære led medtages i RB og både kinematisk og dynamisk RB kræves opfyldt ved $z = \eta$ i stedet for ved $z = 0$.

Problemet kan illustreres med resultaterne fra 1. ordens teorien på følgende måde:

Placeres en hastighedsmåler under bølgedalsniveau, η_{min} , finder man efter 1. ordens teorien en symmetrisk hastighedsvariation, idet $u \sim \eta$ jf. ligningerne (1) og (5). Se også fig. 2.

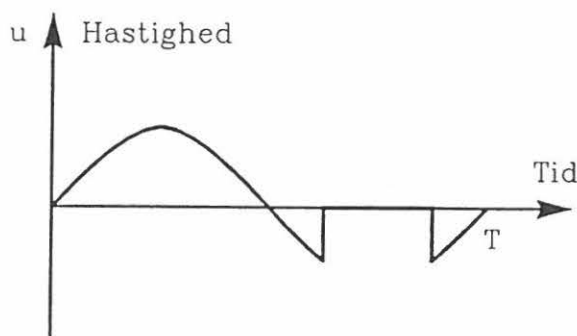


Figur 2: Hastighedsvariation i et punkt med $z < \eta_{min}$.

Dette medfører $\bar{u} = 0$, hvor \bar{u} er middelhastigheden i punktet, dvs.

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(z, t) dt = 0 \quad (11)$$

Benyttes ligeledes 1. ordens hastigheder i et punkt med $z > \eta_{min}$ findes tilsvarende $\bar{u} > 0$. Det skyldes, at $u = 0$ i det tidsrum, hvor hastighedsmåleren er over vand-spejlet. Se figur 3.



Figur 3: Hastighedsvariation i et punkt med $0 > z > \eta_{min}$.

Endelig findes med 1. ordens teoriens hastigheder middelværdien over en periode af vandføringen gennem et lodret snit som

$$\bar{q}_{bølge} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{-h}^{\eta(t)} u(z, t) dz \right) dt = \int_{-h}^{\eta_{max}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T u(z, t) dt \right) dz \quad (12)$$

eller

$$\bar{q}_{bølge} = \int_{-h}^{\eta_{max}} \bar{u} \cdot dz = \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \bar{u} \cdot dz > 0 ! \quad (13)$$

Denne vandføring har kun praktisk betydning for ulineære bølger, og den betegnes ofte som "Stokes drift". Sidstnævnte betegnelse benyttes i øvrigt også af og til om den tilhørende middelhastighed

$$U_{Stokes} = \frac{\bar{q}_{bølge}}{h} \quad (14)$$

Betragtes forholdene i fx et bølgebassin er det indlysende, at man må kræve $\bar{q} = 0$, da alt vandet ellers vil havne i den ene ende af bassinet. Rent fysisk opnås $\bar{q} = 0$ ved dannelsen af en strøm U (konstant hastighed over dybden, dvs. potentialstrømning), hvor $q_{strøm} = Uh$. Da $\bar{q} = \bar{q}_{bølge} + q_{strøm} = 0$ findes umiddelbart

$$U = -\frac{\bar{q}_{bølge}}{h} = -U_{Stokes} \quad (15)$$

dvs. $U < 0$, og strømmen løber derfor *mod* bølgernes udbredelsesretning.

Efter 1. ordens teorien findes derfor

$$u = u^{(1)} + U \quad (16)$$

hvor $u^{(1)}$ er den horisontale hastighedskomponent efter 1. ordens teorien (ligning (4)).

Da det kan vises, at $U = o\left(u^{(1)}\left(\frac{H}{L}\right)\right)$, indses at leddet kan bortkastes efter 1. ordens teori, hvorimod det kan være et betydeligt led i teorierne af højere orden. Se fx Svendsen (1985), hvor en mere stringent udledning i øvrigt kan ses.

2 Stokes bølger

Man anvender her en perturbationsmetode ved løsningen af det ulineære strømning-problem, dvs. man antager følgende:

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots + \varphi^{(i)} + \dots \quad (17)$$

hvor

$$o(\varphi^{(i+1)}) = o(\varphi^{(i)} \cdot \frac{H}{L}) = o\left(\varphi^{(i-1)} \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^2\right) = \dots = o\left(\varphi^{(1)} \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^i\right) \quad (18)$$

samt

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots + \eta^{(i)} + \dots \quad (19)$$

$$p^+ = p^{+(1)} + p^{+(2)} + \dots + p^{+(i)} + \dots \quad (20)$$

og tilsvarende udtryk for de øvrige størrelser.

Man indfører så (17) og (19) i DL og RB og bortkaster i en teori af orden "i" alle led, hvis størrelsesorden har faktoren (H/L) opløftet til potensen "i" eller derover. Ifølge (18) medtages medtages dermed "i" led i ligning (17).

Løsningen af DL og de således trunkeerede RB betegnes derefter en i^{te} ordens Stokes bølge.

Det skal her bemærkes, at $\varphi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$ og $p^{+(1)}$ er de kendte 1. ordens udtryk, svarende til de aktuelle værdier af T , H og h . Da overfladen ikke længere er symmetrisk om $z = 0$, er man endvidere nødt til at definere bølgehøjden således:

$$H = \eta_{max} - \eta_{min} \quad (21)$$

2.1 Anden ordens Stokes bølger

I dette tilfælde er

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} \quad (22)$$

hvor $\varphi^{(1)}$ allerede er kendt fra 1. ordens teorien. For overskuelighedens skyld er DL samt løsningsområde og RB for $\varphi^{(1)}$ vist på figur 4. Da $\varphi^{(1)}$ opfylder Laplaces ligning, dvs.

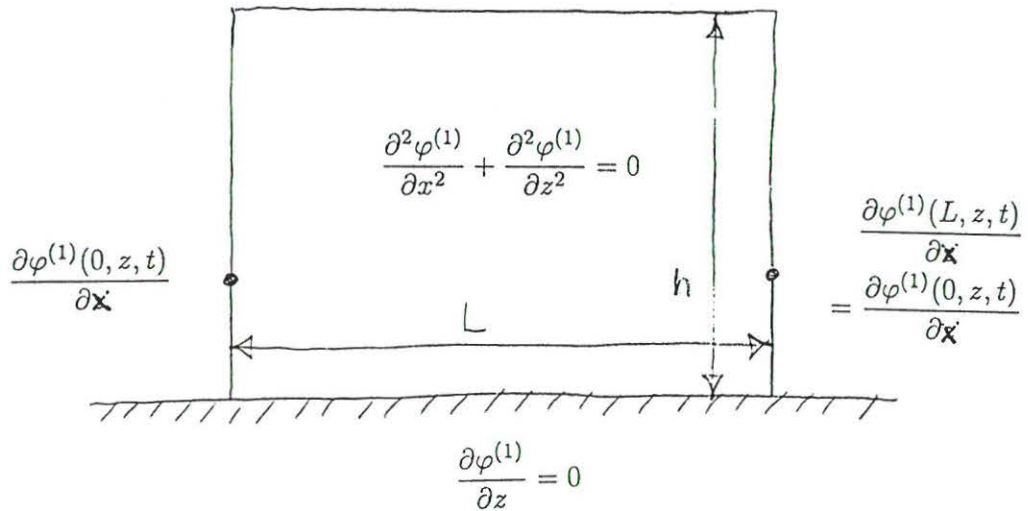
$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

ses indsættelse af ligning (22) i Laplaces ligning, at resultere i ligningen

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial z^2} = 0 \quad (24)$$

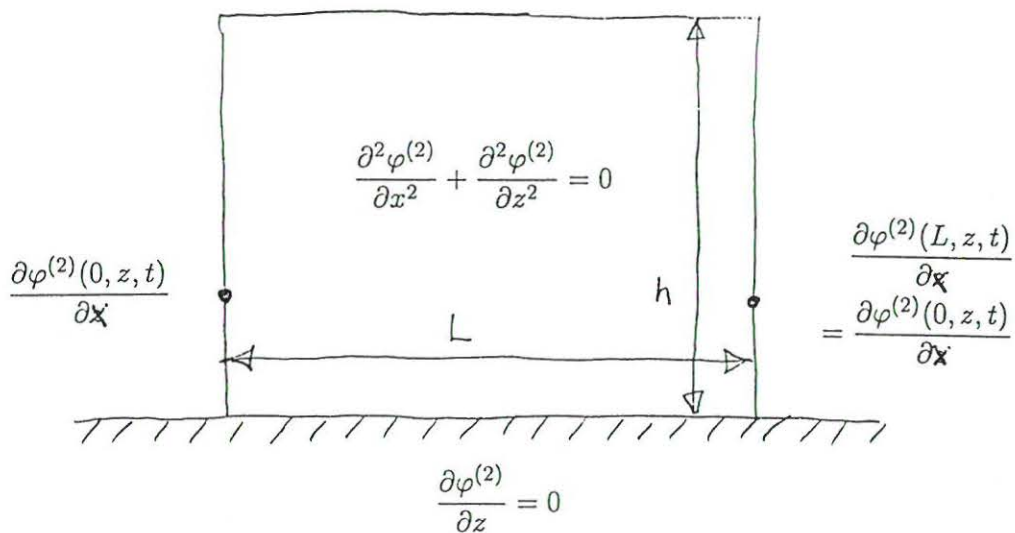
For at finde $\varphi^{(2)}$, må denne DL med tilhørende RB løses. Ligesom i 1. ordens teorien løses problemet med den ukendte placering af den frie rand (overfladen) ved at rækkeudvikle både den kinematiske og den dynamiske randbetingelse i $z = 0$ og derefter bortkaste led, der er $o((H/L)^2)$ mindre end de dominerende led.

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} = 0$$



Figur 4: DL, løsningsområde og RB for $\varphi^{(1)}$.

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2} = -\frac{3\omega}{4k} (kH)^2 \frac{\sin 2(\omega t - kx)}{\sinh 2kh}$$



Figur 5: DL, løsningsområde og RB for $\varphi^{(2)}$.

For den kinematiske RB, ligning (6), kan rækkeudviklingen principielt skrives som

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{z=0} + \dots = 0$$

Et tilsvarende udtryk kan opskrives for den dynamiske RB, ligning (8). Herefter bortkastes de små led i de to ligninger. Nu kan $\eta^{(2)}$ elimineres af de ligningerne, og efter nogen regning findes den RB for $z = 0$, som er angivet på figur 5. På denne figur er også RB ved bunden og de lodrette rande vist.

Når $\varphi^{(2)}$ er fundet, kan 2. ordens hastigheder findes ved differentiation af $\varphi^{(2)}$, dvs.

$$u^{(2)} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x}$$

og

$$w^{(2)} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z}$$

Til sidst kan $c^{(2)}$, $\eta^{(2)}$ og $p^{(2)}$ bestemmes, ligesom det var tilfældet i 1. ordens teorien.

Efter 2. ordens teorien med betingelsen $\bar{q} = 0$ finder Svendsen & Jonsson (1980) fx

$$u = u^{(1)} + \frac{3}{16} c (kH)^2 \frac{\cosh(2k(z+h))}{\sinh^4(kh)} \cos(2(\omega t - kx)) - \frac{1}{8} \frac{gH^2}{ch^2} \quad (25)$$

Af (25) ses, at for $z < \eta_{min}$ er middelværdien nul af de 2 første led, hvorfor

$$\bar{u} = -\frac{1}{8} \frac{gH^2}{ch^2} \quad \text{for } z < \eta_{min} \quad (26)$$

og dermed er kompensationsstrømmen U i dette tilfælde

$$U = -\frac{1}{8} \frac{gH^2}{ch^2} \quad (27)$$

Man finder endvidere

$$\eta^{(2)} = \Delta\eta \cdot \cos(2(\omega t - kx)) \quad (28)$$

hvor

$$\Delta\eta = \frac{1}{16} kH^2 (3 \cdot \coth^3(kh) - \coth(kh)) \quad (29)$$

dvs. $\eta^{(2)}$ er et led, der svinger dobbelt så hurtigt som 1. ordens leddet. Det ses, at $\eta_{max} = \frac{H}{2} + \Delta\eta$ og $\eta_{min} = -\frac{H}{2} + \Delta\eta$, dvs. begge hæves stykket $\Delta\eta$. Herved bliver

bølgetoppen kortere end bølgedalen, og

$$\eta_{max} - \eta_{min} = \left(\frac{H}{2} + \Delta\eta\right) - \left(-\frac{H}{2} + \Delta\eta\right) = H$$

er overholdt.

Endelig finder man det overraskende resultat $c^{(2)} = 0$, eller

$$c = c^{(1)} + c^{(2)} = c^{(1)} = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh(kh)} \quad (30)$$

Forplantningshastigheden er således uændret i forhold til 1. ordens teorien.

Er der ikke tale om et lukket bølgebassin, kan man også specificere en given værdi af U ($= \bar{u}$ for $z < \eta_{min}$), dvs. U kan måles med en fastholdt hastighedsmåler placeret under η_{min} .

I mange tilfælde er der antaget $U = 0$ ved udledelsen af en teori, men det er ikke angivet i forudsætningerne. Pas på !

2.2 Tredje ordens Stokes bølger

Det vigtigste resultat i 3. ordens teorien er, at $c^{(3)} \neq 0$, dvs.

$$c = c^{(1)} + c^{(2)} + c^{(3)} = c^{(1)} + c^{(3)} = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh(kh)} + c^{(3)} \quad (31)$$

idet $c^{(2)} = 0$ jf. 2. ordens teorien.

Det generelle udtryk er angivet i Svendsen & Jonsson (1980), så her skal blot angives resultatet på dybt vand:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{kH}{2}\right)^2} = c^{(1)} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{kH}{2}\right)^2} \quad (32)$$

Bemærk, at $\bar{q} = 0$ er forudsat i (32).

2.3 Femte ordens Stokes bølger

Selv om omfanget af beregninger tiltager kraftigt, hver gang et ekstra led medtages i rækken for φ (ligning 11), blev der i 1960 publiceret en 5. ordens løsning, se Skjelbreia & al. (1960).

Bemærk dog, at Skjelbreia forudsatte $U = 0$ dvs. $\bar{q} > 0$, hvorfor resultaterne egentlig ikke bør benyttes i tilfælde af et lukket bølgebassin.

Beregningerne for et givet problem forløber således:

Givet : T, h og H

Beregn : 1) L
2) φ
3) u, w samt η

Bølgelængden L findes ved iteration i ligningerne:

$$\pi H = L \left(\lambda + \lambda^3 B_{33} + \lambda^5 (B_{35} + B_{55}) \right) \quad (33)$$

og

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh) \cdot (1 + \lambda^2 C_1 + \lambda^4 C_2) \quad (34)$$

hvor λ er ukendt. Koefficienterne $B_{lm} = B_{lm}(kh)$ samt $C_n = C_n(kh)$ afhænger på kendt vis af kh (hvor $k = 2\pi/L$ som sædvanlig), se Skjelbreia (1960). Bemærk, at i Skjelbreias udtryk for C_2 skal faktoren $+2592$ erstattes med -2592 , se Nishimura & al. (1977).

Ligningerne (33) og (34) må løses ved iteration, og følgende metode har vist sig at fungere tilfredsstillende.

I det følgende betyder L_i, λ_i og k_i henholdsvis værdierne af L, λ og k i den i 'te iteration.

Ligning (33) omskrives til:

$$\lambda_{i+1} = \frac{\pi H}{L_i} - \lambda_i^3 B_{33} - \lambda_i^5 (B_{35} + B_{55}) \quad (35)$$

hvor $B_{lm} = B_{lm}(k_i h)$. Ligning (34) omskrives til

$$L_{i+1} = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L_i}\right) \cdot (1 + \lambda_{i+1}^2 C_1 + \lambda_{i+1}^4 C_2) \quad (36)$$

hvor $C_n = C_n(k_i h)$

Startgæt: $L_1 = L^{(1)} \Rightarrow \lambda_1 = 0$ ifølge (36).

$$L^{(1)} = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L^{(1)}}\right) \quad \text{findes ved iteration som sædvanlig.}$$

Af (35) findes derpå $\lambda_2 = \frac{\pi H}{L_1}$, som indsat i (36) giver L_2 . Husk at B - og C -koefficienterne også skal opdateres. Af (35) findes så λ_3 , som indsat i (36) giver L_3 , osv.

Iterationen afsluttes, når

$$|L_{i+1} - L_i| < \varepsilon \quad \text{og} \quad |\lambda_{i+1} - \lambda_i| < \varepsilon$$

hvor ε er et passende lille tal.

Når L og λ er fastlagt beregnes φ således:

$$\varphi = -\frac{c}{k} \sum_{j=1}^5 D_j \cosh(jk(z+h)) \sin(j\theta) \quad (37)$$

hvor

$$\begin{aligned} c &= L/T \\ \theta &= \omega t - kx \\ D_1 &= \lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13} + \lambda^5 A_{15} \\ D_2 &= \lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24} \\ D_3 &= \lambda^3 A_{33} + \lambda^5 A_{35} \\ D_4 &= \lambda^4 A_{44} \\ D_5 &= \lambda^5 A_{55} \end{aligned}$$

og

$$A_{lm} = A_{lm}(kh) \text{ er kendte funktioner af } kh, \text{ se Skjelbreia (1960).}$$

Herefter kan hastighedskomponenterne findes ved differentiation af potentialet φ , dvs.:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot (-k) \quad (38)$$

\Leftrightarrow

$$u = c \sum_{j=1}^5 j D_j \cosh(jk(z+h)) \cos(j\theta) \quad (39)$$

samt

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (40)$$

\Leftrightarrow

$$w = -\frac{c}{k} \sum_{j=1}^5 jk \cdot D_j \sinh(jk(z+h)) \sin(j\theta) \quad (41)$$

Accelerationerne findes af:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (42)$$

hvor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \omega = -c\omega \sum_{j=1}^5 j^2 \cdot D_j \cosh(jk(z+h)) \sin(j\theta) \quad (43)$$

samt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ck \sum_{j=1}^5 j^2 \cdot D_j \cosh(jk(z+h)) \sin(j\theta) \quad (44)$$

og

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ck \sum_{j=1}^5 j^2 \cdot D_j \sinh(jk(z+h)) \cos(j\theta) \quad (45)$$

Af (43) og (44) ses i øvrigt (da $\omega = ck$), at

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (46)$$

Dette resultat kan også indses direkte, hvis man udnytter, at bølgen bevæger sig uden at ændre form.

Endelig kan η findes af udtrykket:

$$\eta = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^5 E_j \cos(j\theta) \quad (47)$$

hvor

$$\begin{aligned} E_1 &= \lambda \\ E_2 &= \lambda^2 B_{22} + \lambda^4 B_{24} \\ E_3 &= \lambda^3 B_{33} + \lambda^5 B_{35} \\ E_4 &= \lambda^4 B_{44} \\ E_5 &= \lambda^5 B_{55} \end{aligned}$$

og

$$B_{lm} = B_{lm}(kh) \text{ er de samme funktioner, som blev benyttet ved beregning af bølgelængden, se Skjelbreia (1960).}$$

2.4 Generelle bemærkninger vedrørende Stokes bølger

Da man ved vurdering af de enkelte leds størrelsesorden generelt antager at $o(\frac{h}{L}) = 1$, må man forvente problemer på grundt vand, hvor $\frac{h}{L} \ll 1$. Dette er tilfældet for alle typer Stokes bølger og problemet viser sig primært som sekundære toppe i bølgedalen.

I praksis må man for 5. ordens bølger således kræve $h/L > 0.10 - 0.15$, hvis se-

kundære toppe skal undgås. For bølger af lavere orden optræder problemet allerede ved større værdier af h/L .

Endelig skal bemærkes, at de givne udtryk alle forudsætter *rotationsfri* strømning samt, at alle typer Stokes bølger er *symmetriske* omkring bølgetoppen.

3 Strømfunktionsteori

Ønsker man at beregne bølger i de tilfælde, hvor $h/L < 0.10$, er det i praksis kun strømfunktionsteorien, der giver tilstrækkeligt nøjagtige resultater.

I denne teori etableres en *tilnærmet* numerisk løsning til den *eksakte DL* og de *eksakte RB* opfyldt ved $z = \eta$.

Man er derfor ikke nødt til at foretage størrelsesordensbetragtninger, og der er derfor ingen krav til hverken H/L eller h/L .

3.1 Bølger uden strøm ($U = 0$)

Vi vil først antage rotationsfri strømning samt $U = 0$, dvs. bølgen udbreder sig i stillestående vand (se ligning (11)). Senere vises hvordan man løser problemet, hvis $\bar{q} = 0$ eller $U \neq 0$ specificeres. Det kan endvidere også lade sig gøre at løse problemet, når $rot \bar{v} = \text{konstant}$, se f.eks. Dalrymple (1974).

Af nemhedsgrunde betragtes bølgen fra et koordinatsystem, der følger med bølgen, dvs. bevæger sig med hastigheden c_{rel} i forhold til vandet. Da bølgen ikke flytter sig i dette koordinatsystem, er der tale om en stationær strømning.

Bemærk, at havbunden og koordinatsystem (x, z) bevæger sig mod venstre med hastigheden c_{rel} set fra (x_{rel}, z) -systemet. Se figur 6.

Indføres strømfunktionen ψ defineret ved ligningerne:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (48)$$

og

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial x_{rel}} \quad (49)$$

opfyldes kontinuitetsligningen for en usammentrykkelig væske

$$\frac{\partial u}{\partial x_{rel}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (50)$$

identisk, og man får en entydig strømfunktion.

Da $rot \bar{v} = 0$ for en plan strømning jo betyder at

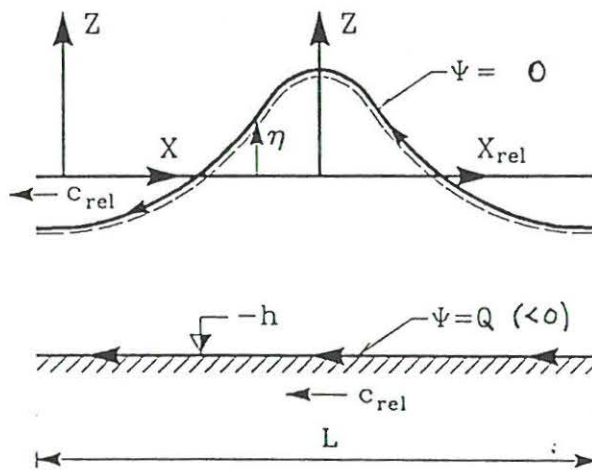
$$\frac{\partial w}{\partial x_{rel}} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (51)$$

findes ved indsættelse af (48) og (49) i (51) at

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{rel}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (52)$$

dvs. ψ skal opfylde Laplaces ligning.

Strømningssituationen er skitseret på figur 4.



Figur 6: Skitse af strømning betragtet fra koordinatsystem der bevæger sig mod højre med bølgehastigheden c_{rel} .

De kinematiske randbetingelser (ingen strømning på tværs af strømmlinier) er

$$\psi = Q \quad \text{for } z = -h \quad (53)$$

samt

$$\psi = 0 \quad \text{for } z = \eta \quad (54)$$

hvor vandføringen Q gennem et lodret snit findes af

$$Q = \int_{-h}^{\eta} u \, dz \quad (55)$$

Den dynamiske randbetingelse ved overfladen er

$$p = \text{konstant}$$

som indført i Bernoullis generaliserede ligning giver:

$$g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = R \quad \text{for } z = \eta \quad (56)$$

hvor $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, da stationær strømning, og R betegnes som Bernoulli konstanten.

Endelig antager man, at strømfunktionen kan beskrives med udtrykket

$$\psi(x_{rel}, z) = c_{rel}(z + h) + \sum_{j=1}^N B_j \frac{\sinh(jk(z + h))}{\cosh(jkh)} \cos(jkx_{rel}) + Q \quad (57)$$

Da (57) kan opfattes som en trunkeret Fourier-række for strømfunktionen, når denne er en *lige* funktion, må det forventes, at udtrykket kan tilnærme ψ vilkårligt nøjagtigt, hvis blot N vælges tilstrækkeligt stor. Det ses også, at dette udtryk for ψ opfylder både bundbetingelsen (53) samt Laplaces ligning, da dette er tilfældet for hvert enkelt led i rækken. Bemærk også, at der ligger en periodicitetsantagelse gemt i (57), idet $\psi(x_{rel}, z) = \psi(x_{rel} + L, z)$.

Strømfunktionen kendes derfor først, når de N ukendte koefficienter B_j samt størrelserne c_{rel} , k (eller L) og Q er bestemt (ialt $N + 3$ ubekendte).

Dette opnås ved at kræve de to overfladebetingelser opfyldt *eksakt* i $N + 1$ punkter. Den kinematiske betingelse (54) bliver derved til

$$\psi(x_{rel}, \eta) = 0 = c_{rel}(\eta + h) + \sum_{j=1}^N B_j \frac{\sinh(jk(\eta + h))}{\cosh(jkh)} \cos(jkx_{rel}) + Q \quad (58)$$

og den dynamiske betingelse (56) kan skrives som

$$g\eta + \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_{rel}} \right)^2 \right) = R$$

eller

$$\begin{aligned} g\eta + \frac{1}{2} \left[-c_{rel} - k \sum_{j=1}^N j B_j \frac{\cosh(jk(\eta + h))}{\cosh(jk)} \cos(jkx_{rel}) \right]^2 \\ + \frac{1}{2} \left[-k \sum_{j=1}^N j B_j \frac{\sinh(jk(\eta + h))}{\cosh(jkh)} \sin(jkx_{rel}) \right]^2 = R \end{aligned} \quad (59)$$

Da man herved opnår $2N + 2$ ligninger, ser det umiddelbart se ud til, at ligningssystemet er overbestemt. Imidlertid er η -værdierne i de $N + 1$ punkter ubekendte, således at de ubekendte herefter er: η_j ($N + 1$ værdier), B_j (N værdier) samt c_{rel} , k , Q og R , dvs. i alt $2N + 5$ ubekendte.

Der må derfor etableres 3 ligninger ekstra for at løse ligningssystemet.

Da væsken jo er antaget usammentrykkelig, må der kræves:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{L} \int_0^L \eta \cdot dx_{rel} = 0 \quad (60)$$

og endelig benyttes definitionerne

$$H = \eta_{max} - \eta_{min} \quad (61)$$

og

$$L = c_{rel}T \quad (62)$$

Nu er antallet af ligninger lig antallet af ubekendte, men desværre er ligningerne ulineære. Som vist i Appendix 1 kan ligningssystemet dog let løses med anvendelse af en generaliseret Newton-Raphson iteration.

Herefter kan ψ findes af (56) og (u, w) ved benyttelse af (48) og (49). Husk dog, at u fundet med (48) skal korrigeres med hastigheden c_{rel} , når partikelhastigheden set fra det faste koordinatsystem beregnes.

Udtrykkene for u og w er angivet i Appendix 1, hvor også udtryk for accelerationer er udledt.

Bemærk, at der er tale om de totale accelerationer (vedr. du/dt , se ligning (42)), idet de konvektive led ikke kan bortkastes, således som det er tilfældet i 1. ordens teorien.

Overfladen $\eta(x)$ kan dernæst tilnærmes med en endelig Fourier-række med anvendelse af de $N + 1$ -værdier af η . Herefter kan η findes for en vilkårlig x -værdi af udtrykket

$$\eta(x_{rel}) = 2 \sum_{j=1}^{N-1} a_j \cos(jkx_{rel}) + a_N \cos(Nkx_{rel}) \quad (63)$$

Bemærk, at bølgetoppen findes i $x_{rel} = 0$ samt, at det ikke er en trykfejl, når faktoren 2 mangler på det sidste led, se Appendix 1.

3.2 Bølger kombineret med strøm ($U \neq 0$)

Vi vil slutte af med at se på forholdene i tilfældet bølger kombineret med strøm, dvs. man kan specificere en ønsket værdi af enten U eller \bar{q} .

Det antages endvidere i tilfælde af strøm, at hele vandmassen bevæger sig med hastigheden U i forhold til havbunden.

Da en bølge med given længde og højde jo vil forplante sig ens i forhold til vandet, uanset om vandet ligger stille i forhold til havbunden, eller det bevæger sig med hastigheden U , ændres beskrivelsen ikke i det koordinatsystem, der følger med bølgen. Alle ovenstående ligninger opskrevet i dette system ændres derfor ikke, bortset fra udtrykket for forplantningshastighed (62), som må ændres til

$$L = c_{abs} \cdot T \quad (64)$$

hvor T er perioden målt i et fast punkt, og c_{abs} er bølgens forplantningshastighed i forhold til havbunden.

Da vi dermed har introduceret en ny variabel c_{abs} , må vi også etablere en ekstra ligning.

Det ses let at:

$$c_{abs} = c_{rel} + U \quad (65)$$

idet c_{rel} jo er forplantningshastigheden i forhold til vandet.

Hermed haves 1 ekstra ligning til bestemmelse af den ekstra ubekendte c_{abs} , hvis U er opgivet. Disse $2N + 6$ ligninger løses også med anvendelse af iteration.

Ønsker vi at kunne foreskrive en vilkårlig værdi af \bar{q} , kan følgende fremgangsmåde benyttes.

Først konstateres, at den del af middelvandføringen, der skyldes tilstedeværelsen af bølger må være

$$\bar{q}_{bølge} = Q - Q_{H=0} = Q - (-c_{rel}h) = Q + c_{rel}h \quad (66)$$

målt i et koordinatsystem, der ligger stille i forhold til vandmassen. Dette resultat skyldes, at man jo ville finde en vandføring på $-c_{rel}h$ målt i det bevægelige koordinatsystem (med hastigheden c_{rel} i forhold til vandet), når H er uendelig lille.

Da koordinatsystemet i hvile i forhold til vandmassen bevæger sig med hastigheden U i forhold til det koordinatsystem, der er i hvile i forhold til havbunden, findes middelvandføringen i dette faste koordinatsystem derfor som

$$\bar{q} = q_{strøm} + \bar{q}_{bølge} = Uh + Q + c_{rel}h \quad (67)$$

Indsættes (65) i (67) findes derfor

$$\bar{q} = Uh + Q + (c_{abs} - U)h$$

eller

$$\bar{q} = Q + c_{abs}h \quad (68)$$

Ligning (68) er den ekstra ligning, der er nødvendig for bestemmelsen af den ekstra ubekendte c_{abs} i de tilfælde, \bar{q} er kendt. Også disse $2N+6$ ligninger løses ved iteration.

Endelig skal bemærkes, at den aktuelle værdi af U kan findes af (65), idet både c_{rel} og c_{abs} er kendt, når ligningssystemet er løst.

4 Litteraturliste

- Dalrymple, R.A. (1974) *Water Waves on a Bilinear Shear Current*. Proceedings, 14th Conference Coastal Engineering, Vol. I, pp. 626-641.
- Fenton, J.D. & Rienecker, M.M. (1980) *Accurate Numerical Solution for Nonlinear Waves*. Proceedings, 17th Conference of Coastal Engineering, Vol. I, Sydney, pp. 50-69.
- Newland, D.E. (1975) *Random Vibrations and Spectral Analysis*. Longman, London.
- Nishimura, H., Isobe, M. & Horikawa, K. (1977) *Higher Order Solutions of Stokes and Cnoidal Waves*. Journal of the Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo, Series B, Vol. 34, pp. 267-293.
- Skjelbreia, L. & Hendrickson, J. (1960) *Fifth Order Gravity Wave Theory*. Proceedings, 7th Conference Coastal Engineering, Vol. I, pp. 184-196.
- Svendsen, I.A. & Jonsson, I.G. (1980) *Hydrodynamics of Coastal Regions*. Den Private Ingeniørfond, DTH, Lyngby.
- Svendsen, I.A. (1985) *Steep Water Waves*. ISVA, DTH, Lyngby.

Appendiks A

A.1 Løsning af ligningssystem vha. Newton-Raphsons metode

Der anvendes en udvidet Newton-Raphson metode, som bedst kan illustreres ved anvendelsen på et ligningssystem med 2 ligninger:

$$F(x, y) = 0 \tag{A.1}$$

og

$$G(x, y) = 0 \tag{A.2}$$

Funktionerne F og G antages at afhænge af x og y på kendt vis.

Det antages, at (x_0, y_0) er en tilnærmet løsning til (A.1) og (A.2), således at

$$F(x_0 + dx, y_0 + dy) = 0 \tag{A.3}$$

og

$$G(x_0 + dx, y_0 + dy) = 0 \tag{A.4}$$

hvor dx og dy er "små" størrelser.

Rækkeudvikles F og G i Taylorrækker, hvor kun 1. ordens led medtages, kan (A.3) og (A.4) omskrives til

$$F(x_0, y_0) + dx\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + dy\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0 \tag{A.5}$$

og

$$G(x_0, y_0) + dx\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + dy\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 = 0 \tag{A.6}$$

Ligningerne (A.5) og (A.6) løses mht. dx og dy , hvilket kan ske med en standardmetode (fx Gauss-elimination), da ligningerne er lineære mht. (dx, dy) .

Matricen

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

betegnes Jacobi-matricen og dens elementer kan beregnes enten analytisk eller numerisk.

Herefter findes en bedre tilnærmet løsning (x_1, y_1) , hvor

$$x_1 = x_0 + dx \quad (\text{A.8})$$

samt

$$y_1 = y_0 + dy \quad (\text{A.9})$$

Er korrektionerne (dx, dy) tilstrækkelig små, dvs. hvis

$$\Delta = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} < \varepsilon \quad (\text{A.10})$$

hvor ε er et passende lille tal, accepteres (x_1, y_1) som løsningen til ligningssystemet. I modsat fald gentages beregningerne med (x_1, y_1) som den tilnærmede løsning.

A.2 Eksempel på opstilling og løsning af ligningssystem

Nu vises beregningernes principielle forløb for $N = 2$, dvs. RB opfyldes i 3 punkter af overfladen. Det skal bemærkes, at $N = 2$ er valgt af skrive tekniske grunde og normalt vil det ikke give en tilstrækkeligt nøjagtig løsning.

Da man antager, at bølgen er symmetrisk omkring bølgetoppen, skal de 3 punkter blot placeres på den halve bølgelængde. Se Fig. A.1.

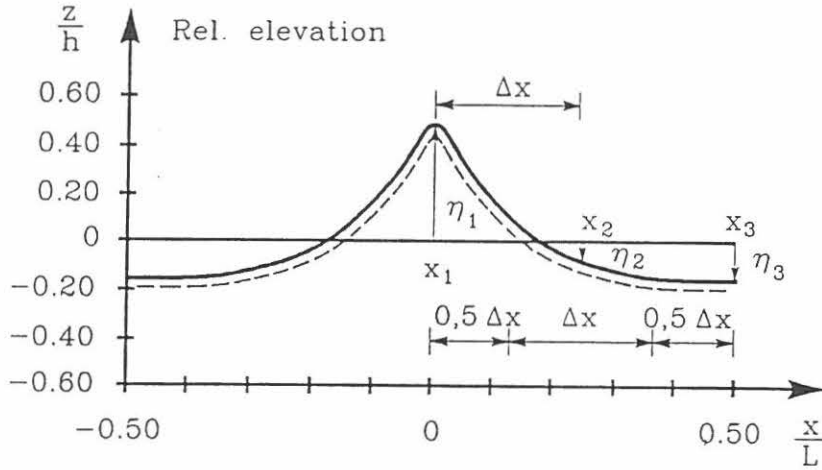
Punkterne placeres normalt med lige stor afstand, dvs.

$$\Delta x = \frac{0.5 \cdot L}{N} \quad (\text{A.11})$$

Man kunne godt forledes til at tro, at nøjagtigheden ville blive væsentlig forøget ved at placere flere punkter nær bølgetoppen og færre i dalen. Testberegninger viser dog, at dette ikke er tilfældet, se Fenton (1980).

Givet : h, T, H, \bar{q}

Ubekendte : $c_{rel}, c_{abs}, B_1, B_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3, Q, R, L$ ($= 2N + 6 = 10$) (A.12)



Figur A.1: Definitionsskitse, $N = 2$.

Kinematisk RB , dvs. ligning (55), giver i punktet (x_1, η_1) :

$$\begin{aligned}
 c_{rel}(\eta_1 + h) + B_1 \frac{\sinh(k(\eta_1 + h))}{\cosh(kh)} \cos(kx_1) \\
 + B_2 \frac{\sinh(2k(\eta_1 + h))}{\cosh(2kh)} \cos(2kx_1) + Q = 0
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Tilsvarende udtryk findes i (x_2, η_2) og (x_3, η_3) .

Dynamisk RB , dvs. ligning (56), giver i punktet (x_1, η_1) :

$$\begin{aligned}
 g\eta_1 \\
 + \frac{1}{2} \left(-c_{rel} - kB_1 \frac{\cosh(k(\eta_1 + h))}{\cosh(kh)} \cos(kx_1) - 2kB_2 \frac{\cosh(2k(\eta_1 + h))}{\cosh(2kh)} \cos(2kx_1) \right)^2 \\
 + \frac{1}{2} \left(-kB_1 \frac{\sinh(k(\eta_1 + h))}{\cosh(kh)} \sin(kx_1) - 2kB_2 \frac{\sinh(2k(\eta_1 + h))}{\cosh(2kh)} \sin(2kx_1) \right)^2 \\
 - R = 0
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

tilsvarende udtryk findes i (x_2, η_2) og (x_3, η_3) .

Ligning (57), dvs. $\bar{\eta} = 0$, tilnærmes med:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \eta_i \Delta x_i = 0$$

hvor $\Delta x_i = \Delta x$ for $i = 2, \dots, N$ og $\Delta x_i = 0.5\Delta x$ for $i = 1$ og $i = N + 1$.

I dette tilfælde findes med $\Delta x = \frac{L}{4}$:

$$\frac{L}{8} \eta_1 + \frac{L}{4} \eta_2 + \frac{L}{8} \eta_3 = 0 \quad (\text{A.15})$$

$H = \eta_{max} - \eta_{min}$, dvs. ligning (58), bliver til

$$H - (\eta_1 - \eta_3) = 0 \quad (\text{A.16})$$

$L = c_{abs} \cdot T$, dvs. ligning (61) omskrives til

$$L - c_{abs} \cdot T = 0 \quad (\text{A.17})$$

og endelig kan $\bar{q} = Q + c_{abs}h$, dvs. ligning (65) udtrykkes som

$$Q + c_{abs}h - \bar{q} = 0 \quad (\text{A.18})$$

Hermed haves 10 ligninger af samme type som (A.1) og (A.2), og disse løses med anvendelse af Newton-Raphson iteration.

Jacobi-matricen (A.7) beregnes vha. numerisk differentiation. Dette er enkelt, og man undgår at skulle gennemføre omfattende analytiske korrektioner i Jacobi-matricen, hvis der foretages ændringer i de grundlæggende ligninger. Prisen for forenklingen er lidt større beregningstid.

Startgæt:

$$\begin{aligned} L &= L^{(1)}, \text{ dvs. 1. ordens værdien} \\ c_{rel} &= L/T \\ c_{abs} &= c_{rel} \\ Q &= -c_{rel}h \\ R &= 0.5 c_{rel}^2 \\ \eta_i &= \frac{H}{2} \cos(kx_i) \quad \text{for } i = 1, 2 \text{ og } 3 \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\pi H}{kT \tanh(kh)} \\ \text{og } B_2 &= 0 \end{aligned}$$

Udtrykket for B_1 er fundet ved at kræve w fra 1. ordens teori, ligning (5), lig med $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, ligning (54), idet $B_2 = 0$ antages.

Ved store værdier af H/h foretages en trinvis beregning, således at bølgehøjden forøges gradvis. Springet i bølgehøjde er valgt til $\Delta H = \frac{H}{8}$. Denne fremgangsmåde er nødvendig for at sikre konvergens med de benyttede 1. ordens værdier i startgættet. Endvidere tillader denne beregningsmåde, at den tidskrævende beregning af Jacobi-matricen kun skal foretages en gang for hvert H -trin.

A.3 Beregning af $\eta(x)$ efter Strømfunktionsteori- en

Når strømningssproblemet er løst, kendes

$$(x_i, \eta_i) \quad i = 1, 2, \dots, N + 1$$

Da man ønsker at kunne beregne $\eta(x)$ for vilkårlig værdi af x , må man enten interpolere i η -værdierne eller Fourier-opløse disse. Her benyttes Fourier-opløsning, da denne metode også kan give et mål for nøjagtigheden af beregningen, se nedenfor.

Generelt haves for en lige funktion, dvs. $\eta(-x) = \eta(x)$, med perioden L :

$$\eta(x) = a_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jkx) + b_j \sin(jkx))$$

$$\text{hvor } k = \frac{2\pi}{L}$$

$$a_j = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \eta(x) \cos(jkx) dx = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \eta(x) \cos(jkx) dx$$

$$\text{og } b_j = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \eta(x) \sin(jkx) dx = 0$$

Koefficienterne a_j findes ved en simpel numerisk løsning af integralerne:

$$a_0 = 0 \quad \text{jf. ligning (57) eller (A15)}$$

$$\text{og } a_j = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^{N+1} \eta_i \cos(jkx_i) \Delta x_i \quad j = 1, 2, \dots, N$$

I rækken for η er højeste tilladte værdi af j lig med N og ikke ∞ . Dette skyldes, at der er i alt $2N$ punkter til at beskrive hele bølgelængden, hvorfor den hurtigste svingning i Fourier-rækken bliver $\cos(Nkx)$. Se f.eks. Newland (1975), der viser, at kun svingninger med mindst 2 datapunkter pr. svingning kan beskrives.

Hermed kan $\eta(x)$ findes af

$$\eta(x) = 2 \sum_{j=1}^{N-1} a_j \cos(jkx) + a_N \cos(Nkx) \quad (\text{A.19})$$

Bemærk, at der ikke skal en faktor 2 på det N 'te led. Herved sikres, at (A.19) korrekt giver $\eta(x_i) = \eta_i$, dvs. Fourier-rækkens graf går gennem de punkter, der ligger til grund for rækken.

Nøjagtigheden kan anses for tilstrækkelig, hvis $a_N \ll a_1$, da dette vil give en overflade uden tendens til sekundære toppe. Er dette krav ikke opfyldt, må beregningen gentages med en større værdi af N .

A.4 Beregning af hastighed og acceleration efter Strømfunktionsteori

I det koordinatsystem (x_{rel}, z) der følger med bølgen haves jf. formel (54)

$$\psi(x_{rel}, z) = c_{rel}(z + h) + \sum_{j=1}^N B_j \frac{\sinh(jk(z + h))}{\cosh(jk)} \cos(jkx_{rel}) + Q$$

Da $u = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$, jf. (44), findes

$$u(x_{rel}, z) = -c_{rel} - \sum_{j=1}^N jkB_j \frac{\cosh(jk(z + h))}{\cosh(jkh)} \cos(jkx_{rel}) \quad (\text{A.20})$$

Da c_{rel} er bølgens udbredelseshastighed i forhold til vandmassen findes partikelhastigheden i det koordinatsystem (x, z) , der ikke bevæger sig i forhold til vandmassen

$$u(x, z) = - \sum_{j=1}^N jkB_j \frac{\cosh(jk(z + h))}{\cosh(jkh)} \cos(jk(x - c_{rel}t)) \quad (\text{A.21})$$

I ligning (A.21) er benyttet, at

$$x_{rel} = x - c_{rel}t \quad (\text{A.22})$$

Bevæger vandmassen sig endelig med hastigheden U i forhold til havbunden, kan u målt i det faste system (x_{abs}, z) findes som

$$u(x_{abs}, z) = U - \sum_{j=1}^N jkB_j \frac{\cosh(jk(z + h))}{\cosh(jkh)} \cos(jk(x_{abs} - c_{abs}t)) \quad (\text{A.23})$$

idet

$$x_{rel} = x_{abs} - c_{abs}t \quad (\text{A.24})$$

Tilsvarende findes

$$w(x_{abs}, z) = - \sum_{j=1}^N jk B_j \frac{\sinh(jk(z+h))}{\cosh(jkh)} \sin(jk(x_{abs} - c_{abs}t)) \quad (\text{A.25})$$

Accelerationen i vandret retning findes af:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.26})$$

Da $\frac{\partial u}{\partial t} = (-c_{abs}) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, idet bølgen jo bevæger sig uden at ændre form, kan (A.26) omskrives til

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-c_{abs} + u) \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.27})$$

hvor u og w findes af (A.23) og (A.25). Tilbage er blot at finde $\frac{\partial u}{\partial x}$ og $\frac{\partial u}{\partial z}$, hvilket sker ved at differentiere (A.23). Resultatet er:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j=1}^N (jk)^2 B_j \frac{\cosh(jk(z+h))}{\cosh(jkh)} \sin(jk(x_{abs} - c_{abs}t)) \quad (\text{A.28})$$

samt

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \sum_{j=1}^N (jk)^2 B_j \frac{\sinh(jk(z+h))}{\cosh(jkh)} \cos(jk(x_{abs} - c_{abs}t)) \quad (\text{A.29})$$

Endelig findes accelerationen i lodret retning af

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.30})$$

Da $\frac{\partial w}{\partial t} = (-c_{abs}) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$, idet bølgen jo bevæger sig uden at ændre form, kan (A.30) omskrives til

$$\frac{dw}{dt} = (-c_{abs} + u) \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.31})$$

hvor u og w findes af (A.23) og (A.25) og $\frac{\partial w}{\partial x}$ og $\frac{\partial w}{\partial z}$ findes ved at differentiere (A.25). Resultatet er:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = - \sum_{j=1}^N (jk)^2 B_j \frac{\sinh(jk(z+h))}{\cosh(jkh)} \cos(jk(x_{abs} - c_{abs}t)) \quad (\text{A.32})$$

samt

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \sum_{j=1}^N (jk)^2 B_j \frac{\cosh(jk(z+h))}{\cosh(jkh)} \sin(jk(x_{abs} - c_{abs}t)) \quad (\text{A.33})$$