Spilteori

Oplæg og workshop

Matematiklærerforeningen Aarhus, 18/11-2022

Jacob Rubæk Holm

jrh@business.aau.dk

Aalborg University Business School

Workshop

Analysere et par spil og spille et enkelt spil

Opgave 1: Spille et spil

Opgave 1: Spille et spil

Et spil om samarbejde

- Til dette spil skal I hver bruge en internetbrowser. Det fungerer perfekt på mobiltelefon, men det kan også være på en computer.
- gå ind på `classex.uni-passau.de`
- Øverst vælges 'Aalborg University'. Derunder vælges 'Microeconomics 2' og til sidst vælges 'participant'. Koden er **aaubs**
- I skal gøre dette hver især og uden at kommunikere med hinanden. I skal spille alene. Der er præmier til de tre, som ender med flest point.

Opgave 1: Spille et spil

Runder

- Spillet fungerer ved, at I indeles i grupper af fire. Inddelingen er anonym, så I ved ikke hvem de resterende tre i gruppen er.
- I forbliver i den samme gruppe af fire hele spillet.
- Der er 10 runder og en runde af spillet forløber således:
  1. I starter hver runde med 20 'tokens' hver.
  2. Hver deltager beslutter hvor mange tokens hun/han vil beholde, og hvor mange hun/han vil bidrage til puljen for det *fælles gode*
  3. Payoffs udregnes (eksempler slide 6):
     - Hver token man har beholdt givet 1 point
     - Hver token i det fælles gode bliver til 1,6 point, som fordeles ligeligt (dvs. 0,4 point til hver i gruppen)
- Går fire op i antallet af deltagere til workshoppen i dag?

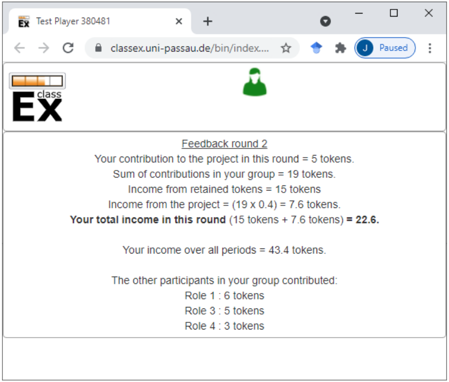
Opgave 1: Spille et spil

Eksempler

1. Hvis alle fire spillere bidrager med 0 tokens: Der er intet afkast fra det fælles projekt. Alle får 20 point for deres tokens i lommen, og gennemsnitspayoff for gruppens fire medlemmer er 20.
2. Hvis alle fire spillere bidrager med 20 tokens: der er 80 tokens i projektet og alle får $80 * 0,4 = 32$ point som afkast fra projektet, hvilket også er gennemsnittet for gruppens fire medlemmer da ingen har tokens tilbage i lommen.
3. Hvis tre medlemmer bidrager med 20 og det sidste medlem bidrager med 0, så får de første tre $0 + 60 * 0,4 = 24$ i payoff som afkast fra det fælles gode, mens den fjerde får $20 + 60 * 0,4 = 44$ da den fjerde både nyder afkastet fra det fælles projekt og har 20 tokens i lommen. Gennemsnitter for gruppen bliver da $(3 * 24 + 44)/4 = 29$.

- Det er altså optimalt at samarbejde, men der er incitament til at free-ride hvis man vil vinde spillet.

Opgave 1: Spille et spil



- Figuren viser udregningen som den ser ud på spillerens skærm.
- Spilleren bidrog med 5 tokens og har derfor 15 tilbage i lommen.
- Der var i alt 19 tokens i det fælles gode, så hver får 7,6 afkast fra det fælles gode.
- Spilleren får i alt 22,6 point i denne runde og har nu 43,4 point i alt over alle runder indtil nu

Opgave 1: Spille et spil

Spørgsmål?

-

Opgave 1: Spille et spil

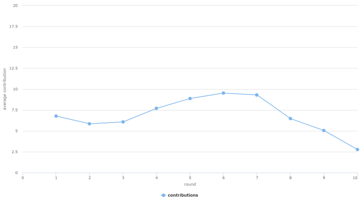
Afrunding: Fangernes dilemma

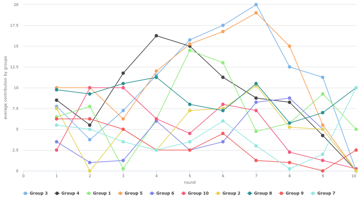
- Spillet er en klassisk model, der hedder fangernes dilemma.
  - Der er én Nash-ligevægt, og det er også en ligevægt i dominerende strategier. Men den er paretoinferiør.
- I fangernes dilemma er Nash-ligevægten, at alle spillere undlader at samarbejde
- Rationelt set, så burde dette også være tilfældet hvis spillet spilles over flere runder.
- Bortset fra hvis antallet af runder er ukendt eller evt. uendeligt.
- Men sådant går det ikke i virkeligheden. Efter nogle runder finder folk ud af at samarbejde. Men samarbejdet bryder sammen hen mod spillets afslutning

Opgave 1: Spille et spil

Resultat fra lignende forsøg med studerende, 2021

- Højre: gennemsnitsbidrag til det fælles gode per gruppe.
- Venstre: Samlet gennemsnit over alle grupper.





- Venstre: I mest samarbejde i de midt-sene runder
- Højre: Men stor variation på gruppeniveau

Opgave 2: At tage højde for tilfældige udfald

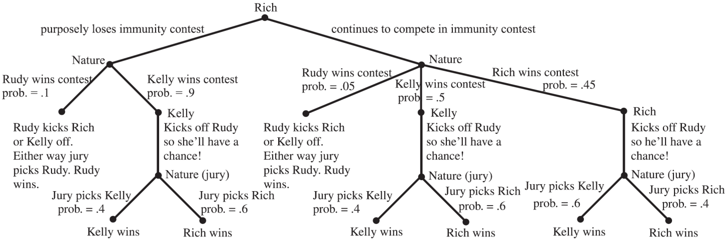
Opgave 2: At tage højde for tilfældige udfald

Robinson Ekspeditionen (Survivor)

- Afslutningen på 1. sæson (år 2000) bruges i mange grundbøget i spilteori
- Den mest informative video jeg kunne finde kan ses her. Spring frem til 4:08 og se hvordan vinderen, Rich, regnede ud at hans bedste strategi var at tabe den sidste 'immunity challenge' med vilje

  `https://www.youtube.com/watch?v=BDTCGXLpDCU`
- På næste side er spillet opstillet i ekstensiv form

Opgave 2: At tage højde for tilfældige udfald



Kilde: figur 4.9 fra Schechter og Gintis (2016)

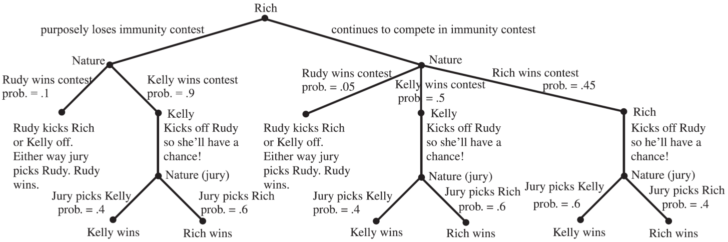
- 'Immunity Challenge' er en udholdenhedskonkurrence.
- 'Naturen' bestemmer vinderen med sandsynligheder som vist i figuren
- Den, som vinder, af de tre tilbageværende (Rich, Rudy, Kelly) vælger hvem af de to andre, der skal følge vinderen til finalen, hvor en jury af tidligere deltagere skal stemme om den endelige sæsonvinder

Opgave 2: At tage højde for tilfældige udfald

Argumenter for sandsynlighederne

- Rudy er en ældre herre mens Kelly har høj udholdenhed. Hvis konkurrencen fortsætter har Rudy lav chance for at vinde og Kelly har lidt højere chance end Rich
- Hvis Rudy er blandt de to sidste, så vælger juryen med sikkerhed ham som sæsonvinder
- Hvis Kelly og Rich er blandt de sidste, har de i udgangspunkt lige chancer for at blive sæsonvinder, men den som valgte at smide Rudy ud, vil have lavere sandsynlighed end den anden

Opgave 2: At tage højde for tilfældige udfald



2.a Hvis Rich taber 'immunity Challenge' med vilje, hvad er så sandsynligheden for at hhv. Rich, Rudy eller Kelly bliver sæsonvinder?

2.b Hvis Rich ikke taber 'immunity Challenge' med vilje, hvad er så sandsynligheden for at hhv. Rich, Rudy eller Kelly bliver sæsonvinder?

Opgave 3: Find ligevægte

Opgave 3: Find ligevægte

Spring over opgaver 3?

- Opgave 4 bygger videre på Jacobs problemer med en brugt cykel fra tidligere i dag
- Men opgave 4 kan være lidt svært fordi den er ret abstrakt
- Opgave 3 er grundlæggende den samme type øvelse, men med konkrete payoffs
- Det kan derfor være en god ide at lave opgave 3 som opvarmning til opgave 4

Opgave 3: Find ligevægte

Jacob og Louise

- Jacob fra AAU Business School har set sig lun på Louise fra institut for folkesundhedsvidenskab
  - Og omvendt
- Lørdag aften har de aftalt en date. De er begge taget ind til byen, men begge har glemt deres telefoner hjemme
- Louise vil helst i biografen. Jacob vil helst på brætspilscafe
- Louise vil hellere på brætspilscafe med Jacob end i biografen alene; og tilsvarende for Jacob
- (Ja; kønsstereotypt men det var ca sådan jeg mødte min kone)
- Payoffs næste slide

Opgave 3: Find ligevægte

Spillet har følgende payoff-matrice

Payoffs π (Jacob π_J, Louise π_L)		Louise: Brætspilscafe	Louise: Biograf
Jacob	Brætspilscafe	$(3, 1)$	$(0, 0)$
	Biograf	$(0, 0)$	$(1, 3)$

1. Et klassisk spil for et koordineringsproblem.
2. To Nash-ligevægte, og agenterne foretrækker hver sin.

Opgave 3: Find ligevægte

Signal til at løse koordineringsproblemet

- Hvis Jacob kunne sende et signal til Louise, så kunne hun måske udlede hans strategi
- Jacob kan sende Louise blomster, men uden kort så han kan ikke skrive en besked
- Jacob og Louise har nu fire mulige strategier hver. Jacob:
  1. sc: send blomster, gå til cafe
  2. sb: send blomster, gå til bio
  3. ic: send ikke blomster, gå til cafe
  4. ib: send ikke blomster, gå til bio
- Louise strategier viser hvad hun gør hhv. hvis hun får blomster og hvis hun ikke får blomster:
  1. cc: Gå til cafe uanset om hun får blomster eller ej
  2. cb: Gå til cafe hvis hun får blomster, gå til bio hvis ikke
  3. bc: Gå til bio hvis hun får blomster, gå til cafe hvis ikke
  4. bb: Gå til bio uanset

Opgave 3: Find ligevægte

Payoff-matrice

Payoff-matricen følger af den simplere matrice på slide 19 med den forskel, at Jacobs payoff falder med 1, når han sender blomster. De koster jo penge og Jacob er lidt nærig.

Payoffs π (π_J, π_L)		Louise cc	cb	bc	bb
Jacob	sc	$(2, 1)$	$(2, 1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$
	sb	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, 3)$	$(0, 3)$
	ic	$(3, 1)$	$(0, 0)$	$(3, 1)$	$(0, 0)$
	ib	$(0, 0)$	$(1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, 3)$

3.a Brug 'bedste reaktioner' til at finde Nash-ligevægte (der er fire)

3.b Iterativ eliminering af dominerede strategier giver én Nash-ligevægt. Find denne.

Opgave 3: Find ligevægte

Fortolkning af opgave 3

- Hvis man bare kigger på Nash-ligevægte er der stadig et koordineringsproblem.
- Men med baglæns induktion kan agenterne komme frem til den anden agents rationelle handling, hvilket leder til én af de fire Nash-ligevægte.
- Den baglæns induktion kan beskrives i fem trin:

1. Jacob har mulighed for at sende et signal, men signalet har en omkostning. Denne omkostning er så stor, at Jacob er indifferent mellem **a)** gå på brætspilscafe alene og ikke købe blomster og **b)** gå i biografen med Louise hvis det betyder, at hun også skal have blomster. Derfor elimineres *sb*.
2. Louise vil derfor aldrig tolke blomster som signal for at hun skal gå til bio. Derfor elimineres *bc* og *bb*.

- (fortsættes)

Opgave 3: Find ligevægte

Fortolkning af opgave 3

3. Jacob vil bruge signalet: sende blomster og gå på cafe end undlade at sende og gå i bio. Så *ib* elimineres.
4. Nu har Jacob kun strategier tilbage, hvor han ender på cafe. Så Louise kan eliminere *cb* og ender med strategien *cc*.
5. Louise går dermed altid på cafe. Der er ingen grund til at sende blomster for Jacob og *sc* elimineres. Jacob ender med strategien *ic*.

- Brug af signalet ville medføre, at Jacob aldrig går i bio. Louise går derfor altid på cafe og signalet bliver en unødig omkostning for Jacob. Alene muligheden for signalet har derfor løst koordineringsproblemet.
- Signaler er et typisk værktøj til at løse koordineringsproblemer. Men også fx asymmetrisk information.

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Asymmetrisk information: Kan man stole på eksperter?

- Allerede på andendagen efter Jacob har købt sin nye (brugte) cykel sprænger slangen på vej på arbejde.
- Jacob vil have ny slange og dæk monteret hos en cykelmekaniker.
- Det kan ikke undgås at mekanikeren også vurdere cyklens stand og foreslår nogle udbedringer
- Jacob ved strengt taget ikke selv om cyklen er i god stand eller ej. Men det ved mekanikeren. Hun kan udnytte Jacobs manglende viden til at lave alt for mange udbedringer.

→ Et spil med asymmetrisk information

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Et spil med asymmetrisk inforation

1. En spiller man kalder *naturen* vælger først om cyklen er i god stand eller i dårlig stand
2. Cykelmekanikeren observerer naturens valg og skal selv vælge, om hun vil meddele at cyklen er i god stand eller i dårlig stand
3. Til sidst vælger Jacob, om han vil stole på mekanikerens besked og få lavet det foreslåede udbedringer. Jacob ved ikke selv om cyklen er i god stand eller ej (naturens valg)

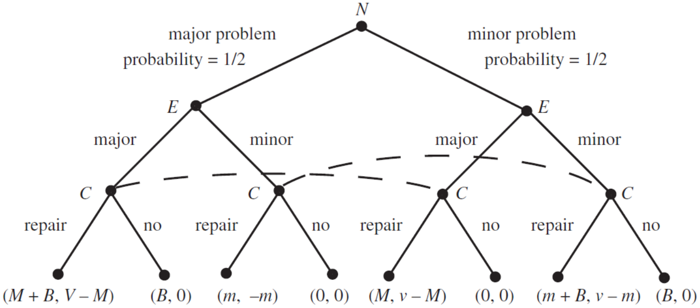
Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Payoffs

- M, m er regning for udbedringer ved hhv. dårlig stand (mange udbedringer, stor regning) og god stand (få udbedringer, lille regning).
- V, v er værdien for Jacob af at få udbedret en cykel i hhv. dårlig og god stand
- B er mekanikers omdømme-boost fra korrekt diagnose
- Antag $V > M > v > m > 0$ og $B > m$
- Fx: God stand, ærligt diagnosticeret og Jacob vælger af få cyklen udbedret:
  - $\pi_{Mekaniker} = m + B$
  - $\pi_{Forbruger} = v - m$

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Spillet (Figur 4.11 fra Schecter og Gintis, 2016)



N: naturen. E: Mekaniker. C: Jacob. Første payoff til mekaniker. 'major' = mange udbedringer; dårlig stand. Stiplet linje viser *informationssæt*. Bemærk at naturen vælger dårlig/god stand med 50/50.

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Strategier

- Jacob har fire muligheder:
  1. *bb*: Udbedring hvis *meddelt* dårlig stand og udbedring hvis *meddelt* god stand
  2. *bi*: Udbedring hvis *meddelt* dårlig stand, ingen udbedring hvis *meddelt* god stand
  3. *ib*
  4. *ii*
- Mekaniker har i princippet også fire muligheder (hvad gør hun hvis hun *observerer* hhv. dårlig/god stand). Men man vil se, at kun to er relevante
  1. U: Uærlig. Sig cyklen er i dårlig stand uanset den egnetlige stand
  2. Æ: Ærlig. Meddel cyklens egnetlige stand til Jacob

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Payoff-matricen

Matricen følger af spiltræet hvor payoffs vægtes med sandsynlighederne for naturens valg

Payoffs π (π_J, π_C)		Cykelmekaniker: Æ	Cykelmekaniker: U
Jacob	bb	$\left(\frac{V+v-M-m}{2}\right),\left(B+\frac{M+m}{2}\right)$	$\left(\frac{V+v}{2}-M\right),\left(\frac{B}{2}+M\right)$
	bi	$\left(\frac{V-M}{2}\right),\left(B+\frac{M}{2}\right)$	$\left(\frac{V+v}{2}-M\right),\left(\frac{B}{2}+M\right)$
	ib	$\left(\frac{v-m}{2}\right),\left(B+\frac{m}{2}\right)$	$(0),\left(\frac{B}{2}\right)$
	ii	$(0),(B)$	$(0),\left(\frac{B}{2}\right)$

- Antagelser (slide 27): $V > M > v > m > 0$ og $B > m$

4.a Hvis $B > M$ så er der præcis én Nash-ligevægt. Find denne

4.b Hvis i stedet $M - m > B$ og $(V+v)/2 > M$ så der to Nash-ligevægte. Find disse

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Løsning, opgave 4

4.a $(Æ, bb)$ er en Nash-ligevægt. Cykelmekanikere er ærlige og Jacob får udbedret cyklens stand uanset hvad mekanikeren meddeler

4.b (U, bb) og (U, bi) er Nash-ligevægte. Cykelmekanikeren er uærlige og Jacob får udbedret uanset hvad, der meddeles (bemærk: uærlige mekanikere rapporterer cyklens stand som dårlig uanset naturens valg / den egentlige stand så kun det første bogstav i Jacobs strategi er relevant)

Opgave 4: Asymmetrisk information - Er cyklen i god eller i dårlig stand?

Fortolkning, opgave 4

- Hvornår er alle eksperter ærlige ifølge modellen? Når boost til omdømme opvejer monetær gevinst fra selv den store regning.
- Hvornår er alle eksperter uærlige ifølge modellen? Når forskellen på store og små regninger er større end boostet **og** det i gennemsnit kan betale sig for kunden at betale den store regning for det lille problem.
- Kan bruges som udgangspunkt for mange forskellige analyser af eksperters rådgivning
- Signaler og asymmetrisk information:
  - Garanti (også uformelt. "*du kommer bare igen hvis der er noget, så ordner vi det uden beregning*")
  - Certificering af eksperten
  - Foruden signaler: gentagelser af spillet (jf. fangernes dilemma). Brug den samme mekaniker. Brug én du får anbefalet. Brug én, du kender personligt ...

Vejledende løsning

Vejledende løsning

Løsninger

- De vejledende løsninger præsenteres i en video, som findes ved hjælp af nedenstående link
- Opgaverne er ikke forklaret i videoen, så hvis man ikke har sat sig ind i opgaven, så vil det være svært at følge videoen.
- `https://panopto.aau.dk/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=8b5b3324-7b9c-42cf-8f93-af46011761e7`