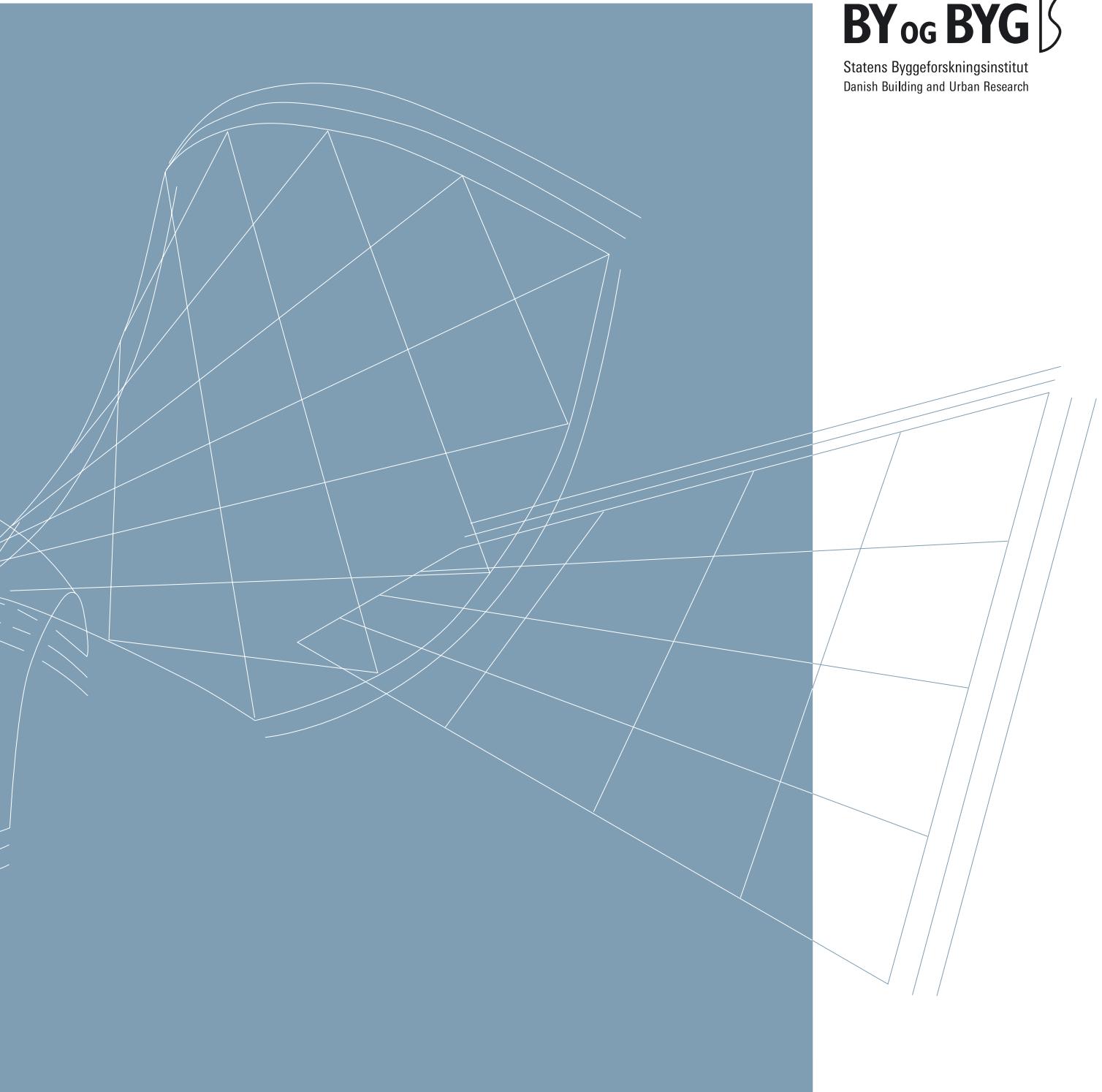


Ph.d.-afhandling

# Skalkonstruktioner

Metoder til afklaring af sammenhængene mellem form, stabilitet, stivhed og understøtninger



# Skalkonstruktioner

Metoder til afklaring af sammenhængene mellem form, stabilitet, stivhed og understøtninger

Ph.d.-afhandling

Henrik Almegaard

Titel	Skalkonstruktioner
Undertitel	Metoder til afklaring af sammenhængene mellem form, stabilitet, stivhed og understøtninger. Ph.d.-afhandling
Udgave	1. udgave
Udgivelsesår	2003
Forfatter	Henrik Almegaard
Sprog	Dansk
Sidetæl	171
Litteratur- henvisninger	Side 109-110
English summary	Side 111-112
Emneord	Skalkonstruktioner, statik, stabilitet, stivhed
ISBN	87-563-1165-6
Pris	Kr. 300,00 inkl. 25 pct. moms
Tegninger	Peter Sandström
Omslag	Eikill/Tønner
Tryk	BookPartner, Nørhaven digital A/S
Udgiver	By og Byg Statens Byggeforskningsinstitut, P.O. Box 119, DK-2970 Hørsholm E-post <a href="mailto:by-og-byg@by-og-byg.dk">by-og-byg@by-og-byg.dk</a> <a href="http://www.by-og-byg.dk">www.by-og-byg.dk</a>

Eftertryk i uddrag tilladt, men kun med kildeangivelsen: *Skalkonstruktioner. Metoder til afklaring af sammenhængene mellem form, stabilitet, stivhed og understøtninger. Ph.d.-afhandling. By og Byg 2003.*

# Forord

Denne rapport er et resultat af et ph.d. projekt gennemført af civilingeniør Henrik Almegaard. Projektets første del, der fandt sted i perioden januar 1989 – december 1991, blev finansieret af ForskerAkademiet, Boligministeriet og Statens Byggeforskningsinstitut. Projektets anden og afsluttende del fandt sted i perioden maj 2001 til maj 2002.

Forfatteren har under hele forløbet været tilknyttet Kunstakademiets Arkitektskole (KA), under første del Institut for Byggeteknik, under anden del Institut 2. Professor Boje Lundgaard (KA) var hovedvejleder på projektets første del mens lektor Ole Vanggaard (KA) har været hovedvejleder på projektets anden del. Seniorforsker Klavs Feilberg Hansen, By og Byg, har været medvejleder under hele forløbet.

Afhandlingen blev forsvaret ved en offentlig forelæsning den 6. december 2002 på Kunstakademiets Arkitektskole og godkendt af bedømmelsesudvalget bestående af Professor Arne Eggen, Arkitekthøgskolen i Oslo, Lektor Arne Rathkjen, Aalborg Universitet og Lektor Per Møldrup, Kunstakademiets Arkitektskole, som var formand for bedømmelsesudvalget.

By og Byg, Statens Byggeforskningsinstitut, vil afslutningsvis takke ovennævnte parter for et godt samarbejde.

By og Byg, Statens Byggeforskningsinstitut  
Afdeling for Byggeteknik og Produktivitet  
April 2003

*Jørgen Nielsen*  
Forskningschef



# Forfatterens forord

En skal er en rumlige konstruktion og er rigtigt udformet også en materiale-økonomisk konstruktion.

Skaller opbygget af plane elementer er byggeteknisk og dermed økonomisk interessante fordi de kan produceres og monteres som alt andet industrialiseret byggeri.

Men skalkonstruktioner er geometrisk og statisk ikke let tilgængelige, hvilket blandt andet viste sig ved projekteringen af Operahuset i Sidney.

Denne afhandling er et forsøg på at gøre skalkonstruktioner lidt mere tilgængelige ved at afdække de grundlæggende sammenhænge mellem form, stabilitet og stivhed, og udvikle enkle metoder til at udnytte disse i forbindelse med formgivning af skaller.

Opdeling af en krum flade i elementer – facettering – er en anden væsentlig del af formgivningen af denne type skaller. Jeg håber at der en dag bliver mulighed for at analysere og beskrive dette emne mere indgående.

At finde hensigtsmæssige former er et fælles mødepunkt for arkitektfaget og ingeniørfaget, og afdækning af konstruktive muligheder og begrænsninger er et forskningsområde, hvor ingeniørfaget kan bidrage til udvikling af arkitekturen.

I Danmark er dette område først og fremmest undersøgt i det forskningsmiljø, der opstod på Kunstakademiets Arkitektskole under ledelse af nu afdøde professor Jørgen Nielsen.

Denne afhandling er derfor udarbejdet som et led i betingelserne for erhvervelsen af en ph.d. grad i arkitektur. Lektor, akademiingeniør Ole Vanggaard har været vejleder.

En væsentlig del af arbejdet har fundet sted på Statens Byggeforskningsinstitut, By og Byg, og jeg vil her gerne takke instituttet, afdelingsleder Jørgen Nielsen samt ikke mindst Klavs Feilberg Hansen for interesse for projektet.

Endelig vil jeg gerne takke Peter Sandström og Eikill/Tonner for hjælp til tegninger og grafik.

Ordrup den 2.4.2003

Henrik Almegaard

# Indhold

Generel beskrivelse.....	7
Resume.....	7
Indledning .....	7
Baggrund .....	8
Indhold, metoder og forsøg.....	12
Resultater.....	15
Eksempler.....	18
Krumme fladers form.....	27
Fladegeometri.....	28
Konstruktioners stabilitet og stivhed.....	36
Grænseovergange.....	37
Stringermetoden.....	41
Indledning .....	41
Membranskaller .....	42
Plane stabile stangsystemer.....	42
Rumligt stabile stangsystemer.....	46
Stringersystemet.....	47
Understøtninger .....	52
Stringernes placering.....	57
Ikke-successivt opbyggede systemer.....	65
Membranskallers understøtningsbetingelser.....	73
Litteratur.....	76
Konklusion .....	81
Modeller.....	82
Fremstilling.....	82
Egenskaber.....	84
Anvendelse .....	86
Eksempler.....	87
Konklusion .....	98
Gitterberegninger .....	99
Eksempel.....	99
Litteraturliste.....	109
Summary .....	111
Bilag.....	113
Bilag 1    Membranteoriens ligevægtsligninger.....	113
Bilag 2    Snitkræfter .....	114
Bilag 3    Eksempler på anvendelse af stringermetode .....	116
Bilag 4    Flader, facetter og duale punkter.....	129
Bilag 5    Gitterresultater .....	131
Bilag 6    Modelresultater .....	142
Bilag 7    Skaller med rette rande .....	147
Bilag 8    Beregning af skivekonstruktioner .....	150
Bilag 9    Fuldsalamodel.....	155
Bilag 10   Modelark .....	169



# Generel Beskrivelse

## Resume

Formålet med afhandlingen har været at etablere et bedre grundlag for at træffe de rigtige valg i skitseringsfasen, hvor skallens udformning, understøtningsforhold og materialeforbrug fastlægges.

Der er udviklet og beskrevet tre metoder, som kan anvendes til dette og udarbejdet en oversigt over grundlæggende skalkonfigurationer,

## Indledning

Hidtil har det været betragtet som et faktum at kugleskaller skulle være understøttet langs hele randen for at være stabile. Vi ved alle, at en æggeskal er robust, så længe der ikke er hul i den, og at den næsten ikke kan holde til noget, når vi først har fået hul på den. Så noget kunne tyde på at ovennævnte antagelse er rigtigt, men det er den ikke.

Mange har ment at HP skaller med rette rande generelt er ustabile og i hvert fald, at de er ustabile, hvis de ikke bliver fuldstændigt fastholdt langs to rande. Det er heller ikke rigtigt.

En *skal* er en bærende konstruktion, der er formet som en enkelt- eller dobbeltkrum flade, og almindeligvis udført i et materiale, der kan optage og overføre både tryk- og trækkræfter. Skalkonstruktioners stivhed beror ikke så høj grad på materialets stivhed eller skaltykkelse, som på skallens krumning og understøtningsforhold. Tager man konsekvensen af dette, betragter man skallen som en membranskal, der er karakteriseret ved at bæreevnen ikke afhænger af tværsnittets bøjningsstivhed.

En *membranskal* er defineret som en skal, i hvilken de eneste snitkræfter der optræder, er membrankræfter, det vil sige normalkræfter og forskydningskræfter i tangentplanen.

Denne afhandling beskæftiger sig med værktøjer, der kan anvendes i skitseringsfasen til finde frem til en hensigtsmæssig udformning og understøtning af en membranskal.

der er både stabile og stive. En del af disse har ikke før været betragtet som stabile.

De tre metoder supplerer hinanden. I mange tilfælde vil man dog med oversigten over stabile og stive skalkonfigurationer, se side 17, og forsøg med simple modeller af den påtænkte skal, have et tilstrækkelig grundlag for at kunne vælge en sund konstruktion.

Mere præcist beskæftiger denne afhandling sig med spørgsmålet om hvordan en membranskal skal understøttes, så den for det første er *rumligt stabil*<sup>1</sup>, det vil sige sådan at alle lastpåvirkninger kan optages og føres til understøtningerne som membrankræfter, og for det andet har tilstrækkeligt *stivhed*, det vil sige så lastpåvirkningerne ikke fører til for store kræfter og deformationer i membranskallen.

Dette sker med udgangspunkt i stringermetoden, der er udviklet i forbindelse med dette forskningsprojekt. Stringermetoden anvender et systematisk opbygget stangsystem, det såkaldte stringersystem, som geometrisk og statisk model af membranskallen. Modellen beskriver sammenhængen mellem en membranskals rumlige stabilitet og dens understøtningsbetingelser, og kan anvendes til at finde tilstrækkelige understøtningsbetingelser for en membranskal af vilkårlig form.

Det viser sig imidlertid, at stabilitet er en nødvendig, men ikke en tilstrækkelig betingelse for at skallen kan opnå den nødvendige bæreevne.

Stabile skaller kan være så slappe, at de er ubrugelige i praksis. Der er af den grund beskrevet yderligere to metoder, henholdsvis forsøg med fysiske modeller i papir og gitterberegninger af stringersystemet, der kan anvendes

---

<sup>1</sup> En konstruktion, der er statisk og geometrisk bestemt betegnes som rumligt stabil.

des til at vurdere skallers stivhed. Konkrete forsøg og beregninger viser, at denne stivhed primært afhænger af skallens krumning, understøtningernes placering og de fri randes form.

Arbejdet bygger videre på den forskning i bærende konstruktioner, der har fundet sted på Kunstakademiets Arkitektskole med henblik på dels at kunne anskueliggøre sammenhængen mellem form og kraft bedre, dels at udvikle nye konstruktionsprincipper. Den direkte inspiration har været Erik Reitzels arbejde med minimal-konstruktioner, Ture Westers og Klavs Feilbergs arbejder med skivekonstruktioner og Ole Vanggards translationsskaller. Men som alle de nævnte er også jeg blevet inspireret af Jørgen Nielsen og hans arbejder, hvor fx momentfeltmetoden er et forbilledligt eksempel på hvordan en svært håndterligt matematisk begreb, nemlig spændingsfunktionen, kan anskueliggøres og gøres mere anvendeligt – i dette tilfælde til gitterkonstruktioner.

I afhandlingen er der fortrinsvis brugt eksempler fra arkitekturen, men de tre omtalte metoder kan anvendes på alle skaller.

## Baggrund

I praksis er en membranskal en skal, hvor bøjningskræfterne er så små at de kan negligeres, således at den med fordel kan betragtes og analyseres som membranskal. Omvendt viser det sig, at hvis en skal kan fungere som membranskal, er kravene til tykkelse almindeligvis så små, at man kan se bort fra skallens bøjningsstivhed.

Derved udnyttes materialerne kun til tryk eller træk, hvorved betingelserne for minimalkonstruktioner er til stede. Rigtigt udformet kan membranskaller derfor spænde over store arealer med et lille materialeforbrug.

Konkret kan membranskaller udformes som:

- glatte kontinuerte skaller fx armerede betonskaller (figur 1),
- glatte elementopdelte skaller fx teglskaller
- facetterede skaller, der fx kan udformes som
  - gitterskaller, hvor kanterne er bærende (figur 2)
  - skiveskaller, hvor fladerne er bærende (figur 3)
  - translationsskaller, hvor både kanter og flader er bærende.

Men også telthlader kan betragtes og analyseres som membranskaller (figur 4).



Figur 1. Glatte skaller i armeret beton, tribune på hippodromen i Zarzuela, nær Madrid, 1935. Arkitekter: C. Arniches, M. Dominguez, Ingeniør: Eduardo Torroja (Ordóñez og Vera 1999 p. 115).



Figur 2. Gitterskal, projektilustration til The great Court, British Museum, London 2000. Arkitekt: Forster & Partners, Ingeniør: Buro Happold (Forster and Partners).



Figur 3. Skiveskal, fuldsalamodel bygget på Statens Byggeforskningsinstitut, Hørsholm 1991. Se Bilag 9.



Figur 4. Teltkonstruktion, Amt für Abfallwirtschaft, München 1999. Arkitekt: Archermann und Partner, Ingeniør: Schlaich Bergemann und Partner (Baun mit Membranen 2000, p.1031).

Telte og uarmerede teglskaller har det til fælles, at spændingstilstandene for de tidsbegrænsede lasttilfælde, som fx vind, sne og nyttelast, hvor der både kan optræde både tryk- og trækkræfter, skal overlejres med en konstant spændingstilstand – af henholdsvis tryk fra egenvægt og træk fra forspændingen – for at sikre at konstruktionsmaterialet kun påvirkes af kræfter som det kan optage, nemlig tryk for teglskaller og træk for telte.

### Problematik

Fremgangsmåden ved beregning og dimensionering af skaller er normalt:

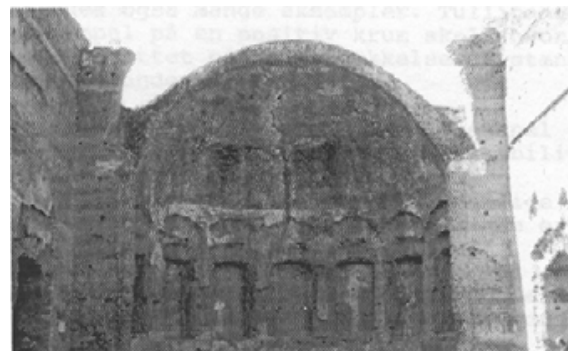
- 1 Analyse af spændingerne i skallen betraget som membranskal
- 2 Analyse af bøjningsbidrag nær de understøttede rande
- 3 Analyse af instabilitet (buckling).

Men inden da skal skallens udformning og understøtningsbetingelser være fastlagt. Dette finder sted i skitseringsfasen og er normalt en kompliceret opgave. Dels er skaller geometri karakteriseret ved at der findes mange forskellige skalformer, randforløb og understøtningsforhold. Dels har der generelt manglet klare beskrivelser af skaller stabilitetsforhold og metoder til at fastlægge udformning og understøtningsbetingelser, der sikrer at skallen er rumligt stabil og dermed kan betragtes som membranskal.

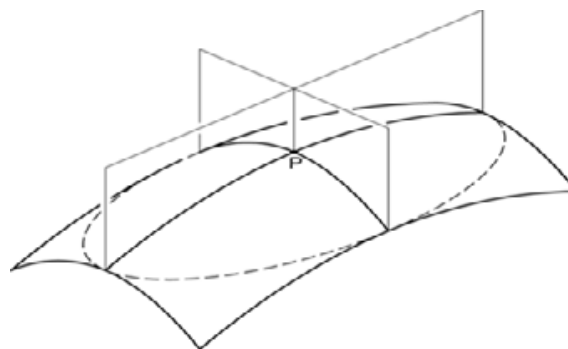
Med hensyn til geometrien kan krumme flader grundlæggende deles op i tre typer: positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme, hvor benævnelsen henviser til fortegnet for krumningsmålet, se kapitlet *Krumme fladers form*.

De positivt og negativt krumme flader er dobbeltkrumme, mens de nul-krumme er enkeltkrumme flader. Desuden kan skalflader sammensættes af områder med samme krumning, der skæres sammen, eller af områder med forskellige typer krumning, der enten skæres sammen eller løber glat sammen. Randene kan være rette, konkave eller konvekse og endelig kan randbetingelserne opdeles i tre typer, alt efter om randen i det afsnit understøttes i to retninger, i en retning eller om den er fri.

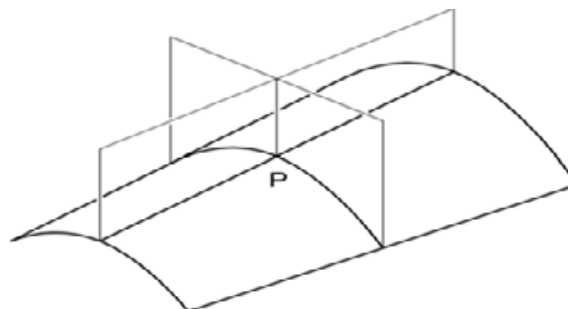
Med hensyn til stabiliteten er problemet hidtil blevet betragtet som at fastlægge udformning og randbetingelser, så skallen var rumligt stabil. Det er en udtalt forudsætning blandt praktikere og i næsten al litteratur om emnet, at når en



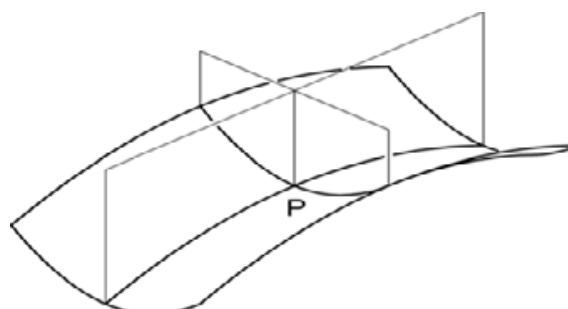
Figur 5. Uarmeret teglskal, Hadrian's villa, Tivoli.



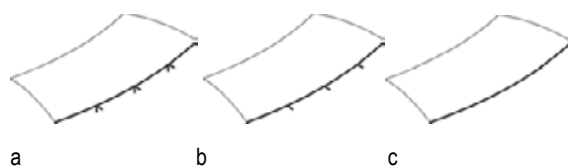
Figur 6. Positivt krum flade ( $K > 0$ ).



Figur 7. Nul-krum flade ( $K = 0$ ).



Figur 8. Negativt krum flade ( $K < 0$ ).



Figur 9. Randene kan være:  
a) understøttet i to retninger  
b) understøttet i en retning  
c) fri, dvs. ikke understøttet.

skal er stabil, er den også stiv og dermed anvendelig som bærende konstruktion. Men dette er en misforståelse, der beror på at der generelt har manglet tilgængelige metoder til at beskrive dette problemområde.

#### *Membranskallers stabilitet*

Beregning af kræfter i membranskaller sker sædvanligvis ved at opstille ligevægtsligningerne som anden ordens differentiaalligninger, hvis løsning afhænger af randbetingelserne. Men at fastlægge hvilke randbetingelser, der i en given situation sikrer at der eksisterer en løsning – det vil sige hvilke understøtningsbetingelser, der sikrer at skallen er stabil - er en vanskelig matematisk opgave. I litteraturen ses således ofte flere forskellige løsninger på det samme randbetingelsesproblem. De mest omfattende undersøgelser er udført af (Tarnai 1980a, 1981, 1983), men de har nok været for teoretiske til at få den store udbredelse og blive benyttet i praksis. Man har i stedet tyet til tommelfingerregler som "To avoid this unfavorable phenomenon we must not design and construct shells which are too shallow or too thin, and thin shells with free edges are also undesirable." (Csonka 1987, p. 213).

Et andet sted siges ligeud i en historisk gennemgang af analysemetoderne for hyperbolske paraboloider, at "... some shells exhibited structural defects. In general, where the designers were engineers with substantial experience in thin shell concrete structures, such defects did not arise." (Billington 1982 p. 25).

Hvis man betragter problemområdet som et landkort over alle mulige membranskalkonfigurationer - og hermed menes mulige kombinationer af krumninger, randformer og understøtninger - så kan man for det første sige, at der er veldefinerede områder, hvor vi ved at skallerne er stabile, og for det andet at der er mindre, men velafgrænsede områder, hvor vi ved at skallerne ikke er stabile.

Endelig er der usikre områder, indenfor hvilke vi ved, at der eksisterer ustabile tilfælde punktvis eller i delområder, men hvor vi ikke umiddelbart kan sige, hvor disse ustabile tilfælde befinder sig. Generelt findes der indenfor disse områder ikke simple geometriske regler, hvormed man kan afgøre om et givet tilfælde er stabilt eller ej. Men disse områder er blevet indskrænket i forbindelse med dette projekt, da en del af de sta-



Figur 10. Idrætshal, Tucker High School, Virginia, USA.



Figur 11. Den 14. september 1970 kollapsede tagkonstruktionen, der var sammensat af fire HP skaller ([www.ketchum.org/shells](http://www.ketchum.org/shells)).

bile tilfælde, der hidtil har befundet sig i dem, nu er blevet kortlagt med stringermetoden.

#### Membranskallers stivhed

For konkrete skalkonstruktioner er det imidlertid ikke tilstrækkeligt at sondre mellem stabile og ustabile tilfælde. I en del af de stabile områder, der støder op til ustabile områder på ovennævnte landkort, reduceres skallens stivhed jo tættere konstruktionens udformning kommer grænsen til det ustabile område - for helt at blive nul i grænsen. Princippet fremgår af (figur 12).

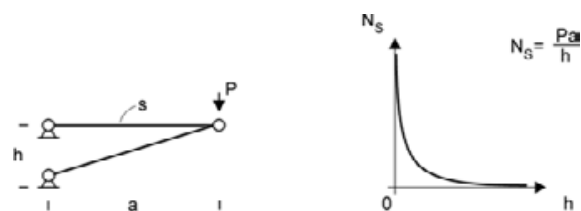
Dette gælder for eksempel udkragede positivt krumme skalflader, hvor beregninger og modelforsøg viser at stivheden normalt er meget lille, hvilket sandsynligvis er årsagen til at man har ment, at positivt krumme skaller med fri rande generelt var ustabile.

Man er kommet til at sætte lighedstegn mellem stabilitet og stivhed. Men mens en stiv membranskal er stabil, er en stabil membranskal er ikke nødvendigvis stiv. Og fordi stabilitets- og stivhedsforholdene ikke har været helt afklarede, har man ved udformning af skalkonstruktioner typisk holdt sig på "den sikre side" - måske for meget på "den sikre side". Hvilket betyder at man er gået langt uden om dette område, der ellers rummer interessante formgivningsmuligheder.

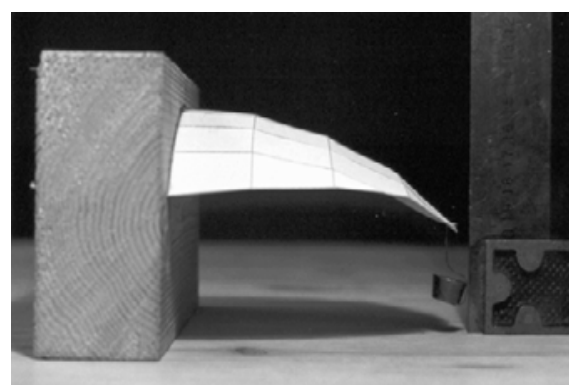
Disse muligheder er hidtil kun blevet udnyttet af nogle ganske få, som fx Heinz Isler (figur 14). Isler har da også fundet frem til disse former ved at gå en anden vej end den analytiske, nemlig ved at anvende hængemodeller og andre fysiske analogier, se fx (Billington 1982 p. 334).

#### Skalfladers geometri og stabilitet

En membranskals flade skal betragtes som en flade, der er bøjelig, men fuldkommen ustrækkelig. Med andre ord en flade, hvor kun afstandsforholdene og dermed krumningsmålet<sup>2</sup> i de enkelte punkter på fladen er givne.



Figur 12. Simpelt plant gittersystem, der illustrer stivhedsforholdene nær grænsen til nogle af de ustabile områder. For en given belastning øges kræfterne  $N_s$  - jo tættere konstruktionshøjden  $h$  kommer grænsen til det ustabile område - der her ligger ved  $h$  lig nul - hvor kræfterne går mod uendelig. Samtidig øges udbøjningen, hvilket betyder, at konstruktionens stivhed reduceres for helt at blive nul i grænsen (forudsat at tværsnittene er uændrede og materialet er lineærelastisk).



Figur 13. Udkraget positiv krum skalmodel under belastning, se kapitlet *Modeller*.



Figur 14. Skal i armeret beton, Garten Center Bürgi, Camorino, Schweiz 1973. Arkitekt og Ingeniør: Heinz Isler (Ramm & Schunk 1986).

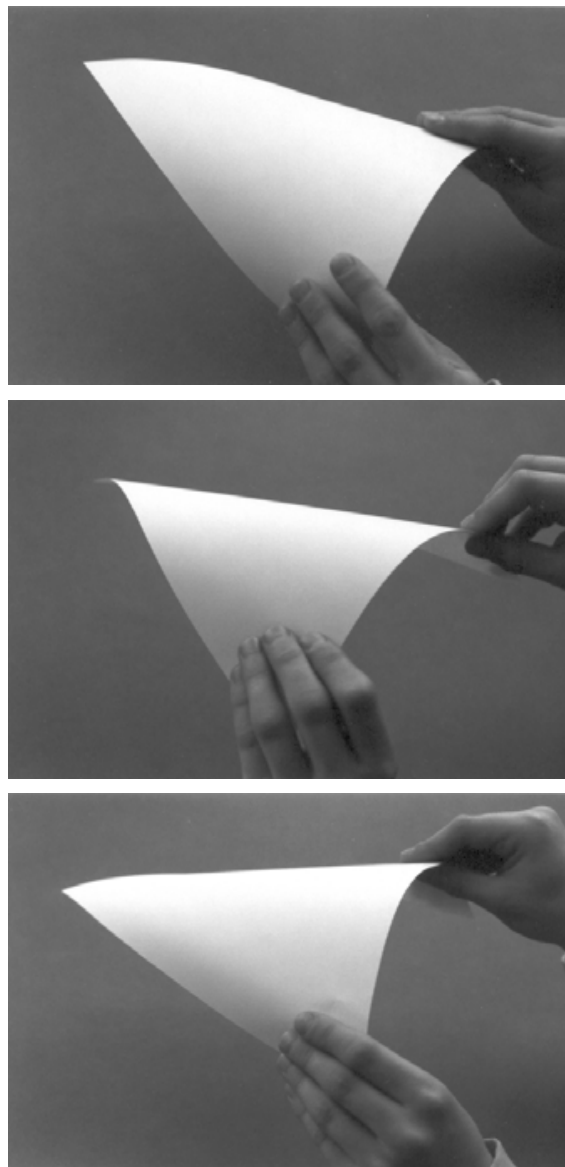
<sup>2</sup> Det ligger udenfor denne afhandlings rammer at vise dette, men det kan gøres ved at betragte fladen som en trekantfacetteret flade.



Dette betyder, at opgaven med at finde de randbetingelser, der gør at skalfladen er statisk bestemt, kan løses ved at finde de randbetingelser, der gør at skalfladen er geometrisk bestemt. Det betyder også, at for en geometrisk bestemt skalflade er det både krumningsmålet og de understøttede randes form, der bestemmer fladens form.

Tag fx et stykke papir og klip en trekant ud af det. Holder man nu fast langs den ene kant og krummer den lidt, dannes en krum – enkeltkrum – udkraget cylindrisk skalflade (gøres den fastholdte kant – den understøttede rand – cirkulær, bliver fladen en cirkulær cylinderflade) (figur 15a). Vrides den ene ende af randen i forhold til den anden, forbliver fladen cylinderformet, men frembringerne får en anden retning (figur 15b). Vrides begge ender af den understøttede rand i forhold til den fastholdte kants midte, fremkommer en kegleform (figur 15c).

Tilsvarende gælder positivt og negativt krumme flader, blot er randbetingelserne anderledes. En konsekvens af dette er, at det principielt er muligt at opbygge bevægelige skalkonstruktioner, hvor det er selve skalfladen, der udgør mekanismen.

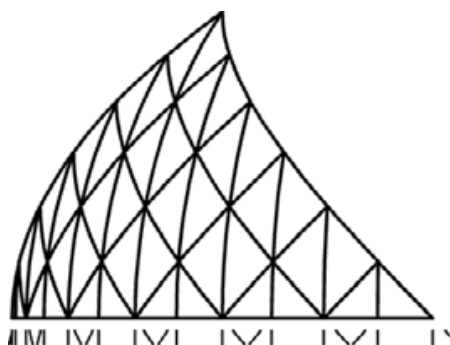


Figur 15 a, b og c. Et trekantet stykke papir danner en krum flade der er geometrisk bestemt, når den ene rand krummes og fastholdes.

## Indhold, metoder og forsøg

Afhandlingen omfatter foruden denne generelle beskrivelse, først to kapitler om henholdsvis geometri og statik, hvor en del af de grundlæggende begreber, der anvendes i resten af afhandlingen forklares. I de følgende tre kapitler redegøres herefter for de tre metoder, henholdsvis stringermetoden, anvendelse af modeller og for gitterberegninger, som beskrives kort nedenfor.

Bilagene omfatter først og fremmest en række eksempler på hvordan stringermetoden kan anvendes, forsøgsresultater fra modelforsøg og gitterberegninger, samt beskrivelse af et fuldskalaforsøg, der omtales kort nedenfor.



Figur 16. Eksempel på stringersystem. Systemet opbygges systematisk, så det danner en gitterflade, der består af tre gennemgående sæt af kæder af stænger, de såkaldte stringere. Understøtningerne er symboliseret som en kort streg i forlængelse af de stringere, som de er tilknyttet.

### Stringermetoden

I stringermetoden anvendes et stangsystem som en statisk model af membranskallen. Stangsystemet opbygges systematisk, så det danner en gitterflade, der består af tre gennemgående sæt af kæder af stænger, de såkaldte stringere<sup>3</sup> (figur 16).

Med udgangspunkt i elementære stangsystemers stabilitet og grundlæggende fladegeometri udledes nogle relativt simple betingelser for opbygningen af et stringersystem, for dets placering på fladen og for dets understøtninger. Ved at følge disse betingelser sikres at stringersystemet er stabilt, og dermed at membranskallen er stabil, når den understøttes som stringersystemet er understøttet.

Disse betingelser er sammenlignet og diskuteret med tilsvarende udsagn i litteraturen.

Der er opstillet en række grundlæggende systemer, der forenkler afklaringen af de forskellige understøtningsmuligheder for en given skalflade, og gør det let at opbygge stabile skaller, der er sammensat af flere flader (figur 17).

Stringermetoden er derpå afprøvet empirisk med forsøg med modeller, gitterberegninger og en fuldsalamodel – der alle har vist, at metoden leder til stabile skaller.

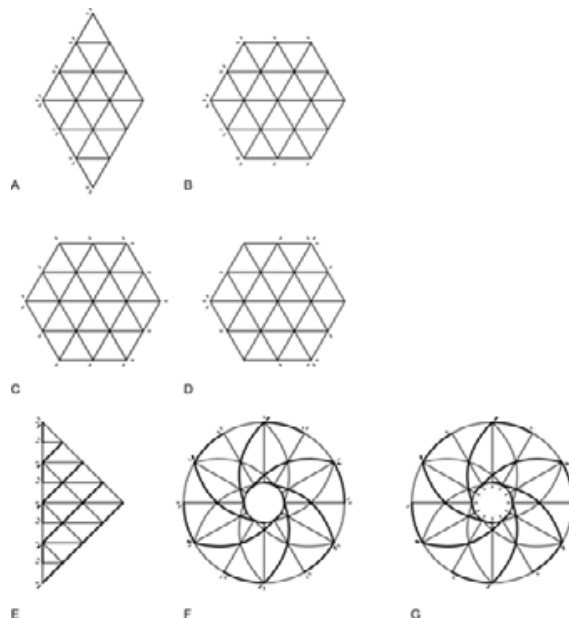
### Modeller

Skalmodeller opbygget af plane elementer, er lette at tegne og bygge takket være et computerprogram, der er udviklet på SBI, nu By og Byg. Modeller er et nyttigt redskab i skitseringsfasen og velegnede til statisk vurdering af skallerne.

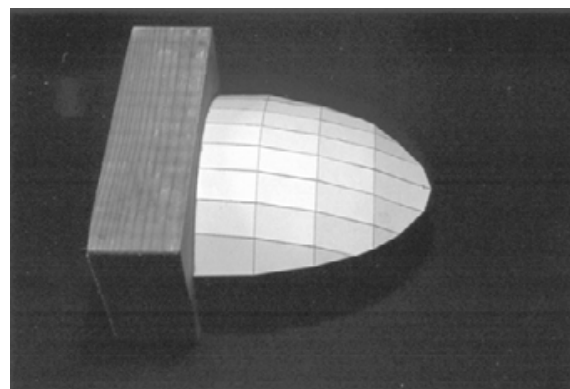
Modellerne kan anvendes til at finde nødvendige eller tilstrækkelige understøtningsbetingelser, hvis de fremstilles af et bøjeligt og tilnærmelsesvist ustrækkeligt materiale som fx papir.

Udføres modellerne som skalmodeller, viser de desuden skallerne stivhedsforhold korrekt, forudsat at både modeller og skaller konstrueres i elastiske materialer.

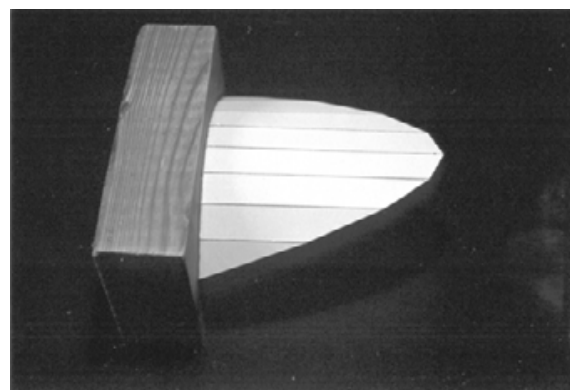
Ved at sammenligne flere modeller kan man endvidere finde frem til hvilken skalform, der er stivest og dermed mest materialeøkonomisk.



Figur 17. Grundlæggende stringersystemer. Disse systemer er grundlag for de grundlæggende skalkonfigurationer, der er vist i Figur 27.



Figur 18. Positivt krum skalmodel, se kapitlet *Modeller*.

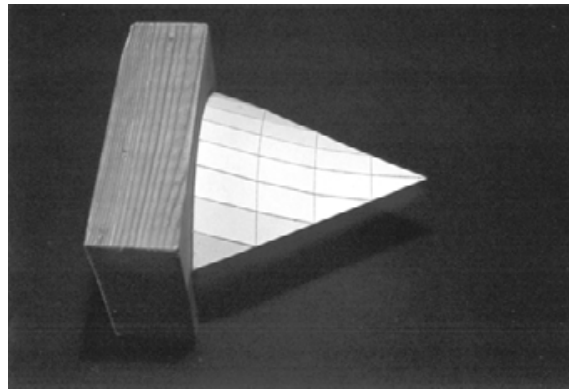


Figur 19. Nul-krum skalmodel, se kapitlet *Modeller*.

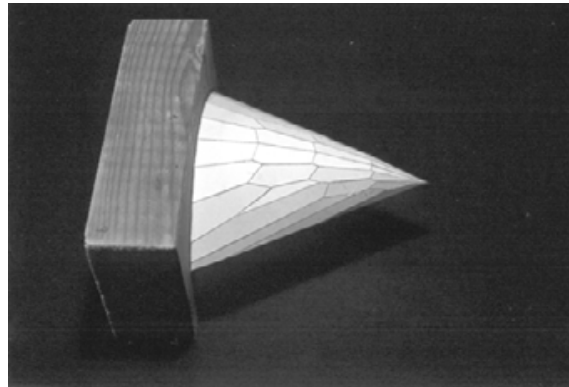
<sup>3</sup> Begrebet stringer er indført af Lundgren (Lundgren 1949, p. 263f) i forbindelse med beregning af cylinderskaller efter brudlinieteorien. En stringer er en frembringer midt i en tryk- eller trækzone i skallens tværsnit, langs hvilken snitkræfterne i denne zone regnes koncentreret. Lundgren betegner i øvrigt en stringer som blot en matematisk abstraktion, der imidlertid er nyttig fordi den forenkler beregningerne.

For eksempel er der gennemført forsøg med otte modeller af papir og gitterberegninger af de tilhørende stringersystemer, der samstemmende har vist, at for udkragede skalflader med sammenlignelige ydre dimensioner gælder at:

- Negativt krumme flader er stivere end nulkrumme flader, der er stivere end positivt krumme flader.
- Hvis de fri rande på positivt krumme og nulkrumme flader er rette, øges deres stivhed meget væsentligt.



Figur 20. Negativt krum skalmodel, se kapitlet *Modeller*.



Figur 21. Positivt krum skal med rette rande, se kapitlet *Modeller*.

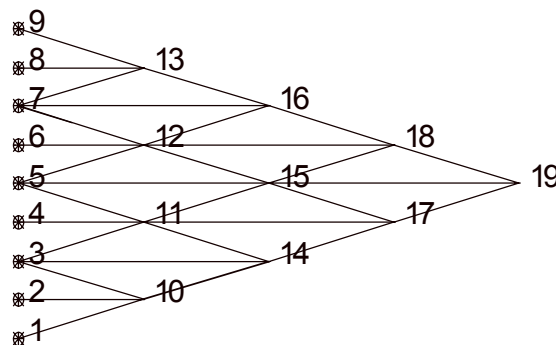
#### *Gitterberegninger*

Stringersystemet er en statisk model af skallen og kan derfor principielt anvendes til beregning af skallen og vise hvilken form der er stivest overfor en given belastning.

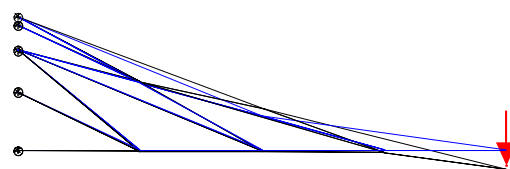
Tegnes et passende groftmasket stringersystem, så det opfylder betingelserne, kan det efterfølgende beregnes med et almindeligt gitterprogram.

Gitterberegningerne fører principielt til en nedreværdiløsning, hvis ikke deformationerne er for store. I så fald vil kun en beregning af den deforerede konstruktion give en nedreværdiløsning.

Da både stringernes placering og systemets deformationer har indflydelse på resultatet, bør gitterberegninger i skitseringsfasen kun anvendes til sammenlignende analyser af nært beslægtede skalformer og stringersystemer.



Figur 22. Eksempel på stringersystem, se kapitlet *Gitterberegninger*.



Figur 23. Eksempel på nedbøjningsfigur, se kapitlet *Gitterberegninger*.

### Fuldskalaforsøg

Der er bygget en fuldskalamodel af krydsfiner med et areal på 53 m<sup>2</sup> og en konstruktionsvægt på kun 10 kg/m<sup>2</sup> (figur 3 og 24).

Modellen, der nu har stået i 10 år, viser at det er muligt at bygge stabile og stive skaller på basis af ovennævnte metoder og at mindre skaller opbygget af plane præfabrikerede elementer kan konstrueres så de er simple at fremstille og hurtige at opføre.



Figur 24. Montage af fuldskalamodel, se Bilag 9.

## Resultater

På baggrund af stringermetoden kan membraskallers understøtningsmuligheder sammenfattes i følgende punkter:

### Understøtninger

Et randafsnit på en membraskal defineres som:

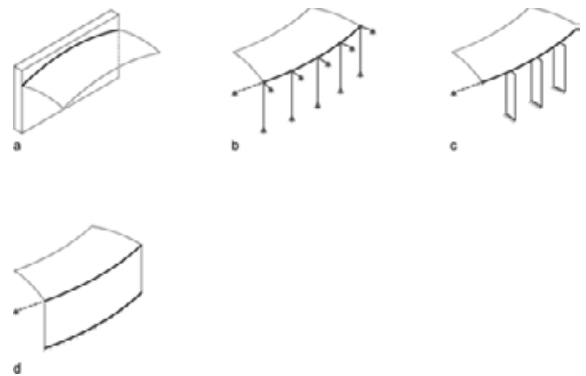
- *Dobbeltunderstøttet*, når principielt hvert punkt på randafsnittet er understøttet i mindst to retninger; randen kan fx være understøttet på en kraftig plade, på dobbeltsøjler, på skiver, der står vinkelret på randen eller på en krum skal
- *Enkeltunderstøttet*, når principielt hvert punkt på randafsnittet er understøttet i en retning; randen kan fx være understøttet på enkelt-søjler, på en plan skive eller på en bjælke
- *Fri*, når intet punkt på randen i dette afsnit er understøttet.

Der er kun disse tre grundlæggende forskellige understøtningsmuligheder for rande på membraskaller\*.

#### Betingelser:

- En understøtnings retning behøver ikke at ligge i skalfladens tangentplan.
- En dobbeltunderstøtnings to retninger må ikke begge ligge i randkurvens plan.
- En skive kan kun enkeltunderstøtte en skallerand.

\* I nogle tilfælde skal enkelte punkter dog understøttes i tre retninger, se kapitlet *Stringermetoden*.



Figur 25. Randen er dobbeltunderstøttet på:

- a) en kraftig plade
- b) dobbeltsøjler/-stænger
- c) skiver, der står vinkelret på randen
- d) en krum skal.



Figur 26. Randen er enkeltunderstøttet på:

- a) enkelt-søjler/-stænger
- b) en plan skive
- c) en bjælke.

## Understøtningernes placering

På baggrund af stringermetoden, modelforsøg og gitterberegninger, kan betingelserne for at en membranskal er stabil og stiv sammenfattes i nedenstående understøtningsbetingelser. Disse betingelser vil normalt frasortere de dårlige løsninger og føre til stabile og stive skaller. Konkrete tilfælde bør dog efterkontrolleres med enten modelforsøg eller med de detaljerede betingelser nævnt i kapitlet *Stringermetoden*.

*Positivt krumme skaller:*

- hele randen skal enkeltunderstøttes, eller
- randen kan opdeles i afsnit, der er skiftevis dobbeltunderstøttede og fri
- fri randafsnit bør af hensyn til stivheden være konkave betragtet i tangentplanen
- eventuelle rette rande skal enkeltunderstøttes.

*Nul-krumme skaller:*

- frembringerne skal understøttes to gange, enten
  - enkeltunderstøttes i begge ender, eller
  - dobbeltunderstøttes i den ene ende
- rette rande skal enkeltunderstøttes.

*Negativt krumme skaller:*

- det ene sæt krumningskurver skal dobbeltunderstøttes i den ene ende og være fri i den anden
- asymptotekurver skal understøttes i den ene ende, enten på en enkeltunderstøttet eller på den dobbeltunderstøttede rand.

Det betyder eksempelvis at:

- en firkantet skal, hvis fire sider ligger langs asymptotekurverne, skal dobbeltunderstøttes langs to hosliggende rande
- en firkantet skal, hvis fire sider ligger langs krumningskurverne, skal dobbeltunderstøttes langs en rand og enkeltunderstøttes langs de to hosliggende rande
- en trekantet skal, hvis to sider ligger langs asymptotekurverne, skal enten dobbeltunderstøttes langs disse to rande eller langs den tredje.

Negativt krumme skaller kan dog enkeltunderstøttes langs hele randen, hvis enkeltunderstøtningerne har en nærmere specificeret retning, der fremgår af afsnittet *Ikke-successivt opbyggede systemer* i *Stringermetoden*.

*Telte*

Teltflader er negativt krumme flader, der kun kan optage træk, og derfor skal forspændes for at være stabile. Forspændingen etableres ved at forspænde det ene sæt krumningskurver.

En teltflade tænkes derfor først understøttet som en almindelig negativt krum flade. Herefter tilføjes der enkeltunderstøtninger langs de fri rande, der skæres af det sæt krumningskurver, der er dobbeltunderstøttet i den modsatte ende.

*Sammensatte flader*

Sammensatte skalflader kan opbygges efter følgende regler:

- En fri rand på en stabil skalflade kan i almindelighed<sup>4</sup> dobbeltunderstøtte en rand på en anden skalflade,
- To skalflader kan enkeltunderstøtte hinanden langs en fælles randkurve.

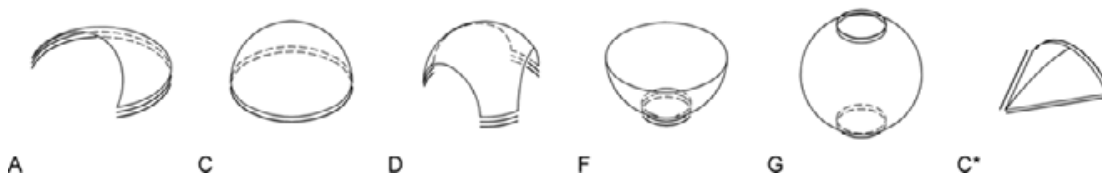
---

<sup>4</sup> Med mindre den fælles randkurve er en parabolisk kurve, af den type hvis oskulationsplan ligger i fladernes tangentplan.

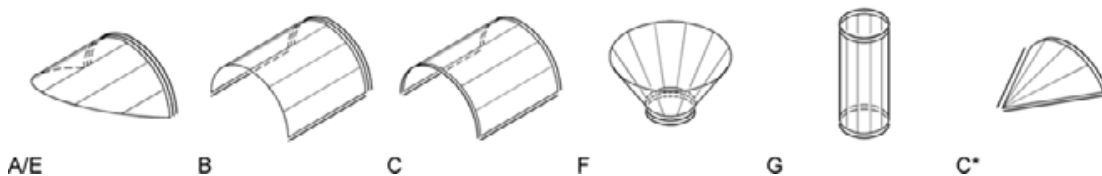
## Oversigt over stabile og stive skalkonfigurationer

Understøtningsbetingelserne kan illustreres med følgende oversigt over grundlæggende skalkonfigurationer, der er både stabile og stive, når de er understøttet som vist (figur 27).

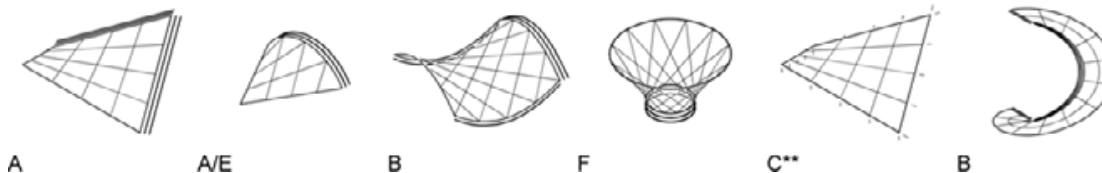
$K > 0$



$K = 0$



$K < 0$



Figur 27. Oversigt over rumligt stabile og stive membranskaller, opdelt i henholdsvis positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme flader. Frembringere og asymptotekurver er vist på de nul-krumme og de negativt krumme flader.

Dobbeltunderstøtninger er vist med dobbeltstreg ud for det pågældende randafsnit, enkeltunderstøtninger med enkeltstreg.

Bogstaverne refererer til de grundlæggende stringersystemer i (figur 17).

\*De rette rande skal enten afstives eller enkeltunderstøttes.

\*\*Der stilles særlige krav til understøtningernes retning.

Disse grundlæggende skalkonfigurationer kan dels betragtes som arketyper, dels som grundelementer i en slags byggesystem, idet de kan sammensættes efter reglerne på foregående side.

## Eksempler

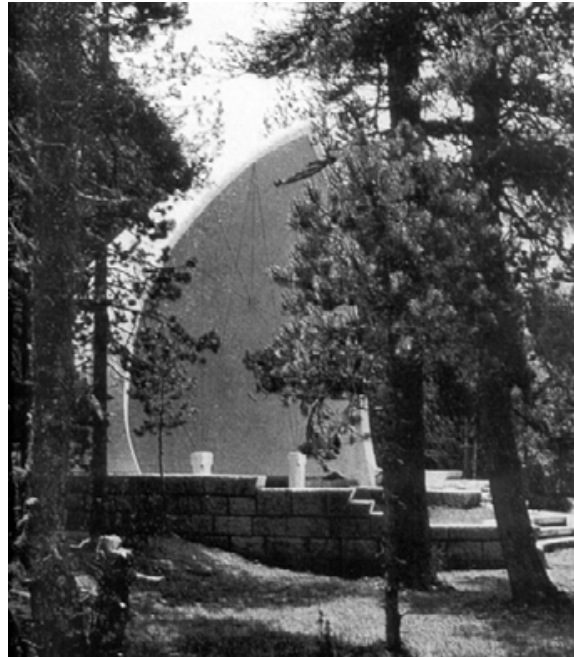
I de følgende eksempler vises hvordan skallers konstruktive forhold kan analyseres og vurderes ved hjælp af ovennævnte metoder og resultater.

*Capillo del Sancti Spirit, Spanien 1953.*

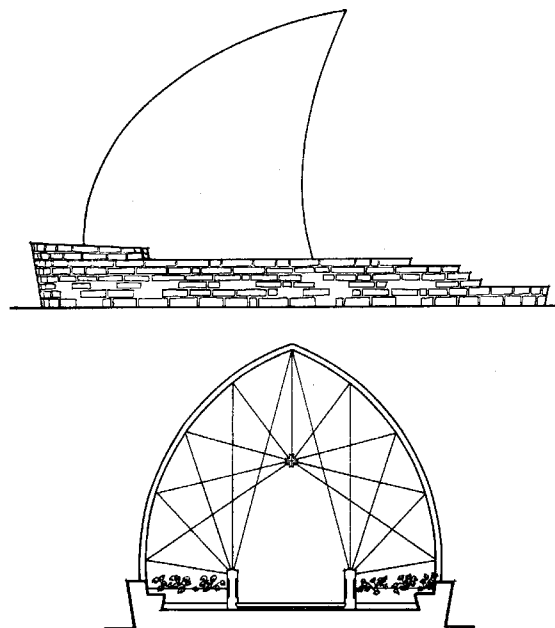
*Torroja*

Denne skal er sammensat af to symmetriske positivt krumme skalflader. De to dele er dobbeltunderstøttet på fundamentet og indbyrdes enkeltunderstøttet langs graterne mellem de to flader. Det kan vises med stringermetoden at skallen dermed er tilstrækkeligt understøttet - den er stabil. Men den er en positivt krum udkraget skal og modelforsøg viser at sådanne skaller generelt er slappe.

Torroja har uden tvivl udført modelforsøg og erfaret dette. Han har derfor forsynet skallen med et forspændt system af trækbånd, der virker som eger i et cykelhjul og udgør en enkeltunderstøtning af den "fri" rand, hvorved konstruktionen bliver stiv, men statisk ubestemt.



Figur 28. Capillo del Sancti Spirit, Spanien 1953. Arkitekt og Ingeniør: Eduardo Torroja (Ordóñez og Vera 1999 p. 161).



Figur 29. Opstalt og snit. Snittet viser placeringen af de forspændte trækbånd (Ordóñez og Vera 1999 p. 162).

Markedshal, Algeciras, Spanien 1933.

Torroja

Skallen her er sammensat af en positivt krum omdrejningsflade - en kuppel - og otte enkeltkrumme cylinderflader. Umiddelbart synes den blot at være understøttet i otte punkter, nemlig på de otte søjler, der for oven er indbyrdes forbundet med kraftige trækbånd, til optagelse af de udadrettede kræfter.

Hver af de otte cylinderflader er imidlertid forsynet med radiale trækbånd, der er fæstnet i den bjælke, der er støbt uden om trækbåndene mellem søjlerne. Som i kapellet ovenfor udgør de radiale trækbånd en enkeltunderstøtning. Systemet består således af en kuppel, der er enkeltunderstøttet langs hele randen på de otte cylinderflader, og otte cylinderflader, der dels er enkeltunderstøttet på kuplen, dels på de radiale trækbånd, samt i hver side på søjlerne.

Cylinderfladerne kan betragtes som sammensat af to flader, hvor den ene flade er enkeltunderstøttet langs hele randen, og den anden flade er en udkraget flade, der er dobbeltunderstøttet på førstnævnte flade.

Skallen omtales af (Joedicke 1962 p. 103) og det fremgår, se (figur 32), at cylinderfladerne optager de udadrettede kræfter fra kuplen. Det kan de imidlertid ikke, da cylinderfladens øvrige understøtningers reaktioner i det viste snit alle går igennem det samme punkt, nemlig søjletoppen. Der kan således stort set kun overføres forskydningskræfter fra kuplen til cylinderfladen langs grater. Men disse kræfter er ikke særligt store ved jævnt fordelt belastning, hvilket bekræftes af forløbet af de isostatiske linier som de er skitseret i (figur 33). Faktisk er det først og fremmest buevirkningen i cylinderfladen og den tilstødende del af kuplen, der fører kræfterne til understøtningerne.

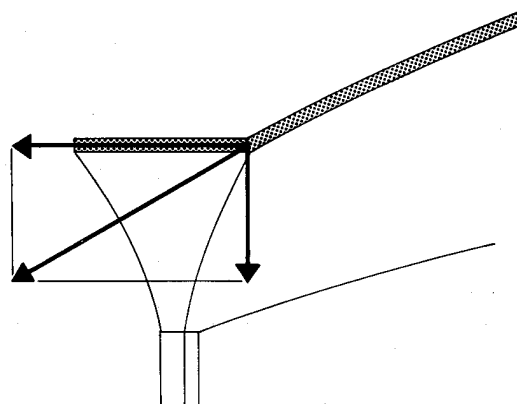
Styrken blev eftervist med modellforsøg i skala 1:10 (Ordóñez og Vera 1999 p. 100).



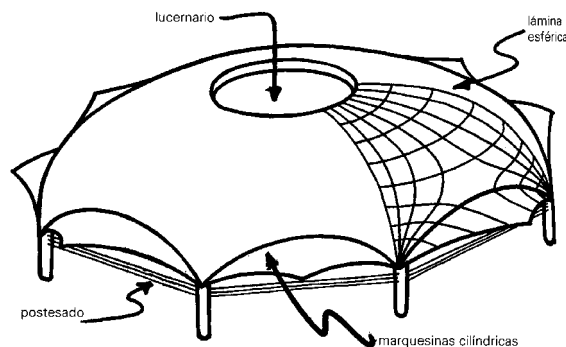
Figur 30. Markedshal i Algeciras, Spanien 1933. Arkitekt: M. Sanchez Arcas, Ingeniør: Eduardo Torroja. Opført i armeret beton. Diameter ca. 44 m, skaltykkelse 9 cm, dog væsentligt mere ved understøtningerne (Joedicke p. 109).



Figur 31. Trækbånd mellem søjler og radiale trækbånd fra cylinderfladen inden udstøbning af bjælke (Joedicke 1962 p. 110).



Figur 32. Skitse af hvordan de udadrettede kræfter menes optaget (Joedicke 1962 p. 103/108).



Figur 33. Konstruktiv skitse med isostatiske linier (Ordóñez og Vera 1999 p. 104).



Fuldskalamodel, Hørsholm 1991.

Almegaard

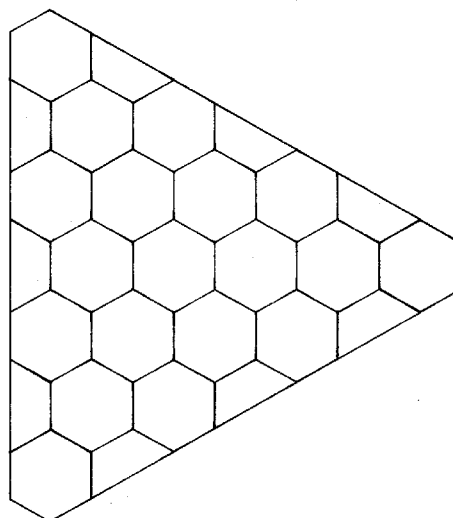
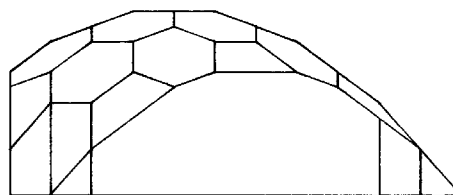
Eksempel på positivt krum skal, hvis rand er opdelt i afsnit, der er skiftevis dobbeltunderstøttede og fri.

Som tommelfingerregel er skallen tilstrækkelig stiv når de fri rande betragtes i tangentplanen er konkave.

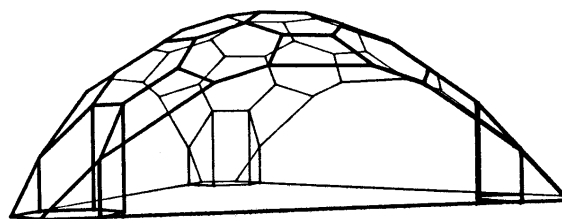
Skalfladen er her opbygget af plane elementer, der statisk fungerer som skiver. Da en skive er en plan membran, kan en skal opbygget af plane elementer – en såkaldt skiveskal – betragtes som en membranskal. Lokal belastning optages som bøjning i de enkelte elementer, men mellem elementerne overføres kun membrankræfter/skivekræfter.



Figur 34. Fuldskalamodel, Hørsholm. Opført i krydsfiner. Trekantet grundplan 11 x 9,5 m, skaltykkelse 2 cm.



Figur 35. Opstalt og plan. Den positivt krumme skalflade er understøttet på tre cylinderskaller, der er udformet som lodrette sekskantede rør, indpasset i grundplanens mønster.



Figur 36. Perspektivtegning.

Fabrikshaller , Schweiz 1954 - .

Isler

Dette er et eksempel på en rationel skalkonstruktion i armeret beton. Skalkfladen er hovedsageligt positivt krum, men er forsynet med rette rande. Modelforsøg (se afsnittet *Modeller*) viser at denne skalform er overordentlig stiv og dermed meget materialeøkonomisk. Også her gør den plane rektangulære rand skallen ideel som modulær overdækning af store rum med søjler. Dermed kan den samme forskalling anvendes igen og igen. Heinz Isler fandt frem til denne konfiguration i 1954 og den anvendes fortsat som et byggesystem til fabrikshaller af firmaet Bösiger + Partner AG.

Skallen er lodret enkeltunderstøttet på forspændte randbjælker langs alle fire rande. Det runde ovenlyshul er forsynet med en plan randbjælke. I hvert hjørne er konstruktionen understøttet på en søjle, der er passende indspændt i fundamentet.

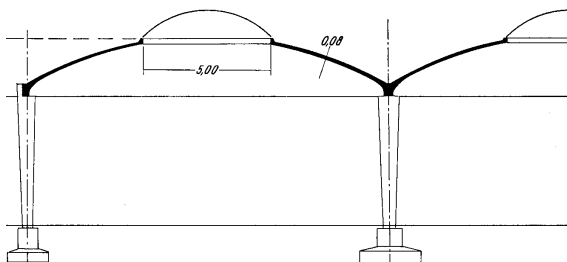
I forbindelse med en nedrivning undersøgte Isler hvordan skallen opførte sig, når dele af konstruktionen blev fjernet. Forsøget omtales af (Robbin 1996, p. 60) og til forfatterens overraskelse forbliver skalkfladen intakt når den ene søjle fjernes og de to tilhørende randbjælker falder ned. Forsøget viser at der er et fornuftigt forhold mellem beton og armering, således at bjælkehjørner og skalkflade forbliver sammenhængende. Men derudover viser forsøget netop, at en statisk bestemt skalkflade også er geometrisk bestemt, hvilket betyder at dens form er bestemt af de understøttede randes form. Når de understøttede randes form ændres, ændres fladens form derfor også, jf. afsnittet *Baggrund* ovenfor.



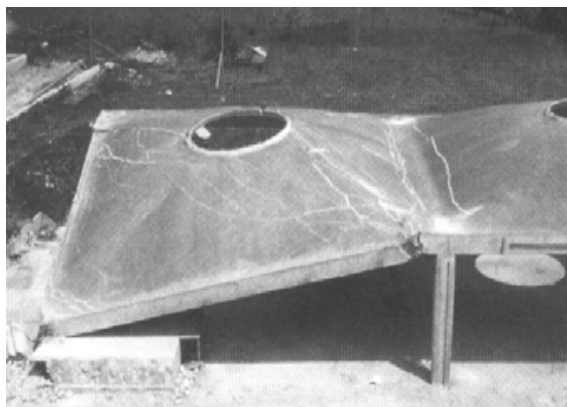
Figur 40. Anden søjle er fjernet, hvorved randen - og dermed skalkfladen - får sin oprindelige form (Robbin 1996 p. 60).



Figur 37. Fabrikshaller, Byggesystem, Schweiz. Arkitekt og Ingeniør: Heinz Isler. Opført i armeret beton. Grundplan pr. skal fx 20 x 14,2 m, skaltykkelse 8 cm (Joedicke 1962 p. 172).



Figur 38. Snit (Joedicke 1962 p. 174).



Figur 39. Forsøg. Første søjle er fjernet. Skalkfladen har fået en ny form, men er fortsat intakt og positivt krum (Robbin 1996 p. 60).



Figur 41. Tredje søjle er fjernet. Skalkfladen har nu fået en tredje form, men er fortsat intakt og positivt krum (Robbin 1996 p. 60).

*Frontón Recoletos, Madrid 1935.*

*Torroja*

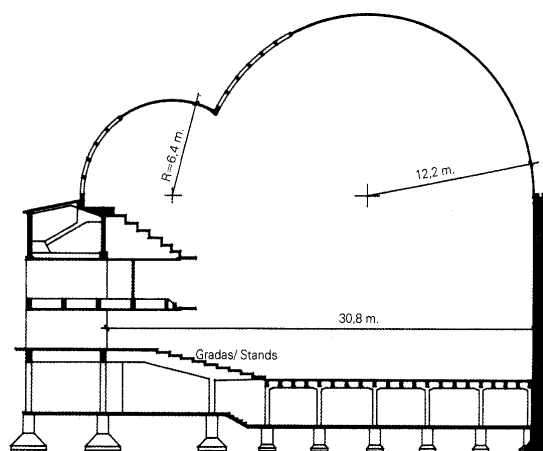
Skalkonstruktionen består af to enkeltkrumme skalflader, der er indbyrdes enkeltunderstøttet langs en fælles retlinet frembringer. Dette ses af, at graten mellem de to flader ikke er forsynet med en afstivende bjælke.

Endevæggene fungerer som lodrette skiver, der enkeltunderstøtter skalfladerne. Begge cylinderflader er dermed enkeltunderstøttet langs alle fire rande.

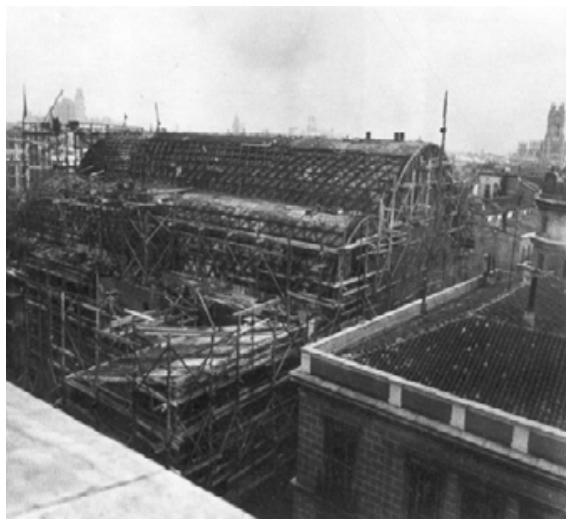
I begge flader er en del af fladen i øvrigt, af hensyn til dagslys, erstattet af et gitter. Dette gitters opbygning svarer fuldstændigt til et stringersystem for den pågældende flade. Beregningerne blev eftervist med modelforsøg i skala 1:10 (Ordóñez og Vera 1999 p. 132).



Figur 42. Frontón Recoletos, Madrid 1935. Arkitekt og Ingeniør: Eduardo Torroja. Opført i armeret beton. Grundplan 55x 32,5 m, skaltykkelse 8 cm. (Ordóñez og Vera 1999 p. 144).



Figur 43. Snit (Ordóñez og Vera 1999 p. 135).



Figur 44. Eksteriør under opførelsen (Ordóñez og Vera 1999 p. 135).

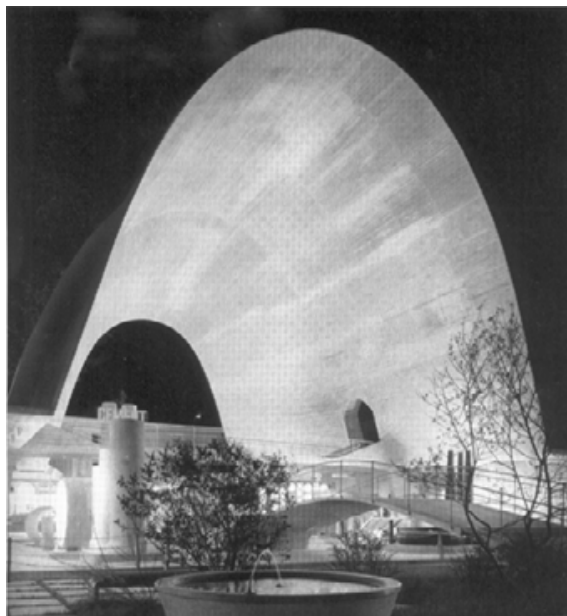
## Zementhalle, Zürich 1938.

### Maillart

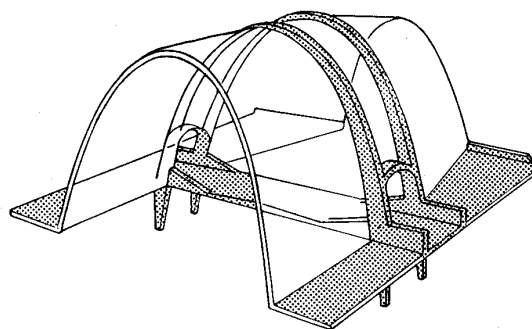
Denne skalkonstruktion består af to enkeltkrumme skalflader, hvor den ene er kegleformet. De to flader ligger i forlængelse af hinanden og begge har parabelformet snit. Konstruktionen skal rent statisk betragtes som tre skaller. Den midterste skal udgør en del af understøtningen af de to øvrige. Den er enkeltunderstøttet langs alle fire rande. De to krumme rande er enkeltunderstøttet på de to store lodrette parallelle buebjælker, der kun er stabile i deres eget lodrette plan. De to andre rande, der ligger parallelt med fladens rette frembringere er enkeltunderstøttet på de to buer over gangbroen.

Dermed fremkommer en stabil midtersektion. De to øvrige skaller er dobbeltunderstøttet på de to buebjælker, der nu er rumligt stabile. Desuden er disse skaller enkeltunderstøttet af de to vandrette skiver, der ligger på hver side af skallerne.

Denne konstruktion, der havde til hensigt at vise mulighederne med armeret beton, er interessant fordi den også demonstrerer de to muligheder, der er for at understøtte enkeltkrumme skaller stabilt. Enten skal begge de krumme rande være enkeltunderstøttet, eller også skal den ene af de to krumme rande være dobbeltunderstøttet og den anden kan da være fri. Rette rande skal altid (og kan kun) være enkeltunderstøttet.



Figur 45. Zementhalle, Zürich 1938. Arkitekt og Ingeniør: Robert Maillart. Opført i armeret beton. Grundplan ca. 22 x 12 m, skaltykkelse 6 cm (Joedicke 1962 p. 41).



Figur 46. Isometri. Den understøttende del af konstruktionen er fremhævet. De to lodrette buebjælker er placeret på hver side af gangbroen, der går på tværs. De to vandrette skiver på hver side af skallerne ses tydeligt (Joedicke 1962 p. 66).

*Waikikian Hotel, Honolulu, Hawaii 1958.*

*Wimberly, Cook og Bradshaw*

Denne skal er et typisk eksempel på de HP skaller af brædder, der blev bygget mange af i en periode. Den Hyperbolske Paraboloide er karakteriseret ved at være en negativt krum flade med rette frembringere, der også er fladens asymptotekurver. Det er derfor umiddelbart oplagt at bygge en sådan skal som en bræddekonstruktion. Det er også gjort her og randene er forsynet med en kraftig bjælke med henblik på at føre forskydningskræfter ned til de to primære understøtningspunkter. Desuden er alle fire rande enkeltunderstøttet med lodrette søjler.

En sådan HP flade er i ligevægt når den er belastet med en jævnt fordelt lodret last. (Dette forudsætter at skallen er i stand til at optage forskydningskræfter langs de rette frembringere, hvilket bræddeskaller ikke altid er lige gode til.) Muligvis er det dette faktum, som udtrykker sig ved nogle meget smukke ligninger, der har været skyld i, at man har overset at ligevægt ikke er ensbetydende med stabilitet.

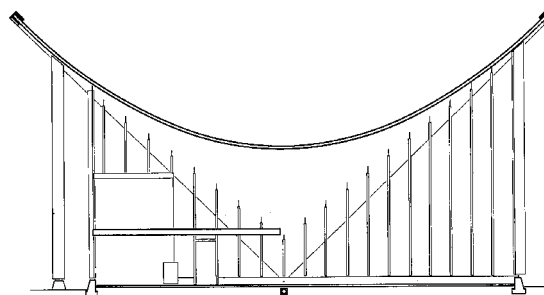
I dette tilfælde er egenvægten fx ikke jævnt fordelt. Skaltykkelsen er konstant, hvilket betyder at egenvægten per arealenhed i grundplanen er større på de stejle områder end på de flade.

Hvis man kigger nøjere efter på (figur 49), ses også at randbjælken er blevet s-formet. Den krummer indad mod skallen for oven og udad for neden.

Dette viser, hvad skalteoretikere har vidst siden (Laffaille 1938) gjorde opmærksom på det, nemlig at mindst to af randene også skal understøttes i vandret retning. Blandt andet stringermetoden viser mere præcist, at skallen netop er stabil, når to hosliggende rande er dobbeltunderstøttet og de to øvrige er fri.



Figur 47. Waikikian Hotel, Honolulu, Hawaii 1958. Arkitekt: G. J. Wimberly & H. L. Cook, Ingeniør: R. R. Bradshaw. Opført i brædder. Rhombeformet grundplan ca. 27 x 15 m, skaltykkelse 6 cm (Joedicke 1962 p. 226).



Figur 48. Længdesnit. Randbjælken er også opbygget af brædder, dimension 25 x 25 cm. De lodrette søjler langs randen er trukket lidt ind (Joedicke 1962 p. 226).



Figur 49. Udsnit, der viser randbjælakens s-form (Joedicke 1962 p. 227).

Fabrikshaller, Puente de Vigas, Mexico 1960.

Candela

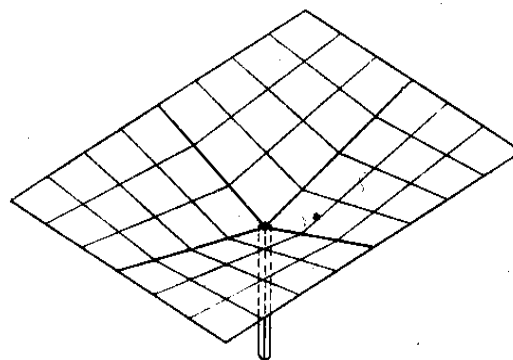
Denne skalkonstruktion består af fire HP skaller, som er understøttet på en central søjle og hvis ydre rande danner en stor plan rektangel. På grund af den regulære geometri har den været meget anvendt.

Konstruktionen er stabil fordi den i de fire centrale grater er forstærket, hvorved der fremkommer en bjælke i hver grat, der kan optage kræfter i både lodret og vandret plan. Hver af de fire HP flader er således dobbeltunderstøttet langs to hosliggende rande og er dermed stabile.

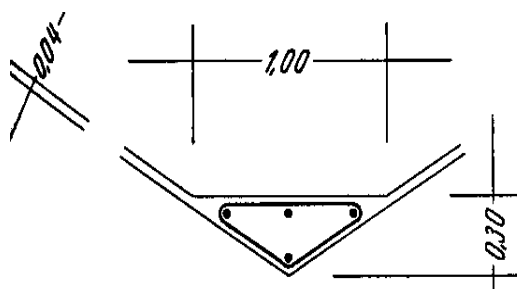
Søjlen optager egenvægten og alle andre symmetrisk fordelte lodrette kræfter, mens stabilitet overfor øvrige lastpåvirkninger er etableret ved forbindelser med de øvrige skaller og ydervægge langs de ydre rande.



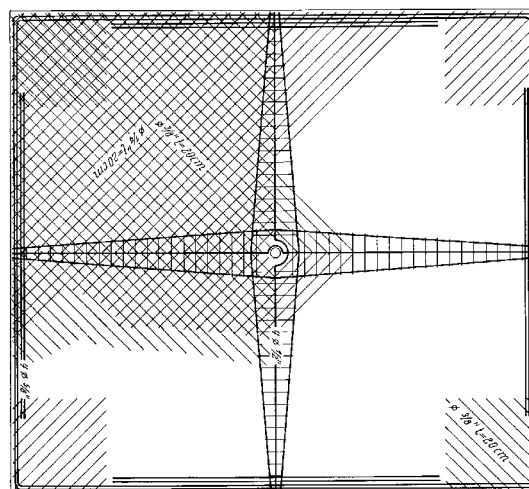
Figur 50. Fabrikshaller, Puente de Vigas. Arkitekt og Ingeniør: Felix Candela. Opført i armeret beton - her ses hvordan betonen bringes op. Grundplan pr. skal 11 x 10 m, skaltykkelse 4 cm (Joedicke 1962 p. 249).



Figur 51. Isometri. Der viser de fire symmetrisk placerede HP flader og deres frembringere (Joedicke 1962 p. 246).



Figur 52. Snit i grat, mål i m (Joedicke 1962 p. 247).



Figur 53. Armeringsplan. Den krydsformede bjælkekonstruktion fremgår klart (Joedicke 1962 p. 247).

## Restaurant Los Manantiales, Mexico 1958.

### Candela

Denne skal er sammensat af otte HP flader, der hver måler ca. 21 x 10 m. Fladerne er sammensat langs 8 gratbuer, der mødes centralt og er understøttet i den modsatte ende i grundplanen.

Umiddelbart kan en skal kun enkeltunderstøttes på en grat og en udkraget negativt krum skal som denne skal dobbeltunderstøttes langs to rande. Konstruktionen - betragtet som membranskal - er således ustabil.

Når den alligevel ikke falder ned, er der to forhold, der gør sig gældende:

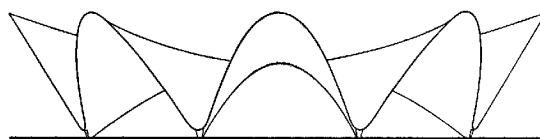
Det ene er, at skalkonstruktionen er symmetrisk og da egenvægten, som er den dominerende, også er symmetrisk, er konstruktionen i ligevægt ved denne belastning.

Det andet er, at graten er forstærket med hvad der svarer til en v-formet bjælke. Dette afstiver graten så den kan optage bøjning i sit eget plan og stabilitetsmæssigt fungerer som en lodret skive.

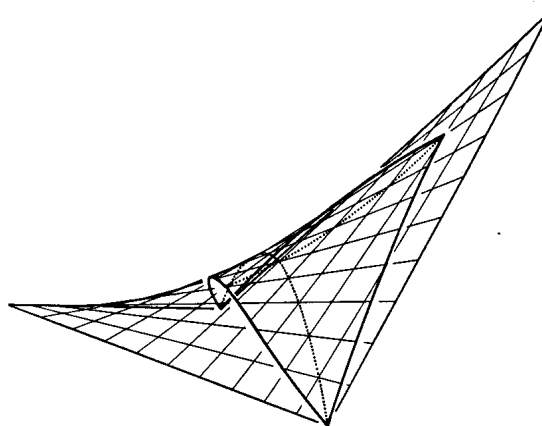
Det betyder, at det alene er de laste, der er antisymmetrisk fordelt på den enkelte skal, som konstruktionen ikke er stabil overfor. De må optages som bøjning i skalfladen. Men da disse laste kun vil udgøre en relativt lille del af den vindlast, som konstruktionen påvirkes af, er dette også muligt.



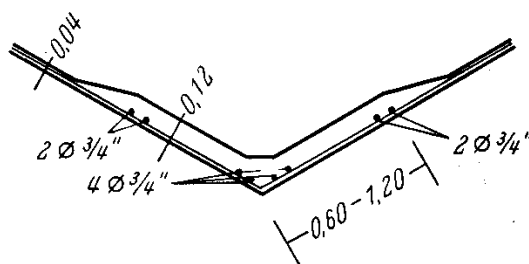
Figur 54. Restaurant Los Manantiales, Mexico. Arkitekt og Ingeniør: Felix Candela. Interiør. Opført i armeret beton. Grundplan indvendig 30 x 30 m, skaltykkelse 4 cm (Joedicke 1962 p. 223).



Figur 55. Opstalt (Joedicke 1962 p. 220).



Figur 56. Den enkelte skalflade er et udsnit af en HP flade (Joedicke 1962 p. 220).



Figur 57. Snit i grat, mål i m (Joedicke 1962 p. 221).

# Krumme fladers form

En forudsætning for at en skal kan bære udelukkende med membrankræfter er at skalfladen er glat og krum. En glat flade er løst sagt en sammenhængende flade uden spidser, huller eller skarpe kanter – eller rettere sagt en flade hvor der i givet fald kun optræder enkelte og veldefinerede spidser, huller eller skarpe kanter. Matematisk er disse flader kendetegnet ved at de er mindst to gange differentiable undtagen i disse såkaldte singulariteter. En krum flade er enten enkeltkrum eller dobbeltkrum. Enkeltkrumme flader krummer som navnet antyder kun på den ene led og kan sammenlignes med en bjergryg, mens dobbeltkrumme flader krummer på begge leder og deles op i to typer, de positivt krumme, der kan sammenlignes med en bakketop eller en dalsænkning, og de negativt krumme, der kan sammenlignes med et bjergpas – de kaldes også for saddelflader.

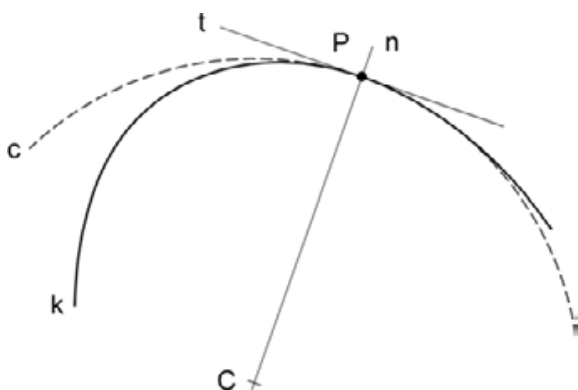
Nedenfor beskrives disse fladetyper lidt mere detaljeret og i den forbindelse indføres en række geometriske begreber som der senere bliver brug for.

For læsere, der ønsker en yderligere uddybning af begreberne eller de matematiske definitioner af disse, henvises til (Fabricius-Bjerre 1977), der danner grundlag for denne fremstilling.

## Kurvers krumning

For at beskrive flader, som er 2-dimensionelle elementer der krummer i et 3-dimensionelt rum, må vi først have beskrivelsen af kurver, som er 1-dimensionelle elementer der krummer i 2 eller 3 dimensioner, på plads.

En glat (to gange differentiable) *plan kurve*  $k$  har i hvert punkt  $P$  en bestemt *krumning*  $\kappa$ , med mindre punktet er singulært<sup>1</sup> eller kurven er en ret linie. Krumningen er omvendt proportional med *krumningsradius*  $\rho$  for kurvens *krumningscirkel*  $c$  i punktet  $P$ . Krumningscirkelns centrum, der ligger på kurvens *normal* i punktet  $P$ , kaldes kurvens til  $P$  hørende *krumningscentrum*  $C$  (figur 58).



Figur 58. Plan kurve  $k$ . Tangenten  $t$ , normalen  $n$  og kurvens krumningscirkel  $c$  med tilhørende krumningscentrum  $C$  hørende til punktet  $P$  er vist.

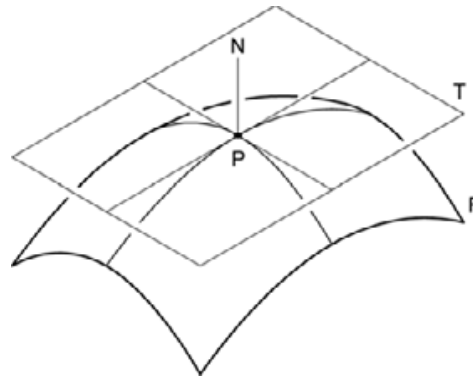
<sup>1</sup> Punkter hvor kurven danner en *spids* og punkter hvor krumningscentrum skifter side i forhold til tangenten – et *vendepunkt* – kaldes singulære punkter.



En glat *rumkurve*  $k$  kan ikke indeholdes i en plan, men en rumkurve har en *oskulationsplan* i hvert punkt  $P$ , der defineres som den plan, der er bestemt af - det vil sige indeholder - rumkurvens tangent i  $P$  og det til  $P$  hørende krumningscentrum.

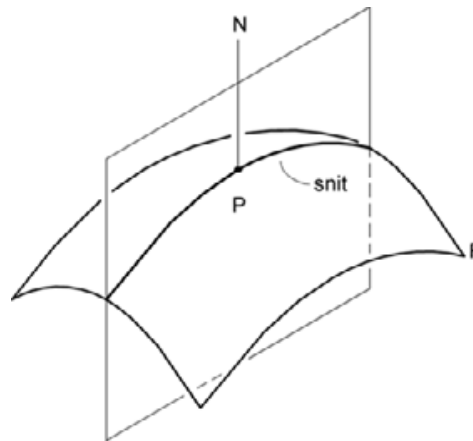
## Fladegeometri

Betragt et punkt  $P$  på fladen. *Tangentplanen*  $T$  i  $P$  er da den plan, der indeholder tangentterne i  $P$  til alle de kurver på fladen, der går igennem punktet  $P$ . Fladens *normal*  $N$  i et punkt er en ret linie, der står vinkelret på tangentplanen i punktet (figur 59).



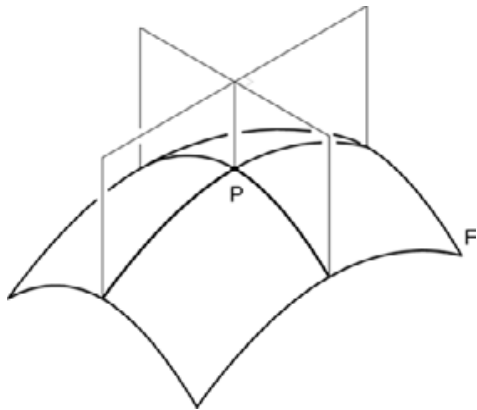
Figur 59. Tangentplanen  $T$  i punktet  $P$  er den plan, der indeholder tangentterne i  $P$  til alle de kurver på fladen, der går igennem  $P$ . Fladens normal  $N$  i et punkt er en ret linie, der står vinkelret på tangentplanen i punktet

Et *snit* er en plan kurve, nemlig skæringskurven mellem en flade og en plan. Et *normalsnit* i et punkt  $P$  på fladen er skæringskurven mellem fladen og en plan, der indeholder fladens normal  $N$  i punktet  $P$  (figur 60).



Figur 60. Normalsnit i et punkt  $P$  på fladen  $F$ . Normalsnitplanen indeholder fladens normal  $N$  i  $P$ .

De to normalsnit i et punkt  $P$ , der har henholdsvis den største og den mindste krumning, kaldes *hovedsnittene* og de to snits krumning i  $P$  kaldes *hovedkrumningerne* i punktet. De to snitplaner ligger vinkelret på hinanden og de to tilhørende retninger kaldes *hovedkrumningsretningerne* i  $P$  (figur 61).



Figur 61. Hovedsnittene i et punkt  $P$  på fladen  $F$ , er de to normalsnit i  $P$ , der har henholdsvis den største og den mindste krumning. De to snitplaner ligger vinkelret på hinanden.

I de specielle tilfælde hvor samtlige normalsnit har samme krumning i  $P$ , er der tale om et *kuglepunkt* og da kan to vilkårlige på hinanden vinkelrette tangenteringer igennem  $P$  opfattes som hovedretninger.

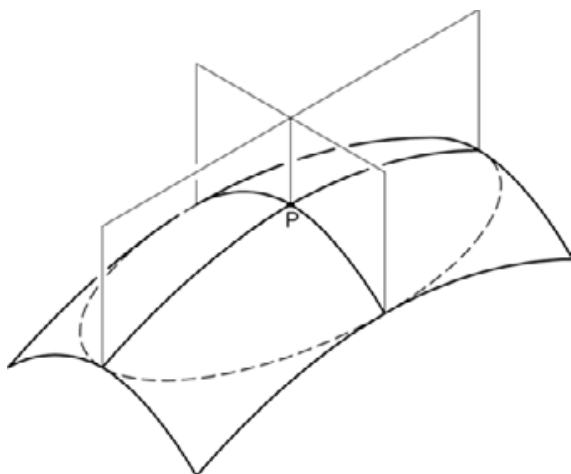
Ved en *krumningskurve* på fladen forstås en kurve, hvis tangent i et vilkårligt punkt er en hovedretning gennem dette punkt. Krumningskurverne danner i almindelighed et system af ortogonale kurver på en flade og de er kun i specielle tilfælde fx på omdrejningsflader plane kurver.

*Krumningsmålet*  $K$  i et punkt  $P$  på en flade er defineret som produktet af de to hovedkrumninger i punktet. Indenfor fladegeometrien skelner man mellem flader med *positiv*, *nul-* og *negativ krumning*, idet der her hentydes til fortegnet for krumningsmålet  $K$  i fladens punkter. De positivt og de negativt krumme flader betegnes også *dobbeltkrumme* flader, i modsætning til de nulkrumme, der kaldes *enkeltkrumme* flader.

#### *Positivt krumme flader*

Kuglefladen er et eksempel på en *positiv krum* flade. Kuglefladen er et specielt tilfælde blandt disse flader, fordi alle normalsnit i alle punkter har samme krumning.

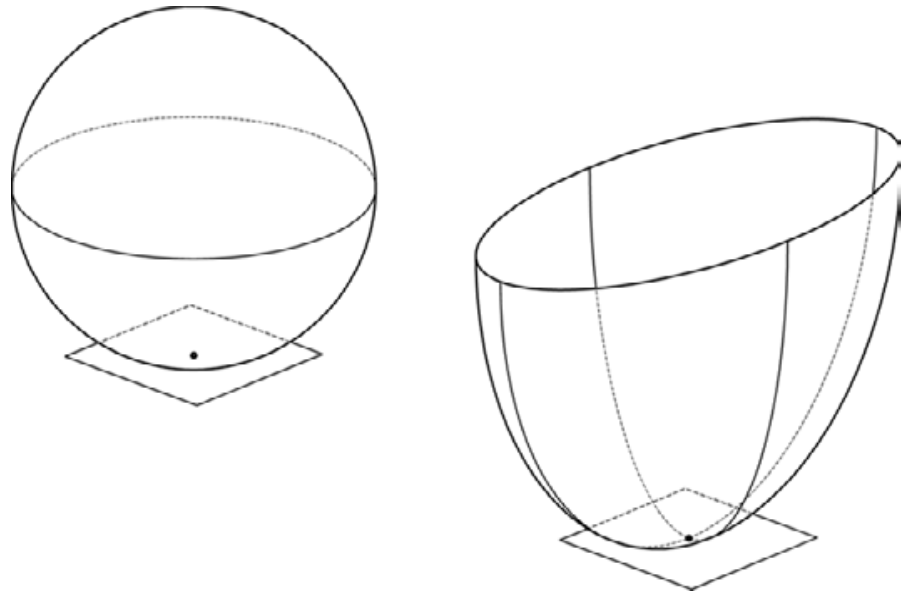
De to hovedsnit i et punkt  $P$  på en positivt krum flade har deres krumningscentrum liggende på samme side af fladen, nemlig indersiden (figur 62).



Figur 62. De to hovedsnit i punktet  $P$  på en positivt krum flade.

En positiv krum flade har en konveks yderside og en konkav inderside og kan ikke foldes ud på en plan. En konveks flade er positivt krum ligesom en

positivt krum flade er konveks. En tangentplan i et punkt  $P$  på fladen, vil kun røre fladen i dette punkt. Resten af fladen ligger på en og samme side af tangentplanen (figur 63).



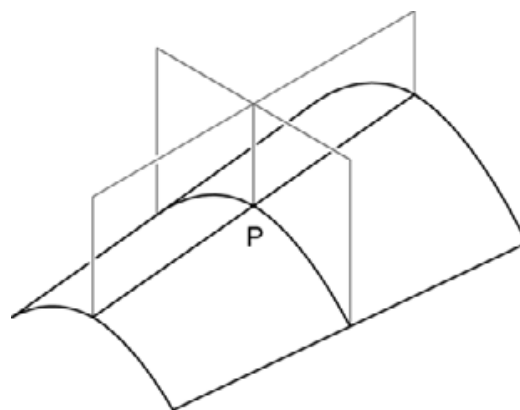
Figur 63. Eksempler på positivt krumme flader: en kugleflade og en elliptisk paraboloid. En tangentplan berører kun fladen i ét punkt, tangentpunktet.

En positivt krum flade kaldes også en elliptisk krum flade, fordi den i en lille omegn om ethvert punkt på fladen krummer som en elliptisk paraboloid - eller i specialtilfælde som en omdrejningsparaboloid. En plan parallelt med og tæt på tangentplanen i en elliptisk paraboloid skærer fladen i en ellipse - eller i specialtilfælde i en cirkel (vist stiptet i figur 62).

#### *Nul-krumme flader*

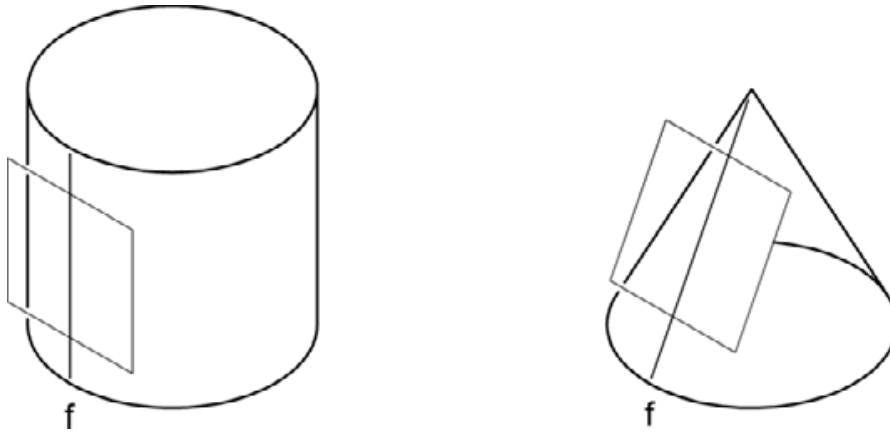
Cylinderfladen og keglen er eksempler på *nul-krumme* flader. En nul-krum flade kan foldes ud på en plan og planen er et specialtilfælde blandt disse flader, fordi alle normalsnit i alle punkter har krumningen nul i alle retninger.

Det ene hovedsnit i et punkt  $P$  på en nul-krum flade har sit krumningscentrum liggende på indersiden af fladen, det andet hovedsnit er en ret linie (figur 64).



Figur 64. De to hovedsnit i punktet  $P$  på en nul-krum flade. Det ene snit er en ret linie.

En tangentplan i punktet  $P$  på fladen vil røre fladen langs denne rette linie, der kaldes en *frembringer* (figur 65).

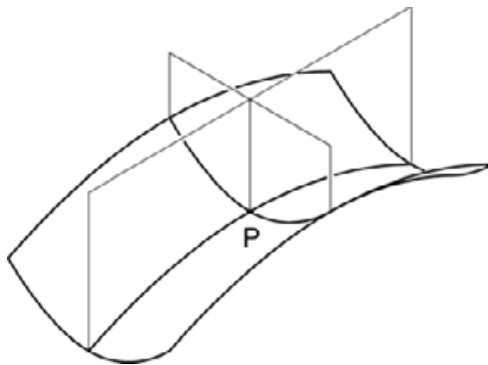


Figur 65. Eksempler på nul-krumme flader: en cylinderflade og en kegleflade. En tangentplan berører fladen langs en ret linie – en frembringer  $f$ .

En nul-krum flade kaldes også en parabolisk krum flade, fordi en plan der ikke er en tangentplan, i en lille omegn om et vilkårligt punkt på fladen, skærer fladen i en parabel.

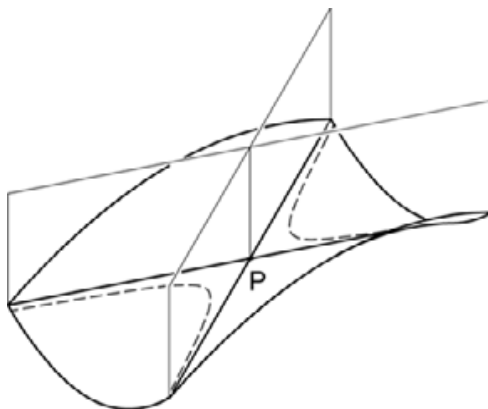
#### Negativt krumme flader

Den hyperbolske paraboloid, også kaldet HP-fladen, er ligesom tragten på en trompet og vindelflader eksempler på *negativt krumme flader*. De to hovedsnit i et punkt  $P$  på en negativt krum flade har deres krumningscentrum liggende hver sin side af fladen (figur 66).



Figur 66. De to hovedsnit i et punkt  $P$  på en negativt krum flade.

Det betyder at to normalsnit i punktet  $P$  har krumningen nul. De to tilhørende retninger kaldes *asymptoteretningerne* i  $P$  (figur 67).

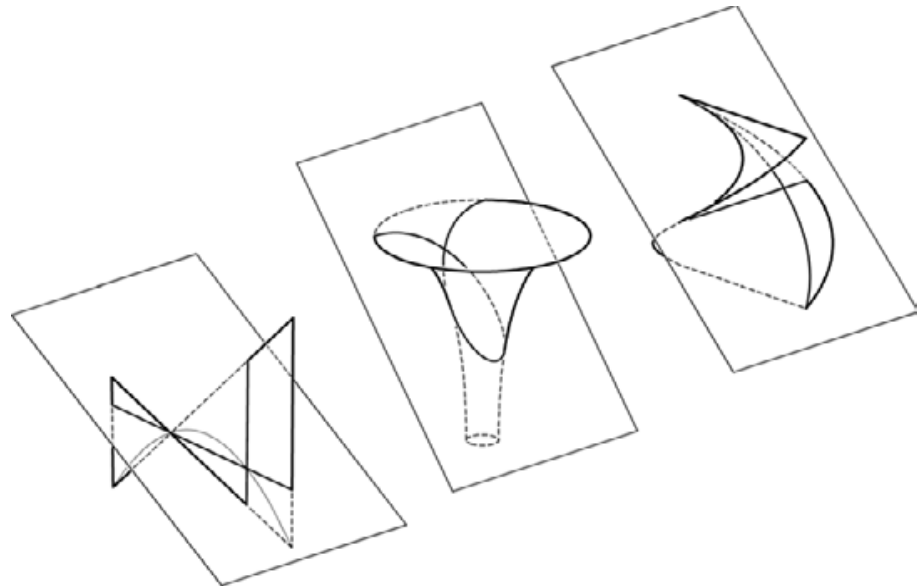


Figur 67. To normalsnit i et punkt  $P$  på en negativt krum flade har krumningen nul. De to tilhørende retninger kaldes asymptoteretningerne i  $P$ .

Ved en *asymptotekurve* på fladen forstås en kurve, hvis tangent i et vilkårligt punkt er en asymptoteretning gennem dette punkt. Langs disse kurver er normalsnittets krumning nul. Enhver ret linie på en negativt krum flader er en asymptotekurve og for en asymptotekurve, der ikke er en ret linie gælder, at dens oskulationsplan er sammenfaldende med tangentplanen i det betragtede punkt  $P$  på fladen.

Betragtes to punkter  $P_1$  og  $P_2$  på en asymptotekurve er de to skærende asymptotekurver gennem disse punkter ikke parallelle. Den betragtede asymptotekurves oskulationsplaner i de to punkter er derfor ikke sammenfaldende, hvilket betyder at en krum asymptotekurve ikke er en plan kurve. De eneste plane kurver på negativt krumme flader, der ligger i tangentplanen er således retlinede asymptotekurver<sup>2</sup>.

En negativt krum flade kan ikke foldes ud på en plan og er hverken konveks eller konkav og kaldes ofte ikke-konveks. En tangentplan til et punkt på fladen, vil skære fladen langs to kurver, hvis tangentretninger i punktet er asymptoteretningerne. En tangentplan gennem et punkt opdeler fladen i fire dele, hvoraf to ligger på den ene - og to på den anden side af tangentplanen (figur 68).



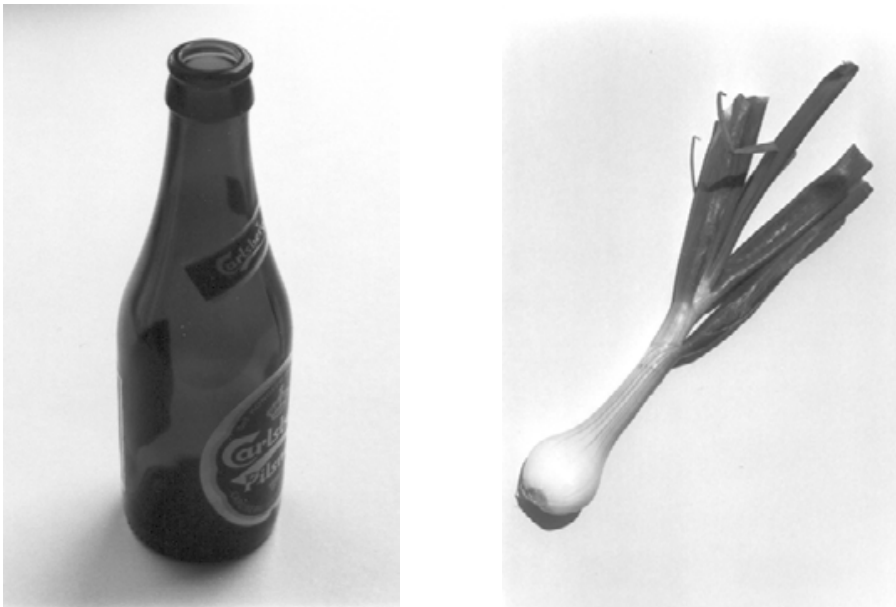
Figur 68. Eksempler på negativt krumme flader: fra venstre en hyperbolsk paraboloid, en omdrejningsflade og en vindelflade. En tangentplan skærer fladen langs to kurver, der er rette linier på en hyperbolsk paraboloid. På den hyperbolske paraboloid er desuden vist den ene af krumningskurverne gennem tangentpunktet.

En negativ krum flade kaldes en hyperbolsk krum flade, fordi den i en lille omegn om ethvert punkt på fladen krummer som en hyperbolsk paraboloid. En hyperbolsk paraboloid har retlinede asymptotekurver og en plan, der ikke indeholder fladens normal eller er en tangentplan, skærer fladen i en hyperbel (vist stiplet i figur 67).

#### *Sammensatte flader*

En skal kan udmærket være sammensat af områder, hvis krumning har forskellige fortegn. Hvert område vil i det følgende blive betragtet som en flade i sig selv, da stabilitets- og understøtningsforholdene er forskellig for hver krumningstype (figur 69).

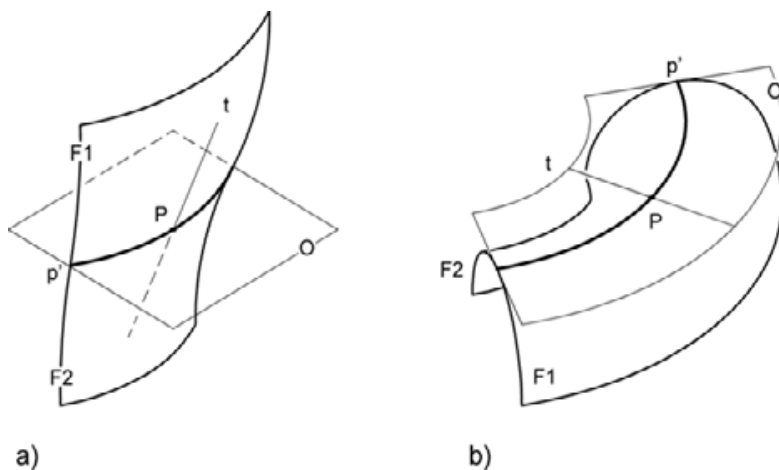
<sup>2</sup> Derfor er teltfladers tovrande, der jo er krumme for at kunne optage kræfter, ikke plane kurver.



Figur 69. Alle tre krumningstyper er repræsenteret på overfladerne af en flaske og et løg. På ølflasken er halsen negativt krum, overgangen mellem hals og krop er positivt krum og kroppen er nul-krum. Bunden er positivt krum og overgangen mellem krop og bund danner en kant – en grat, mens de øvrige overgange er glatte. Løgets stilk er, indtil den deler sig, nul-krum. Det øverste af selve løget er negativt krum og nederste del, bortset fra rødderne, er positiv krum. Alle overgange er glatte.

Overgangen mellem to områder kan enten være glat eller danne en kant – en såkaldt grat.

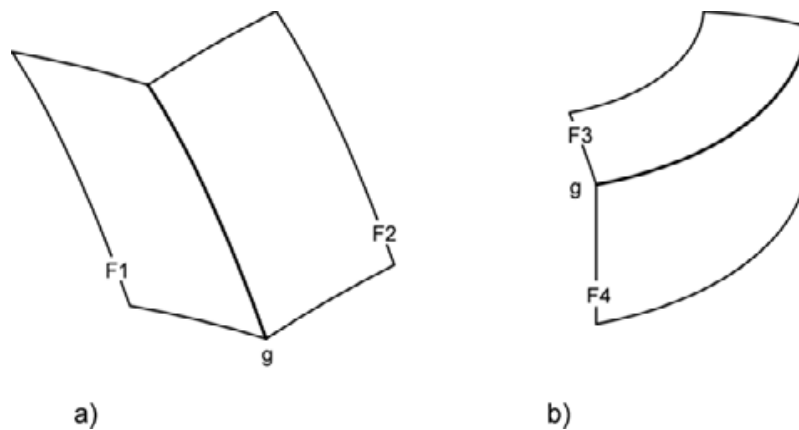
I glatte overgange mellem en positivt krum og en negativt krum flade som i (figur 69) er det en *parabolsk kurve*, der adskiller de to flader. Langs den parabolske kurve er normalsnittets krumning nul. I den parabolske kurve er 'fladen' nul-krum – deraf navnet. Man kan sige at langs den parabolske kurve flytter den ene hovedretnings krumningscentrum fra den ene side af fladen til den anden. Den parabolske kurves oskulationsplan kan ligge i tangentplanen (figur 70 b).



Figur 70. To eksempler på parabolske kurver: Positivt krum skålflade F1, negativt krum skålflade F2 med parabolsk kurve  $p'$ , et punkt P på kurven samt tangent vinkelret på randen t og oskulationsplan O i punktet P.

- a) Den parabolske kurves oskulationsplan ligger ikke i skallen tangentplan.
- b) Udsnit af torus, hvor den parabolske kurves oskulationsplan ligger i skallen tangentplan.

En grat kan både danne overgang mellem to flader med forskellig krumning, som mellem en ølflaskens krop og bund, og mellem to flader med samme krumning eller rettere sagt samme fortegn for krumningsmålet (figur 71).



Figur 71. To eksempler på flader, der skærer hinanden langs en grat g:

- a) To positivt krumme flader F1 og F2
- b) En positivt krum flade F3 og en nul-krum flade F4.

Bemærk at også hvis de to områder har samme fortegn for krumningsmålet, betragtes hvert område som en flade i sig selv.

Generelt kan man sige, at det der adskiller to flader, er en kurve langs hvilken et normalsnit har et vendepunkt – svarende til en glat overgang – eller en spids – svarende til en grat.

Således betragtes to nul-krumme områder, hvis krumningscentrum ligger på hver sin side af fladen, og som enten mødes langs en linie hvor fladen er plan eller langs en kant, også som to flader.

#### *Sammenligning med landskabselementer*

En positivt krum flade kan sammenlignes med en bakketop. Når man står på en bakketop kan man kun gå en vej – ned. I en retning går det hurtigst, det er hovedkrumningsretningen med størst krumning, i en retning vinkelret herpå går det langsomt. Men kvalitativt er der ikke den store forskel, det kan kun gå ned ad bakke. Tilsvarende kan en positivt krum flade sammenlignes med en dalsænkning, hvis man befinder sig på indersiden. Også her er der kun en vej at gå – opad.

Måske skal det lige indskydes at dette billede er lidt misvisende på grund af tyngdekraften. Man skal forestille sig at man befinder sig i en fantasiverden, hvor man hele tiden står vinkelret på fladen, således at tangentplanen uendelig langt væk markerer horisonten. Da vil det føles som at gå på en flade der bevæger sig under fødderne på en for hvert skridt man tager. Man vil ikke kunne mærke at man går nedad eller opad, kun synet vil fortælle en hvor man er på vej hen – som i et typisk videospil.

På samme måde kan en nul-krum flade sammenlignes med en bjergryg. Man kan enten gå ned til en af siderne eller frem og tilbage langs ryggen. I sidstnævnte tilfælde vil man følge den frembringer, der går gennem startpunktet.

Endelig kan en negativt krum flade sammenlignes med et bjergpas. Når er kommet op i et bjergpas kan man gå fremad eller tilbage og dermed ned

igen eller man kan dreje i en retning vinkelret herpå og gå op til en af siderne. Men man kan også vælge at gå videre i samme højdeniveau enten på den ene eller anden side af den ny dal man ser ind i eller på en af siderne tilbage i den dal man kom fra. I så fald vil man bevæge sig frem eller tilbage langs en af de to asymptotekurver gennem startpunktet.

### **Konklusion**

En flades krumning kan beskrives ved plane snit. Krumningen i et givet punkt kan beskrives ved normalsnittene gennem punktet.

De mest interessante kurver på en flade er de to hovedkrumningskurver, hvis tangenter i et vilkårligt punkt er tangenter til de normalsnit i punktet med henholdsvis den største og den mindste krumning, samt eventuelle kurver, hvis tangent i et vilkårligt punkt er tangent til normalsnit, hvis krumning er nul i punktet.



# Konstruktioners stabilitet og stivhed

Ved undersøgelser af bærende konstruktioners stabilitets- og stivhedsforhold er grænseovergangene mellem rumligt stabile og ustabile tilstande af særlig interesse.

I dette kapitel gives først en kort oversigt over nogle af de grundlæggende begreber der anvendes i forbindelse med beskrivelsen af konstruktioners stabilitet. Derefter beskrives de tre væsentligste grænseovergange der forekommer i forbindelse med skalkonstruktioner.

Vi vil her betragte simple plane stangsystemer, fordi de er lettere at forstå og illustrere, men både begrebsapparat og konklusioner dækker også rumlige konstruktioner.

En understøtning, der fastholder en knude i planen (men tillader rotation om en akse vinkelret på planen) og en understøtning, der fastholder en knude i een retning (men tillader bevægelse i en retning vinkelret herpå samt rotation om en akse vinkelret på planen), tegnes som i (figur 72).



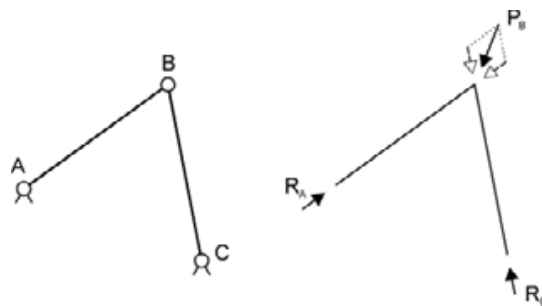
Figur 72. A Knude, der er fastholdt i planen, og B knude, der er fastholdt i een retning.

Stængerne antages i første omgang at være uendelig stive.

Læsere, der ønsker en uddybning af begreberne eller definitionerne af disse, henvises til fx (Nielsen, Rathkjen og Pilegaard Hansen 1973).

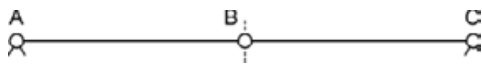
## Oversigt

Et system, der er geometrisk og statisk bestemt, vil kaldes *plant stabilt* eller *rumligt stabilt*, eller, når det fremgår af sammenhængen blot *stabilt* (figur 73).



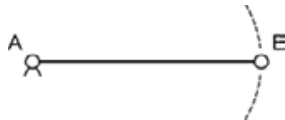
Figur 73. En plant stangsystem, der er stabilt. Knudepunkt B kan ikke bevæges uden at stanglængderne ændres. Alle knudepunkter er geometrisk bestemte og alle stangkræfter kan bestemmes entydigt ud fra ligevægtsligningerne. Systemet er statisk bestemt.

Et system, der er geometrisk bestemt og statisk ubestemt, kaldes *bevægelig i det små* (figur 74).



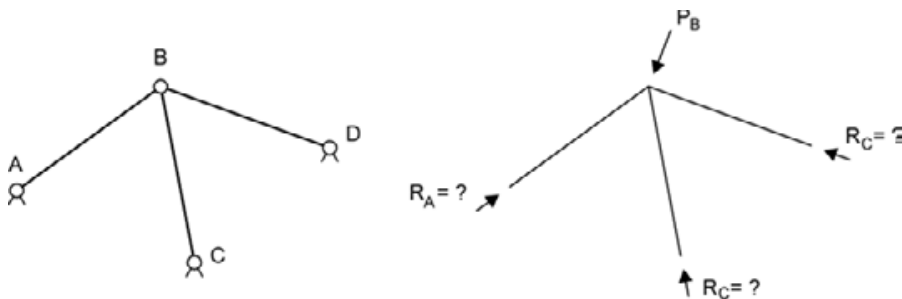
Figur 74. Et plant stangsystem, der er bevægeligt i det små. I praksis er en uendelig lille bevægelse af knudepunkt B er mulig, uden at stanglængderne ændres. Stangkræfterne kan ikke bestemmes entydigt ud fra ligevægtsligningerne, systemet er statisk ubestemt.

Et system, der er en gang geometrisk underbestemt, kaldes en *mekanisme*. En mekanisme er et bevægeligt system med een frihedsgrad, hvilket betyder at mindst et knudepunkt kan bevæges på en bestemt kurve i planen eller rummet (figur 75).



Figur 75. Et plant stangsystem, der er bevægeligt og har een frihedsgrad. Knudepunkt B kan bevæges langs den stiplede kurve uden at stanglængderne ændres.

Et system, der er geometrisk overbestemt og statisk ubestemt, kaldes lige-som et geometrisk og statisk bestemt system, stabilt (figur 76).

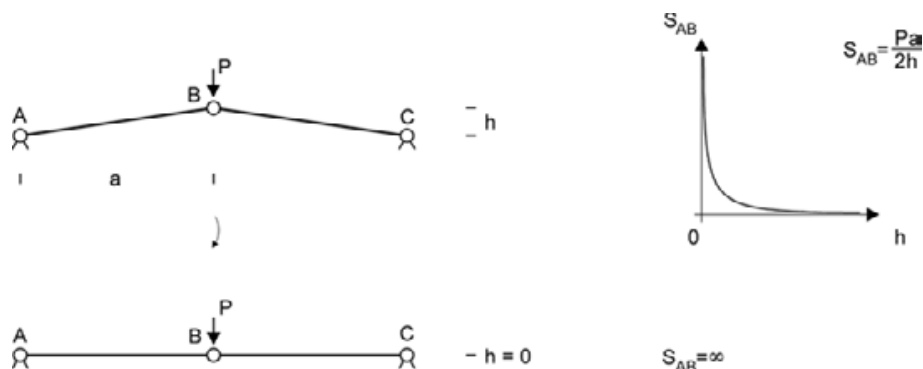


Figur 76. Et plant stangsystem, der er stabilt. Knudepunkt B er geometrisk overbestemt, idet der kan fjernes en stang uden at systemet bliver geometrisk ubestemt. Stangkræfterne kan ikke bestemmes entydigt ud fra ligevægtsligningerne, systemet er statisk ubestemt.

## Grænseovergange

Vi vil først undersøge følgende to grænseovergange fra en stabil til en ustabil udformning af systemet:

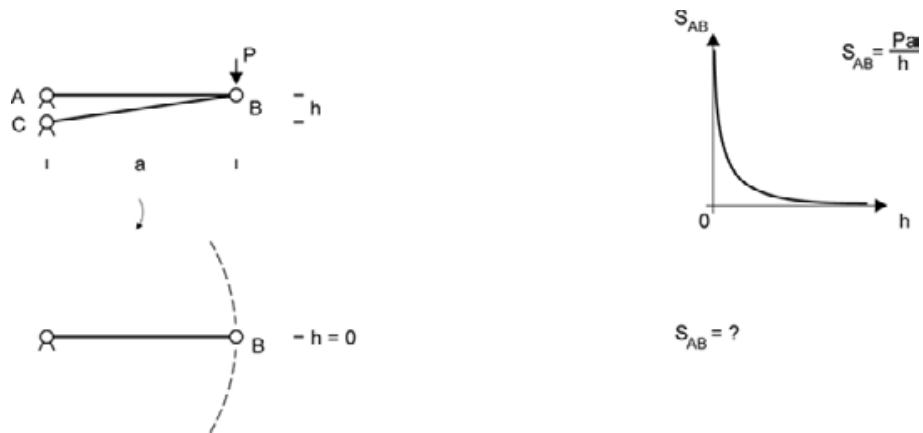
- Fra et geometrisk og statisk bestemt system til et geometrisk bestemt og statisk ubestemt system (figur 77).



Figur 77. Øverst det geometrisk og statisk bestemte stangsystem. Stangkraften  $S_{AB}$  er vist som funktion af  $h$ . Nederst det samme system, men nu statisk ubestemt, idet  $h=0$ .

Når  $h$  bliver reduceret i dette system, øges stangkræfterne  $S$  for en given last  $P$ . Går  $h$  mod  $0$ , går stangkræfterne mod uendelig.

- Fra et geometrisk og statisk bestemt system til et en gang geometrisk underbestemt og en gang statisk ubestemt system (figur 78).



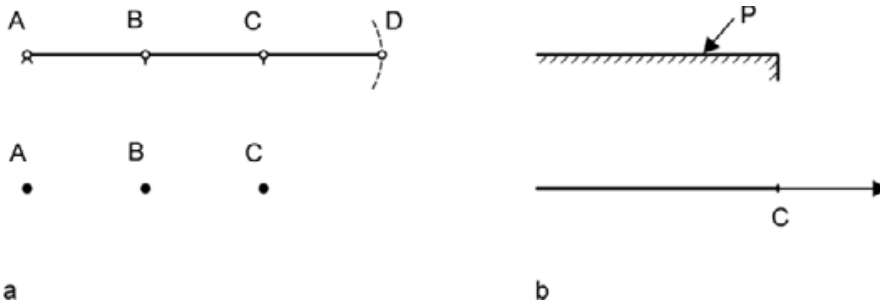
Figur 78. Øverst det geometrisk og statisk bestemte stangsystem. Stangkraften  $S_{AB}$  er vist som funktion af  $h$ . Nederst det samme system, men nu geometrisk og statisk ubestemt, idet  $h=0$ .

Når  $h$  bliver reduceret i dette system, øges stangkræfterne  $S$ , for en given last  $P$ . Går  $h$  mod  $0$ , går stangkræfterne mod uendelig. Men for  $h = 0$  (hvor knude  $A$  og  $C$  er sammenfaldende) er systemet en gang geometrisk underbestemt og en gang statisk ubestemt.

Den fremkomne mekanisme er en gang statisk ubestemt, hvilket fx betyder at belastes knudepunkt  $B$  i stængernes retning, kan stangkræfterne ikke entydigt bestemmes med ligevægtsligningerne og forlænges den ene stang opstår der tvangskræfter i de to stænger.

Begge disse glidende grænseovergange forekommer i forbindelse med design af membranskaller, hvilket betyder at nær en del af de ustabile tilfælde fremkommer meget store kræfter.

Men i forbindelse med membranskaller forekommer der også en tredje grænseovergang, der imidlertid er brat, nemlig fra geometrisk og statisk bestemt til geometrisk underbestemt. Denne overgang er for stangsystemer, som er diskrete systemer, rent topologisk, mens den for glatte membranskaller, som er kontinuerte systemer, er geometrisk (figur 79).



Figur 79.

- a) Diskret system. Når lasten angriber i punkt A, B eller C er systemet stabilt, men angriber den i punkt D er systemet ustabil. Enten skal der tilføjes en understøtning i punkt D, eller systemet skal begrænses til kun at omfatte punkt A, B og C.
- b) Kontinuert system. Når lasten angriber udenfor C, kan den ikke optages.

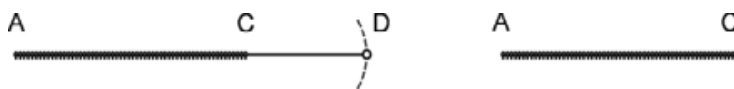
I den sammenhæng må man være opmærksom på, at en membranskal egentlig er en ide, eller mere præcist, en ideel statisk model. En virkelig skal har en - om end ringe - bøjningsstivhed og dermed en bøjningsbæreevne. En virkelig skal kan derfor bedre sammenlignes med et kontinuert system opbygget af en tynd bjælke som det følgende (figur 80).



Figur 80. Tynd bjælke, der er udkræget fra punkt C og ud. Systemet er stabilt, men der opstår væsentlige bøjningskræfter, når systemet belastes udenfor C.

Systemet er stabilt, men der opstår – i denne sammenhæng - store bøjningskræfter, når systemet belastes udenfor C. Der er således tale om en geometrisk grænseovergang.

En membranskal antages imidlertid ikke at kunne bære med bøjningskræfter, hvorfor den kan sammenlignes med et stangsystem som det følgende, hvor understøtningerne ligger uendelig tæt mellem A og C (figur 81).

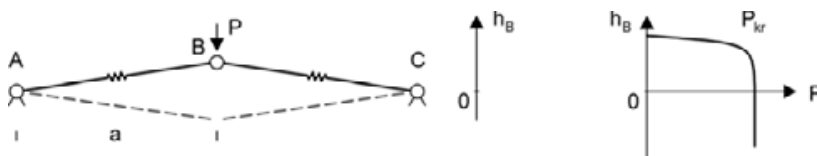


Figur 81. Stangsystem. Systemet er stabilt når lasten angriber mellem punkt A og C, men ikke udenfor C.

Dette system kan naturligvis intet bære udenfor C, hvor systemet mangler understøtninger, altså er der tale om en topologisk grænseovergang. En sådan grænseovergang er brat. Systemets kræfter er ikke afhængig af belastningens afstand til C.

### Elastiske systemer

For elastiske systemer optræder der yderligere en stabilitetsproblematik, der kaldes instabilitet eller buckling, se figur 82.



Figur 82. Eksempel på instabilitet i et plant stangsystem med elastiske stænger. For en given last P-kritisk, sker der det at systemet "slår igennem" og den geometri, der er vist stiplede, fremkommer.

Denne stabilitetsproblematik, der omfatter mange varianter, skal ikke omtales yderligere her, men den kan være afgørende for dimensionering af skaller og andre slanke konstruktioner.

Kræfterne i geometrisk overbestemte og statisk ubestemte konstruktioner, som i (figur 76), kan beregnes, når konstruktionselementernes elasticitet inddrages. I den forbindelse skal det nævnes, at den bedste materialeøkonomi dog opnås ved statisk bestemte konstruktioner, se fx (Reitzel 1979 p 83f).

### **Konklusion**

Vi så at ved de to førstnævnte grænseovergange mellem stabile og ustabile systemer er overgangen glidende. Der opstår store kræfter i systemet jo tættere designet befinder sig en ustabil tilstand. For elastiske konstruktioner med endelige tværsnit og stivhed, manifesterer dette sig ved at der fremkommer store nedbøjninger i disse områder.

Den tredje type grænseovergang er brat. For kontinuerte elastiske systemer vil der på grund af bøjningspåvirkning også opstå store nedbøjninger nær grænseovergange af denne type. Men kun når de belastes på den ustabile side af grænsen.

Det betyder:

- at når man overfører en skal i et elastisk materiale, der får en stor deformation ved en given belastning, kan det være vanskeligt at afgøre om det skyldes, at konstruktionen er ustabil, eller at den blot er designet så uheldigt, at der opstår store kræfter
- at stabilitet er en nødvendig, men ikke en tilstrækkelig betingelse for at opnå hensigtsmæssige skalkonstruktioner med fornøden stivhed.

# Stringermetoden

## Indledning

Stringermetoden anvender et stangsystem som en statisk model af membranskallen. Dette stangsystem opbygges systematisk, så det danner en gitterflade, der består af tre gennemgående sæt af kæder af stænger, de såkaldte stringere, der danner et trekantnet. Stringersystemets topologi er således, at når hver stringer er forsynet med en understøtning, er Maxwell's tælleregulering, der angiver de nødvendige betingelser for stabilitet, opfyldt. Placeres disse understøtninger langs randen i afsnit, der er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri, fremkommer de tre understøtningstyper som skaller har.

Stringerne skal placeres således på fladen at systemet kan modellere skallens statiske opførsel. Til det formål opstilles et sæt modelbetingelser. Disse betingelser suppleres med betingelserne for lokal stabilitet, der siger at de tre stænger, der fastholder en knude ikke må ligge i samme plan. Betingelserne bestemmer stringernes placering på henholdsvis positivt krumme, nul krumme og negativt krumme membranskaller og når disse betingelser er opfyldt, er gitterfladen en statisk model af skalfladen, hvis stabilitet alene er afhængig af understøtningernes placering og retning. Systemets stabilitetsbetingelser er dermed reduceret til nogle overskuelige understøtningsbetingelser.

I de fleste tilfælde er systemet nemlig nu stabilt, hvis understøtningernes retninger opfylder betingelserne for lokal stabilitet. Men i visse tilfælde, der er karakteriseret ved at stangsystemet ikke er successivt opbygget<sup>3</sup>, er dette ikke tilstrækkeligt. Da kan der imidlertid i kraft af stringersystemets opbygning opstilles yderligere betingelser til understøtningernes retninger, der sikrer at systemet er globalt stabilt.

Når et stringersystem tilhørende en given skal er stabilt, kan vi beregne alle kræfterne i systemet for en given last. Nedreværdisætningen siger da, at den værdi af belastningen, der resulterer i flydning i netop en stang vil være mindre end eller lig konstruktionens bæreevne. Stringermetoden angiver således i nogle tilfælde nødvendige betingelser og i alle tilfælde tilstrækkelige betingelser for stabilitet.

Disse betingelser kan formuleres som tre sæt betingelser:

- et sæt for stringersystemets topologi
- et sæt for stringernes placering, og
- et sæt for stringersystemets understøtninger.

Sammenhængen mellem de overordnede betingelser for stringersystemet og de resulterende specifikke betingelser kan skitseres således:

---

<sup>3</sup> se afsnittet *Ikke-successivt opbyggede systemer*.

Overordnede betingelser				Resulterende betingelser
Maxwell's regel	Lokal stabilitet	Modelbetingelser	Global stabilitet	
X				Stringersystemets topologi
	X	X		Stringernes placering
	X		X	Understøtningernes placering og retning

Når stringersystemet opbygges og stringerne placeres og understøttes jf. disse betingelser, er stringersystemet stabilt, og da er membranskallen stabil, når den understøttes ligesom stringersystemet er understøttet.

I sidste afsnit beskrives kort den væsentligste litteratur på området. I litteraturen er membranskallers understøtningsbetingelser fastlagt med udgangspunkt i membranteoriens ligevægtsligning for et infinitesimalt element, der udtrykkes som en anden ordens differentialligning. Skallens understøtningsforhold bestemmes da af de løsninger på begyndelsesværdi- og randbetingelsesproblemer, der sikrer at løsningen af differential- (ligevægts-) ligningen er entydig og skallen dermed er statisk bestemt. I afsnittet gennemgås litteraturens resultater kort og overensstemmelsen mellem dem og stringermetodens resultater diskuteres.

Anvendelsen af metoden er vist med en række eksempler i *Bilag 3*.

## Membranskaller

En membranskal er en skal, i hvilken de eneste snitkræfter der optræder, er normalkræfter og forskydningskræfter i tangentplanen.

### *Understøtninger*

Da der optræder to snitkræfter i et snit i en membranskal og da de begge ligger i tangentplanen, er der umiddelbart tre understøtningsmuligheder<sup>4</sup>:

- 1 dobbelt understøtning, også kaldet fuldstændigt understøtning, understøtningen kan optage en hvilken som helst kraft i tangentplanen.
- 2 enkeltunderstøtning, understøtningen kan optage en kraft i en given retning i tangentplanen, ofte enten normal- eller forskydningskraft i det pågældende snit.
- 3 fri, randen er ikke understøttet.

## Plane stabile stangsystemer

For at vise principperne i stringersystemet i en lettere overskuelig form beskrives først det plane tilfælde.

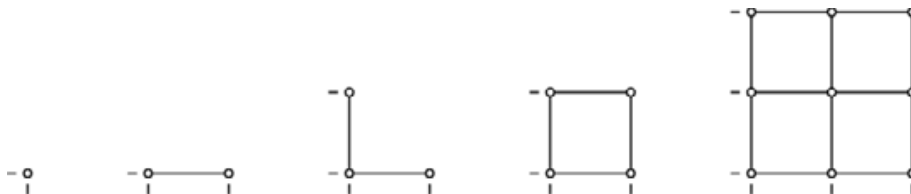
Ved en *understøtning* forstås her en understøtning, der fastholder en knude i planen i netop een retning. En understøtning tillader således at den under-

<sup>4</sup> Fastholdes et stykke af randen fuldstændig i rummet, kan der overføres snitkræfter til skallen, som den ikke umiddelbart kan optage med membrankræfter. Spørgsmålet behandles mere indgående sidst i afsnittet *Stringersystemer*.

støttede knude også kan bevæge sig frit i een retning, nemlig den retning, der ligger vinkelret på fastholdelsesretningen.

For at en knude er fastholdt mod bevægelse i planen, skal den fastholdes i to retninger. Den er da geometrisk og statisk bestemt, og den betegnes så som *stabil*.

På grundlag af denne betingelse kan der opbygges et stabilt gittersystem - det vil sige at alle knuder er stabile - ved successivt at tilføje knuder, stænger og understøtninger. Det skal ske således at hver knude der tilføjes, fastholdes i to retninger, enten af to stænger fra eksisterende knuder, eller af en stang og en ny understøtning eller af to ny understøtninger. Et sådan system kaldes *successivt opbygget* (figur 83).



Figur 83. Principet i et plant stabilt stangsystem der er successivt opbygget. Den første knude understøttes i to retninger, derefter tilføjes knude efter knude, således at hver knude der tilføjes, fastholdes i to retninger, enten af to stænger fra eksisterende knuder, eller af en stang og en understøtning eller af to ny understøtninger. En understøtning er vist med en kort streg, der angiver den retning, hvori knuden er fastholdt. En knude er vist med en cirkel og en stang som en streg mellem to knuder.

Det følger heraf, at en understøtning kan tænkes realiseret ved hjælp af en stang, der ligger i understøtningens retning, og som i sin anden ende er understøttet i to retninger.

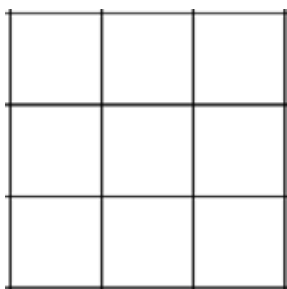
Et successivt opbygget stangsystem kan i øvrigt også karakteriseres ved, at det kan *"trævles op"*. Det skal forstås på den måde, at man en for en kan fjerne knuder, der kun er fastholdt af to stænger/understøtninger, uden at det påvirker stabiliteten af resten af konstruktionen, indtil der ikke er flere knuder tilbage. Et system der kan trævles helt op er stabilt.

Konstruktionen af dette stabile stangsystem viser, at en *nødvendig betingelse* for, at et *plant* stangsystem er stabilt, er at:

$$S + U = 2K \quad (1)$$

hvor  $S$  er antal stænger,  $U$  er antal understøtninger og  $K$  er antal knuder.

Et sådan successivt opbygget stangsystem kan opbygges så det danner et netværk af firkanter, der bredes ud over planen. Netværket kan tænkes opbygget af to sæt kurver, som skærer hinanden i 4-grenede knuder på samme måde som de rette linier i det nedenfor viste regulære mønster (figur 84).

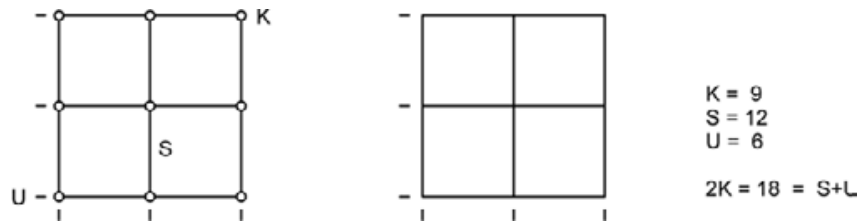


Figur 84. Regulært mønster opbygget af to sæt rette linier.



Dette stangsystem kan betragtes som opbygget af to sæt stringere, hvor hver *stringer* består af en kæde af stænger, og hvor hver knude fastholdes af en stringer fra hvert sæt. Vi vil kalde det et *plant stringersystem*.

Et plant stringersystems topologi sikrer, at alle knuder er fastholdt i to retninger, og dermed at stabilitetsbetingelsen  $S + U = 2K$  er opfyldt, når der til hver stringer er tilknyttet en understøtning, der understøtter randknuden i stringerens ene ende – vi siger at stringeren er understøttet i denne knude (figur 85).



Figur 85. Stangsystem

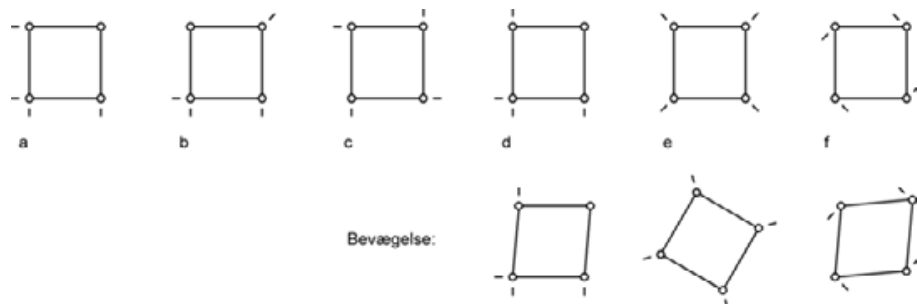
Stringersystem

En stringer er stabil og kan overføre både tryk- og trækkræfter i egen retning, når hver knude er fastholdt i en retning, der ikke indeholder en naboknude på stringeren - enten af en stringer eller en understøtning - og i en enkelt knude derudover er understøttet en gang i en anden retning.

I et successivt opbygget stangsystem sikres stabiliteten knude for knude, ved at sikre, at hver knude, der tilføjes, er stabil. Betragtet som stringersystem påvirkes stabiliteten imidlertid ikke umiddelbart af, at en stringer understøttes i den modsatte ende, når knuderne er fastholdt i en retning, der ikke indeholder en naboknude på stringeren. Men dette kan føre til systemer, som ikke er successivt opbygget og hvis stabilitet ikke kan kontrolleres.

#### Ikke-successivt opbyggede systemer

Vi vil her undersøge under hvilke forudsætninger, stringeren kan understøttes i den modsatte ende således, at systemet fortsat er stabilt. Betragt et simpelt system (figur 86).



Figur 86. Det simplest mulige plane stringersystem. De fire understøtninger kan placeres så der fremkommer både stabile og ustabile systemer:

- Systemet er successivt opbygget og stabilt
- Systemet er successivt opbygget og stabilt
- Systemet er enkeltunderstøttet og stabilt
- Systemet er enkeltunderstøttet. En stang er understøttet i egen retning i begge ender, og en anden er derfor ikke understøttet, systemet er bevægeligt i det små og ustabil

e) Systemet er enkeltunderstøttet så en stiftlegemebevægelse (rotation) er mulig, systemet er ustabil

f) Systemet er enkeltunderstøttet så der opstår en mekanisme, systemet er ustabil.

Det ses at:

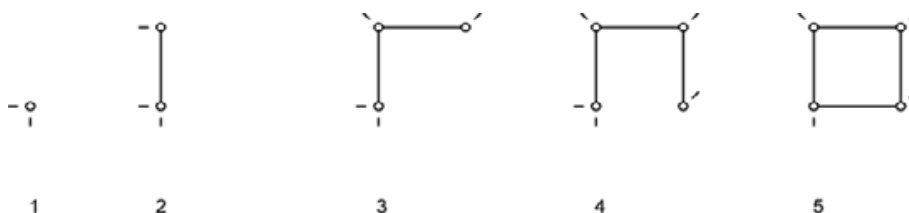
- når systemet er successivt opbygget er det stabilt: a) b)
- når stængerne er understøttet i egen retning er systemet stabilt: a) c)
- når understøtningerne er placeret åbenlyst uhensigtsmæssigt er systemet ustabil: d) e)
- der kan opstå en mekanisme, når systemet er enkeltunderstøttet, som ved mere komplekse systemer sandsynligvis kun kan afsløres ved at opstille systemets ligevægtsligninger og undersøge om de kan løses: f).

Vi ser at et enkeltunderstøttet system af denne type specielt er stabilt, når stængerne er understøttet i egen retning.

Forklaringen er, at når stængerne er understøttet i egen retning, er den understøttede knude bundet til kun at kunne bevæge sig på en linie vinkelret på stangen. Selvom knuden flyttes lidt langs denne linie flyttes den ikke i stangens retning. Stringerens fastholdelse gøres dermed uafhængig af de øvrige stringere. Gælder dette for alle stringere tilhørende blot et sæt, kan det vises at hele systemet er fastholdt i planen og dermed stabilt.

I de følgende afsnit vil stringerne blive placeret på krumme skalflader. For stringere på krumme flader viser det sig, at stringerens egen retning ikke kan defineres, fordi den afhænger af stængernes længde, og dermed af stringernes afstand, der ikke er defineret. Begrebet "stringerens egen retning" har derfor kun mening i forbindelse med retlinede stringere.

Betragter vi atter (figur 86), illustreres problemerne i tilfælde e) og f) måske bedst, når systemet opbygges på følgende måde (figur 87):



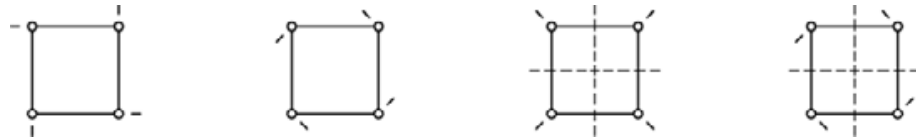
Figur 87. Opbygning af de enkeltunderstøttede systemer i (figur 86). Systemet opbygges successivt fra 1 til 4. I 5 erstattes en af de to understøtninger af den første knude, med en stang fra den fjerde knude og systemet bliver dermed et ikke-successivt opbygget system, der danner en kreds.

Til sidst (figur 87 5) erstattes den ene af de to understøtninger, der indtil nu har fastholdt den første knude fuldstændigt i planen, med en stang fra den fjerde knude. Vi vil kalde dette system en *kreds*. I en *kreds*, danner stængerne en lukket kæde, der i hver knude er fastholdt en gang (- i det plane tilfælde - i det rumlige tilfælde to gange) af enten en understøtning eller en stang.

Med en *kreds* indbygges en afhængighed i systemet, som giver mulighed for at systemet bliver bevægeligt og dermed ustabil.

Systemet kan blive bevægeligt i det små (figur 86 d), bevægeligt som et stiftlegeme (figur 86 e) eller til en mekanisme (figur 86 f). Specielt mekanismerne kan være vanskelige at udpege på forhånd. Tarnai har dog vist (Tarnai 1980b p. 358), at spejlsymmetriske systemer med et lige antal stænger er

mekanismer. Manglende spejlsymmetri er dog ikke tilstrækkeligt til at sikre stabilitet (figur 88).



Figur 88. Ikke successivt opbyggede systemer med et lige antal stænger. De to til venstre, hvoraf det ene er understøttet i stængernes egen retning, er ikke spejlsymmetriske og stabile. Spejlsymmetriske systemer, som de to til højre er ustabile.

## Rumligt stabile stangsystemer

Ved en *understøtning* forstås også her en understøtning, der fastholder en knude i netop een retning. En understøtning tillader således, at den understøttede knude kan bevæge sig frit i to retninger, nemlig i den plan, der ligger vinkelret på fastholdelsesretningen.

For at en knude er fastholdt mod bevægelse i rummet, skal den fastholdes i tre retninger. Det vil sige at følgende to betingelser skal være opfyldt for at knuden er geometrisk og statisk bestemt, og betegne den som rumligt stabil:

### Stabilitetsbetingelser

- 1 Knuden skal fastholdes af *tre* understøtninger eller tre stænger, eller en kombination heraf
- 2 De tre tilhørende retninger må *ikke* ligge i *samme plan*.

På grundlag af disse betingelser kan der opbygges et stabilt stangsystem ved successivt at tilføje knuder, stænger og understøtninger. Det skal ske således at hver knude der tilføjes, fastholdes i tre retninger, enten af stænger fra eksisterende knuder eller af nye understøtninger eller af en kombination heraf (figur 89).



Figur 89. Princippet i et successivt opbygget rumligt stabilt stangsystem. Den første knude understøttes i tre retninger, derefter tilføjes knude efter knude, således at hver knude, der tilføjes, fastholdes i tre retninger, enten af stænger fra eksisterende knuder, eller af nye understøtninger eller af en kombination heraf. En understøtning er vist med en kort streg, der angiver den retning, hvori knuden er fastholdt.

Den første stabilitetsbetingelse kan som konstruktionen af dette stabile stangsystem viser formuleres som:

### Maxwell's tælleregul

En *nødvendig betingelse* for, at et stangsystem er *rumligt stabilt*, er at:

$$S + U = 3 K \quad (2)$$

hvor  $S$  er antal stænger,  $U$  er antal understøtninger og  $K$  er antal knuder. Denne tælleregul blev opstillet af Maxwell i 1864, se for eksempel (Nielsen 1964) eller (Calladine 1983).

### Lokal stabilitet

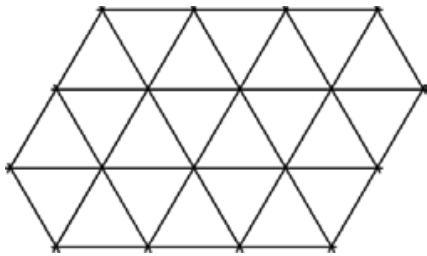
Den anden stabilitetsbetingelse, der siger at de tre retninger ikke må ligge i samme plan, vil vi kalde betingelsen for *lokal stabilitet*, idet vi senere skal se, at den kun for successivt opbyggede systemer er tilstrækkelig til at sikre systemets globale stabilitet.

## Stringersystemet

Vi vil nu betragte en afgrænset krum skalflade. Fladen antages tilstrækkelig understøttet langs randen.

Vi tænker os herefter et stangsystem, der opbygges successivt og danner et netværk af trekanter, der breder sig ud over fladen, idet alle knuder lægges på fladen.

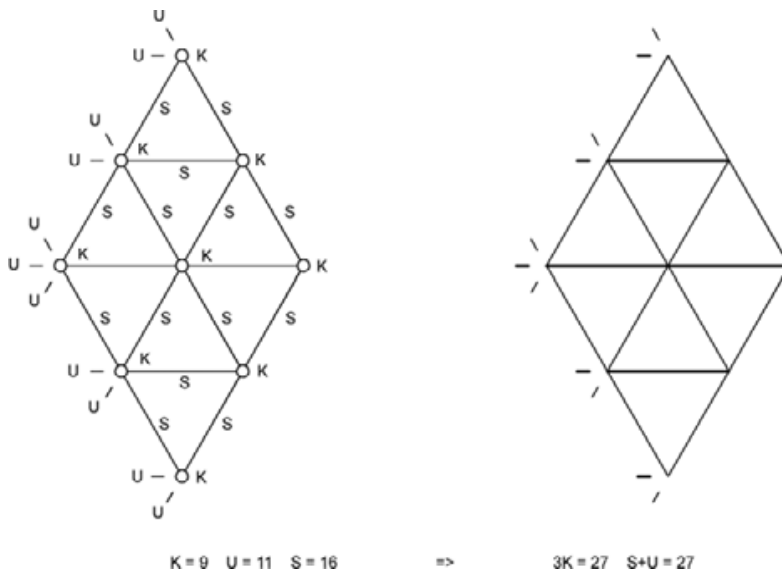
Netværket tænkes opbygget af tre sæt kurver, som skærer hinanden i 6-grenede knuder på samme måde som de rette linier i det nedenfor viste regulære mønster (figur 90).



Figur 90. Regulært mønster opbygget af tre sæt rette linier.

Dette stangsystem kan betragtes som opbygget af tre sæt stringere, hvor hver stringer består af en kæde af stænger, og hvor hver knude fastholdes af en stringer fra hvert sæt. Vi vil kalde dette system for et *stringersystem*.

Stringersystemets topologi sikrer at Maxwell's tælleregul er opfyldt, når der til hver stringer er tilknyttet en understøtning, der understøtter randknuden i stringerens ene ende – vi siger at stringeren er understøttet i denne knude (figur 91).

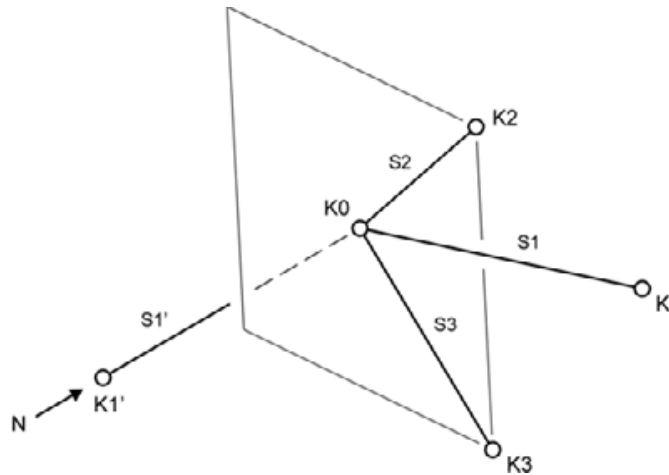


Figur 91. Stangsystem

Stringersystem. Et stringersæt er fremhævet.

Bemærk at en randknode, der ligger i et "hjørne" af stringersystemet, og kun skæres af to stringere, skal forsynes med en understøtning af den tredje stringer, der kun er repræsenteret ved denne knude.

Betragtes en enkelt knude på stringeren ses, at en stringer kan overføre både tryk- og trækkræfter, når den i hver knude er fastholdt i to retninger, og den plan, som de to retninger bestemmer, ikke indeholder en af de to naboknuder på den betragtede stringer (figur 92)



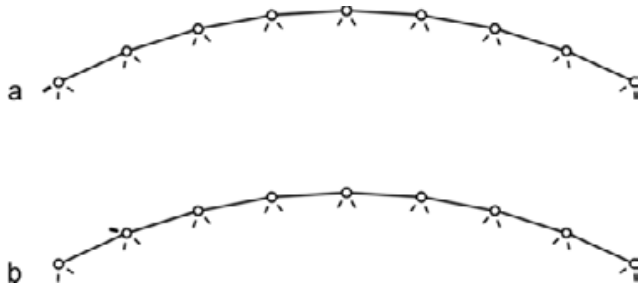
Figur 92. S1, S2 og S3 er den understøttede del af stringerne. Stringeren S1S1' fastholdes i den viste plan, bestemt af de to øvrige stringere S2 og S3. Derved er knuden K0 er fastholdt i tre retninger og S1' (og S2' og S3' – der ikke er vist) er understøttet i K0.

Antag nemlig at S1 er den understøttede del af stringeren. Da må planen bestemt af K0, K2 og K3 (jf. betingelsen for lokal stabilitet) ikke indeholde K1. S1' kan da betragtes som understøttet i den betragtede knude K0, hvilket bevirker, at normalkraften N i stringeren kan ændre retning fra S1 til S1'.

Vi vil i afsnittet *Stringernes placering* se, hvilke krav dette stiller til stringernes placering på henholdsvis positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme flader, idet vi vil forlange at planen bestemt af K0, K2 og K3 hverken indeholder K1 eller K1'.

En *stringer* er stabil, når den i hver knude er fastholdt i to retninger - enten af to stringere, af en stringer og en understøtning eller af to understøtninger - der opfylder ovennævnte betingelse, og i en enkelt knude derudover er fastholdt i en tredje retning. Fastholdelsen kan etableres på to principielt forskellige måder:

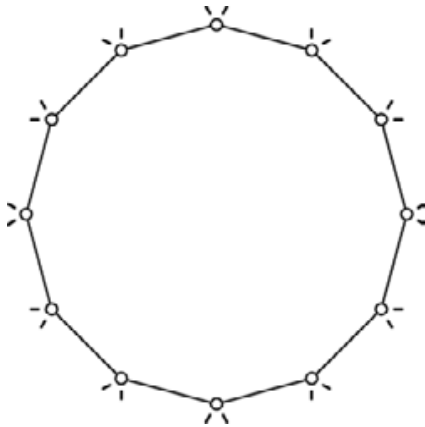
- Enten med en understøtning, hvorved stringeren kan betragtes som successivt opbygget ud fra den knude, der er fastholdt i tre retninger (figur 93).



Figur 93. Successivt opbyggede stringere i det rumlige tilfælde. Hver knude er fastholdt i to retninger. Desuden er en enkelt knude fastholdt i en tredje retning som her er fremhævet:

- a) Stringer understøttet i den ene ende
- b) Stringer understøttet i en indre knude.

- Eller ved at forbinde de to endeknuder med en stang, således at der fremkommer et ikke-successivt opbygget system, der danner en kreds (figur 94).



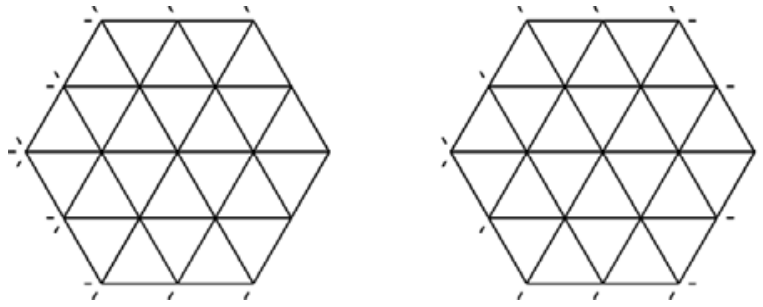
Figur 94. Stringer der danner en ikke successivt opbygget system - en kreds - i det rumlige tilfælde. Hver knude er fastholdt i to retninger.

Dermed indbygges, som i det plane tilfælde, en afhængighed i systemet, der åbner mulighed for at systemet bliver bevægeligt og dermed ustabil.

#### *Successivt - og ikke-successivt opbyggede systemer*

I det successivt opbyggede stangsystem sikres stabiliteten af systemet knude for knude, ved at sikre, at hver knude, der tilføjes, er stabil. Betraget som stringersystem påvirkes stabiliteten af systemet ikke umiddelbart, hvis en stringer understøttes i den modsatte ende, da knuderne er lokalt stabile. Men understøttes et eller flere stringersæt helt eller delvist i den modsatte ende kan det føre det til stringersystemer, som er ikke-successivt opbygget.

Sådanne systemer kan være af interesse i forbindelse med skaller. Understøttes for eksempel hele det ene stringersæt i et successivt opbygget system i den modsatte ende, fremkommer et ikke-successivt opbygget system, hvor hele randen er enkeltunderstøttet (figur 95).



Figur 95. Understøttes et stringersæt i et succesivt opbygget system i den modsatte ende, fremkommer et ikke-succesivt opbygget system og hele randen bliver enkeltunderstøttet.

Ikke-succesivt opbyggede rumlige systemers stabilitet er imidlertid ligesom for de plane systemers vedkommende ikke alene afhængige af lokal stabilitet. I afsnittet *Ikke-succesivt opbyggede systemer* undersøges hvilke krav til understøtningernes retninger, der kan sikre stringersystemets stabilitet.

#### *Stringersystemet er en repræsentativ model*

Da netværket kan gøres vilkårligt tæt, kan vi med en passende placering af stringerne antage at:

- de betragtninger der gælder for et groftmasket system også gælder for et fintmasket
- et tilstrækkeligt fintmasket stringersystem kan komme vilkårligt tæt på den oprindelige glatte skalflade
- den glatte skalflade kan optage kræfter på samme måde som stringersystemet.

Vi kan derfor indskrænke os til at betragte et groftmasket stringersystem ved vores undersøgelser, da det kan repræsentere alle stringersystemer med de samme retninger, såvel statisk som geometrisk, og dermed kan anvendes som en statisk model af skallen.

#### *Grundlæggende stringersystemer*

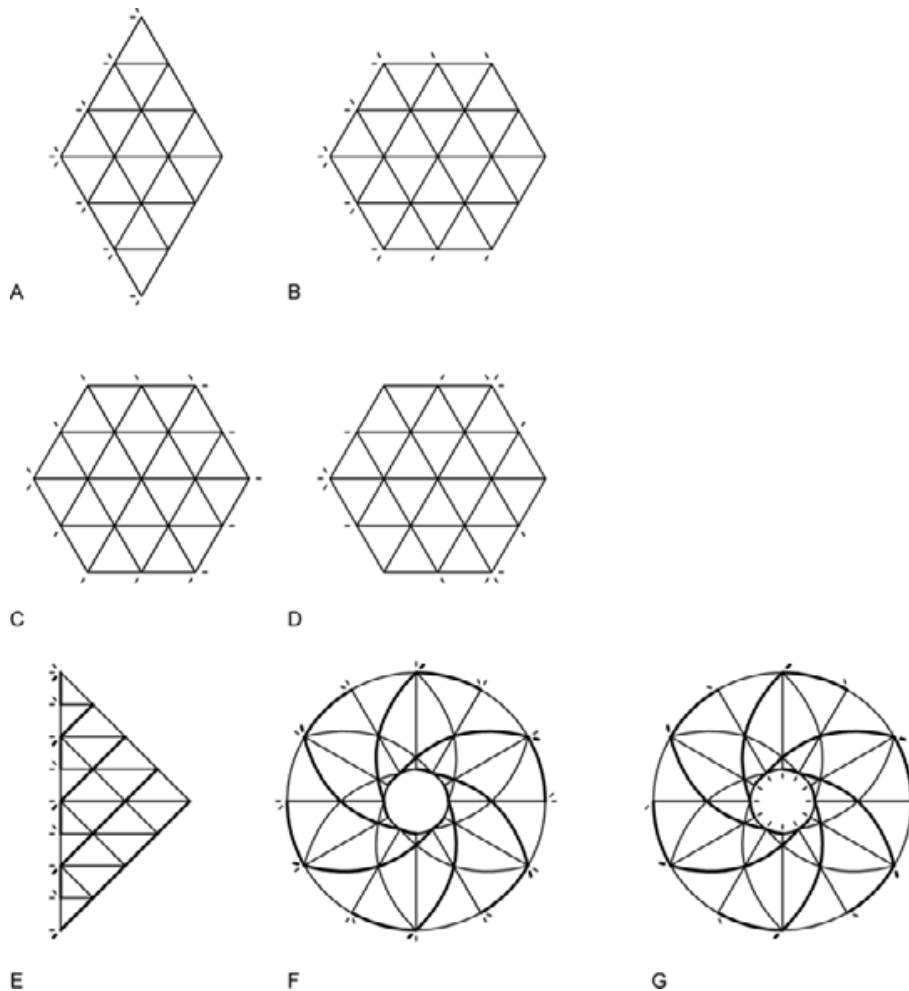
Vi har nu et stangsystem – stringersystemet – der kan dække en krum flade og som har en topologi, der sikrer, at Maxwell's tælleregul er opfyldt, når hver stringer er tilknyttet en understøtning. Vi vil her se hvordan denne betingelse kan opfyldes med passende placeringer af understøtningerne, når stringersystemet samtidigt betragtes som statisk model af en membranskal.

I stringersystemet bemærker vi, at der ligger en stringer langs randen, som bidrager med een understøtning af randknuderne.

Stringersystemets randknuder har da - svarende til membranskallens rand - generelt tre understøtningsmuligheder:

- Dobbelt understøttet, hvilket betyder at knuden er understøttet i to retninger og at to stringere understøttes i denne knude
- Enkeltunderstøttet, hvilket betyder at knuden er understøttet i een retning og at een stringer understøttes i denne knude
- Fri, knuden er ikke understøttet.

Dette fører frem til en række grundlæggende stringersystemer, hvor randen er inddelt i afsnit, hvis knuder er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri (figur 96).



Figur 96. Grundliggende stringersystemer. Randknudernes understøtninger er så vidt muligt vist i forlængelse af de stringere, der er understøttet i knuderne.

- A Successivt opbygget system, med henholdsvis en dobbeltunderstøttet og en fri rand.
- B Successivt opbygget system, med henholdsvis en dobbeltunderstøttet, to enkeltunderstøttede og en fri rand.
- C Ikke-successivt opbygget system, med en enkeltunderstøttet rand.
- D Ikke-successivt opbygget system, med henholdsvis tre dobbeltunderstøttede og tre frie rande.
- E Successivt opbygget system, med henholdsvis en dobbeltunderstøttet og en fri rand. I knuderne langs den venstre rand understøttes dels en stringer fra det vandret beliggende stringersæt, dels skiftevis en stringer fra det ene og fra det andet diagonale stringersæt. Det ene af disse stringersæt er fremhævet. Stringerne i dette stringersæt er understøttet i en knude på randen, der er en indre knude på stringeren.
- F Dobbeltsammenhængende flade. Ikke-successivt opbygget system, med henholdsvis en dobbeltunderstøttet og en fri rand. Kan alternativt dobbeltunderstøttes langs den indre rand. I knuderne langs den ydre rand understøttes dels en stringer fra det radiært beliggende stringersæt, dels skiftevis en stringer fra det ene og fra det andet diagonale stringersæt. Det ene af disse stringersæt er fremhævet. Stringerne i dette stringersæt er understøttet i en knude på randen, der er en indre knude på stringeren.
- G Dobbeltsammenhængende flade. Ikke-successivt opbygget system, med to enkeltunderstøttede rande. I knuderne langs den ydre rand understøttes skiftevis en stringer fra det ene og fra det andet diagonale stringersæt. Det ene af disse stringersæt er fremhævet. Stringerne i dette stringersæt er understøttet i en knude på randen, der er en indre knude på stringeren.



Bemærk at den knude hvor randstringeren understøttes i nogle tilfælde skal forsynes med en ekstra understøtning.

I system A, B, C, D og E optræder der i enkelte knuder en ekstra understøtning. I praksis betyder det at dette punkt på skallens rand skal forsynes med en ekstra understøtning.

## Understøtninger

Vi vil i dette afsnit betragte det understøttede stringersystem som en statisk model af en skal og på den baggrund undersøge, hvad der kan udledes om understøtning af skaller.

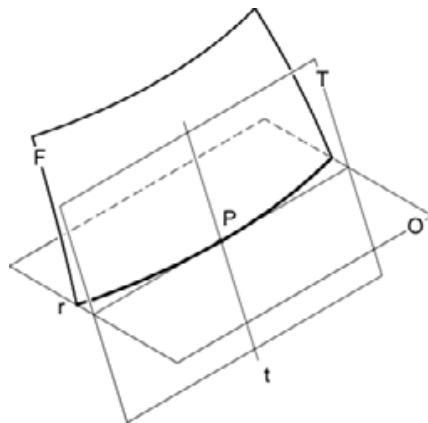
Stringerne betragtes som krumme kurver. Der anvendes i øvrigt de samme geometriske begreber vedrørende flader og kurver, som i kapitlet *Krumme fladers form* og (Fabricius-Bjerre 1977).

To forhold ved stringersystemet er væsentlige for understøtningerne:

- betingelsen om lokal stabilitet, der betyder, at en understøtning af en knude i stringersystemet ikke må ligge i samme plan som de to øvrige stringere/understøtninger, der fastholder knuden
- at der ligger en stringer langs randen, som fastholder randknuderne i een retning.

Dette betyder at:

- En enkeltunderstøtning af en knude på en ret rand må ikke ligge i randens retning, da randstringeren allerede fastholder randknuderne en gang i denne retning.
- En eventuel dobbeltunderstøtning af en knude på en krum rand, må ikke ligge i randkurvens oskulationsplan, da randstringeren allerede fastholder randknuderne en gang i denne plan (figur 97).

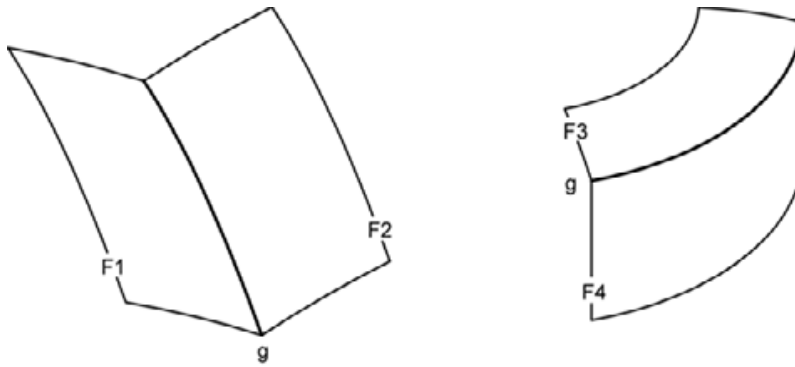


Figur 97. Eksempel: Positivt krum skallflade F med rand r et punkt P på randen samt tangent vinkelret på randen t, tangentplan T og oskulationsplan O i punktet P.

Det kan på denne baggrund vises at:

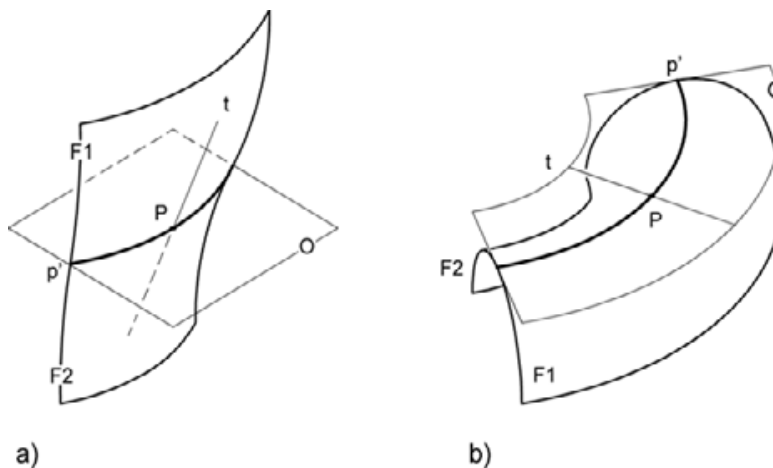
- En skal kan dobbeltunderstøttes på den fri rand tilhørende en anden skal, hvis randen er krum, de to skaller tangentplaner langs randen ikke falder sammen med randens oskulationsplan og sidstnævnte skal er stabil. Når

de to skallers tangentplaner ikke falder sammen langs randen fremkommer en grat (figur 98).



Figur 98. Fladen F1 kan dobbeltunderstøttes langs graten g, hvis F2 inklusiv g er stabilt understøttet. Tilsvarende kan F3 understøttes på F4, hvis F4 inklusiv g er stabilt understøttet.

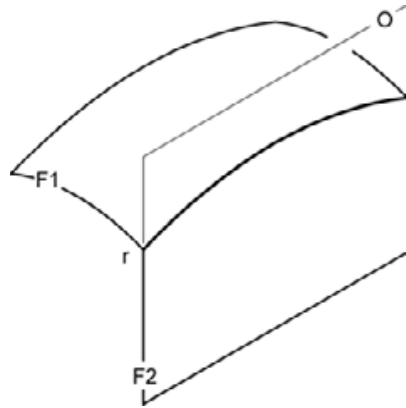
- En skaldel med positiv krumning kan dobbeltunderstøttes på en skaldel med negativ krumning – og omvendt – langs en parabolisk kurve, det vil sige uden grat, hvis den paraboliske kurves oskulationsplan ikke ligger i skallens tangentplan - hvad den kun sjældent gør (figur 99 a).
- En skaldel med positiv krumning kan kun enkeltunderstøttes på en skaldel med negativ krumning - eller omvendt - langs en parabolisk kurve, når den paraboliske kurves oskulationsplan ligger i skallens tangentplan og sidstnævnte skaldel er stabil (figur 99 b).



Figur 99. To eksempler på paraboliske kurver: Positivt krum skalflade F1, negativt krum skalflade F2 med parabolisk kurve  $p'$ , et punkt P på kurven samt tangent vinkelret på randen t og oskulationsplan O i punktet P.

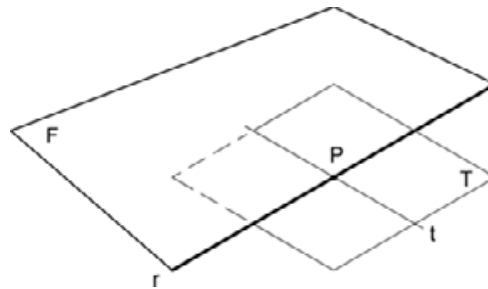
- a) Den paraboliske kurves oskulationsplan ligger ikke i skallen tangentplan. F1 kan dobbeltunderstøttes på F2, hvis F2 er stabilt understøttet.
- b) Udsnit af torus, hvor den paraboliske kurves oskulationsplan ligger i skallen tangentplan. F1 kan enkeltunderstøttes på F2 og omvendt.

- En plan skive, fx en lodret væg, kan kun enkeltunderstøtte en rand, da den netop ligger i randens oskulationsplan (figur 100).



Figur 100. En plane skive F2, der understøtter skalfladen F1 langs randen r, ligger i randens oskulationsplan O.

- En dobbeltunderstøtning af en knude på en ret rand, skal placeres så dobbeltunderstøtningens plan ikke indeholder randen. Specielt må den ikke ligge i skallens tangentplan (figur 101).



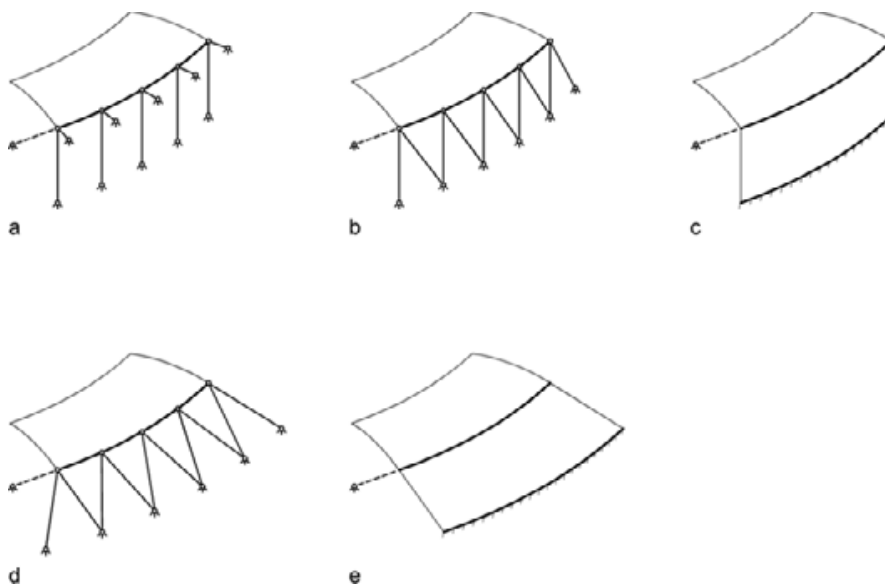
Figur 101. Eksempel på en skalflade F (negativt krum hyperbolsk paraboloid) med ret rand r, et punkt P på randen samt tangent vinkelret på randen t og tangentplan T i punktet P.

Endelig bemærker vi at da en enkelt stringer i en skal eller i en grat er stabil, når den er understøttet en gang i den ene ende og desuden enkeltunderstøttet af de to skaldele, der ligger på hver side af den, gælder at:

- To skaldele kan enkeltunderstøtte hinanden langs en fælles kurve. Når de to skallers tangentplaner ikke falder sammen langs kurven fremkommer en grat.

### Dobbeltunderstøtninger

Vi når hermed frem til at dobbeltunderstøtninger principielt kan udformes på følgende måder (figur 102):

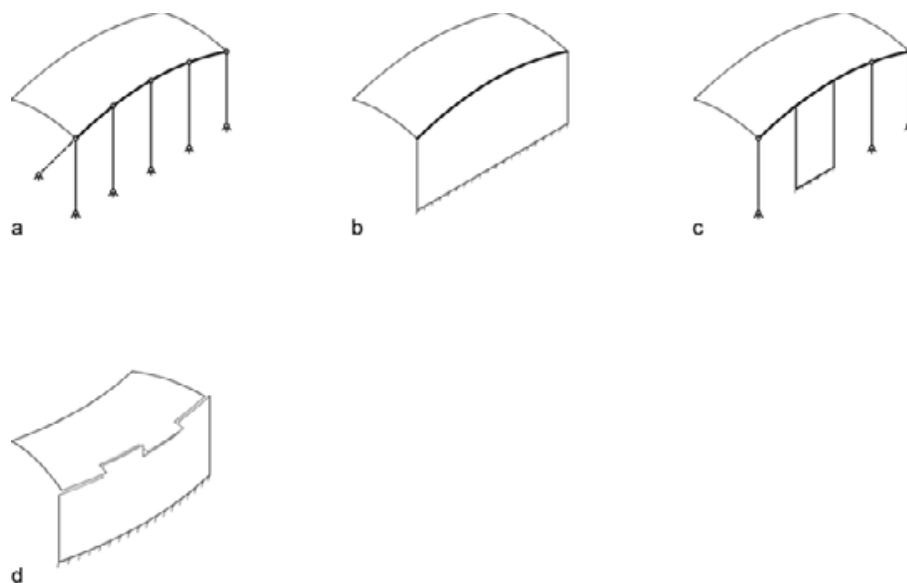


Figur 102. Dobbeltunderstøtninger. De fri knuder skal betragtes som fuldstændig fastholdte.

- Dobbeltunderstøtningernes planer skærer randen. Kan anvendes til både rette og krumme rande. Understøtningerne er her udformet som henholdsvis lodrette søjler og vandrette stænger. Randstringeren skal understøttes en gang i et punkt (vist stiplede).
- Dobbeltunderstøtningernes planer tangerer randen. Kan kun anvendes til krumme rande. Understøtningerne er her udformet som henholdsvis lodrette søjler og skrå stænger. Randstringeren skal understøttes en gang i et punkt (vist stiplede).
- Dobbeltunderstøtningernes planer tangerer randen. Kan kun anvendes til krumme rande. Understøtningerne er her udformet som en cylindrisk skal, der kan optage både normalkræfter og forskydningskræfter.
- Dobbeltunderstøtningernes planer er sammenfaldende med skallens tangentplaner i de understøttede knuder. Kan kun anvendes til krumme rande. Understøtningerne er her udformet som skrå stænger. Randstringeren skal understøttes en gang i et punkt (vist stiplede).
- Dobbeltunderstøtningernes planer er sammenfaldende med tangentplanerne i randknuderne. Kan kun anvendes til krumme rande. Understøtningerne er her vist som en nul-krum skal, der kan optage både normalkræfter og forskydningskræfter.

### Enkeltunderstøtninger

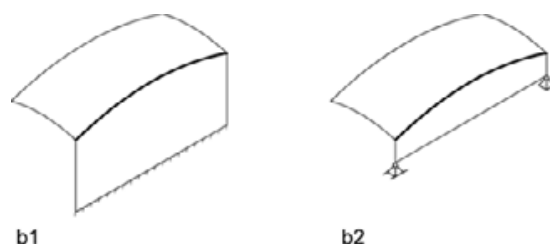
Enkeltunderstøtninger kan principielt udformes på følgende måder (figur 103):



Figur 103. Enkeltunderstøtninger. De fri knuder skal betragtes som fuldstændig fastholdte.

- Enkeltunderstøtning med stænger, her vist som lodrette søjler. Kan anvendes til både rette og krumme rande. Randstringeren skal understøttes en gang i et punkt (vist stiplede).
- Enkeltunderstøtning i form af en plan skive, der kan optage både normalkræfter og forskydningskræfter i skivens plan. Kan anvendes til både rette og krumme rande. Randstringeren skal ikke understøttes yderligere.
- Enkeltunderstøtningerne er vist som lodrette søjler og en enkelt skive. Dette er en alternativ udformning af b) og kan derfor kun anvendes, hvis understøtningerne ligger i samme plan. Randstringeren skal ikke understøttes yderligere.
- Enkeltunderstøtning udformet som fortanding. Kan alene optage forskydningskræfter langs randen og kan derfor kun anvendes til krumme rande.

Skiven i (figur 103 b) kan understøttes enten som skive eller som bjælke. Hvis den ved en ret rand understøttes som bjælke, betegnes den ofte som en *afstivning* af randen (figur 104).



Figur 104. Hvis skiven i (figur 103 b) understøttes som bjælke kaldes den for en afstivning (b2).

### Randstringeren

En dobbeltunderstøtning, der ikke ligger i skallens tangentplan, er umiddelbart ikke forenelig med membranteorien. Betragtes randstringeren imidlertid som et særskilt konstruktionselement, kan membranskallen betragtes som dobbeltunderstøttet på randstringeren.

Randstringeren er, som enhver anden stringer, stabil og dermed fuldstændigt fastholdt i rummet, når den i alle punkter er dobbeltunderstøttet - og dobbeltunderstøtningernes planer skærer randkurvens oskulationsplan - og den i et enkelt punkt derudover er fastholdt i en tredje retning jf. (figur 93).

Betragt nu tilfælde a) i (figur 103) og lad skalfladen være påvirket af en last. Denne last overføres til randstringeren om forskydningskræfter langs denne. Forskydningskræfterne akkumuleres hen igennem randstringeren og optages i den knude, hvor stringeren er understøttet (en del af de lodrette komponenter overføres til søjlerne).

En randstringer langs en understøttet rand, hvor understøtningen ikke ligger i skallens tangentplan, vil derfor i almindelighed skulle optage større kræfter i sin egen retning end de øvrige stringere. En passende forstærkning, fx ekstra armering, hvis det drejer sig om en betonskal, vil være nødvendig. Og "da gratens (eller randstringerens) deformationer i reglen ikke er lig skalrandens, ja ofte har modsat fortegn, vil dette give anledning til sekundære bøjningsspændinger i skallerne" (Johansen 1938 p. 70).

Bemærk at fastholdes hvert punkt på den understøttede rand i tre retninger, svarende til det, der i forbindelse med plader kaldes en simpel understøtning, etableres der en statisk ubestemt tilstand i randstringeren. Men for den øvrige del af systemet svarer det til, at randstringeren er dobbeltunderstøttet.

#### *Huller i skaller*

Et hul skal betragtes som en fri rand, langs hvilken der skal ligge stringere. Dette kan betyde at der skal tilføjes understøtninger, hvis en skal forsynes med et eller flere huller, se *Bilag 3, Eksempel 6*

## Stringernes placering

Vi har nu etableret et stringersystem, der kan dække en krum flade, således at alle knuder fastholdt af tre understøtninger/stænger. Vi vil i dette afsnit undersøge, hvordan stringere og knuder mere præcist kan placeres således at:

- systemet udgør en statisk model af membranskallen, og
- betingelsen om lokal stabilitet er opfyldt, hvilket betyder, at de tre stænger der fastholder en knude, ikke må ligge i samme plan.

En statisk model skal modellere skalfladen geometrisk og dermed krumningsmæssigt korrekt. Vi vælger på denne baggrund at stille følgende tre betingelser til stringersystemet:

#### *Modelbetingelser*

- 1 Alle knuder skal ligge på skalfladen - *Knudebetingelsen*
- 2 Stringerne skal ligge så tæt på fladen som muligt med den givne knudeplacering - *Afstands-betingelsen*
- 3 Der skal ligge stringere langs kurver på fladen, i hvis tangentretning normalsnittets krumning er nul - *Nulkrumningsbetingelsen*.

Afstands-betingelsen har, som vi skal se i det følgende, den statiske betydning, at stringersystemets konstruktionshøjde i et normalsnit er mindre end eller lig med fladens. I normalsnit uden krumning er skallens konstruktionshøjde lig nul, og i disse tilfælde sikrer nulkrumningsbetingelsen, at stringersystemets konstruktionshøjde også er nul. Derved kan hverken membranflade eller stringersystem overføre bøjningsmoment langs disse snit. Den

statiske model afspejler dermed skallens statiske egenskaber på den sikre side.

Da knudebetingelsen er opfyldt vil vi nu undersøge hvilke krav til stringernes placering afstands- og nulkrumningsbetingelsen leder frem til.

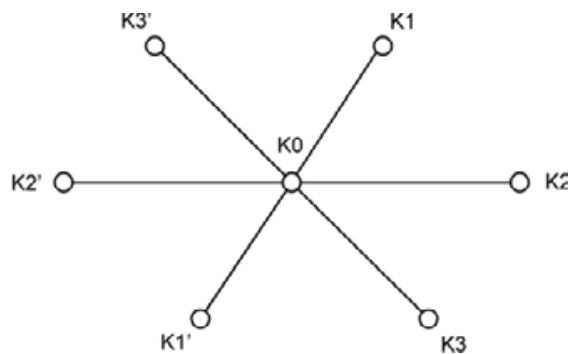
#### *Positivt krumme flader*

Flader med positivt krumningsmål, eller såkaldte elliptisk krumme flader, er jf. kapitlet *Krumme fladers form* karakteriseret ved, at de har en inderside, der er konkav og vender ind mod krumningscentrene, og en yderside, der er konveks.

I en lille omegn om ethvert punkt på fladen krummer en positivt krum flade som en elliptisk paraboloid. En plan tæt på og parallelt med tangentplanen skærer fladen i en ellipse.

En *konveks facetteret flade* er defineret ved, at det for alle facetter gælder, at de øvrige facetter alle ligger på en og samme side – indersiden – af den plan, der er bestemt af den betragtede facet. En konveks facetteret flade er positivt krum ligesom en positivt krum facetteret flade er konveks.

Betragt en knude på fladen,  $K_0$ , forbundet til knuderne  $K_1$  og  $K_1'$  på stringer 1,  $K_2$  og  $K_2'$  på stringer 2 samt  $K_3$  og  $K_3'$  på stringer 3 med seks stænger (figur 105).



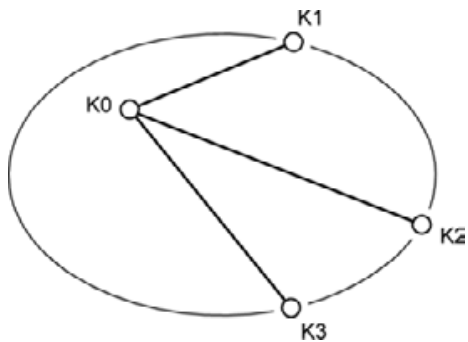
Figur 105. En knude på fladen,  $K_0$ , forbundet til knuderne  $K_1$ ,  $K_2$ , og  $K_3$  samt  $K_1'$ ,  $K_2'$  og  $K_3'$  med seks stænger.

Hver stringer er understøttet en gang og vi betragter i det følgende kun de tre<sup>5</sup> understøttede stænger og knuder, fx enten  $K_0K_1$  og  $K_1$  eller  $K_0K_1'$  og  $K_1'$  når det gælder stringer 1.

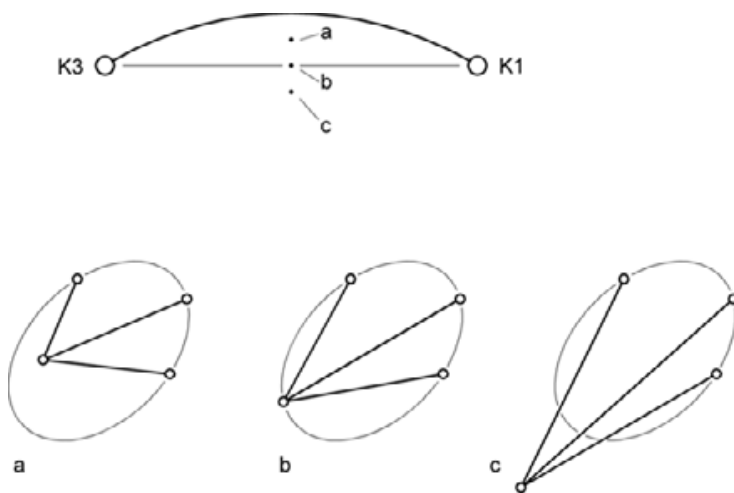
Vi undersøger først de successivt opbyggede systemer. Lad  $K_0$  være fastholdt af stængerne til knuderne  $K_1$ ,  $K_2$  og  $K_3$ . Betragt det plane snit i fladen, der indeholder  $K_1$ ,  $K_2$  og  $K_3$  samt det normalsnit, der indeholder  $K_1$  og  $K_3$  (figur 106 og 107).

<sup>5</sup> Når der i det følgende henvises til de tre stænger, der fastholder en knude  $K_0$ , kan det være en vilkårlig kombination af de otte mulige:

- $K_1$ ,  $K_2$  og  $K_3$
- $K_2$ ,  $K_3$  og  $K_1'$
- $K_3$ ,  $K_1'$  og  $K_2'$
- $K_1'$ ,  $K_2'$  og  $K_3'$
- $K_2'$ ,  $K_3'$  og  $K_1$
- $K_3'$ ,  $K_1$  og  $K_2$
- $K_1$ ,  $K_2'$  og  $K_3$
- $K_2$ ,  $K_1'$  og  $K_3'$ .



Figur 106. Snit igennem knuderne K1, K2 og K3 på positiv krum flade og projektion af det betragtede stangsystem på snitplanen.



Figur 107. Øverst normalsnit gennem K1 og K3, hvor stangen K0K2 er vist i tre positioner: Nederst er vist de tre tilsvarende snit igennem knuderne K1, K2 og K3 og projektion af det betragtede stangsystem på snitplanen.

- a) Projektionen af K0 på snitplanen ligger indenfor det elliptiske snit i fladen.
- b) K0 ligger på det elliptiske snit i fladen. Det betragtede stangsystem er plant.
- c) Projektionen af K0 på snitplanen ligger udenfor det elliptiske snit i fladen.

Vi ser at betingelsen for lokal stabilitet er opfyldt i tilfælde a) og c), men ikke i tilfælde b) hvor K0 ligger på det betragtede snit, det vil sige i plan med K1, K2 og K3.

Vi vil nu antage, at knudernes placering er givet og undersøge stængernes afstand til fladen. I tilfælde a) ses umiddelbart, at stangen K0K2 ligger tættere på skalfladen end en tænkt K1K3. I tilfælde b) ligger de i samme plan og i tilfælde c) ligger K1K3 tættere på fladen end K0K2.

For det givne system er afstandsbetingsen således kun opfyldt i tilfælde a). I dette tilfælde ligger de to facetter, som det betragtede stangsystem udspænder, hver især på indersiden af den plan, som den anden facet bestemmer, i forhold til skalfladens krumningscentre. I tilfælde b) ligger fire knuder i samme plan og i tilfælde c) ligger de to facetter, som det betragtede stangsystem udspænder, hver især på ydersiden af den plan, som den anden facet bestemmer, i forhold til skalfladens krumningscentre.

Det samme skal gælde, hvis K0 er fastholdt til knuderne:



- K2, K3 og K1'
- K3, K1' og K2'
- K1', K2' og K3'
- K2', K3' og K1
- K3', K1 og K2,

hvilket vil sige at afstandsbetingsen betyder at den facetterede flade skal være konveks.

Hvis fladen er konveks, ses umiddelbart at betingelsen for lokal stabilitet og så er opfyldt for de to sidste systemer:

- K1, K2' og K3
- K2, K1' og K3'.

Det vil sige at:

Stringersystemet på positivt krumme flader skal danne en konvekst facetteret flade.

Hvilket er ensbetydende med at:

*Enhver knudes projektion på en snitplan gennem tre vilkårlige naboknuder til den betragtede knude skal ligge indenfor fladens snit.*

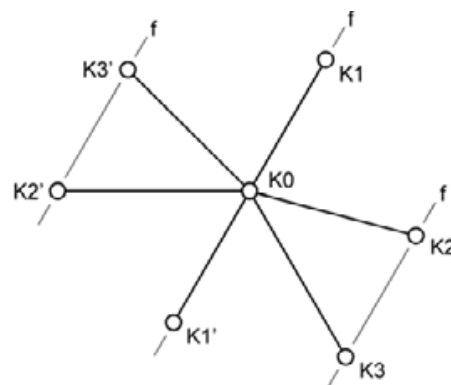
I Bilag 3, Eksempel 1-3 vises hvordan sidstnævnte betingelse kan anvendes.

*Nul-krumme flader*

Flader med krumningsmål lig nul, udfoldelige eller såkaldte paraboliske flader, indeholder som nævnt retlinede frembringere, i hvis retning normalsnittet ikke krummer.

Der skal således ligge stringere langs frembringerne, for at nulkrumningsbetingelsen er opfyldt.

Betragt en knude på fladen, K0, forbundet til knuderne K1 og K1' på stringer 1, K2 og K2' på stringer 2 samt K3 og K3' på stringer 3 med seks stænger og lad stringersæt 1 ligge langs frembringerne, da ligger K2K3 og K2'K3' og så langs frembringerne (figur 108).



Figur 108. En knude på en nul-krum flade, K0, forbundet til knuderne K1, K2 og K3 samt K1', K2' og K3' med seks stænger. Stringersæt 1 ligger langs frembringerne (f).

Betragt knuderne K0, K1, K2 og K3, og antag at deres placering er givet. Da K0K1 og K2K3 begge ligger langs en frembringer, ligger K0, K1, K2 og K3 i

samme plan. Dermed ligger K0K2 og en tænkt K1K3 også i samme plan og således i samme afstand fra fladen

Når det ene stringersæt er placeret langs frembringerne er der derfor ingen specielle krav til placeringen af de to øvrige stringersæt og afstandsbetingen bringes ikke i anvendelse.

Hver stringer er understøttet en gang. Lad K0 være fastholdt af stængerne til knuderne K1, K2 og K3. Da K0, K1, K2 og K3 som nævnt ligger i samme plan er betingelsen for lokal stabilitet ikke opfyldt. Tilsvarende gælder for

- K0, K1, K2' og K3'
- K0, K1', K2 og K3
- K0, K1', K2' og K3'.

Men er K0 fastholdt af stængerne til knuderne K1, K2 og K3', hvor K2 og K3' ligger på hver sin side af frembringerne, er betingelsen for lokal stabilitet opfyldt. Tilsvarende gælder for

- K0, K1, K2' og K3
- K0, K1', K2 og K3'
- K0, K1', K2' og K3.

Det vil sige at:

På nul-krumme flader skal det ene stringersæt placeres langs frembringerne og de to andre skal understøttes på hver sin side af frembringerne.

Denne betingelse betyder, at stringersystem D, se (figur 96), ikke kan anvendes på nul-krumme flader.

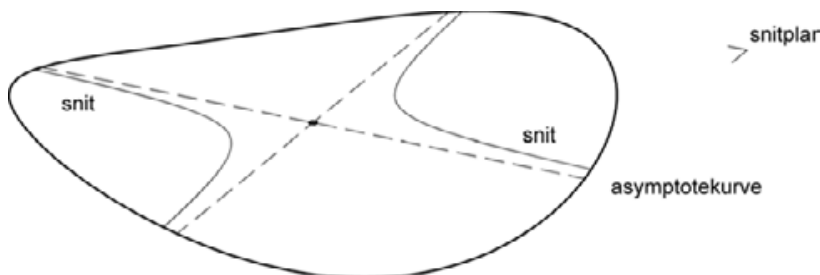
I *Bilag 3, Eksempel 4* vises hvordan betingelsen kan anvendes.

#### *Negativt krumme flader*

Vi minder om at flader med negativt krumningsmål, eller hyperbolsk krummede flader, er karakteriseret ved de to sæt asymptotekurver, i hvis tangentretning normalsnittet i fladen har krumningen nul.

I en lille omegn om ethvert punkt på fladen krummer en negativt krum flade som en hyperbolsk paraboloid. Når fladen i det følgende antages at være en hyperbolsk paraboloid, svarer det blot til, at vi ser på et lille område af skalfladen og, at stængerne er korte eller, at stringerne ligger tæt.

En hyperbolsk paraboloid har retlinede asymptotekurver og en tangentplan skærer fladen i de to asymptotekurver gennem tangentpunktet. En plan, der ligger tæt på og parallelt med tangentplanen, skærer fladen i en hyperbel (figur 109).

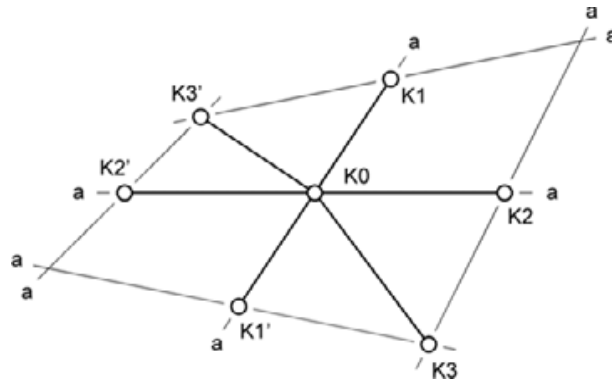


Figur 109. Udsnit af en negativt krum flade.

I en hyperbolsk paraboloid er et normalsnit der indeholder en asymptotekurve således retlinet. Alle andre normalsnit skærer fladen i en parabel.

Der skal således ligge stringere langs asymptotekurverne, for at nulkrumningsbetingelsen er opfyldt.

Betragt en knude på fladen,  $K_0$ , forbundet til knuderne  $K_1$  og  $K_1'$  på stringer 1,  $K_2$  og  $K_2'$  på stringer 2 samt  $K_3$  og  $K_3'$  på stringer 3 med seks stænger og lad stringersæt 1 og 2 ligge langs asymptotekurverne (figur 110).

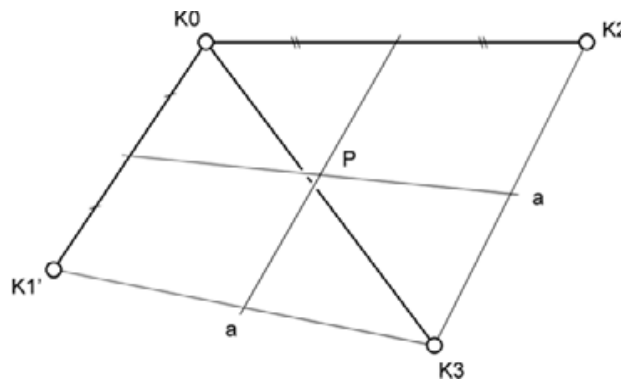


Figur 110. En knude på en negativt krum flade,  $K_0$ , forbundet til knuderne  $K_1$ ,  $K_2$  og  $K_3$  samt  $K_1'$ ,  $K_2'$  og  $K_3'$  med seks stænger. Stringersæt 1 og 2 ligger langs asymptotekurverne (a).

Da asymptotekurverne ligger i tangentplanen til  $K_0$ , da  $K_1$ ,  $K_1'$ ,  $K_2$  og  $K_2'$  ligger på disse asymptotekurver og da ingen andre punkter på fladen ligger i tangentplanen, ses umiddelbart, at  $K_3$  eller  $K_3'$  ikke kan ligge i plan med  $K_0$  og to af de øvrige knuder. Betingelsen for lokal stabilitet er altså altid opfyldt.

Vi vil herefter undersøge hvilke krav afstands-betingelsen, der siger at stringerne skal ligge så tæt på fladen som muligt med den givne knudeplacering, stiller til det tredje stringersæt.

Betragt den del af fladen, der er begrænset af knuderne  $K_0$ ,  $K_1'$ ,  $K_2$  og  $K_3$ , og antag at deres placering er givet. Denne fladedels midtpunkt ligger i skæringspunktet mellem de to retlinede asymptotekurver, der deler henholdsvis  $K_0K_1'$  og  $K_0K_2$  i to lige store dele (figur 111).



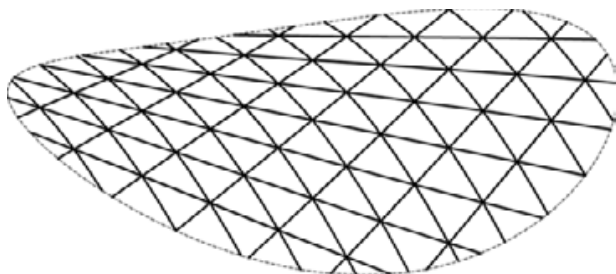
Figur 111. Knuderne  $K_0$ ,  $K_1'$ ,  $K_2$  og  $K_3$  og de tilhørende stænger placerer på en negativt krum flade som i (figur 110). Den betragtede fladedels midtpunkt  $P$  ligger i skæringspunktet mellem de to retlinede asymptotekurver (a), der deler henholdsvis  $K_0K_1'$  og  $K_0K_2$  i to lige store dele.

Det ses heraf, at  $K_0K_3$  og en tænkt  $K_1'K_2$  ligger i samme afstand fra fladens midtpunkt, men på hver sin side af fladen. De tilsvarende normalsnit er parabler og det gælder derfor generelt, at  $K_0K_3$  og  $K_1'K_2$  ligger i samme afstand fra fladen.

Når to stringersæt er placeret langs asymptotekurverne, er der således ingen specielle krav til placeringen af det tredje stringersæt og afstandsbetingen bringes ikke i anvendelse.

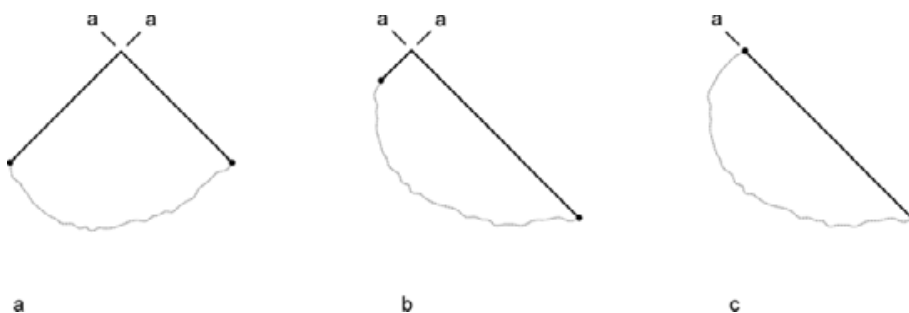
Det vil sige at:

På negativt krumme flader skal to stringersæt placeres langs asymptotekurverne.



Figur 112. Udsnit af negativt krum flade med stringersystem. To stringersæt ligger langs asymptotekurverne, der på dette udsnit er rette linier.

Dette sætter en præcis grænse for hvor langt ud, en given negativt krum skal kan udkrages. Den udkragede del af skallen skal nemlig ligge indenfor de to skærende asymptotekurver, der udgår fra de to endepunkter for den fri rand (figur 113).



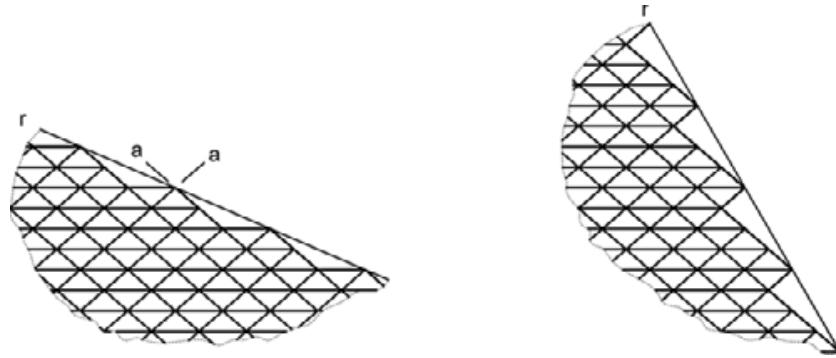
Figur 113. Den udkragede del af skallen skal ligge indenfor de to skærende asymptotekurver (a), der udgår fra de to (markerede) endepunkter. Kun et udsnit af den understøttede og stabile del af skallen, der her ligger nedenfor den fri rand, er vist.

- a) De to endepunkter ligger på eller nær samme krumningskurve, hvilket giver mulighed for størst udkragning
- b) De to endepunkter ligger forskudt i forhold til både krumningskurver og asymptotekurver, udkragningen er reduceret.
- c) De to endepunkter ligger på den samme asymptotekurve, skallen kan ikke udkrages.

Rent geometrisk betyder det, at den fri rand højst må skære hver asymptotekurve en gang, hvilket det overlades til læseren at vise.

I *Bilag 3, Eksempel 5* ses hvordan ovennævnte betingelse kan anvendes.

Hvis skallens rand ikke ligger langs en asymptotekurve, bliver stringersystemets rand savtakket (figur 114).



Figur 114. Stringersystemets rand er savtakket, når skallens rand (r) ikke ligger langs asymptotekurverne (a).

Men da stringerne kan lægges vilkårligt tæt, har det ikke nogen betydning for modellens anvendelighed.

#### *Parabolske kurver*

De parabolske kurver danner grænse mellem positivt og negativt krumme flader jf. kapitlet *Krumme fladers form*. Den ene type, hvis oskulationsplan ligger i fladens tangentplan, er kurver langs hvilke normalsnittet ikke krummer.

Denne type parabolske kurver skal derfor betragtes på samme måde som frembringere på nul-krumme flader. Der skal således ligge stringere langs disse kurver, og de skal understøttes fra hver side. Dette betyder, at en rand langs en sådan kurve kun kan enkeltunderstøttes - hvilket vi i øvrigt også fandt frem til i forrige afsnit, men ud fra et andet ræsonnement.

#### **Konklusion**

På positivt krumme flader skal stringersystemet danne en konveks facetteret flade.

På nul-krumme flader og negativt krumme flader skal der ligge stringere langs disse fladers karakteristiske kurver, henholdsvis frembringere og asymptotekurver, som er kurver langs hvilke normalsnittet ikke krummer.

Der skal desuden ligge stringere langs den type parabolske kurver, hvis oskulationsplan ligger i fladens tangentplan.

#### *Bemærkning*

Ved at placere stringerne i overensstemmelse med modelbetingelserne, kan det vises, at de enkelte facetter i den trekantfacetterede flade, som stringersystemet danner, ligger parallelt med tangentplanen i et punkt på skalfladen, der ligger indenfor facettens projektion på skalfladen. Facetterne konvergerer dermed lokalt mod skalfladens tangentplan, når systemet gøres mere fintmasket.

Sammenhængen med membranteoriens sædvanlige ligevægtsligninger er på denne baggrund kort skitseret i *Bilag 2*.

## Ikke-successivt opbyggede systemer

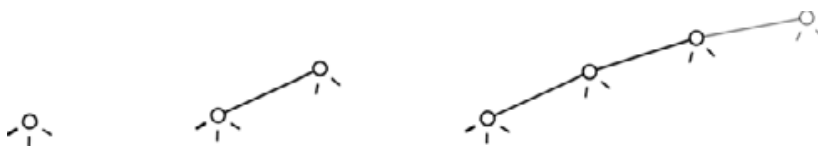
Ikke-successivt opbyggede stringersystemer kan karakteriseres ved, at en del af understøtningerne er placeret i den modsatte ende af de stringere, som de er knyttet til, i forhold til hvor disse understøtninger ville være placeret i et successivt opbygget system.

I det foregående afsnit har vi ved placeringen af stringerne på fladen, sikret at de tre stænger, der fastholder en knude, ikke ligger i samme plan.

Vi vil indledningsvis vise, at stabiliteten af et positivt- eller negativt krumt stringersystem ikke påvirkes af, at en stringer understøttes i den modsatte ende af den oprindelige, hvis randknuden er fuldstændig fastholdt.

Betragt en stringer i et successivt opbygget positivt- eller negativt krumt system og lad systemet være belastet. Nu påfører vi den betragtede stringer en kraft i den fri ende, hvor den ikke er understøttet, ved at belaste den pågældende randknude i en passende retning. En passende retning er en retning, i hvilken en belastning giver en reaktion i stringerens modsatte ende. Ved en given størrelse af denne kraft bliver reaktionen i den til stringeren knyttede understøtning i stringerens modsatte ende lig nul. Vi kan da fjerne denne understøtning uden at systemet påvirkes. Tænkes nu den påførte kraft erstattet med en fuldstændig fastholdelse af randknuden - der så ikke mere er fri, men fastholdt i rummet - kan enhver normalkraft i stringeren overføres til denne knude, og dermed kan alle laster optages af systemet. Systemet er således fortsat stabilt.

En stringer er stabil og dermed fuldstændigt fastholdt i rummet, når den i alle knuder er dobbeltunderstøttet - og dobbeltunderstøtningernes planer løst sagt ikke ligger i stringerens oskulationsplan - og den i et enkelt punkt derudover er understøttet i en tredje retning jf. (figur 93). En dobbeltunderstøttet randstringer, der er successivt opbygget, er opbygget ud fra en tre gange understøttet knude og er derfor fuldstændigt fastholdt (figur 115).



Figur 115. Princippet i en successivt opbygget dobbeltunderstøttet randstringer.

Det vil sige at:

Et stringersystem på en positivt- eller negativt krum skal er stabilt, hvis alle de understøttede randknuder indgår i successivt opbyggede dobbeltunderstøttede randstringere.

I den følgende undersøgelse skelnes derfor mellem enkeltunderstøttede og dobbeltunderstøttede ikke-successivt opbyggede systemer.

Bemærk at vi på denne baggrund kan sige, at stringersystemer, der opfylder modelbetingelserne, ikke i sig selv er ustabile. Deres stabilitet afhænger alene af understøtningernes placering og retning. Det betyder at:

Membranskallers stabilitet afhænger alene af understøtningernes placering og retning.

## Enkeltunderstøttede systemer

Vi vil først vise, at lukkede trekantfacetterede gitterflader opfylder Maxwell's tælleregul. Derefter vises, at en enkeltunderstøttet flade kan betragtes som en del af en lukket flade. De enkeltunderstøttede flader deles nu op i henholdsvis positivt krumme og negativt krumme gitterflader og det undersøges hvilke krav til enkeltunderstøtningernes retninger, der kan sikre stabilitet.

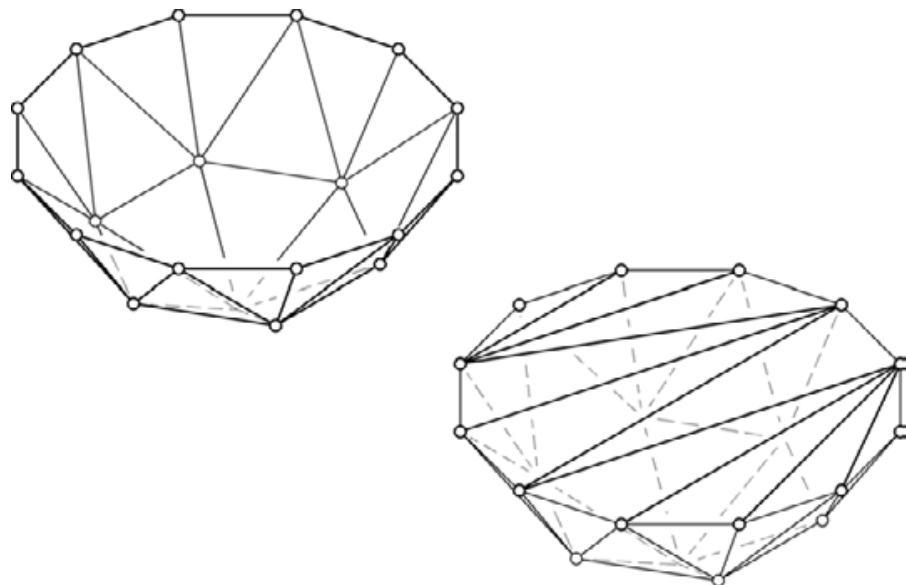
Indledningsvis erindres om, at understøttes hele det ene stringersæt, i et successivt opbygget enkeltssammenhængende system, i den modsatte ende, fremkommer et ikke successivt opbygget system, hvor hele randen er enkeltunderstøttet jf. (figur 95).

### Lukkede gitterflader

Vi tager udgangspunkt i den åbne trekantfacetterede gitterflade, der er successivt opbygget (se *Rumligt stabile stangsystemer*).

Der kan tilføjes flere stænger til dette system uden at øge antallet af knuder.

Betragt det tilfælde hvor der anbringes stænger mellem randknuderne sådan, at systemet danner en lukket gitterflade, et polyeder med trekantede facetter (figur 116).



Figur 116. Øverst: åben gitterflade, understøtninger ikke vist. Nederst den samme gitterflade, der er lukket med stænger mellem randknuderne.

For hver stang der tilføjes, kan der fjernes en understøtning, jævnfør Maxwell's tælleregul (2).

$$S + U = 3K \quad (2)$$

Med Eulers polyedersætning kan det vises, at forholdet mellem kanter og hjørner i et enkeltssammenhængende lukket polyeder med trekantede facetter er:

$$S = 3K - 6 \quad (3)$$

hvor  $S$  er antal kanter (stænger) og  $K$  er antal hjørner (knuder).

Indsættes (2) i (3) ses, at stangsystemet skal have 6 understøtninger, og 6 understøtninger er netop det antal understøtninger, der kræves, for at fastholde et stift legeme i rummet.

En lukket gitterflade med trekantede facetter opfylder således Maxwell's tælleregul, bortset fra de 6 understøtninger.

Betragter vi nu en lukket trekantfacetteret gitterflade, lægger et snit igennem fladen og fjerner alt på den ene side, er det, der er tilbage, en åben og ustabil gitterflade. Tilføjes imidlertid en hjælpeknude, der forbindes med en stang til hver randknude, på en sådan måde, at der igen fås en lukket gitterflade med trekantede facetter, er Maxwell's tælleregul atter opfyldt, bortset fra de 6 understøtninger.

Fastholdes hjælpeknuden i rummet, hvilket kræver 3 understøtninger, virker hjælpestængerne som understøtninger, og gitteret skal da blot understøttes i yderligere 3 retninger for at være fastholdt.

*Det er tilstrækkeligt at understøtte hver randknude i een retning samt at tilføje yderligere tre passende valgte understøtninger, for at en enkeltssammenhængende trekantfacetteret gitterflade opfylder Maxwell's tælleregul.*

Hvilket stringersystem C jf. (figur 96) netop sikrer.

På tilsvarende måde kan det vises, at:

*Det er tilstrækkeligt at understøtte hver randknude i een retning, for at en dobbeltsammenhængende trekantfacetteret gitterflade opfylder Maxwell's tælleregul.*

Hvilket stringersystemet G jf. (figur 96) netop sikrer.

#### *Positivt krumme gitterflader*

En konveks facetteret flade er som nævnt defineret ved, at det for alle facetter gælder, at de øvrige facetter, alle ligger på en og samme side – indersiden – af den plan, der er bestemt af den betragtede facet. En konveks flade er positivt krum ligesom en positivt krum flade er konveks.

Cauchy har vist at lukkede konvekse trekantfacetterede gitterflader er stabile (Dewdney 1991).

Vi vil kalde et gitter *konvekst enkeltunderstøttet*, når understøtningsretningerne (understøtningerne betragtet som stænger) udspænder en flade, der sammen med gitterfladen danner en konveks facetteret flade.

På grundlag af ovennævnte kan vi slutte, at:

- *En konveks enkeltssammenhængende trekantfacetteret gitterflade er stabil og fastholdt, når hver randknude er konvekst enkeltunderstøttet og konstruktionen derudover er understøttet i tre retninger.*
- *En konveks dobbeltsammenhængende trekantfacetteret gitterflade er stabil og fastholdt, når hver randknude er konvekst enkeltunderstøttet.*

Bemærk at dette er tilstrækkelige betingelser og ikke nødvendige betingelser.



### Negativt krumme gitterflader

Vi ved fra modellforsøg og litteraturen, at ikke-konvekse trekantfacterede gitterflader ofte ikke er stabile, når de alene er enkeltunderstøttede svarende til stringersystem C. Tilsvarende er der mange eksempler på, at glatte lukkede flader, der er sammensat af henholdsvis en positivt krum og en negativt krum del, er ustabile<sup>6</sup>.

Vi kan imidlertid vise, at en enkeltunderstøttet trekantfacteret gitterflade, der er opbygget som et stringersystem på en negativ krum flade, er stabil, hvis understøtningerne opfylder følgende betingelser:

- 1 De to sæt stringere langs asymptotekurverne er understøttet i tangentplanen som et stabilt todimensionalt system
- 2 Det tredje stringersæt er understøttet således, at ingen af understøtningerne ligger i tangentplanen.

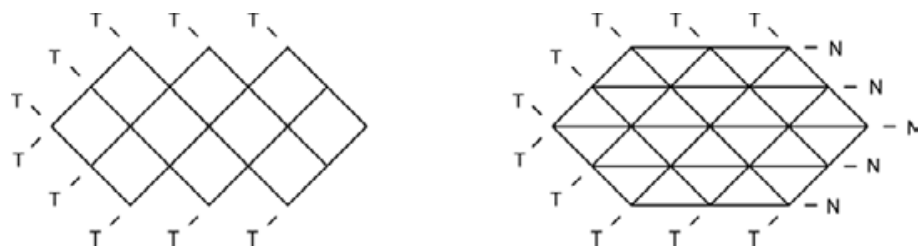
Punkt 1 udnytter at de to stringersæt ligger langs asymptotekurverne, at disse ligger i fladens tangentplan og at dette delsystem derfor kan betragtes som et plant stringersystem. Da vi endvidere forlanger at dette delsystem opbygges stabilt og at understøtningerne ligger i tangentplanen, kan de understøttede knuder kun flyttes vinkelret på tangentplanen. Delsystemet fastholder således knuderne fuldstændigt i tangentplanen.

Hele systemet er herefter fastholdt i rummet og stabilt, når blot ingen af understøtningerne af det tredje stringersæt, jf. punkt 2, ligger i tangentplanen.

Betragt først de *enkeltsammenhængende* systemer. Der kan vi forlange, at delsystemet langs asymptotekurverne betragtes som et plant stringersystem er successivt opbygget, og da ved vi, at det er stabilt.

En enkeltstående enkeltunderstøttet trekantfacteret gitterflade er stabil, hvis den er opbygget som et stringersystem på en negativ krum flade, således at to stringersæt følger asymptotekurverne, og understøtningerne opfylder følgende betingelser:

- 1 Delsystemet bestående af de to sæt stringere langs asymptotekurverne er successivt opbygget og understøttet i tangentplanen således, at ingen stringere er understøttet mere end en gang i egen retning
- 2 Det tredje stringersæt er understøttet således, at ingen af understøtningerne ligger i tangentplanen (figur 117 b).

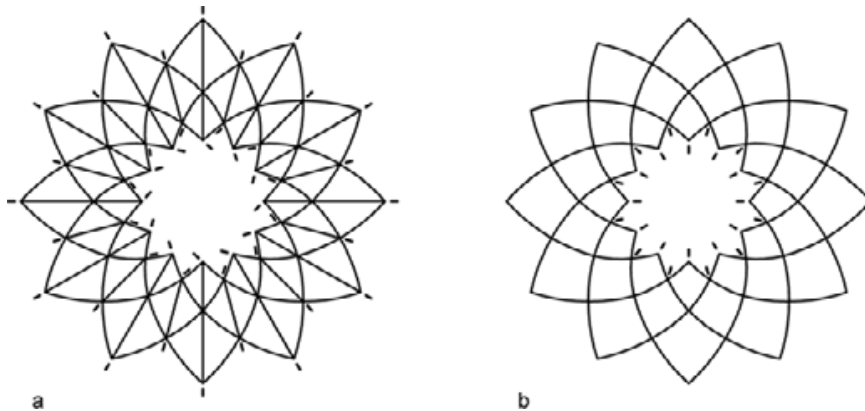


Figur 117. Et enkeltunderstøttet stringersystem på en negativ krum flade. De to stringersæt langs asymptotekurverne er vist med en vinkel på  $45^\circ$  med lodret. Systemet er stabilt hvis:

- a) Delsystemet bestående af de to sæt stringere langs asymptotekurverne er successivt opbygget og understøttet i tangentplanen så ingen stringere er understøttet mere end en gang i egen retning (T).
- b) Det tredje stringersæt er understøttet så ingen understøtninger ligger i tangentplanen (N).

<sup>6</sup> Dette faktum udnyttes ved konstruktion af rørsystemer, hvor rørbøjninger, der netop er sammensat af henholdsvis en positivt krum og en negativt krum del, direkte anvendes som charnier i systemerne fx i forbindelse med konstruktioner til optagelse af temperaturbevægelse (Calladine 1983 p. 5).

Betragt herefter de *dobbeltsammenhængende* systemer. Da en enkeltunderstøtning ikke både kan ligge i tangentplanen og ikke i tangentplanen, må vi forlange at delsystemet langs asymptotekurverne understøttes langs den ene rand og det tredje stringersæt langs den anden rand (figur 118 a).

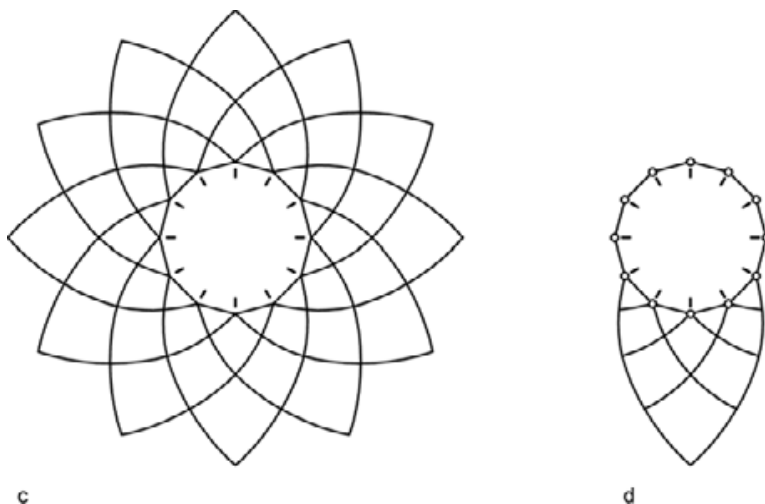


Figur 118. Et enkeltunderstøttet stringersystem på en dobbeltsammenhængende negativt krum flade.

- a) Delsystemet langs asymptotekurverne understøttes langs den ene rand, her den indre. Det tredje stringersystem understøttes langs den anden rand, her den ydre. Understøtningerne er vist i forlængelse af - eller parallelt med - den stringer, som er understøttet i knuden.
- b) Delsystemet bestående af de to stringersæt langs asymptotekurverne vist som et plant dobbeltsammenhængende stringersystem, der er enkeltunderstøttet langs den indre rand.

Betragt nu delsystemet bestående af de to stringersæt langs asymptotekurverne som et plant system i tangentplanen. Dette system er enkeltunderstøttet langs den ene af den dobbeltsammenhængende flades to rande (figur 118 b).

Dette plane delsystem kan igen betragtes som opbygget af to delsystemer, nemlig et delsystem, der består af en ikke-successivt opbygget enkeltunderstøttet randstringer, og et delsystem, der er successivt opbygget ud fra denne randstringer, hvis randstringeren ligger i tangentplanen (figur 119).



Figur 119. Det plant dobbeltsammenhængende delsystem, der er vist i (figur 118 b).

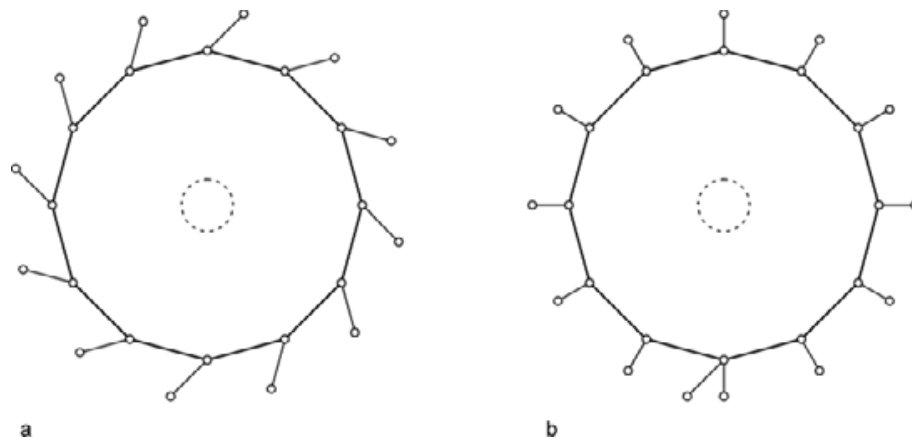
- c) Her er en randstringer tilføjet systemet ved at hver anden understøtning er erstattet af en stang. Systemet er statisk ækvivalent med det oprindelige, hvis randstringeren ligger i tangentplanen.
- d) Systemet er her opdelt i to delsystemer, der består af henholdsvis en ikke-successivt opbygget randstringer, der er enkeltunderstøttet, og et stringersystem, der er successivt opbygget ud fra denne randstringer.

Det successivt opbyggede delsystem er stabilt, hvis de knuder, det bygges ud fra er fastholdt i planen. Det vil sige at hele systemet langs asymptotekurverne er stabilt, hvis randstringeren betragtet som delsystem er stabil.

Randstringeren er opbygget som en kreds, som giver mulighed for at systemet bliver bevægeligt og dermed ustabil. Vi bemærkede i afsnittet *Plane stabile stangsystemer*, at specielt spejlsymmetriske kredse er ustabile og derfor skal undgås.

Delsystemets stabilitet kan derfor sikres ved at:

- vælge nogle understøtningsretninger, der sikrer at randstringeren er fastholdt i tangentplanen (figur 120 a)), eller
- gennemføre en gitterberegning af delsystemet, der viser at systemet er stabilt, eller
- tilføje en understøtning, så den pågældende knude er fastholdt i tangentplanen (figur 120 b)).



Figur 120. Delsystemets stabilitet kan sikres på to måder:

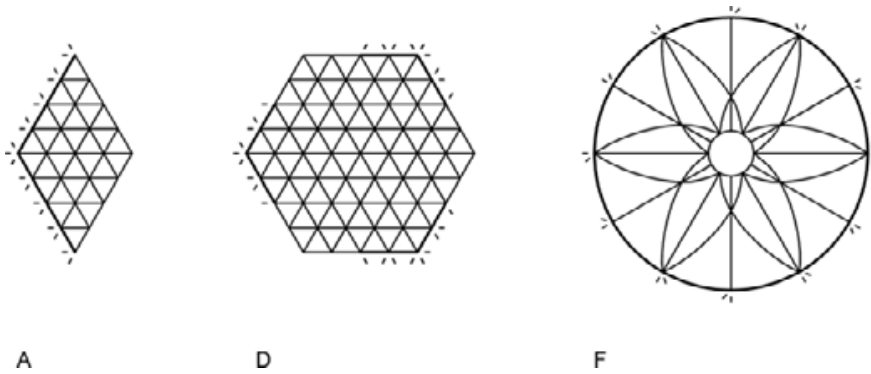
- a) Understøtningerne lægges således i tangentplanen, at randstringeren betragtet som et plant delsystem er fuldstændig fastholdt.
- b) Der tilføjes en understøtning.

Tilføjes en understøtning bliver randstringeren statisk ubestemt. Undlades dette og viser randstringeren sig at være ustabil, er den imidlertid også statisk ubestemt. Bevægelige systemer, der opfylder Maxwell's tælleregul, er nemlig statisk ubestemte, se fx (Calladine 1978).

### Dobbeltunderstøttede systemer

Dobbeltunderstøttede rumlige stringersystemer kan opbygges og understøttes på flere måder. Vi vil betragte følgende tre:

- successivt opbyggede systemer, som stringersystem A, se (figur 96)
- ikke-successivt opbyggede systemer, som stringersystem D, hvis dobbeltunderstøttede rande er successivt opbygget
- ikke-successivt opbyggede systemer, som stringersystem F, der kan betragtes som opbygget af to delsystemer jf. (figur 119 d), hvor det ene delsystem er en ikke-successivt opbygget dobbeltunderstøttet randstringer, og det andet delsystem er et successivt opbygget stringersystem, der er bygget ud fra denne randstringer (figur 121).



Figur 121. Dobbeltunderstøttede rumlige stringersystemer:

A Successivt opbygget system

D Ikke-successivt opbygget system, hvis dobbeltunderstøttede rande er successivt opbygget

F Ikke-successivt opbygget system, der kan betragtes som opbygget af to delsystemer, hvor det ene delsystem er en ikke-successivt opbygget dobbeltunderstøttet randstringer (fremhævet), og det andet delsystem er successivt opbygget ud fra denne randstringer.

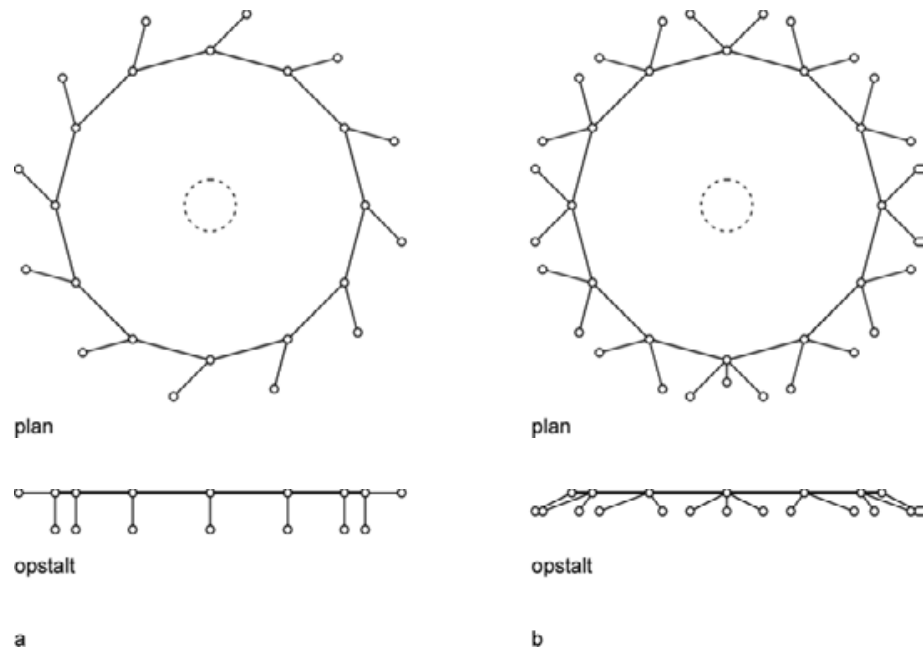
Da understøtningerne i system A og D er successivt opbygget og dermed er fuldstændig fastholdt, er disse systemer stabile jf. dette afsnits indledende udledning.

System F kan som systemet i (figur 118 og 119) betragtes opbygget af to delsystemer, der i dette tilfælde blot er rumlige, nemlig en ikke-successivt opbygget dobbeltunderstøttet randstringer, og et rumligt stringersystem, der er successivt opbygget ud fra denne rand.

Randstringeren er igen opbygget som en kreds, som giver mulighed for at systemet bliver bevægeligt og dermed ustabil. Også i det rumlige tilfælde er spejlsymmetriske systemer ustabile jf. (Tarnai 1980b).

Hele systemets stabilitet kan derfor sikres ved at:

- vælge nogle understøtningsretninger, der er lette at overskue og sikrer at randstringeren er stabil (figur 122 a)), eller
- gennemføre en gitterberegning af stringersystemet, der viser at systemet er stabilt, eller
- tilføje en understøtning, så den pågældende knude er fastholdt i rummet (figur 122 b)).



Figur 122. Dobbeltunderstøtning af dobbeltsammenhængende stringersystem langs den ene rand. Stabiliteten kan sikres på mindst to måder:

- Vælg nogle understøtningsretninger der er lette at overskue og sikrer at randstringeren er stabil. Er randen fx plan eller fladen negativ krum, kan det rumlige tilfælde reducere til et plant. Dobbeltunderstøtningernes ene retning kan da lægges så randen, betragtet som et plant stangsystem, er fuldstændig fastholdt i enten randens plan - som her vist - hvis randen er plan, eller i tangentplanen, hvis fladen er negativt krum. Den anden retning lægges ude af denne plan, for eksempel lodret - som her vist - eller i fladens normalretning.
- Tilføj en understøtning - fx hvis systemet inklusiv understøtningsretninger er spejlsymmetrisk.

I *Bilag 3, Eksempel 5* vises hvordan ovennævnte betingelser for en negativt krum flade kan anvendes.

### Konklusion

Stringersystemer, der opfylder modelbetingelserne for stringernes placering, er ikke i sig selv ustabile. Deres stabilitet - og dermed membranskallers stabilitet - afhænger alene af understøtningernes placering og retning.

Stringersystemer, der opfylder betingelserne for stringernes og understøtningernes placering, er altid stabile, hvis de understøttede rande er succesivt opbygget og understøtningernes retninger opfylder betingelserne for lokal stabilitet.

For en række aktuelle systemer med ikke-successivt opbyggede rande kan der angives yderligere betingelser for understøtningernes retninger, der sikrer systemets stabilitet.

Disse betingelser er tilstrækkelige, men ikke nødvendige betingelser. Hvis disse retninger ikke umiddelbart kan anvendes for en given skal, må en nærmere analyse foretages.

I den forbindelse kan et stringersystem anvendes som statisk model af den pågældende skalflade og de tilhørende understøtninger. Hvis en gitterberegning viser at stringersystemet er stabilt, er fladen også stabil.

## Membranskallers understøtningsbetingelser

Når stringersystemet opbygges og stringerne placeres og understøttes jf. betingelserne nedenfor, er stringersystemet stabilt, og da er membranskallen stabil, når den understøttes ligesom stringersystemet er understøttet.

Anvendelsen af disse betingelser er vist med en række eksempler i *Bilag 3*.

### Stringersystemets opbygning

- Systemet består af tre sæt stringere der danner et netværk med trekantede masker
- Netværket danner en sammenhængende flade, således at alle knuder er forbundet med stringere til mindst to andre knuder.
- Hver knude i netværket fastholdes af en stringer fra hvert sæt
- Der ligger knuder langs randene
- Hver stringer er understøttet i en knude på randen
- Randen er inddelt i afsnit, hvor knuderne er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri.

### Stringernes placering

#### *Positivt krumme flader*

- Der kan lægges en plan gennem tre vilkårlige naboknuder således at alle øvrige knuder ligger på indersiden af denne plan.

eller

- Enhver knudes projektion på en snitplan gennem tre vilkårlige naboknuder til den betragtede knude ligger indenfor fladens snit.

#### *Nul-krumme flader*

- Det ene stringersæt ligger langs frembringerne
- De to andre stringersæt er understøttet på hver sin side af frembringerne.

#### *Negativt krumme flader*

- To stringersæt ligger langs asymptotekurverne

## Stringersystemets understøtninger

En dobbeltunderstøtning fastholder en knude i to retninger og understøtter således to stringere.

En enkeltunderstøtning fastholder en knude i en retning og understøtter således en stringer.

Frembringere og retlinede asymptotekurver må højst være understøttet en gang i egen retning.

Understøtningernes retninger skal tilsammen sikre, at skalfladen - betragtet som et stift legeme - er fastholdt i rummet.

### *Dobbeltunderstøtningers retninger*

En dobbeltunderstøtning må ikke ligge i randkurvens oskulationsplan.

Det betyder at:

- En dobbeltunderstøtning af en ret rand skal placeres så dens plan ikke indeholder randen. Specielt må den ikke ligge i skallens tangentplan.
- En plan skive, fx en lodret væg, kan kun virke som en enkeltunderstøtning.
- En skal kan dobbeltunderstøttes af en anden skal, der ikke ligger i randens oskulationsplan. (I praksis skal graten forsynes med en passende forstærkning.)
- En skaldel med positiv krumning kan dobbeltunderstøttes uden grat på en skaldel med negativ krumning - eller omvendt - hvis den paraboliske kurves oskulationsplan ikke ligger i skallens tangentplan.

### *Enkeltunderstøtningers retninger*

For ikke-successivt opbyggede systemer er det en tilstrækkelig betingelse for global stabilitet, at enkeltunderstøtningers retninger opfylder følgende betingelser:

Positivt krumme og nul-krumme flader

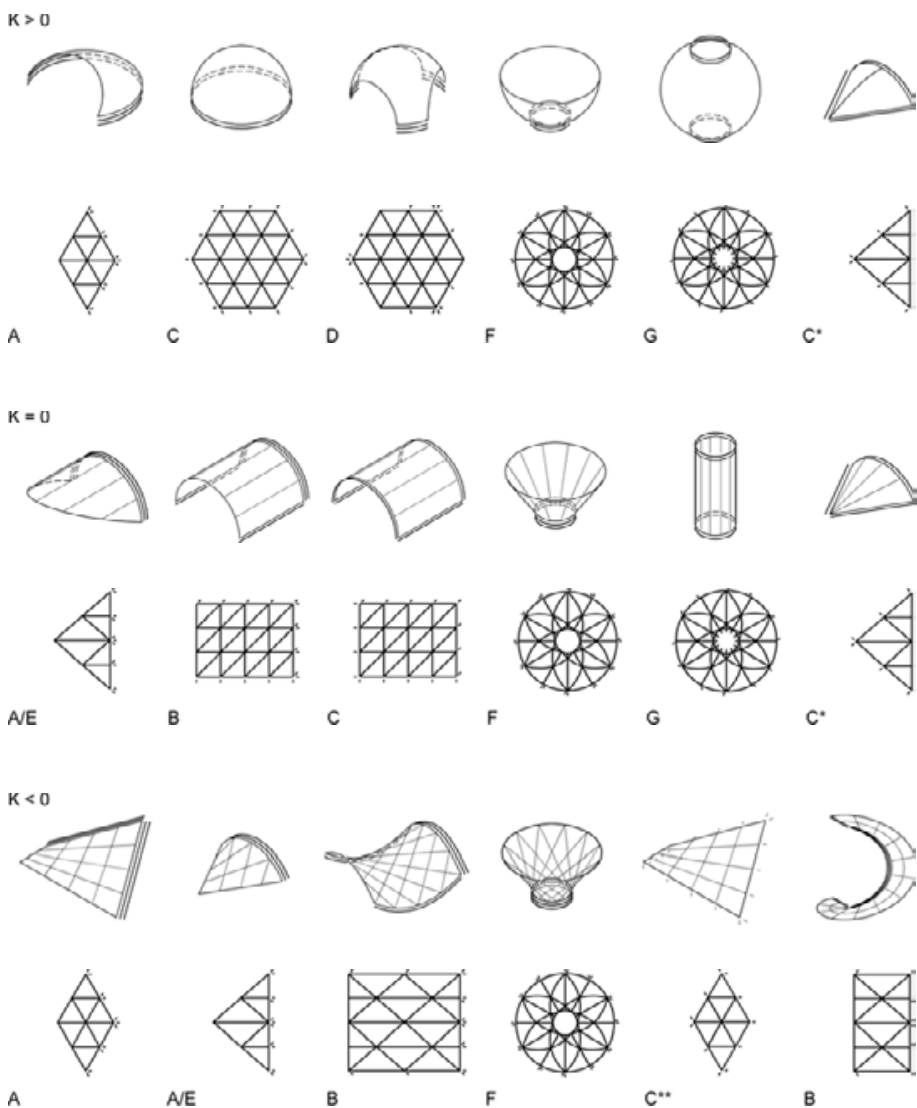
- Er understøttet således at den flade, som understøtningsretningerne udspænder, sammen med skalfladen danner en konveks flade.
- En enkeltstående flade skal derudover være understøttet i tre retninger.

Negativt krumme flader

- De to sæt stringere langs asymptotekurverne er understøttet i tangentplanen som et stabilt todimensionalt system.
- Det tredje stringersæt er understøttet således, at ingen af understøtningerne ligger i tangentplanen.

## Stabile og stive skalkonfigurationer

Med udgangspunkt i ovennævnte betingelser, de grundliggende systemer, se (figur 96), samt modelforsøg og gitterberegninger kan der opstilles følgende grundlæggende skalkonfigurationer, der er stabile og stive:



Figur 123. Oversigt over rumligt stabile og stive membranskaller, opdelt i henholdsvis positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme flader. Dobbeltunderstøtninger er vist med dobbeltstreg ud for det pågældende randafsnit, enkelunderstøtninger med enkeltstreg.

Under hver skal er det grundlæggende stringersystem skitseret.

\*De rette rande skal afstives eller enkeltunderstøttes.

\*\*Der stilles særlige krav til understøtningernes retning.



## Litteratur

I litteraturen behandles membranskaller generelt ved at opstille ligevægtsligningerne for et infinitesimalt element i bøjningsfri spændingstilstand. De kan udtrykkes ved en enkelt anden ordens differentiallyigning, hvori Airy's spændingsfunktion indgår, se *Bilag 1*. Løsninger på begyndelsesværdi- og randbetingelsesproblemer, der sikrer at løsningen af differential (ligevægts-) ligningen er entydig og skallen dermed er statisk bestemt, viser hvordan skallen kan understøttes. Der er i den forbindelse grund til at nævne (Tarnai 1980a, 1981, 1983), der har gennemført en omfattende undersøgelse af henholdsvis positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme membranskaller, som vi vil vende tilbage til. Men det er vanskelig matematik og forskellige forfattere kommer i flere tilfælde frem til forskellige resultater.

Anvendelsen af et gittersystem, opbygget som et trianguleret netværk af stænger og friktionsløse knuder, som en analogi til membranskallen berøres flere steder. (Nielsen 1982) anvender sådanne gittersystemer og momentfeltmetoden til beregning af snitkræfter i skalflader. (Calladine 1983) anvender analogien til overvejelser over stivhed og stabilitet for lukkede flader og har skrevet en interessant artikel om stangsystemers stivhed i relation til Maxwell's tælleregul (Calladine 1978). Men han har tilsyneladende ikke foretaget systematiske undersøgelser med direkte relation til skaller. Det har (Tarnai 1980b), som Calladine også nævner, til gengæld i hans undersøgelse af nogle rotationssymmetriske gitterfladers stabilitet, som vi vender tilbage til.

### Generelt

Spørgsmålet om membranskallers rette understøtningsbetingelser og specielt fri rande betragtes generelt ikke som afklaret:

"Equilibrium of membrane shells has been intensively investigated and it has a vast literature, although the general problem of membrane equilibrium has only partially cleared up." (Tarnai 1993, p. 322)

"An important question of membrane theory is how to set up boundary conditions for the above three shell type (positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme membranskaller, forf.) in order to obtain unique solutions obtaining membrane equilibrium. Although T. Tarnai's excellent papers (Tarnai 1980(a), 1981, 1983) throw light on related problem, further research is needed in this field." (Csonka 1987, p. 180)

"In fact, the problem is difficult, for it involves the interaction between 'global' and 'local' effects; and it is largely for this reason that the subject of shell structures generally is a difficult one."

... "For our present purpose we note that convexity guarantees rigidity (in the present context), while non-convexity *may* produce deformability."

... "In case of bellows and bends the flexibility is to a large extent related to the geometry of the respective surfaces. It is perhaps significant that both are *non-convex*; nevertheless this of itself does not constitute a proper explanation of their flexibility." (Calladine 1983, p. 5)

Om fri rande nævner Flügge i forbindelse med positivt krumme flader, at det er nødvendigt med en ringbjælke langs en åben rand, der kan optage forskydningskræfter og er tilstrækkelig bøjningsstiv i sin egen plan (Flügge

1973, p. 52). Og måske for at være på den sikre side, siges lidt senere at sådan et afstivende element er nødvendigt på alle fri rande, fordi en åben skalflade er let at deformere, mens en lukket flade er stiv (Flügge 1973, p. 53).

Csonka anfører i forbindelse med buckling: "To avoid this unfavourable phenomenon we must not design and construct shells which are too shallow or too thin, and thin shells with free edges are also undesirable." (Csonka 1987, p. 213).

I den sammenhæng kan nævnes (Billington 1982), der beskriver forskellen mellem teoretikere og praktikere, som Heinz Isler, ved deres skaller behov for randbjælker. Hans Isler har bygget mange positivt krumme skaller med fri rande uden randbjælker, blandt andet fordi han anvender fysiske analogier (p. 35, 338f).

I det følgende vil vi se på hvilke nødvendige understøtningsbetingelser, der angives for at henholdsvis positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme membranskaller er stabile.

Der er primært valgt tre kilder, da disse repræsenterer et godt billede af området. Flügge's "Stresses in shells" er nok en af de mest refererede bøger om emnet, Tarnai har gennemført den mest omfattende undersøgelse af randbetingelser ud fra membranteorien og Csonka kender til Tarnai og Csonka's omfattende "Theory and Practice of membrane shells" er skrevet efter Tarnai's artikler forelå. I forbindelse med nul-krumme skalflater benyttes endvidere (Lundgren 1949) og Billington, der begge har arbejdet både teoretisk og praktisk/eksperimentelt med cylinderskaller.

#### *Positivt krumme flader*

(Flügge 1973) betragter alene plane rande og siger som nævnt, at det er nødvendigt med en ringbjælke langs en åben rand, der kan optage forskydningskræfter og er tilstrækkelig bøjningsstiv i sin egen plan, p. 52. Dette svarer til at hele randen skal være enkeltunderstøttet som i stringersystem C, se (figur 96).

(Tarnai 1983) når frem til at en del af randen kan være fri, hvis dens projektion på grundplanen er analytisk, og den anden del er fuldstændigt understøttet, p. 62. Dette svarer til stringersystem A. Han finder ingen restriktioner for hvor stor en del af randen, der kan være fri, p. 64. Til gengæld finder han at små variationer af belastning på den fri rand kan give meget store kræfter langs den fri rand, p. 67, hvilket svarer til de resultater der er fundet ved modelforsøg og gitterberegninger af stringersystemer for udkragede skaller, se kapitlerne *Modeller* og *Gitterberegninger*.

Det er ifølge Tarnai ikke muligt at have flere fri rande, ligesom en løsning med en fri rand, to tilstødende enkeltunderstøttede og den sidste dobbeltunderstøttet, svarende til stringersystem B, heller ikke er tilladt, p. 63. En dobbeltsammenhængende rotationssymmetrisk flade med en fri rand og en fuldt understøttet rand er mulig, p. 65. Dette svarer til stringersystem F. Men flere huller er generelt ikke muligt, p. 66 (med mindre de forsynes med afstivning langs randen, p. 73f).

En skal med trekantet grundplan, hvor hele randen er enkeltunderstøttet og kun kan optage forskydningskræfter er statisk bestemt, mens en fir- eller flerkantet er statisk ubestemt. Dette gælder dog ikke, hvis fladen er en firkantet translationsflade, da er den statisk bestemt, p. 72. En skal med trekantet

grundplan, hvor hele randen er enkeltunderstøttet og kun kan optage normalkræfter (vinkelret på randens tangent) er statisk bestemt, mens en fir- eller fler-kantet er statisk ubestemt, p. 77. Dette svarer grundlæggende til stringersystem C. At enkeltunderstøttede flader med flere end tre kanter er statisk ubestemte kan forklares med, at der fremkommer to understøtninger i hvert hjørne, men hvorfor translationsflader i den forbindelse skulle have særlige statiske egenskaber er et åbent spørgsmål.

(Csonka 1987) tager udgangspunkt i, at skallen enten er understøttet på stive buer, p. 215, lodrette vægge eller søjler, p. 293. Alle tre løsninger svarer til at randen er enkeltunderstøttet, det vil sige stringersystem C.

Csonka nævner også apsidehvælv, der svarer til stringersystem A, som en mulighed og angiver nogle eksempler. Men det anføres, idet der henvises til Tarnai's artikler, at den matematiske teori ikke er helt afklaret, p. 663ff.

Det kan konkluderes, at stringersystemerne A og C i litteraturen er angivet som teoretiske muligheder, idet grænserne for A dog er usikre. Med stringermetoden afklares at system A er stabilt og ny teoretiske muligheder for systemerne B og D afdækkes. Muligheder, som fx Heinz Isler dog har udnyttet i praksis i en årrække (Ramm 1989, og Billington 1982, p. 336ff ).

#### *Nul-krumme skalflader*

(Flügge 1973) angiver, at en halvcirkelformet skal, der har lodrette tangentplaner langs de to rette rande og er fuldt understøttet i enderne, ikke behøver understøtninger langs de rette rande, når den belastes med sin egen vægt. Men disse skal forsynes med en forstærkning langs kanten, der kan optage forskydningsspændinger, p. 118.

(Tarnai 1981) når frem til, at de rette rande, der følger frembringerne, skal være fuldt understøttede, og at de to rande, som frembringerne skærer, skal understøttes således, at den ene er fri og den anden fuldt understøttet, p. 71, eller således at de begge kan optage forskydningskræfter, p. 78, eller således, at den ene kan optage forskydningskræfter og den anden normalkræfter, p. 87, men ikke sådan, at de begge kun kan optage normalkræfter, p. 79.

(Csonka 1987) noterer, at rette rande skal enkeltunderstøttes i tangentplanen, så de kan optage normalkræfter, eller være fuldt understøttede, p 408. De to rande, som frembringerne skærer, skal understøttes således, at de kan optage forskydningskræfter, p. 410, eller sådan, at den ene er fri og den anden fuldt understøttet, p. 411.

Forskydningskræfter langs de rette rande, ligger i randens retning og kan derfor optages som membrankraft i randen, der eventuelt skal forsynes med en passende forstærkning – jf. Flügge - og føres til et vilkårligt punkt på randen, fx den ene ende.

Tilbage af Tarnai's og Csonka's fulde understøtninger langs de rette rande er således enkeltunderstøtninger, der kan optage normalkræfter. Det kan imidlertid vise, at denne enkeltunderstøtning kan have alle retninger, blot den er plan og denne plan indeholder randen. Betragt et snit vinkelret på randen, antag, at skallens tangentplan har vinklen  $\alpha \neq 0$  med lodret, og at understøtningens plan fx er lodret. Da kan vi tilføje en lille stribe krum skal med kontinuert voksende krumning, hvis ene tangentplan er lig den oprindelige, og den anden er lodret. Denne skal kan vi betragte som en del af den oprindelige og dens krumningsændring kan gøres vilkårligt stor, svarende til

at dens udstrækning kan gøres vilkårligt lille. Det vil generere nogle ekstra langsgående kræfter, men de kan optages af den førmtalte randforstærkning. Det ses umiddelbart, at det samme ræsonnement kunne anvendes for en hvilken som helst anden plan enkeltunderstøtning, der ikke ligger i tangentplanen. Enkeltunderstøtningen kan i praksis udformes som en plan bjælke/skive, jf. (figur 104).

Dette bekræftes af (Lundgren 1949), der i forbindelse med beregning af cylinderskaller understøttet på lodrette bjælker skriver, at man ikke behøver at tage hensyn til den vandrette udbøjning, da den manglende vandrette kraft har lille indflydelse på skallen, p. 72. Tilsvarende viser numeriske analyser af samme type skaller, at den vandrette stivhed af randbjælken er uden betydning (Billington 1982, p. 235). Det er således alene randbjælkens lodrette stivhed, der har betydning, hvilket viser, at den virker som enkeltunderstøtning.

Det kan konkluderes, at der er overensstemmelse mellem litteraturen og stringermetoden med hensyn til at "frembringerne skal understøttes to gange, enten enkeltunderstøttes i begge ender eller dobbeltunderstøttes i den ene ende." Men der er divergerende krav til understøtningen af de rette rande. Med stringermetoden præciseres, at det er nødvendigt og tilstrækkeligt at enkeltunderstøtte de rette rande.

#### Negativt krumme flader

(Flügge 1973) skriver, at det ikke er muligt at etablere ligevægt i en HP skal, med rande langs de rette asymptotekurver, uden betragtelig bøjning i bjælkerne langs randene. Dette må betyde, uden at han kommer nærmere ind på det, at disse rande skal være dobbeltunderstøttet. Stringersystem A viser, at det er tilstrækkeligt at to rande er dobbeltunderstøttet.

For HP skaller, hvor randene skærer asymptotekurverne, angives en metode, hvis resultater fremgår af nedenstående figur, og som svarer fuldstændigt til stringersystemerne A og B eller kombinationer af disse (figur 124).

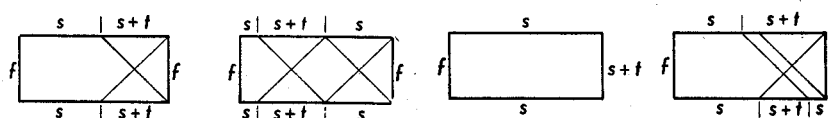


Fig. 4.12. Plan view of a hyperbolic shell, showing different examples of boundary conditions that may be imposed;  $f$  = free edge,  $s$  = shear edge (no thrust),  $s + t$  = shear and thrust admitted

Figur 124. Fra (Flügge 1973, p. 175).

(Tarnai 1980a) angiver en hel række muligheder for enkeltstående flader, p. 91-100, der alle svarer til stringersystem A og B eller kombinationer af disse.

For dobbeltsammenhængende flader, angiver Tarnai, at en rand kan være fri, hvis den anden er fuldstændigt understøttet, p. 102. Dette svarer til stringersystem F.

Ifølge Tarnai kan den hyperbolske ligning generelt ikke løses, når een randbetingelse er fastlagt langs en lukket rand, p.100. Dette svarer til stringersystemerne C og E uden betingelser for understøtningernes retninger. Han nævner dog, at der for en lodret understøttet hyperbolsk paraboloid over en elliptisk grundplan i visse tilfælde eksisterer en løsning, nemlig ved visse

forhold mellem pilhøjden på den ene led og på den anden led, p. 104. Hvorfor det forholder sig sådan, er ikke afklaret.

(Csonka 1987) noterer, at en HP skal, med rande langs de rette asymptotekurver, kan kun en af randene på hver led understøttes alene overfor forskydning, den anden skal således være fuldt understøttet, svarende til stringersystem A, når to stringersæt følger asymptotekurverne.

For rektangulære HP skaller, hvor randene skærere asymptotekurverne, angives en metode, der først blev fremført af F. Aimond. Skallerne indeles i "normale" og "forkortede", afhængigt af forholdet mellem sidelængderne. Csonka nævner et eksempel på en løsning for en "normal" skal, hvor to modstående rande er understøttet så de kun kan optage forskydning og de to andre kun normalkræfter, svarende til at systemet er enkeltunderstøttet langs hele randen, men tilføjer at der opstår nogle diskontinuiteter og at løsningen skal anvendes med varsomhed, p. 490. For en "forkortet" skal nævnes en løsning, hvor to modstående rande er fuldt understøttet og de to andre er forskydningsunderstøttet. For andre flader end de i metoden angivne findes der angiveligt ikke normalt løsninger, og de løsninger der kan findes er tvivlsomme, p. 492. Hvorfor Csonka ikke nævner Flügge i denne forbindelse kan undre.

Det kan konkluderes, at stringersystemerne A, B og F er angivet som muligheder i litteraturen, de sidstnævnte dog kun hos Flügge og Tarnai. Vedrørende stringersystemer af type C og G, nævner Tarnai specifikt, at der ikke findes en løsning for tilfælde G, hvis randene kun er forskydningsunderstøttet, men også, at der generelt ikke kan findes en løsning. Han har tilsyneladende ikke undersøgt de tilfælde, hvor randene er enkeltunderstøttet, som beskrevet i afsnittet *Ikke successivt opbyggede systemer*. Med stringermetoden afdækkes således ny muligheder for system C. Muligheder som dog nok først og fremmest er af teoretisk interesse.

#### *Mekanismer*

(Nielsen 1964) undersøger lodret enkeltunderstøttede hyperbolske paraboloider opbygget som gitterflader, og når frem til, at de er ustabile enten overfor jævnt fordelt last eller overfor antimetrisk last.

(Flügge 1973) nævner, at en lukket flade, der er sammensat af to (konvekse) kugleflader, således at der fremkommer en ikke-konveks flade, i visse tilfælde er ustabil.

(Tarnai 1980b) undersøger i denne artikel nogle rotationssymmetriske gitterfladers stabilitet. Han nævner indledningsvis, at disse systemers stivhed ikke alene er en algebraisk (jf. Maxwell's tælleregul), eller en topologisk, men en geometrisk egenskab – den afhænger af systemets metriske størrelser.

De undersøgte gittersystemer er åbne trekantfacetterede gitterflader. De er dobbeltunderstøttede, men følger ikke reglerne for stringersystemers opbygning, idet det ene stringersæt danner lukkede kæder omkring rotationsaksen.

Tarnai når i sin undersøgelse af systemer med et lige antal stænger i hver ring frem til, at disse altid er mindst en gang statisk og kinematisk ubestemte uanset antallet af ringe og fladens krumning. Dog stiger graden af ubestemt-hed, når stængerne følger asymptotekurverne på en dobbeltsammenhængende negativt krum hyperbolsk flade.

I det generelle tilfælde opstår en mekanisme med stor bevægelighed, mens de sidstnævnte mekanismer på den hyperbolske flade er bevægelige i det små.

Alle disse tilfælde svarer til ikke successivt opbyggede ikke konvekse stringersystemer. Det kan konkluderes at stringermetoden giver mulighed for at udpege denne type systemer, hvor de nødvendige understøtningsbetingelser ikke altid er tilstrækkelige.

## Konklusion

Med stringermetoden kan man sikre at en skal af vilkårlig form er understøttet så alle lastpåvirkninger kan optages og føres til understøtningerne som membrankræfter.

Med stringermetoden kan der opstilles en række grundlæggende stringersystemer, der dels forenkler opstilling af alternative understøtningsmuligheder for en given skalflade, dels gør det let at opbygge stabile skaller, der er sammensat af flere flader.

Stringermetoden afdækker nogle hidtil oversete understøtningsmuligheder:

- Positivt krumme membranskaller kan understøttes stabilt når randen er opdelt i afsnit, der er skiftevis dobbeltunderstøttet og fri.
- Også udkragede positivt krumme skaller kan være stabile betragtet som membranskaller. Men spændinger og deformationer i membrantilstanden er imidlertid ofte så store, at skallerne i realiteten må bære ved bøjning.
- Nul-krumme skaller skal enkeltunderstøttes langs rette rande.
- Negativt krumme skaller kan enkeltunderstøttes langs hele randen, hvis enkeltunderstøtningerne har en nærmere specificeret retning.
- En understøtning behøver ikke at ligge i skallens tangentplan.

Stringermetoden kan således bruges til at kortlægge flere stabile membranskalkonfigurationer end de hidtil kendte.

### *Fremtidsmuligheder*

En fremtidig udnyttelse af stringermetoden vil udover fastlæggelse af understøtningsbetingelser kunne tænkes at ske indenfor følgende felter:

- Yderligere afklaring af betingelserne for stivhed og stabilitet af lukkede flader. Der mangler for eksempel fortsat viden om de mekanismer, der gør at ikke-konvekse lukkede flader som regel er ustabile.
- Beregning og dimensionering af membranskaller. Stringersystemet er en statisk model af skallen og kan derfor principielt anvendes til beregning af snitkræfter og dermed til dimensionering af skallen.
- Vurdering af materialeøkonomi af skalkonstruktioner. Stangkræfterne i stringersystemet er afhængig af stringernes indbyrdes placering. Stangkræfternes størrelse multipliceret med den længde de virker over, er et udtryk for systemets stivhed og materialeøkonomi. Placeres stringerne derfor i hovedspændingsretningerne, skulle det være muligt at sige noget præcist om skallens materialeforbrug.
- Afklaring af henholdsvis positivt krumme, nul-krumme og negativt krumme skalfladers statiske virkemåde.

# Modeller

## *Indledning*

Modeller kan med fordel anvendes i skitseringsfasen til at undersøge skal-konstruktioner både arkitektonisk og statisk.

I afsnittet her beskrives kort hvordan skalmodeller opbygget af plane elementer kan fremstilles, hvilke egenskaber de har og hvordan selv simple modeller kan anvendes til at vurdere skallens statiske egenskaber.

Mens stringermetoden kan afklare skallers stabilitetsforhold og benyttes til at finde nødvendige eller tilstrækkelige understøtningsbetingelser, kan modeller anvendes til at vurdere både stabilitet, stivhedsforhold og materialeøkonomi. Sammenlignende forsøg med modeller er derfor velegnede til at lede frem til de mest optimale former eller mest hensigtsmæssige understøtninger og føre til større forståelse for de pågældende skallers statiske virkemåde.

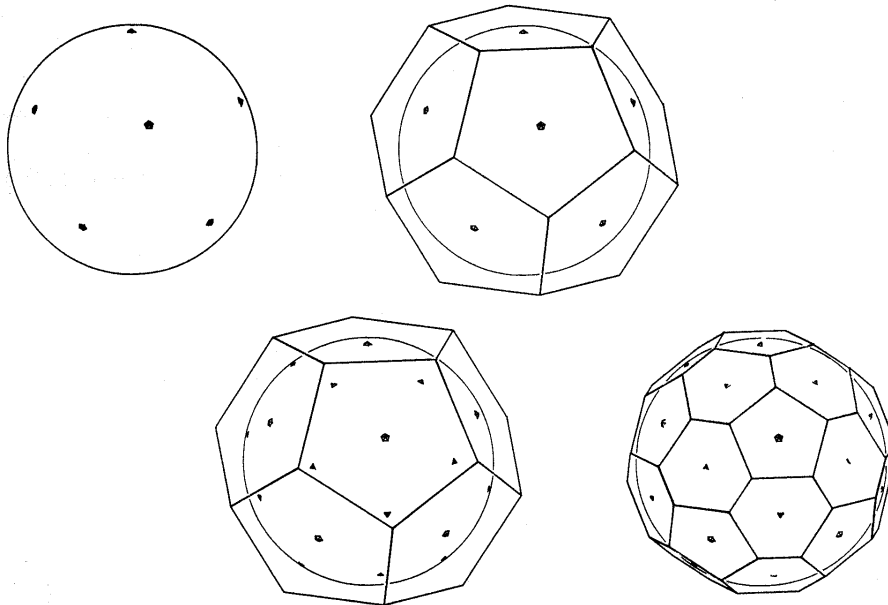
Sidst i afsnittet beskrives tre eksempler på sådanne forsøgsrækker.

## Fremstilling

Vi tager her udgangspunkt i at den ønskede flade er givet ved et analytiske udtryk. Er fladen ikke analytisk, men foreligger som enten tegning eller model, kan den opmåles og facetteres som beskrevet i (Feilberg Hansen 1988 p. 129).

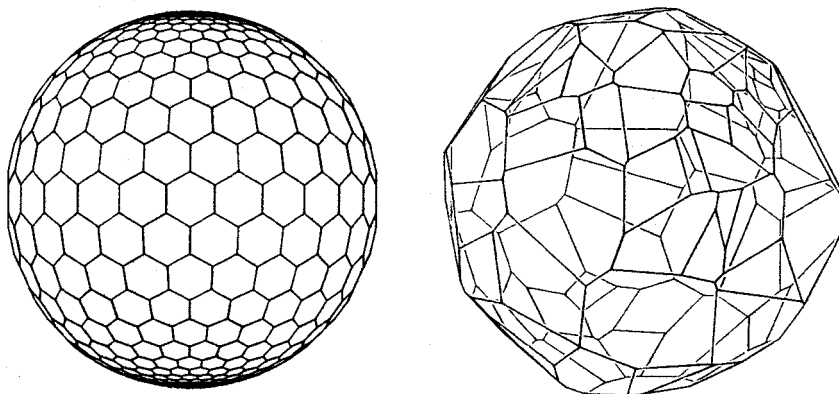
### *Facettering*

Den analytisk givne flade skal herefter deles op i plane elementer, der kaldes *facetter*. Det kan gøres ved at udvælge et antal tangentpunkter på fladen, og lade de tilhørende tangentplaner og deres indbyrdes skæringslinier danne facetterne i den facetterede flade (figur 125).



Figur 125. Tangentfacettering af kugle, først som dodekaeder og derefter som afskåret dodekaeder.

Tangentfacettering kan udføres systematisk, ved at man på forhånd bestemmer tangentpunkternes placering på den krumme flade, eller den kan udføres tilfældigt, ved for eksempel at lade en tilfældighedsgenerator vælge tangentpunkterne (figur 126).



Figur 126. En systematisk og en tilfældigt facetteret kugleflade. Sidstnævnte er dannet af 384 tilfældigt genererede tangentplaner til en kugle. Bemærk at alle hjørner er tregenede.

Hvis facetteringen er tilfældig vil der kun fremkomme tregenede hjørner. Det vil sige, at med mindre man systematisk sørger for at frembringe firkantede (eller fem- eller sekskantede osv.) hjørner, vil sådanne ikke forekomme.

For en analytisk flade kan tangentplanen i hvert punkt bestemmes jf. *Bilag 4* og fladen kan derefter tangentfacetteres. Et antal analytiske flader og eksempler på deres facettering findes i (Almegaard Ohlsen 1988).

#### *Valg af tangentpunkter*

I forbindelse med fremstilling af modeller kan det være hensigtsmæssigt at hjørnerne er firkantede og facetterne firkantede. Det gør det både lettere at facettere fladen og bygge modellerne.

For positivt og negativt krumme flader opnås dette fx hvis tangentpunkterne lægges i skæringspunkterne mellem to sæt krumningskurver. For translationsflader, som den elliptiske paraboloid og den hyperbolske paraboloid,



kan tangentpunkterne også lægges i skæringspunkterne mellem to sæt translationskurver.

#### *EDB programmer*

På SBI, nu By og Byg, er udviklet et edb-program der kan anvendes til modellering af facetterede flader, herunder facettering af analytisk givne flader (Feilberg Hansen 1991). På basis af ligningerne for de enkelte facetter beregnes skæringslinier og hjørnepunkter for elementerne.

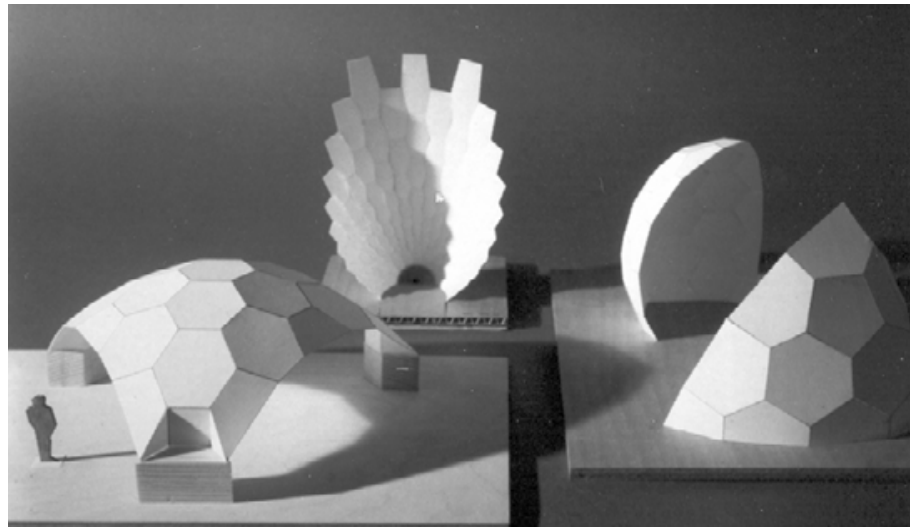
Når facetterne er bestemt kan fladen rulles på en plan, facet for facet, således at der fremkommer en udfoldning af den facetterede flade.

Translationsflader kan modelleres og udfoldes ved hjælp af et lettere tilgængelige program, der er udviklet på Kunstakademiets Arkitektskole (Hansen 2002).

#### *Bygning*

Tegnes den plane udfoldning i en passende skala på fx et kraftigt stykke papir eller karton, kan elementerne skæres ud med en hobbykniv og limes sammen til en model.

Små modeller af 200g papir, som de her viste, kan fremstilles af et A4 ark, ved hjælp af ovennævnte programmer, og bygges på en times tid (se *Bilag 10*) (figur 127).



Figur 127. Tidlige modeller af skiveskaller. Foran tv. et udkast til fuldsalamodellen (se Bilag 9), bagved en omdrejningsparaboloide, hvis rand er trinvis afrappet, og th. to skaller der er opbygget af facetterede kugleudsnit.

## Egenskaber

#### *Facetterede skaller*

Det kan vises at facetterede skaller, hvis tangentpunkter svarer til stringersystemets knudepunkter, har samme stabilitetsegenskaber, som det pågældende stringersystem og dermed den tilsvarende glatte membranskal. Det kan også vises at facetterede skaller, hvor stringersystemets stænger ligger i elementerne eller/og i langs kanterne har samme stabilitetsegenskaber, som det pågældende stringersystem og dermed den tilsvarende glatte membranskal.

Facetterede skaller, der er opbygget af tynde plane elementer, der er samlet langs kanterne, således at der ikke kan overføres væsentlige bøjningskræfter mellem elementerne, kan derfor betragtes som membranskaller.

#### *Modellove*

I forbindelse med modelforsøg er det nødvendigt at iagttage modellovene. For en model i målestoksforholdet  $n$ , vil alle fladearealer have størrelsesforholdet  $n^2$  og alle volumener størrelsesforholdet  $n^3$ . Det betyder at:

- der vil optræde de samme spændinger i modellen, som i den ønskede konstruktion, hvis alle belastninger er fladelaste med samme størrelse og konstruktionen er statisk bestemt.
- forholdet mellem nedbøjninger for to forskellige laste vil være det samme for modellen og den ønskede konstruktion, hvis materialet i modellen og materialet i konstruktionen begge er lineærelastiske, og i så fald vil der desuden optræde samme spændinger i modellen og i den ønskede konstruktion, hvis konstruktionen er statisk ubestemt.
- nedbøjningerne har størrelsesforholdet  $n$ , hvis materialet i model og konstruktion er det samme<sup>7</sup>.
- der skal kompenseres for egenvægten, da egenvægten er proportional med konstruktionens volumen.

Ved modelforsøg med henblik på dimensionering, skal skalm modeller således belastes med en permanent fladelast, der svarer til materialets vægtfylde multipliceret med differensen mellem modellens og den endelige skals godstykkelse.

Papir har nogenlunde samme styrkeegenskaber som nåletræ. Elasticiteten svarer til elasticiteten for krydsfiner af nåletræ, men er ikke så retningsbestemt. Densiteten er cirka dobbelt så stor som for nåletræ eller krydsfiner af nåletræ. En lille model i 1:100 fremstillet af 200g papir kan således betragtes som en model af en skalkonstruktion i 20 mm krydsfiner. Et viskelæder på 10 g svarer til en last på 100 kg - eller 1,0 kN - fordelt over det belastede areal, og en typisk fladelast på 1,0 kN/m<sup>2</sup> svarer til 10g/cm<sup>2</sup>.

I forbindelse med skitseprojektering, hvor opgaven er at finde hensigtsmæssige skalformer og understøtninger, er det imidlertid tilstrækkeligt at kunne sammenligne forskellige konfigurationers stivhed. Hvis det endelige materiale forventes at være elastisk, er det derfor tilstrækkeligt at anvende et elastisk materiale, som fx papir, idet forholdet mellem to forskellige modellers nedbøjning ved en given belastning da vil være det samme som forholdet mellem de to tilsvarende virkelige skallers nedbøjning.

#### *Stivhed og materialeøkonomi*

Har man to modeller, hvis udformninger er forskellige med hensyn til krumning, randformer og/eller understøtninger, men som er bygget i samme elastiske materiale og i samme målestoksforhold, kan man ved at sammenligne stivheden overfor forskellige belastninger desuden vurdere hvilken konstruktion der er mest materialeøkonomisk.

Det fremgår af det virtuelle arbejdes princip, at det ydre arbejde er lig det indre arbejde. Det ydre arbejde er lig kraft – her belastning – multipliceret med den vej kraften virker over – her nedbøjningen. Det indre arbejde er lig de

<sup>7</sup> For skaller er den kritiske fladelast i forbindelse med instabilitet proportional med  $t^2/R^2$ , hvor  $t$  er tykkelsen og  $R$  skallens krumningsradius. Forholdet er uafhængigt af  $n$  hvorfor skalamodeller i det endelige materiale principielt også kan anvendes til at bestemme kritiske fladelaste. Man skal her være opmærksom på at skallens geometriske imperfektioner er den primære årsag til at den faktiske kritiske last er væsentligt lavere end den man kommer frem til ved en klassisk lineær analyse, se fx (Morris 1996 p. 802). Dette stiller høje krav til tolerancerne på model og den endelige skal.

indre snitkræfter multipliceret med de tilhørende tøjninger og integreret over hele konstruktionen. Da tøjningerne for lineærelastiske materialer er proportionale med de tilhørende spændinger, er det indre arbejde proportionalt med snitkræfterne i anden potens multipliceret med den længde de virker over. Da den stiveste konstruktion er den konstruktion hvis ydre arbejde er mindst, er den stiveste konstruktion også den, hvis snitkræfter multipliceret med den længde de virker over er mindst. Og dermed er den stiveste konstruktion også den mest materialeøkonomiske konstruktion.

### *Konklusion*

Facetterede modeller af skaller er membranskaller og har de samme stabilitetsegenskaber som de tilsvarende glatte membranskaller.

Fremstilles modellerne som skalamodeller viser de desuden skallernes stivhedsforhold korrekt, under forudsætning af at både modeller og skaller udføres i lineærelastiske materialer.

Papir er et passende lineærelastisk materiale og velegnet til simple modeller.

For to modeller, der er fremstillet af det samme lineærelastiske materiale og i samme målestoksforhold, er den stiveste model den mest materialeøkonomiske.

## Anvendelse

Da modeller, som virkelige skaller, normalt besidder en hvis bøjningsstivhed er det ikke umiddelbart muligt på basis af modelforsøg at adskille ustabile konfigurationer fra slappe, men stabile, konfigurationer. Hvis dette ønskes afklaret kan man fx benytte stringermetoden. I forbindelse med skitseprojektering er dette spørgsmål imidlertid af begrænset interesse, da man her som regel ønsker en stiv konstruktion.

Står man overfor en slap membranskalkonfiguration er der tre muligheder:

- 1 vælg en anden skalform
- 2 forsyn skallen med flere understøtninger
- 3 vælg en anden konstruktionstype, der er baseret på bøjningsstivhed.

Med modeller er det relativt hurtigt at undersøge punkt 1 og meget hurtigt at undersøge punkt 2, hvilket er den ene af grundene til at det kan være hensigtsmæssigt at supplere stringermetoden med modelforsøg ved skitseprojektering af skaller.

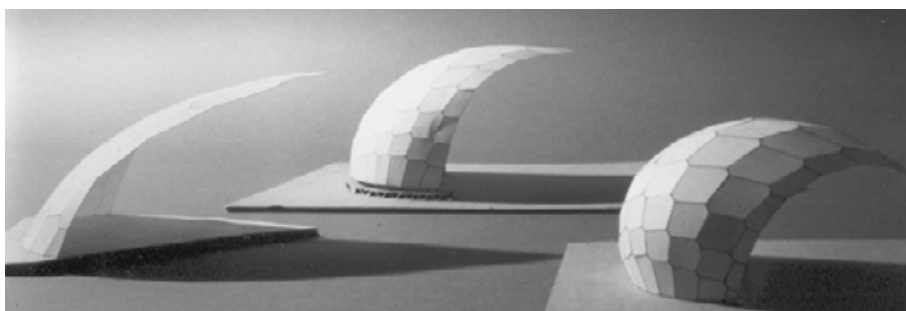
Den anden grund er, at modeller som nævnt også kan bruges til at vurdere hvilke skalkonfigurationer, der er de mest materialeøkonomiske.

Den tredje grund er, at arbejdet med modeller i mange tilfælde gør det nemmere at afklare løsningsmulighederne for en given konstruktiv opgave. Fysiske modeller taler til flere sanser end matematiske modeller og kan derved give en umiddelbar kvalitativ forståelse for konstruktionens virkemåde. Dels kan de hjælpe med at afdække hvilke parametre der har betydning for den pågældende skalkonfigurations statiske egenskaber, hvilket efterfølgende kan afprøves med en sammenlignende analyse af forskellige konfigurationer for eksempel i form af papirmodeller. Dels kan de måske bedre end mange analytiske redskaber inspirere til nye og bedre skalløsninger.

## Eksempler

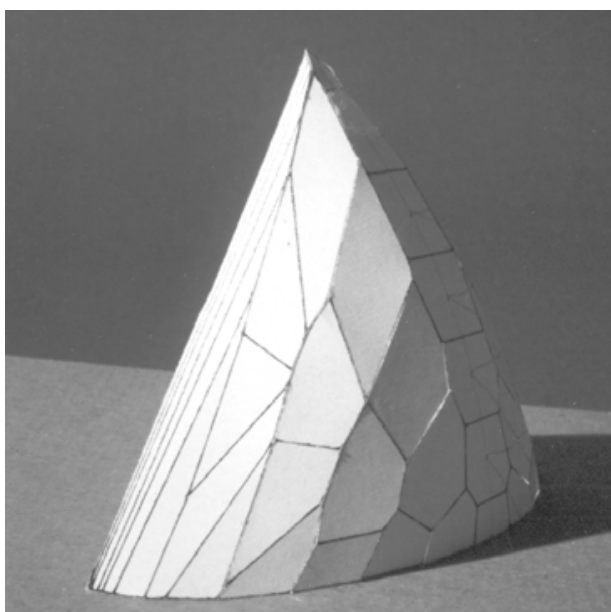
### *Udkragede positivt krumme skaller*

Udgangspunktet for denne forsøgsrække var et ønske om en positivt krum udkraget skal, der var successivt opbygget ved fri frembygning fra en fast understøtning. En sådan skal er stabil ifølge stringermetoden. Den første model var meget udkraget og havde en flad form. Den viste sig at være væsentligt stivere end et plant stykke papir, hvilket bekræftede at skallen var stabil, men den var dog meget slap som konstruktion betragtet. Derfor blev der bygget en ny model, der var mere krum. Dette skete ud fra den hypotese, at når buers styrke og stivhed er proportional med krumningen (og omvendt proportional med tykkelsen) måtte det også gælde for sådanne skaller. Men den ny model viste sig ikke at være væsentligt stivere. En tredje model, der var meget mere krum, mindre udkraget og relativt tykkere, blev herefter fremstillet og belastet - men også den var overraskende slap (figur 128).



Figur 128. Udkragede positivt krumme skaller. Forsøgsrække på tre modeller af papir. Første model til venstre.

Denne strategi førte helt åbenbart i den gale retning. Noget tydede på, at skalkonfigurationen var grundlæggende uhensigtsmæssig. Tilsyneladende var det de krumme rande, der skabte problemer, for der opstod store flytninger her, når modellen blev belastet. Det var derfor logisk at forsøge med rette rande. Resultatet blev en konveks udkraget skal med rette rande. De rette rande danner sammen med understøtningen en trekant. Den specielle geometri afspejles i den uregelmæssige facettering (figur 129).



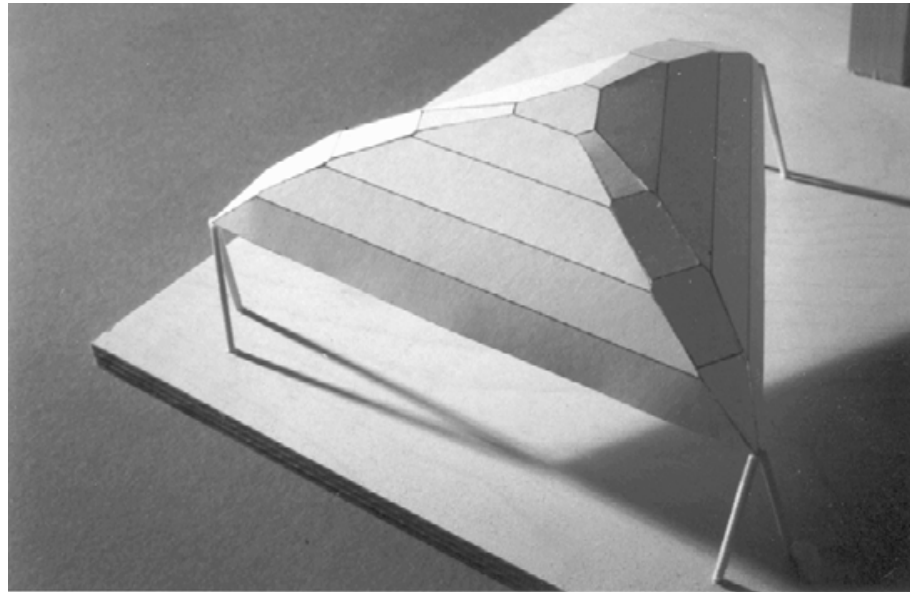
Figur 129. Model af udkraget konveks skal med rette rande.

Modellen var stiv, langt stivere end de foregående tre modeller. De rette randes gunstige virkning på stivheden kunne muligvis forklares med at der opstår en skivevirkning langs de rette rande, sådan at skælfladen i et område langs randen fungerer som en lang skive. Skallen vil da kunne betragtes som en lukket skal med et - ganske vist ret stort - plant trekantet hul og en sådan skal er stabil.

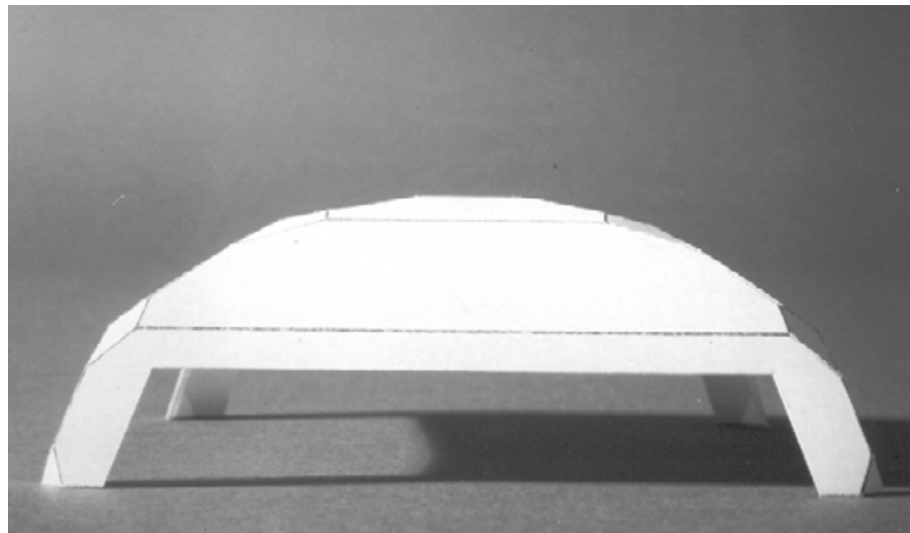
#### *Skaller med rette rande*

Med udgangspunkt i ovennævnte hypotese blev der gennemført et par forsøg, med henblik på at undersøge positivt krumme skaller med rette rande lidt nærmere. Denne skaltype er nærmere beskrevet i *Bilag 7*.

Der blev bygget to modeller, der begge var positivt krumme også i området op til hjørnerne (figur 130 og 131).



Figur 130. Model af trekantet skal med rette rande. Skallen er understøttet med to understøtninger i hvert hjørne.

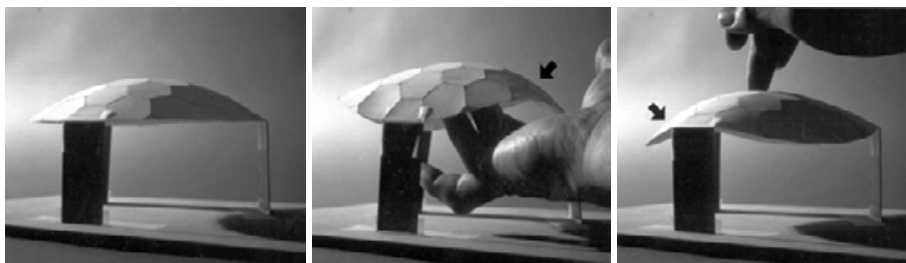


Figur 131. Model af firkantet skal med rette rande.

Det viste sig at disse skaller generelt er meget stive. Alt tyder på at det bærende princip i denne skaltype er følgende. Langs hver af de rette rande udgør fladen en plan skive, der fungerer som en bjælke der er simpelt understøttet i enderne, det vil sige fladens hjørner. Den øvrige del af fladen kan

betrages som en positivt krum flade, der er enkeltunderstøttet – på disse bjælker - langs hele randen.

Supplerende modellforsøg viser, at en positiv krum skalflade fx en kuglekaldot, der understøttes i tre punkter på randen og belastes med en lodret last, deformeres til en form, der nærmer sig den trekantede skalform med rette rande, uanset om lasten er udadrettet eller indadrettet. En sådan temmelig primitiv "hængemodel" antyder således også de rette randes effektivitet (figur 132).



Figur 132. Modelforsøg med belastning af "hængemodel".

- a) Den ubelastede skalflade
- b) Skalfladen belastet med en opadrettet kraft
- c) Skalfladen belastet med en nedadrettet kraft. Der fremkommer i begge tilfælde en trekantet form med tilnærmelsesvis rette rande (markeret med pile).

#### *Udkragede skallers stivhed*

Den sidste forsøgsrække, der skal nævnes her, har haft til formål at undersøge krumningens og rette randes betydning for stivheden af udkragede skaller.

Alle skaller har samme konstruktionshøjde, samme snit langs den dobbeltunderstøttede rand og alle er udkraget lige langt. Men skalfladerne har ikke samme krumningsmål og heller ikke samme forløb af den fri rand. Der er to positivt krumme flader. Den enes fri rand er krum mens den andens består af to rette randafsnit. Der er to nul-krumme flader. Den ene er en cylinderflade, som der for sammenligningens skyld er fremstillet tre modeller af med tre forskellige udformninger af de fri randafsnit, der alle er krumme. Den anden nul-krumme flade er en kegleflade, hvis to fri randafsnit er rette. Endelig er der to negativt krumme flader, begge HP flader, hvor den fri rand på den ene flade består af to randafsnit, der hver følger en ret asymptotekurve, mens den fri rand på den anden er krum.

Modellerne er fremstillet i 200g papir og har følgende hoveddimensioner<sup>8</sup>:

$$l \cdot b \cdot h = x \cdot y \cdot z = 12\text{cm} \cdot 12\text{cm} \cdot 3\text{cm}.$$

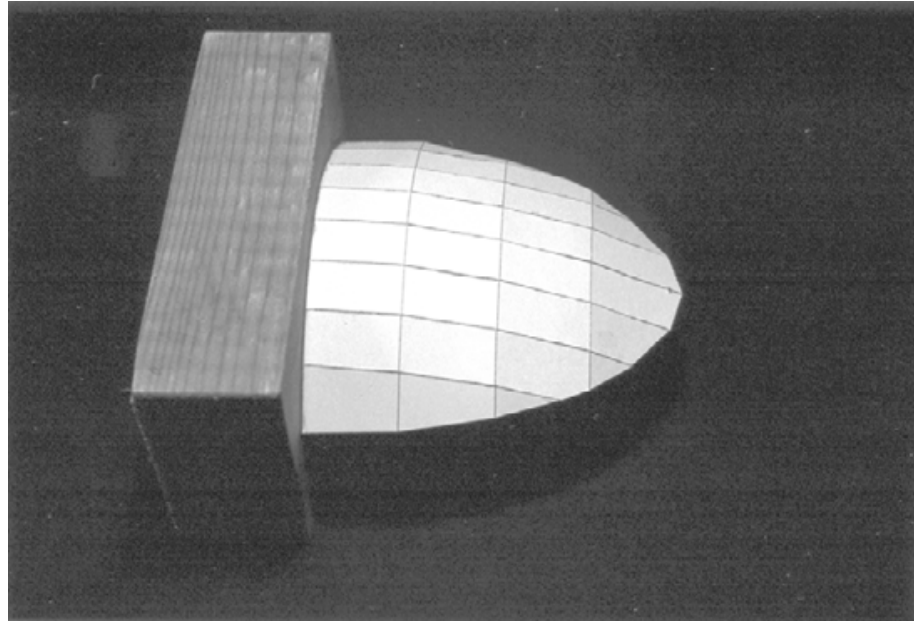
Model **a** forefindes som modelark i *Bilag 10*.

<sup>8</sup> For at nå frem til disse mål skal enheden i de følgende udtryk sættes til 6 cm.

Model **a** er en facetteret positivt krum parabolisk ellipsoide, der er givet ved udtrykket:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \left( \frac{x}{2} \right)^2 - y^2 \right) \quad x \in [0; 2] \quad y \in [-1; 1]$$

Den ene rand er dobbeltunderstøttet og danner en parabel i den lodrette plan  $x=0$ . Den anden rand er fri og danner en halv ellipse i den vandrette plan  $z=0$  (figur 133).

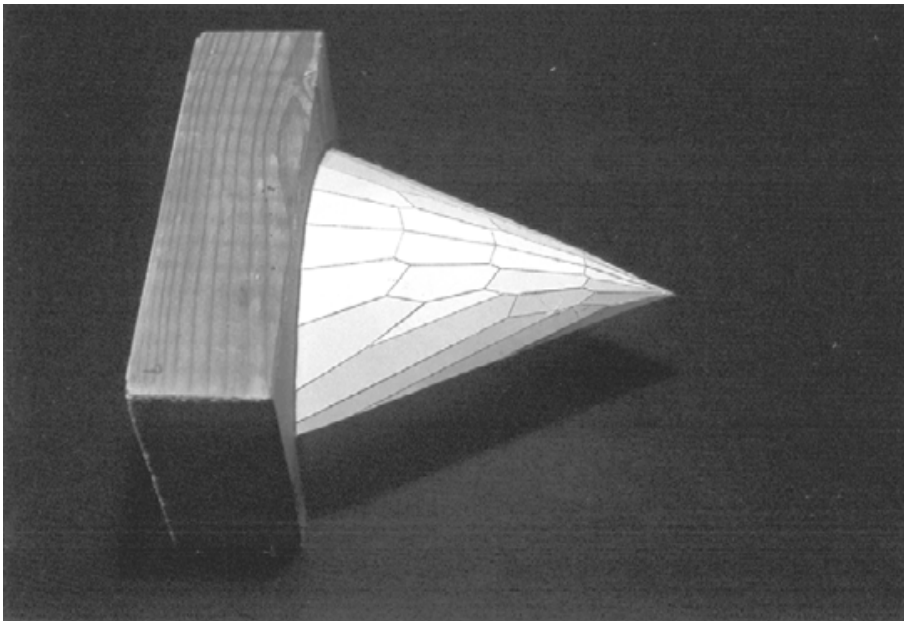


Figur 133. Model **a**. Positivt krum skal, en elliptisk paraboloid med elliptisk grundplan. Stivhedsfaktor: **0,01** (stivhed i forhold til model **b**, se Tabel 2 sidst i afsnittet).

Model **b** er dannet ved facettering af en positivt krum flade med rette rande, der er givet ved udtrykket:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \left( \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) - y^2 \right) \cdot \frac{\left( 1 - \left( \frac{x}{2} \right)^2 \right)}{\left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2} \quad x \in [0; 2] \quad y \in [-1; 1]$$

Den dobbeltunderstøttede rand i  $x=0$  danner en parabel og den fri rand i  $z=0$  danner en ligebenet trekant (figur 134).

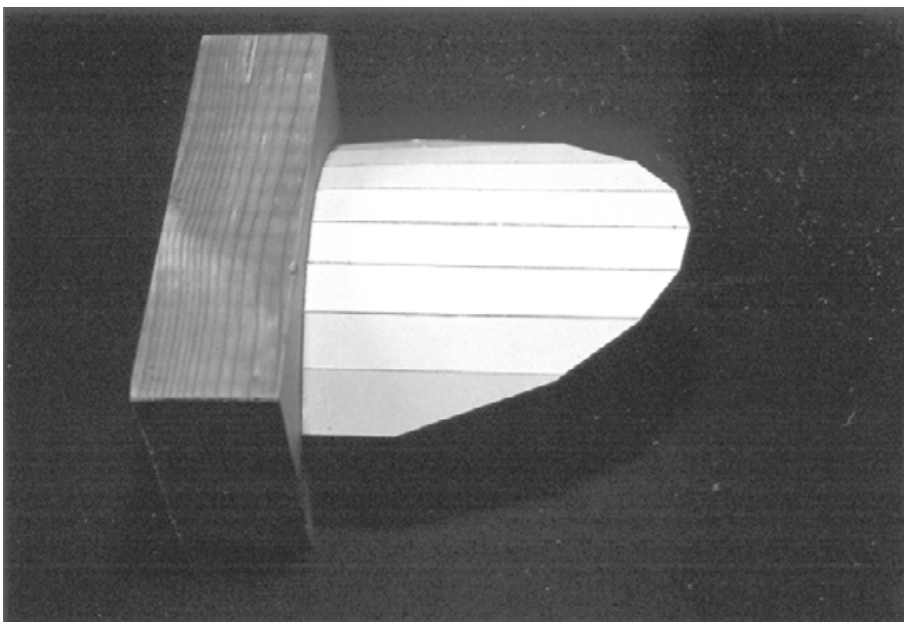


Figur 134. Model **b**. Positivt krum skal med trekantet grundplan og rette fri rande.  
Stivhedsfaktor: **1,0**.

Modellerne **c1**, **c2** og **c3** er dannet ved facettering af en enkeltkrum flade med parallelle frembringere, der er givet ved udtrykket:

$$z = \frac{1}{2} \cdot (1 - y^2) \quad x \in [0; 2] \quad y \in [-1; 1]$$

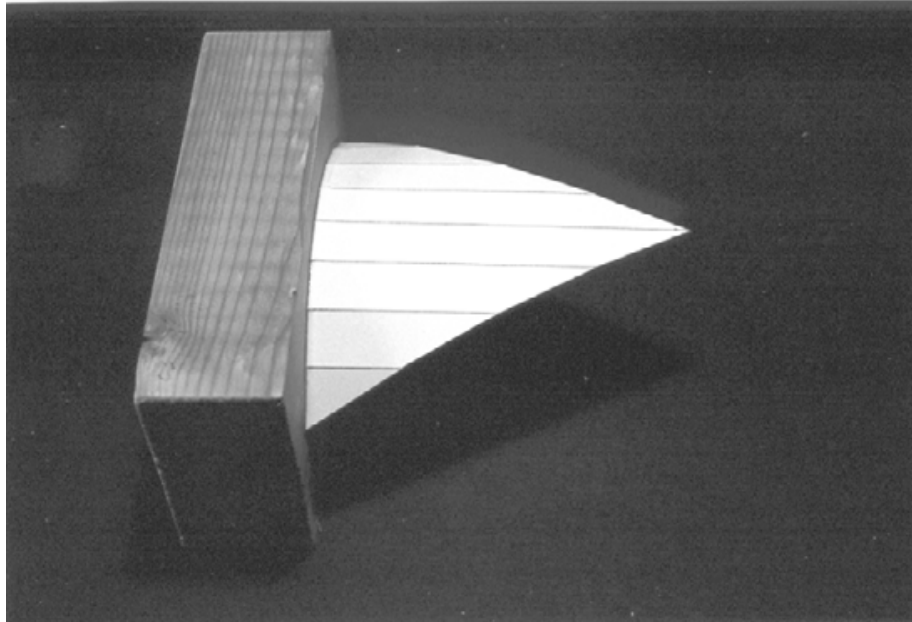
Den dobbeltunderstøttede rand i  $x=0$  danner en parabel og for **c1** danner den fri rand i  $xy$ -planen en halv ellipse (figur 135).



Figur 135. Model **c1**. Enkeltkrum skal med elliptisk grundplan.  
Stivhedsfaktor: **0,1**.

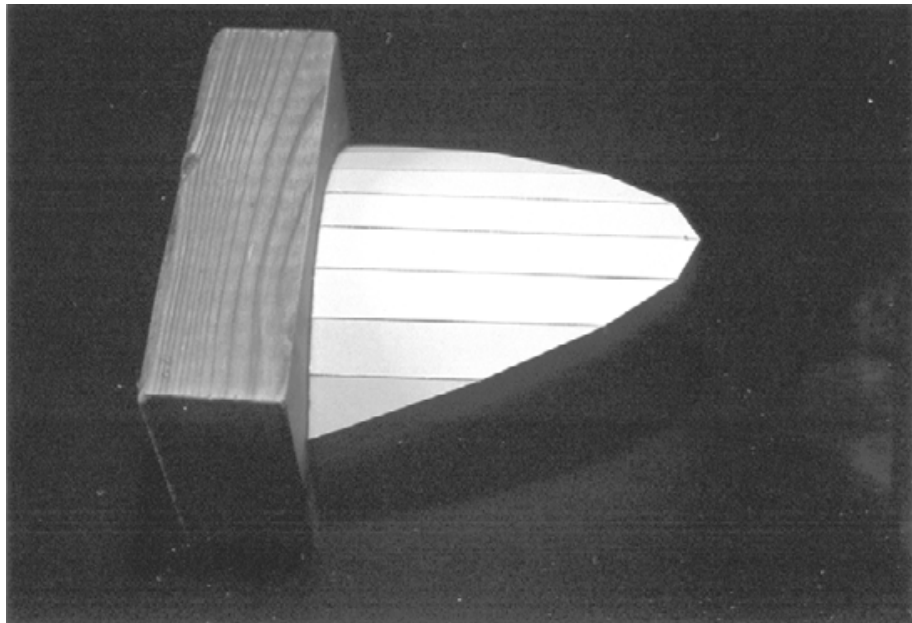
For **c2** er den fri rand fremkommet ved snit med to lodrette planer og danner i  $xy$ -planen en ligebenet trekant (figur 136).





Figur 136. Model **c2**. Enkeltkrum skal med trekantet grundplan.  
Stivhedsfaktor: **0,025**.

For **c3** er den fri rand defineret ved en skrå plan og danner i  $xy$ -planen derfor en parabel (figur 137).

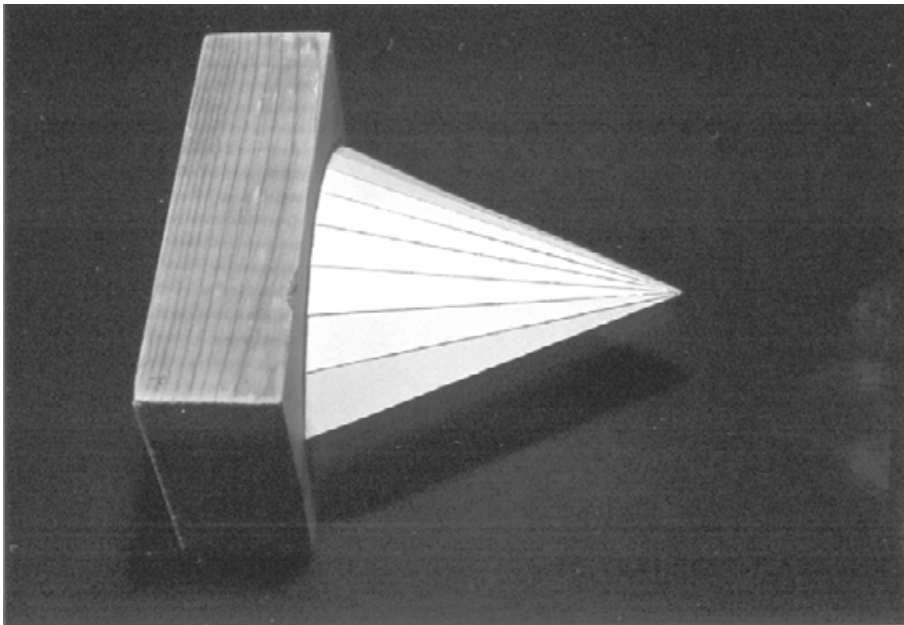


Figur 137. Model **c3**. Enkeltkrum skal med plan parabelformet rand.  
Stivhedsfaktor: **0,05**.

Model **d** er en facetteret enkeltkrum kegleformet skalflade med rette rande, der er givet ved udtrykket:

$$z = \frac{1}{2-x} \cdot \left( \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 - y^2 \right) \quad x \in [0; 2] \quad y \in [-1; 1]$$

Keglens toppunkt ligger i  $(2, 0, 0)$ . Den lodrette rand i  $x=0$  er dobbeltunderstøttet og danner, som i de øvrige modeller, en parabel. Den fri rand i  $z=0$  danner en ligebenet trekant (figur 138).

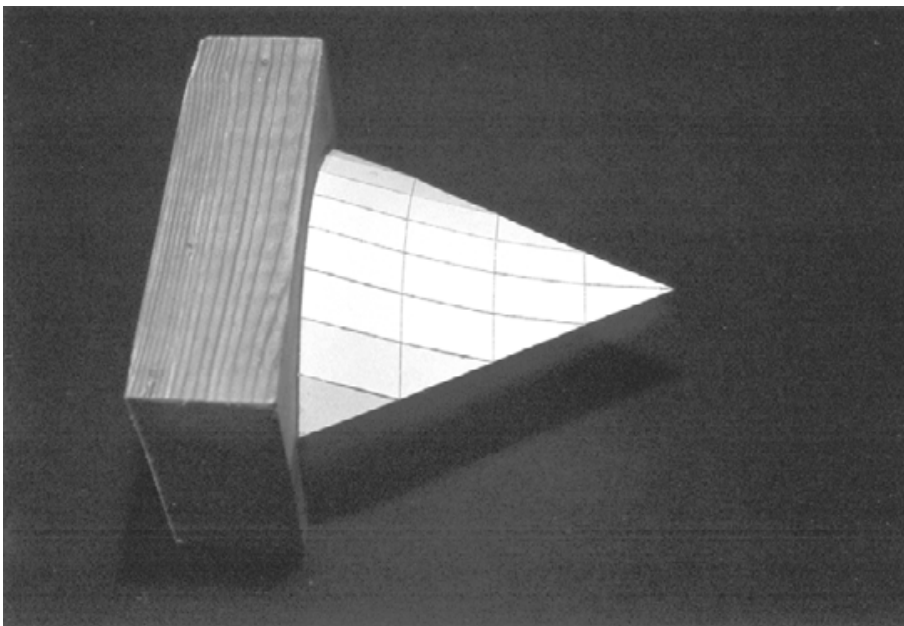


Figur 138. Model **d**. Enkeltkrum kegleformet skal, med trekantet grundplan og rette fri rande. Stivhedsfaktor: **0,2**.

Model **e** er en negativt krum facetteret hyperbolsk paraboloid, der er givet ved udtrykket:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \left( \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 - y^2 \right) \quad x \in [0; 2] \quad y \in [-1; 1]$$

Asymptotekurverne er givet ved  $x = \pm 2y + k$ , hvor  $k$  er en konstant. Den dobbeltunderstøttede rand i  $x=0$  danner en parabel og den fri rand i  $z=0$  er en ligebenet trekant, der er defineret ved de to asymptotekurver gennem den understøttede rands endepunkter  $(0, -1, 0)$  og  $(0, 1, 0)$  (figur 139).



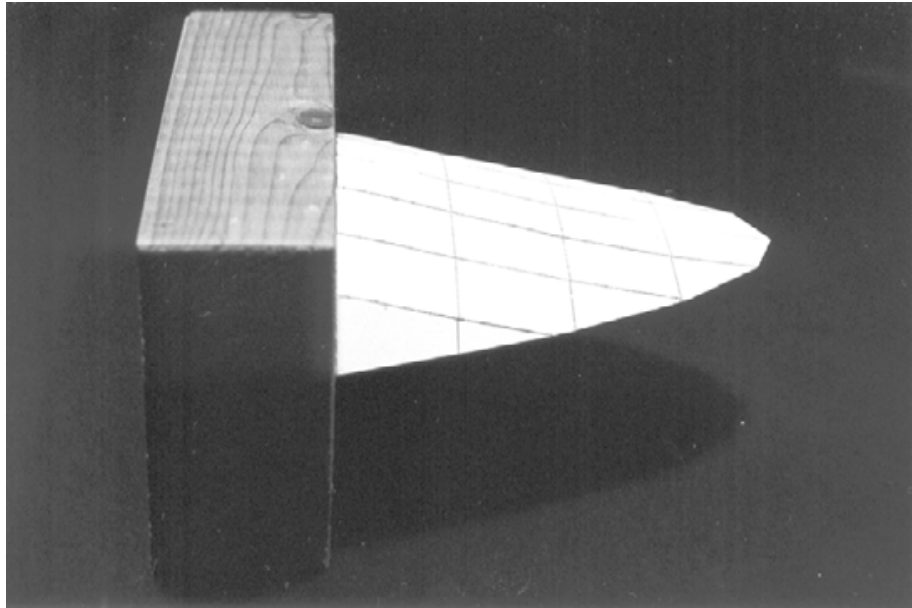
Figur 139. Model **e**. Negativt krum skal, en hyperbolsk paraboloid, med trekantet grundplan og rette fri rande, der ligger langs asymptotekurver. Stivhedsfaktor: **0,025**.

Model **f** er også en negativt krum facetteret hyperbolsk paraboloid. Dens krumning i  $x$ -retningen er reduceret til en fjerdedel i forhold til flade **e**, hvor-

ved de fri rande kan gøres krumme uden at skallen dækker et mindre areal. Fladen er givet ved udtrykket:

$$z = \frac{1}{2} \cdot \left( \left( 1 - \frac{x}{4} \right)^2 - y^2 \right) \quad x \in [0; 2] \quad y \in [-1; 1]$$

Asymptotekurverne er givet ved  $x = \pm 4y + k$ , hvor  $k$  er en konstant. Den dobbeltunderstøttede rand i  $x=0$  danner en parabel og den fri rand er afskåret således, at den danner den samme parabel i  $xy$ -planen som **c3** (figur 140).

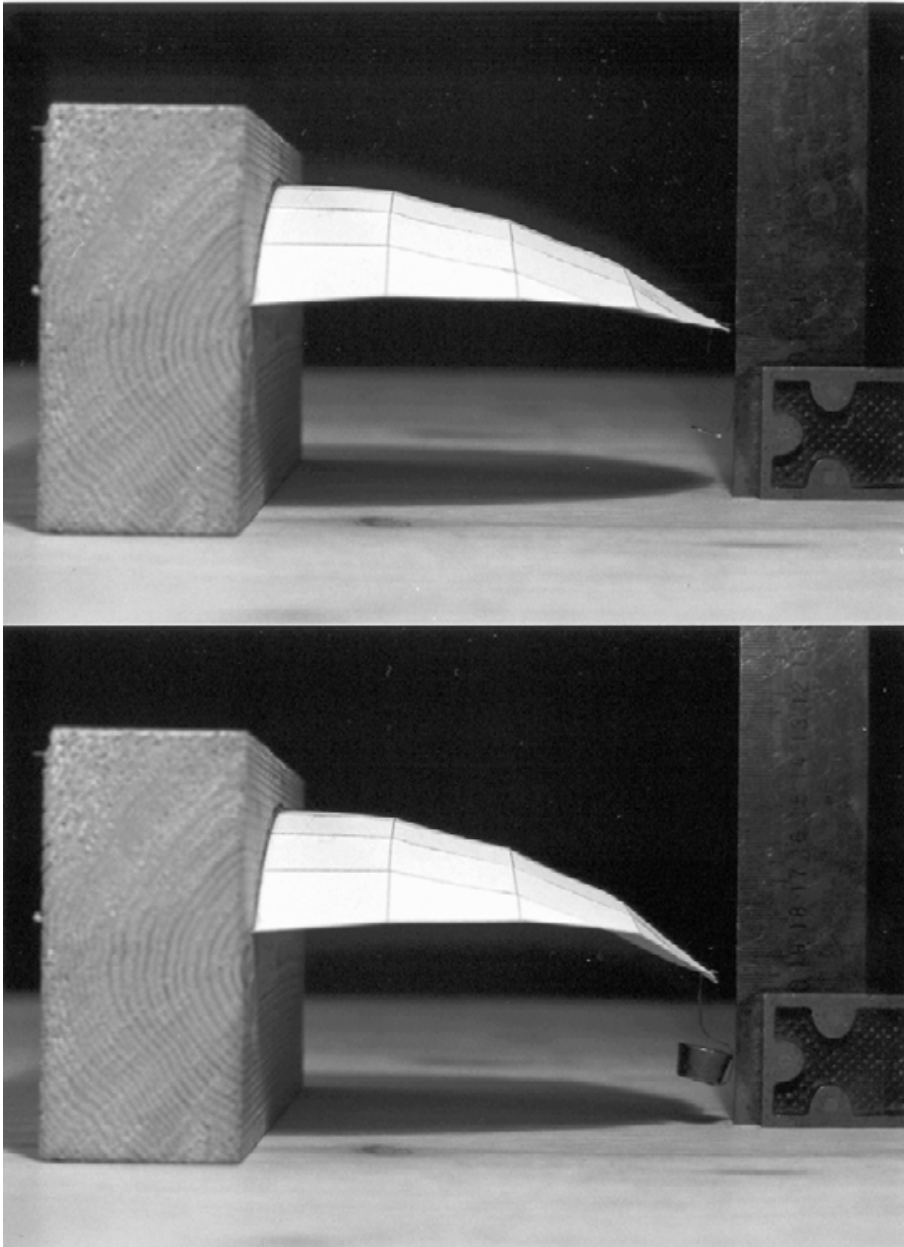


Figur 140. Model f. Negativt krum skal, en hyperbolsk paraboloid, med parabelformet grundplan. Stivhedsfaktor: 0,1.

Alle modellerne er sammenlignelige med hensyn til overdækket areal, konstruktionshøjde, største hovedkrumning, understøtninger, materiale og godstykkelse.

Modellerne blev belastet med henholdsvis 5 og 10 gram. Belastningen blev påført 5mm fra yderste punkt  $(2, 0, 0)$  og nedbøjningen i yderste punkt målt med indtil 0,1 mm nøjagtighed (figur 141, næste side).

Ved belastningen fremkommer først en umiddelbar elastisk nedbøjning, derefter sker en viskoelastisk krybning, svarende til et Kelvin materiale. Denne krybning ophører i de fleste tilfælde kort tid efter. Det samme forløb optræder ved aflastning og efter få minutter er modellen tilbage i den oprindelige stilling. I de efterfølgende beregninger er kun gennemsnittet af den elastiske nedbøjning ved henholdsvis belastning og aflastning medtaget.



Figur 141. Belastningsforsøg. Model a henholdsvis ubelastet og belastet nedad med 10 gram.

### Resultater

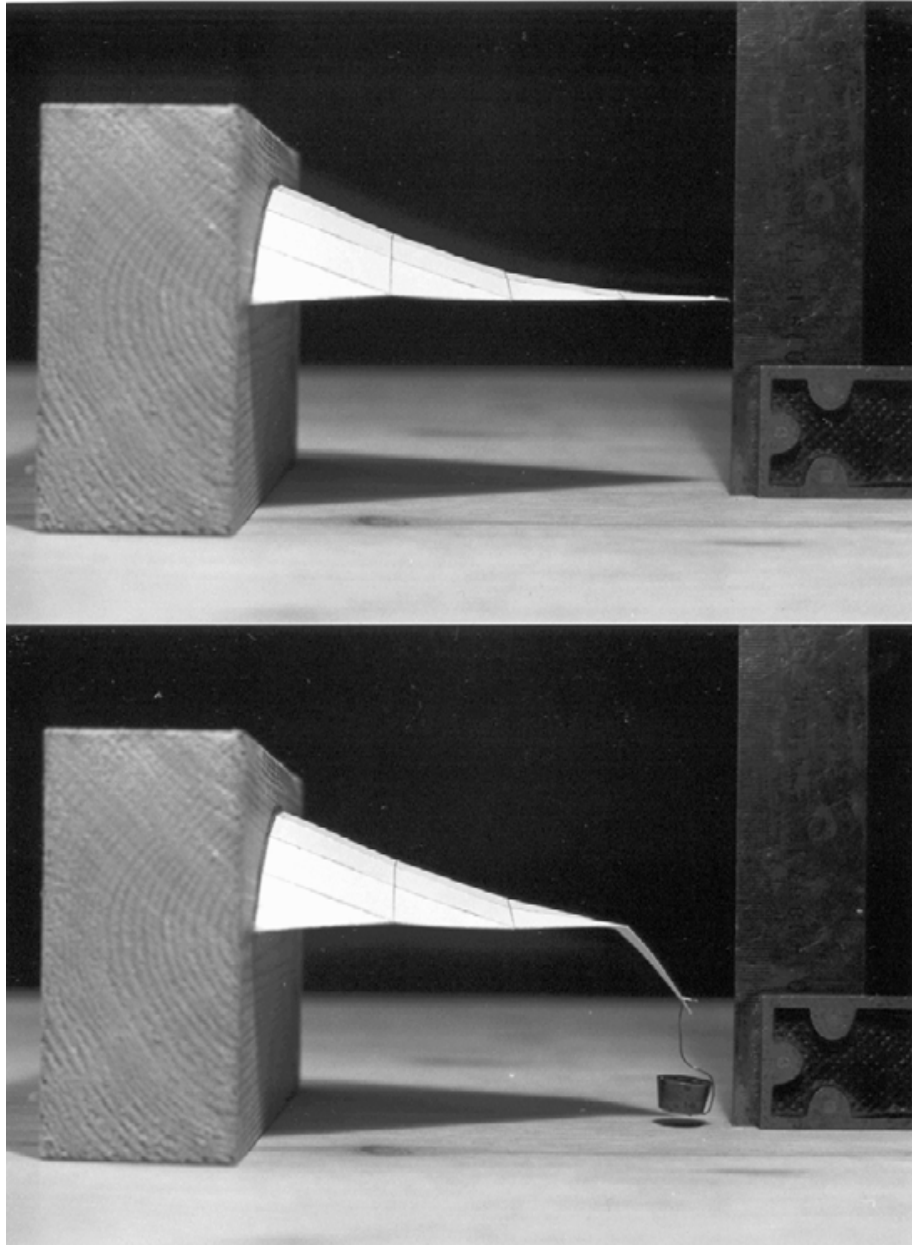
Hovedresultaterne er anført i nedenstående tabel, der viser modellernes gennemsnitlige eftergivelse (tabel 1), målingerne fremgår af *Bilag 6*.

Model	a	b	c1	c2	c3	d	e	f
Eftergivelse ved last								
nedad (mm/g)	0,63	0,01	0,05	0,60	0,12	0,03	0,20	0,10
opad (mm/g)	0,22	0,00	0,05	0,20	0,10	0,02	0,20	0,04
gennemsnit (mm/g)	0,42	0,005	0,05	0,40	0,11	0,02	0,20	0,07

Tabel 1. Modellernes eftergivelse defineret som målt nedbøjning/belastning og beregnet som et gennemsnit af belastningsforsøgene med henholdsvis 5 og 10 gram.

Der er følgende at bemærke til værdierne:

- Modellernes og målingernes præcision taget i betragtning, er det kun relevant at regne med et betydende ciffer.
- I model **c2** resulterer krybningen ved belastning nedad med 5g, efter nogle sekunder i, at der sker bøjning i et snit nær den yderste del som i (figur 142). Ses der bort fra dette, er **c2** cirka 1/2 så stiv som model **c3**.
- I model **d** sker deformationen primært i den yderste cm af spidsen. I dette område er modellen mindre præcist formet og desuden reduceres snittets konstruktionshøjde af den måde lasten angriber på.
- I model **e** resulterer krybningen ved belastning nedad ved 10g efter nogle sekunder i at der sker bøjning i det yderste fjerdedelssnit (figur 142).
- I model **f** optræder der øjeblikkeligt bøjning ved belastning nedad med 10g, kun resultatet for 5g er derfor medregnet



Figur 142. I model **c2**, **e** (vist her, henholdsvis ubelastet og belastet nedad med 10 gram) og **f** optræder der bøjning ved en belastning på henholdsvis 5 og 10 gram.

Rangeres skallerne efter stivhed - overfor en lodret belastning nær det yderste punkt - fremkommer følgende rækkefølge, hvor skal **b** er den stiveste (tabel 2).

	Skal	Stivhedsfaktor	Rette rande	Krumning
1	<b>b</b>	1	+	$K > 0$
2	<b>d</b>	0,2	+	$K = 0$
3	<b>c1/f</b>	0,1	-/+	$K = /< 0$
4	<b>c3</b>	0,05	-	$K = 0$
5	<b>c2/e</b>	0,025	-/+	$K = /< 0$
6	<b>a</b>	0,01	-	$K > 0$

Tabel 2. Skallerne rangeret efter stivhed. Stivhedsfaktoren angiver den relative stivhed overfor denne belastning; fx er skal **c1** cirka 10 gange stivere end skal **a**.

### Diskussion og konklusion

Der er en faktor 100 i forskel på stivheden af den stiveste skal **b** og den slappeste skal **a**. En så stor forskel gør det sandsynligt, at de konklusioner man kan drage af en sådan enkel undersøgelse også vil holde ved nærmere analyse.

Da **b** er stivere end **d**, og **c1** er stivere end **c2** og **c3**, tyder meget på at en udkraget skals stivhed blandt andet er en funktion af konstruktionshøjden i de kritiske snit. Skal **a** er derfor begunstiget ved denne lastpåvirkning på grund af forløbet af den fri rand, på samme måde som **c1** er begunstiget i forhold til **c2**.

Model **d** synes som nævnt svækket i den yderste del i forhold til den ideelle skal. Det må derfor forventes at mere præcise modeller vil vise at skalflade **d** er stivere, måske lige så stiv som **b**.

Trykker man på modellerne med fingrene, forekommer model **e** stivere end model **c3** og endda stivere end **c1**, så længe der ikke optræder instabilitet i model **e**. Der synes i øvrigt at skulle mindre belastning til at fremkalde instabilitet i model **e** end til de andre modeller. Men specielt virker model **e**, helt ude i spidsen og nær de fri rande, svækket af, at de fri rande ikke er helt rette. Dels krummer de enkelt facetter lags randen og dels ligger facetterne hjørnepunkter ikke helt på linie, hvilket blandt andet betyder at konstruktionshøjden i fjerdelssnittet er blevet for lille.

Model **f** virker ikke så stiv som **e**, svarende til at krumningsmålet for **f** er reduceret til en fjerdedel i forhold til **e**. Når målingerne viser at model **f** er stivere end **e** skyldes det udover hvad der er nævnt ovenfor, at model **f** ligesom **a** er begunstiget af forløbet af den fri rand, der flytter det kritiske snit længere ud.

Umiddelbart kan man således konkludere at skallens form (krumningsmål og forløb af de fri rande) er afgørende for skallens stivhed. Mere præcist viser modellerne at for sammenlignelige udkragede skalflader gælder i prioriteret rækkefølge at:

- For positivt krumme og nul krumme flader er skaller hvis fri rande er rette, langt stivere end skaller med krumme fri rande

- Negativt krumme flader er stivere end nul-krumme flader, der er stivere end positivt krumme flader, når de sidstnævnte fladers fri rande ikke er rette
- En udkraget skals stivhed er desuden en funktion af konstruktionshøjden i de kritiske snit.

## Konklusion

Forsøg med modeller kan anvendes til afklaring af betydende statiske parametre i forbindelse med skalkonstruktioner.

Facetterede modeller af skaller er membranskaller og har de samme stabilitetsegenskaber som de tilsvarende glatte membranskaller. Modeller kan derfor anvendes til at finde nødvendige eller tilstrækkelige understøtningsbetingelser.

Fremstilles modellerne som skalamodeller viser de desuden skallernes stivhedsforhold korrekt, under forudsætning af at både modeller og skaller konstrueres i elastiske materialer.

Forsøg med modeller viser tydeligt forskelle i forskellige skalformers stivhed. Modellerne viser således at skallers stivhed er afhængig af skallens form, primært krumning, understøtningsforhold og de fri randes form.

Da den stiveste af to modeller, der er fremstillet af det samme elastiske materiale og i samme målestoksforhold, er den mest materialeøkonomiske, når skallen alene betragtes, er modeller velegnede til at vurdere sammenlignelige skallers materialeøkonomi.

Modeller viser sig ligesom skaller i øvrigt at være følsomme over den geometriske præcision de er bygget med. Forsøg med modeller, der er sammenlignelige også med hensyn til præcision, kan derfor indikere hvilke former der er særligt følsomme overfor instabilitet.

Modeller har i øvrigt den fordel i forhold til gitterberegninger, at man blot ved at tage dem i hånden hurtigt kan vurdere skallens styrke og stivhed.

### *Fremtidsmuligheder*

Modeller kan anvendes både i undervisnings- og forskningsøjemed. For eksempel er det relativt let at etablere en eksempelsamling med de grundliggende skalkonfigurationer, der kan anvendes til undervisning og inspiration af både arkitekt- og ingeniørstuderende. Fremstilling af skalamodeller vil kunne indgå som et praktisk element i undervisningen i bærende konstruktioner ligesom modelforsøg vil kunne supplere eventuelle fremtidige undersøgelser af skallers stabilitetsforhold baseret på stringermetoden.

# Gitterberegninger

Da stringersystemet er en statisk model af skallen, kan det principielt anvendes til at beregne snitkræfterne i skallen ved en given belastning og dermed til at dimensionere skallen.

Stringernes placering kan være mere eller mindre hensigtsmæssig i forhold til den pågældende belastning, men kræfterne i stringersystemet vil i alle tilfælde udgøre en statisk tilladelig kraftfordeling. En sådan beregning vil således angive en nedreværdiløsning, hvis udbøjningerne ikke er for store. Hvis udbøjningerne er så store at det ændrer væsentligt på systemets geometri, vil de nemlig også ændre på kraftfordelingen. Kun en beregning på det deformede system, vil da give en pålidelig nedreværdiløsning.

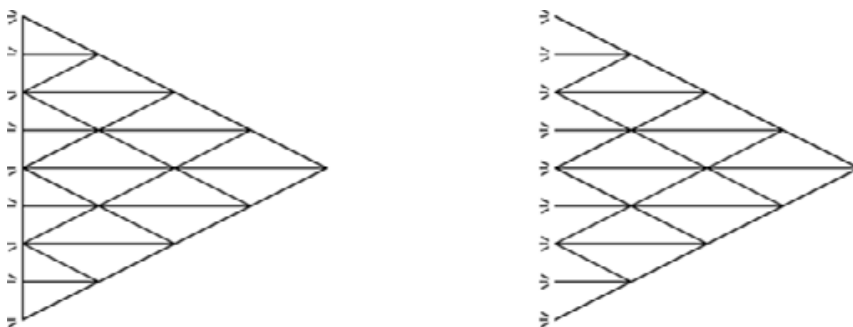
I skitseringsfasen hvor hensigten er at vurdere godheden af forskellige løsninger kan gitterberegninger af stringersystemer anvendes til at vurdere stivheden af sammenlignelige skaller med sammenlignelige stringersystemer. Regnes der på det udeformede system kan udbøjningerne dog ikke umiddelbart betragtes som nedreværdiløsninger, det vil sige som de maksimale udbøjninger ved den pågældende belastning.

## Eksempel

I dette eksempel er der gennemført gitterberegninger på de otte udkragede skaller, der blev undersøgt som modeller i det sidste afsnit af foregående kapitel.

Skallerne **a**, **b**, **c1**, **c2**, **c3**, **d**, **e** og **f** er indbyrdes sammenlignelige med hensyn til overdækket areal, konstruktionshøjde, største hovedkrumning og understøtninger.

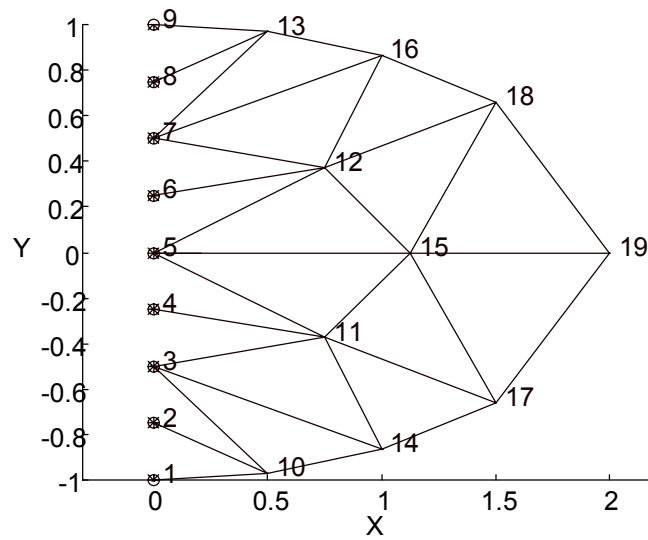
Stringersystemerne på skallerne **a**, **b**, **c1**, **c2**, **c3**, **e** og **f** er alle opbygget som stringersystem E, se (figur 96) i *Stringermethoden*. I stedet for at have en randstringer langs den dobbeltunderstøttede rand understøttes randknuderne dog fuldstændigt, det vil sige i tre retninger (figur 143).



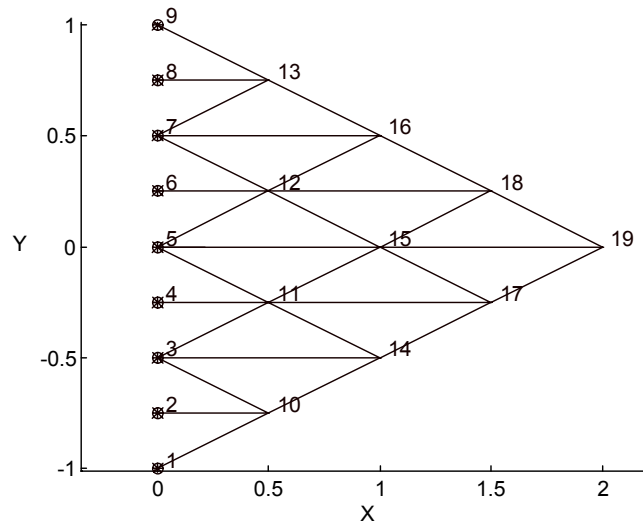
Figur 143. Stringersystem E. Til venstre den grundlæggende topologi. Til højre den, der her er anvendt til stringersystemet på skallerne **a**, **b**, **c1**, **c2**, **c3**, **e** og **f**. Knuderne langs randen er fuldstændigt understøttet.



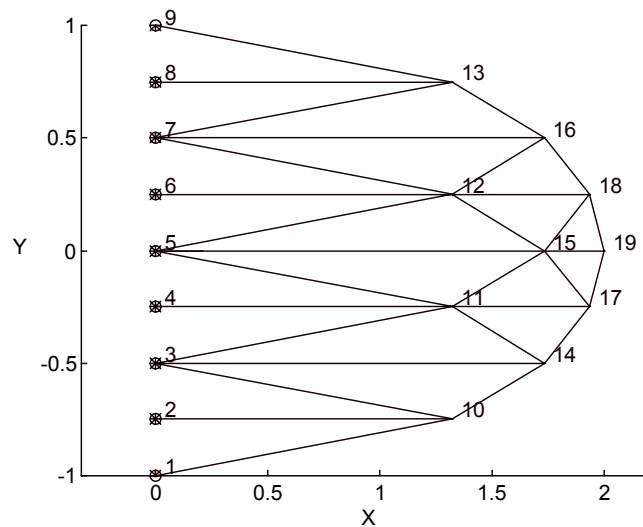
Der er 19 knuder, hvoraf de 9 er fuldstændig understøttet langs den rand, der ligger i den lodrette yz-plan. Stringersystemernes geometri fremgår af de følgende figurer, idet alle knuder ligger på fladen (figur 144 – 151)



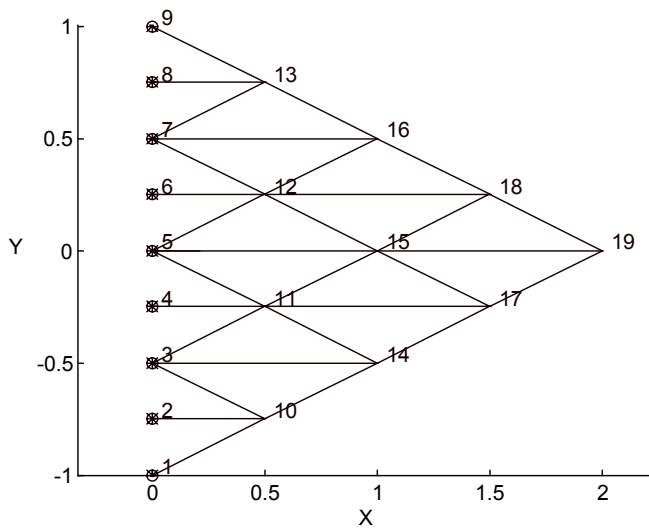
Figur 144. Stringersystem med knudenumre på skal a.



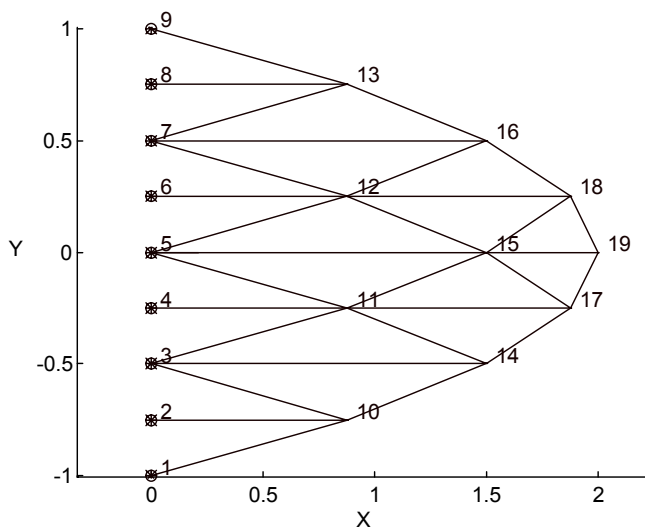
Figur 145. Stringersystem med knudenumre på skal b.



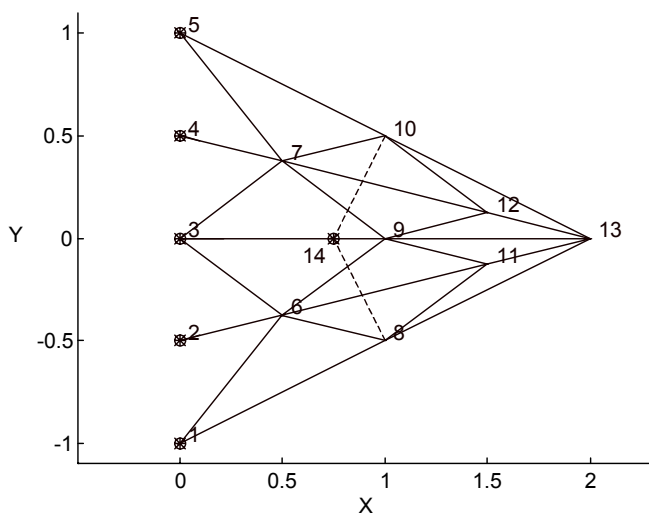
Figur 146. Stringersystem med knudenumre på skal c1.



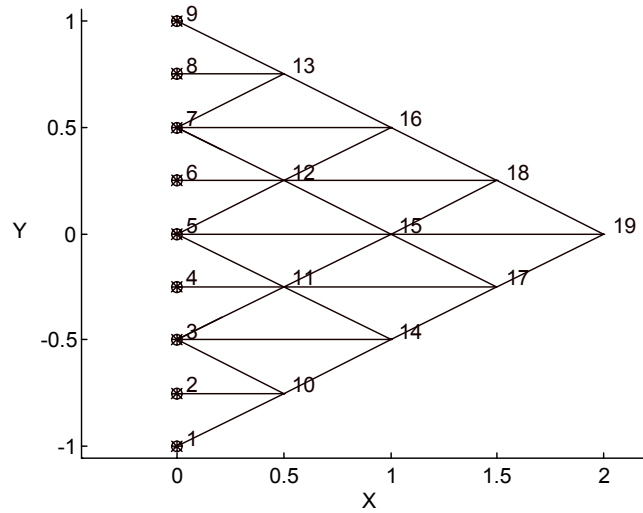
Figur 147. Stringersystem med knudenumre på skal **c2**.



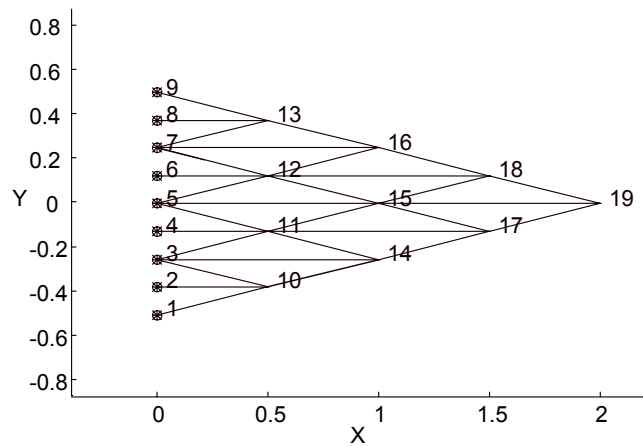
Figur 148. Stringersystem med knudenumre på skal **c3**.



Figur 149. Stringersystem med knudenumre på skal **d**. Det ene stringersæt følger frembringerne og samles i knude 13, der ligger i keglefladens spids. Hjælpstængerne 8-14 og 10-14, der er vist stiplede, fungerer som en afstivning af de rette randen. De ligger i xy-planen og fastholder knude 8 og 10 vinkelret på randen.



Figur 150. Stringersystem med knudenumre på skal e. De to stringersæt, der ligger på skrå, følger HP-fladens retlinede asymptotekurver.



Figur 151. Stringersystem med knudenumre på skal f. De to stringersæt, der ligger på skrå, følger HP-fladens retlinede asymptotekurver

Det ses at på skallerne **b**, **c1**, **c2**, **c3** og **e** er det ene stringersæt lagt, så det i xy-planen ligger parallelt med x-aksen og de to andre stringersæt er lagt, så de i xy-planen følger randen.

Stringersystemet på skal **d** er specielt. Det ene stringersæt følger frembringerne. De samles alle i knude 13, der ligger i keglefladens spids, som er et singularært punkt på fladen.

På skal **e** og **f** er stringernes placering på nær tæthed givet, idet de to stringersæt skal ligge langs asymptotekurverne. Forskellig tæthed vil have indflydelse på stangkræfterne, men ikke på snitkræfternes størrelse

#### Resultaterne

Alle stænger har fået tildelt samme tværsnit og elasticitet, og systemerne er påført den samme belastning nedad i det yderste punkt, henholdsvis knude 19 og 13. Stangkræfter og nedbøjningerne i y og z retning er beregnet.

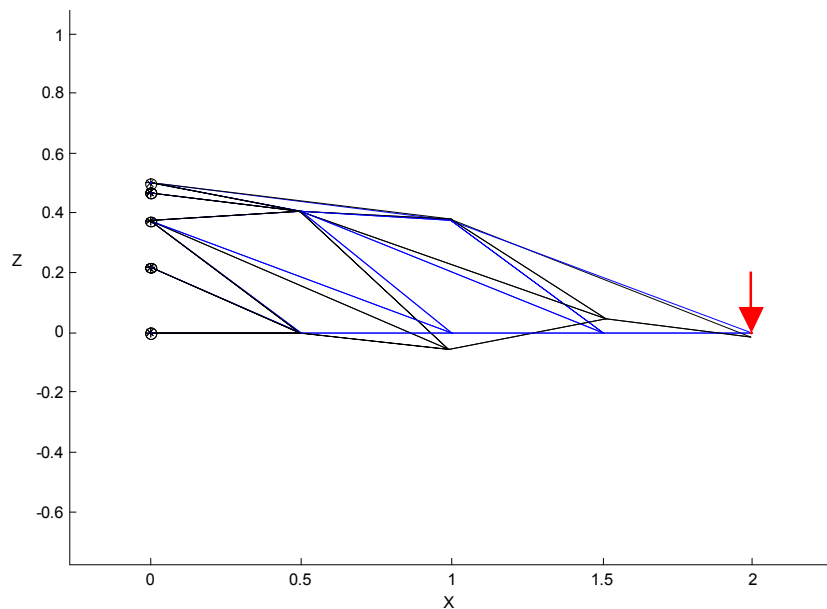
Hovedresultaterne er anført nedenfor i (tabel 3), de øvrige resultater fremgår af *Bilag 5*.

System	a	b	c1	c2	c3	d	e	f
Numerisk største stangkraft	0,65	-0,21	-0,32	-0,32	-0,32	0,025	0,092	0,34
Numerisk største nedbøjning*	8,2	1,4	-0,49	-0,45	-0,45	-0,005	-0,043	-0,56
Nedbøjning i spids*	-1,7	-0,11	-0,49	-0,45	-0,45	-0,005	-0,043	-0,56

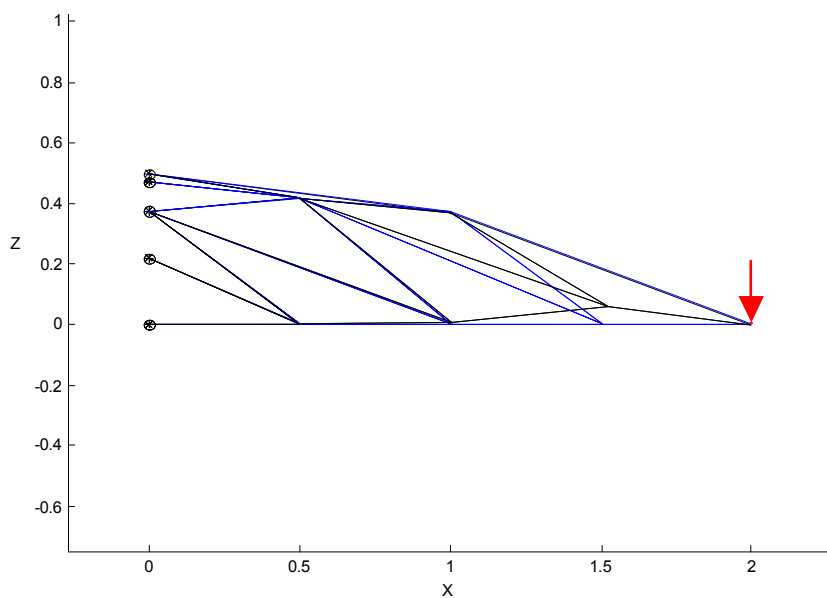
\* i z-retningen

Tabel 3. Systemernes nedbøjning ved samme belastning.

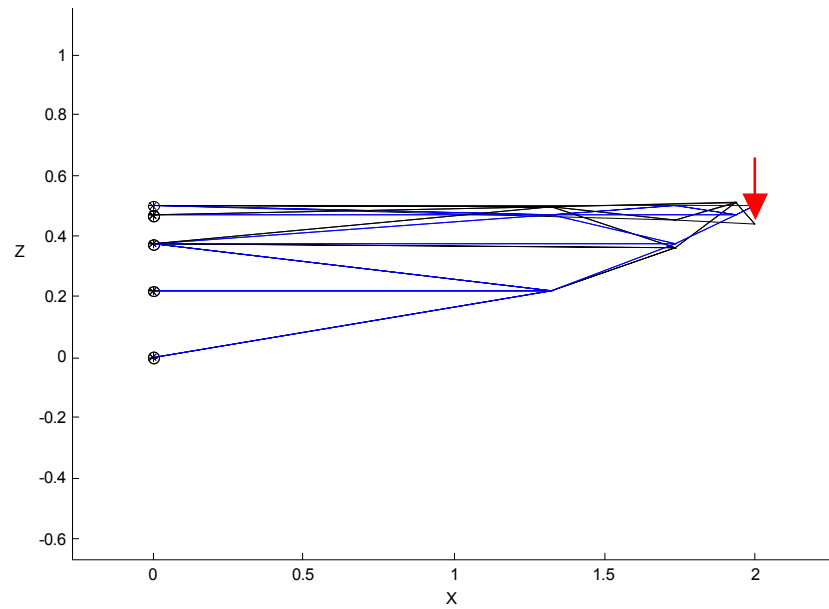
Nedbøjningsfigurerne er vist stærkt overdrevne i (figur 152 – 159).



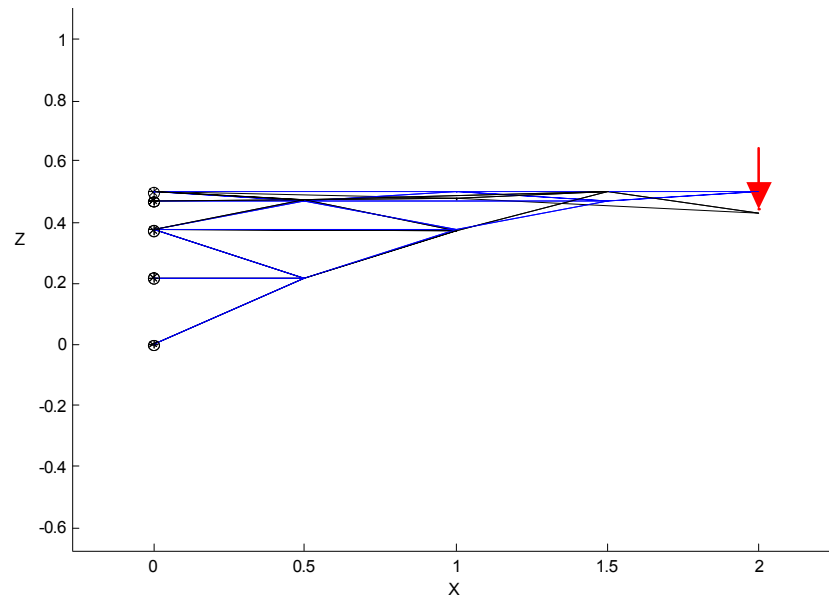
Figur 152. Nedbøjninger i system a. Det udeformerede system er vist stipt. Bemærk at konstruktionshøjden i snittet  $x=1,5$  reduceres.



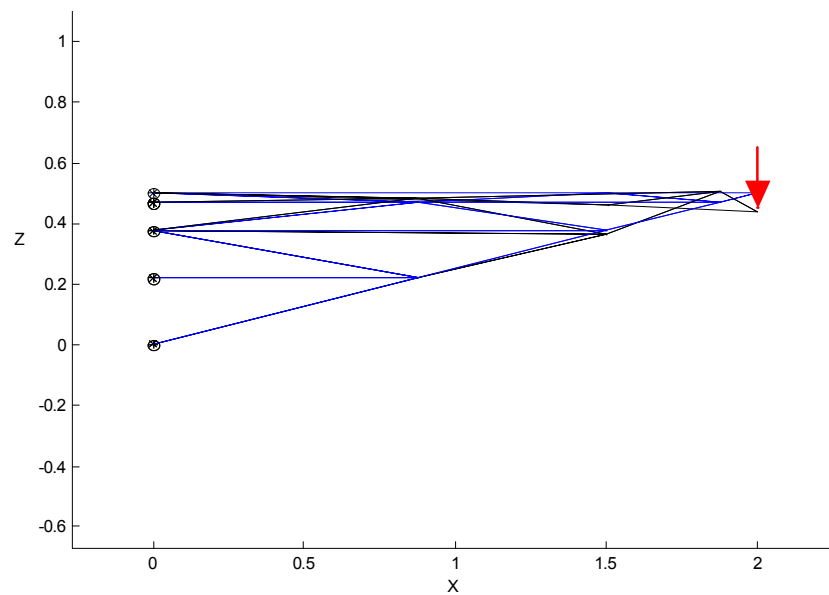
Figur 153. Nedbøjninger i system b. Det udeformerede system er vist stipt.



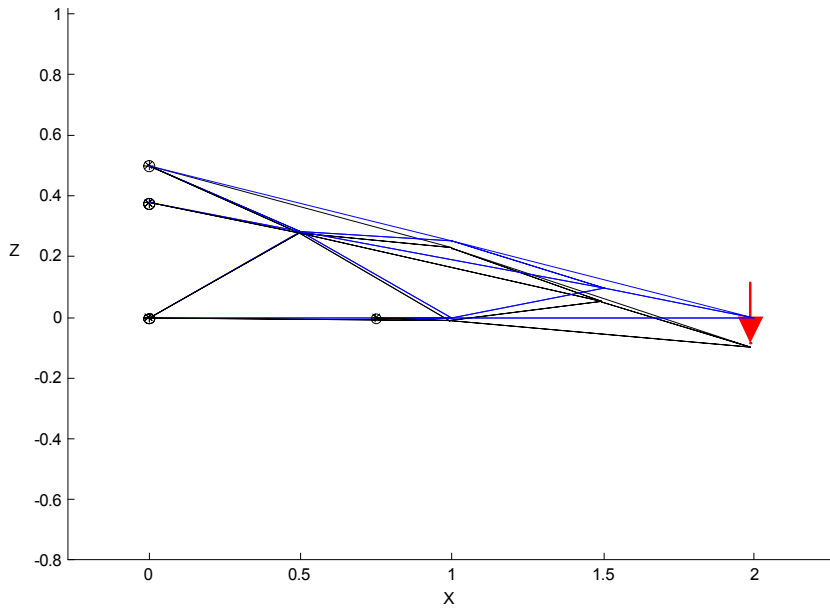
Figur 154. Nedbøjninger i system **c1**. Det udeformerede system er vist stipt.



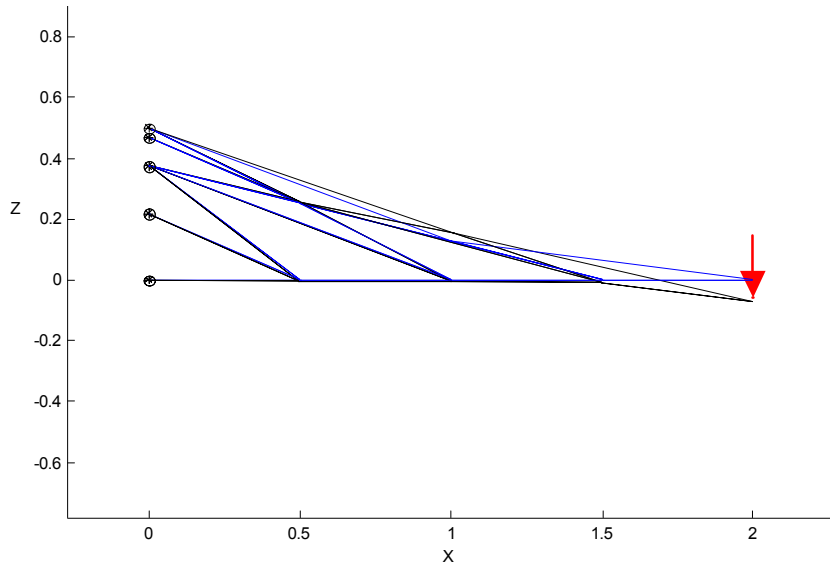
Figur 155. Nedbøjninger i system **c2**. Det udeformerede system er vist stipt.



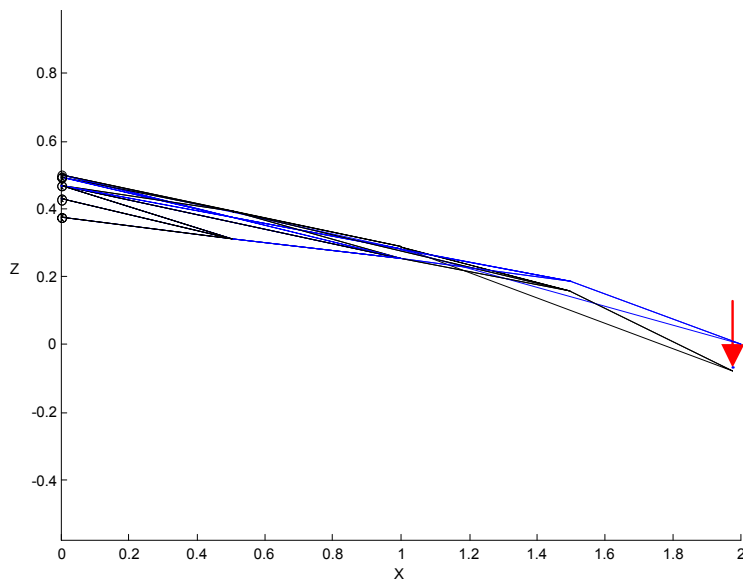
Figur 156. Nedbøjninger i system **c3**. Det udeformerede system er vist stipt.



Figur 157. Nedbøjninger i system d. Det udeformerede system er vist stipt.



Figur 158. Nedbøjninger i system e. Det udeformerede system er vist stipt. Bemærk at konstruktionshøjden i snittet  $x=1,5$  er stort set uændret.



Figur 159. Nedbøjninger i system f. Det udeformerede system er vist stipt. Bemærk at konstruktionshøjden i forhold til flade e er reduceret til en fjerdedel.

Der er følgende at bemærke til beregningerne:

- Da stringerplaceringen kan være mere eller minder hensigtsmæssig, er det kun relevant at regne med et betydende ciffer.
- Resultaterne for flade **c** viser sig dog at være stort set uafhængige af stringerplacering.
- Beregningerne er foretaget på de udeformede systemer og udbøjningerne ville således være lige så stor, men modsat rettet, ved en lige så stor opadrettet belastning.
- I system **d** optræder der kun kræfter i stringerne langs frembringerne. Disse ligger i gennemsnit cirka dobbelt så tæt som stringerne i det tilsvarende stringersæt i de øvrige skaller. Nedenfor er der taget hensyn til dette ved at regne med en udbøjning for **d**, der er dobbelt så stor som gitterberegningen viser.
- I skal **f** er krumningsmålet reduceret til en fjerdedel i forhold til skal **e**. Det betyder at konstruktionshøjden i stringersystemet også er reduceret til en fjerdedel. Stangkræfterne i system **f** er derfor næsten fire gange så store og nedbøjningerne op mod seksten gange så store som i system **e**. Af hensyn til sammenligningen med skal **a** er der nedenfor taget hensyn til dette ved at regne med en udbøjning for **f**, der er reduceret til 1/16 af det som gitterberegningen viser.

Rangeres skallerne efter stivhed overfor en lodret belastning i det yderste punkt fremkommer følgende rækkefølge, hvor skal **d** er den stiveste (tabel 4).

	Skal	Stivhedsfaktor	Rette rande	Krumning
1	<b>d</b>	1	+	$K = 0$
2	<b>b</b>	0,1	+	$K > 0$
3	<b>e/f</b>	0,2	+/-	$K < 0$
4	<b>c1/c2/c3</b>	0,02	-	$K = 0$
5	<b>a</b>	0,005	-	$K > 0$

Tabel 4. Skallerne rangeret efter stivhed. Stivhedsfaktoren angiver den relative stivhed overfor den betragtede belastning; fx er skal **e** cirka 10 gange stivere end skal **c1**.

#### *Diskussion og konklusion*

Disse beregninger er gennemført på den udeformede konstruktion. Sammenligner man forholdet mellem de beregnede flytninger af randknuderne med forholdet mellem flytningerne af de tilsvarende punkter på papirmodelerne bemærker man følgende:

- I beregningerne af skal **a** er flytningerne af knuderne 14/16 og 17/18 henholdsvis faktor 5 og 2 gange større end flytningen af knude 19. På modellen er forholdet nærmest omvendt. En nøjere analyse, hvor der tages hensyn deformationerne, må således forventes at vise en forøget stivhed af **a**, selv om den reducerede konstruktionshøjde i snittet  $x=1,5$  jf. (figur 152) vil have den modsatte effekt.
- I beregningerne af skal **b** er flytningerne af knude 17/18 faktor 12 gange større end flytningen af knude 19. På modellen fastholdes knuderne 17/18 af skivevirkningen i det nul-krumme område nær den rette rand. En nøjere analyse, baseret på fx andre eller finere stringersystemer vil formentlig vise, at **b** er væsentligt stivere.
- I beregningerne er flytningerne af knuderne 17/18 i **c1** og **c3** henholdsvis faktor 2 og 1,5 større end i **c2**. Da systemet vil yde modstand mod disse flytninger vil en nøjere analyse vise at **c1** og **c3** er stivere end **c2**.

- I både **d** og **e** er flytningerne i henholdsvis knude 13 og 19 væsentligt større end i de øvrige knuder, hvilket svarer til resultaterne for papirmodellerne og skyldes at stringerne ligger optimalt.
- I system **f** udnyttes konstruktionshøjden i de kritiske snit ikke og beregningsresultaterne ligger da også langt fra målingerne på papirmodellen.

Resultaterne af gitterberegninger ses på denne baggrund dels at være afhængige af, om der tages hensyn til systemets deformationer, og dels af stringernes placering.

De specifikke resultater er alligevel så signifikante at det synes rimeligt at drage følgende konklusioner for sammenlignelige udkragede skalflader:

- Negativt krumme flader er stivere end nul-krumme flader, der er stivere end positivt krumme flader
- Hvis de fri rande på positivt krumme og nul krumme flader er rette, øges stivheden væsentligt.
- Formen er afgørende for skalfladens stivhed.

På grund af stringersystemets generelle opbygning vil dette gælde alle lodrette belastninger.

Sammenholder vi resultaterne af gitterberegningerne og vurderingen af disse med resultaterne fra forsøgene med papirmodellerne, når vi frem til følgende rækkefølge og omtrentlige stivhedsfaktorer (tabel 5).

	Skal	Stivhedsfaktor	Rette rande	Krumning
1	<b>b/d</b>	1	+	$K \geq 0$
2	<b>e/f</b>	0,2	+/-	$K < 0$
3	<b>c1/c2/c3</b>	0,05 – 0,02	-	$K = 0$
4	<b>a</b>	0,01	-	$K > 0$

Tabel 5. Skallerne rangeret efter stivhed. Resulterende værdier på grundlag af resultaterne af papirmodelforsøg og gitterberegninger. Stivhedsfaktoren er omtrentlig og angiver den relative stivhed overfor samme lodrette belastning. Skal **e** er fx cirka 20 gange stivere end skal **a**.

Denne rækkefølge underbygger ovennævnte konklusion.

## Konklusion

Gitterberegninger af stringersystemer på sammenlignelige skaller kan anvendes til at vurdere skallernes relative stivhed.

Gitterberegningerne rummer imidlertid nogle usikkerheder på to områder:

- 1 Stringernes placering på positivt krumme og nul-krumme skaller er ikke nødvendigvis optimal i forhold til den betragtede last, hvorfor beregningerne vil vise for store kræfter og nedbøjninger.
- 2 Systemets geometri kan påvirkes så meget af deformationerne at beregningerne vil vise for små kræfter og nedbøjninger.

Beregninger, der tager hensyn til deformationerne, vil reducere sidstnævnte usikkerhed og give pålidelige nedreværdiløsninger. Nedreværdier er imidlertid ikke af så stor interesse når skalkonfigurationernes godhed skal vurderes.

Hvis resultaterne af gitterberegningerne ikke viser tydelige forskelle, bør de derfor suppleres med yderligere undersøgelser, for eksempel modelforsøg med modeller af papir.



### *Fremtidsmuligheder*

Gitterberegninger vil principielt kunne benyttes til at undersøge systemets følsomhed overfor deformationer. I det belastede system flyttes udvalgte knuder ud af tangentplanen langs normalen og hvorefter ændringerne i stangkræfterne beregnes. En sådan undersøgelse vil samtidigt kunne indikere hvor følsomt systemet er overfor geometrisk imperfektion samt eventuelt niveauet for instabilitetslasten.

# Litteraturliste

Almegaard Ohlsen, H. (1988). *Facettering af dobbeltkrumme flader: Et katalog*. København: Kunstakademiets Arkitektskole.

Almegaard Ohlsen, H. (1991). Support conditions for membrane shells. In T. Wester, S. J. Medwadowski, & I. Mogensen (Eds.), *Proceedings of the IASS Symposium 2-6 September 91, Copenhagen, Denmark: Volume 2: Structural form* (pp. 153-159). Copenhagen: Kunstakademiets Forlag Arkitektskolen.

Bauen mit Membranen. (2000). *Detail - Zeitschrift für Architektur + Baudetail*, 40(6).

Billington, D. P. (1982). *Thin shell concrete structures* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.

Calladine, C. R. (1978). Buckminster Fuller's 'Tensegrity' structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames. *International Journal of Solids and Structures*, 14(2), 161-172.

Calladine, C. R. (1983). *Theory of shell structures*. Cambridge: Cambridge University Press.

Csonka, P. (1987). *Theory and practice of membrane shells*. Düsseldorf: VDI Verlag.

Fabricius-Bjerre, F. (1977). *Lærebog i geometri II* (6. udg.). Lyngby: Polyteknisk Forlag.

Feilberg Hansen, K. (1988). *Regulære skivekonstruktioner* (Rapport 189). Lyngby: Danmarks Tekniske Højskole, Institut for Husbygning.

Feilberg Hansen, K. (1991). *Geometrisk modellering til brug i datamat: Bygninger eller bygningsdele beskrevet ved en samling plane elementer* (SBI-rapport 215). Hørsholm: Statens Byggeforskningsinstitut.

Flügge, W. (1973). *Stresses in shells* (2nd ed.). Berlin: Springer.

Hansen, T. (2002). *SAF for Windows: A programme for parametric generation of translation shells* [edb-program]. København: Kunstakademiets Arkitektskole.

Henn, U. (1992). *Zum Werk von Félix Candela: Die Kunst der leichten Schalen*. Köln: Rudolf Müller.

Joedicke, J. (1962). *Schalenbau: Konstruktion und Gestaltung*. Stuttgart: Karl Krämer.

Johansen, K. W. (1938). Bøjningsfri spændingstilstand i skaller. *Bygningsstatistiske Meddelelser*, 62-84.

- Laffaille, B. (1935). Mémoire sur l'étude générales de surfaces gauches minides. *Memoires de Association internationale des ponts et charpentes: Vol. 3* (pp. 295-332). Zurich: Association internationale des ponts et charpentes.
- Lundgren, H. (1949). *Cylindrical shells*. Copenhagen: The Danish Technical Press.
- Morris, N. F. (1996). Shell stability: The long road from theory to practice. *Engineering Structures*, 18(10), 801-806.
- Nielsen, J. (1964). Kræfter i gitterflader. *Nordisk Betong*, (4), 465-484.
- Nielsen, J. (1982). Appolodorus' apsidehvælv. In *Til Poul Kjærgaard* (pp. 102-111). København: Arkitektens Forlag.
- Nielsen, M. P., Rathkjen, A., & Pilegaard Hansen, L. (1973). *Mekanik 1.1: Snitkræfter i plane, statisk bestemte konstruktioner*. København: Den private Ingeniørfond ved Danmarks Tekniske Højskole.
- Ordonez, J. A. F. (1999). *Eduardo Torroja: Engineer*. Madrid: Ediciones Pro-naos.
- Ramm, E., & Schunck, E. (1986). *Heinz Isler: Schalen: Katalog zur Ausstellung*. Stuttgart: Karl Krämer.
- Reitzel, E. (1979). *Fra brud til form: Om minimering og ressourceøkonomi*. Lyngby: Polyteknisk Forlag.
- Robbin, T. (1996). *Engineering a new architecture*. New Haven: Yale University Press.
- Tarnai, T. (1980a). Existence and uniqueness criteria of the membrane state of shells. I. Hyperbolic shells. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 91(1-2), 81-110.
- Tarnai, T. (1980b). Simultaneous static and kinematic indeterminacy of space trusses with cyclic symmetry. *International Journal of Solids and Structures*, 16(4), 347-359.
- Tarnai, T. (1981). Existence and uniqueness of criteria of the membrane state of shells. II. Parabolic shells. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 92(1-2), 67-88.
- Tarnai, T. (1983). Existence and uniqueness of criteria of the membrane state of shells. III. Elliptic shells. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 96(1-4), 59-85.
- Wester, T. (1987). *Dualisme og syntese for kræfter og former*. København: Eget forlag.
- Wester, T., & Feilberg Hansen, K. (1985). *Skive- og gittervirkning i rumlige netværk*. København: Kunstakademiets Arkitektskole, Skivelaboratoriet.

# Summary

## Conceptual design of shell structures

This thesis is describing three methods that can be used in the conceptual design process in order to find a suitable form and appropriate supports for a membrane shell, and the theoretical background for these methods.

From a load bearing point of view, appropriate supports mean two things, namely that they should ensure *spatial stability* (kinematically determinacy) as well as *stiffness* of the shell.

For spatial stability a new method, the *stringer method*, has been found. The stringer method is a geometric method, which uses a space truss, consisting of bars connected with frictionless joints, as a static model of the shell. This space truss is systematically structured as a triangular network consisting of three sets of roughly parallel chains of bars, the so-called stringers<sup>9</sup>.

By observing the directives for the structure of this stringer system, for the placing of the stringers on the surface of the shell, and for the supports, a statically determinate system has been ensured. And then the spatial stability of the shell is also ensured, if the shell is supported as the stringer system is.

The stringer method can describe the connection between the spatial stability and the placing of supports for membrane shell structures of any curvature and edge conditions, and reveals some interesting support conditions which have been overlooked till now:

- Membrane shells with positive (Gaussian) curvature can be spatial stable if the edge is divided into sections, which are alternately free and supported in two directions at every point
- Also cantilevered membrane shells with positive curvature can be spatial stable
- Membrane shells with zero curvature have to be supported in just one direction at any point along straight edges to be spatial stable
- Membrane shells with negative curvature can be spatial stable when supported in just one direction at every point along the edge, if the supports have specific directions
- The direction of the supports does in general not have to lie in the tangent plane of the shell surface.

However, spatial stable shells can be so slack, that they have only a negligible load bearing capacity. The stiffness of the shell turns out to be the decisive property. Therefore two other methods, respectively *experiments on physical models* and *computer analysis on the stringer system*, are described. These methods can be used in the preliminary design stage to evaluate the stiffness of shells.

Models of shell structures composed of plane elements are quite easy to build by way of a computer programme (Feilberg Hansen 1991). They are

---

<sup>9</sup> The conception of a stringer was introduced by Lundgreen (Lundgreen 1949, p.263f) in order to calculate cylindrical concrete shells.

not just usable from an architectural point of view but also from a structural point of view. Generally shells composed of plane elements should be considered as membrane shells. Therefore this type of models can be used to find both necessary and sufficient support conditions for a given membrane shell. When the models are built in scale the stiffness of the model is proportional to the stiffness of the real shell - that is - if both are constructed in elastic materials. By comparing scale models the stiffest form that requires least material can be found.

Computer analysis directly on the stringer system, considered as a space truss, leads in principle to a lower bound solution. But as the placing of the stringers and the deformations of the system have influence on the forces in the system, the results may be uncertain. This means that in the preliminary design phase, this type of calculations should be used to compare nothing but closely related shell forms and stringer systems.

Experiments on eight paper models of cantilevered shells and numerical analysis on their stringer systems have been carried out. Both experiments and calculations show that for comparable cantilevered shells:

- Shells of negative curvature are more rigid than shells of zero curvature.
- Shells of zero curvature are more rigid than shells of positive curvature.
- But if the free edges on shells of positive or zero curvature are straight, their rigidity exceeds rigidity of the shells of negative curvature by large.

These experiments affirm, that the stiffness primarily depends on the curvature of the shell, the placing of the supports and the shape of the free edges.

A prototype constructed of massive plywood elements has been built. It covers 53 m<sup>2</sup> and the net weight is 10 kg/m<sup>2</sup>. The prototype has now been standing for 10 years and has demonstrated that:

- It is possible to build spatial stable and stiff shells based on the methods presented in this work,
- Smaller shells composed of plane elements can be designed so that they are simple to produce and quickly erected.

# Bilag

## Bilag 1 Membranteoriens ligevægtsligninger

For det generelle tilfælde er de tre projektlionsligevægtsligninger for relativt flade skaller, hvor skalfladen kan beregnes ved dens projektlion på xy-planen, følgende:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} + \bar{p}_x &= 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \bar{p}_y &= 0 \\ \bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\bar{p}_z + \bar{p}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}\tag{A1}$$

Spændingsfunktionen  $F$  indføres nu således at de to ligevægtsligninger i xy-planen er identisk opfyldte, hvorved der kun skal løses en differentialligning:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = q\tag{A2}$$

hvor

$$q = -\bar{p}_z + \bar{p}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int \bar{p}_x dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int \bar{p}_y dy.\tag{A3}$$

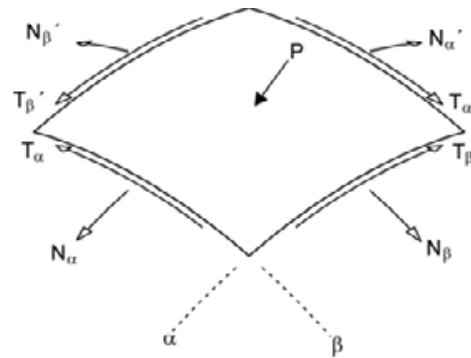
se fx (Johansen 1938), (Flügge 1973) eller (Tanai 1980), idet der her er anvendt Flügge's fortegn og notation.

Forudsætningen for at disse ligninger kan løses er at skalfladen er fire gange differentiabel og at belastningen er to gange differentiabel. Dette betyder i praksis at fladen ikke må have bratte krumningsændringer eller knæk og at lasten ikke brat må ændre niveau eller optræde som linie – eller punktlast. I så tilfælde vil lasten kun kunne optages af bøjningskræfter i skallen.

## Bilag 2 Snitkræfter

### Snitkræfter i membranskal

I membranteorien, se fx (Johansen 1938), deles skallen op i små elementer ved at snitte langs to sæt kurver givet ved parametrene  $\alpha$  og  $\beta$  (figur 2.1).

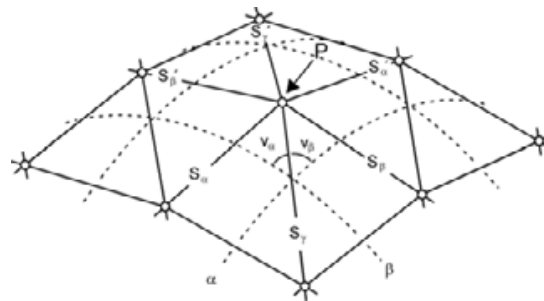


Figur 2.1. Skalelement med tilhørende snitkræfter

Ved passende valg af akser kan antallet af ubekendte reduceres til tre:  $N_{\alpha}$ ,  $N_{\beta}$  og  $T$ . De ligger i skalfladens tangentplan og kan bestemmes ved de tre projektionsligninger.

### Stangkræfter i stringersystem

Stringersystemet kan tilsvarende deles op i små elementer, hvert indeholdende en knude, ved at snitte langs to sæt stringere (figur 2.2).



Figur 2.2. Knude og kræfter i stringersystem

Knuden er statisk bestemt, når stringersystemet er det.

De tre stringerkræfter  $S_{\alpha}$ ,  $S_{\beta}$  og  $S_{\gamma}$  kan bestemmes ved de tre projektionsligninger.

Vi bemærker at stringerkræfterne  $S_{\alpha}$ ,  $S_{\beta}$  og  $S_{\gamma}$  ligger i eller nær skalfladens tangentplan, hvis modelbetingelserne er opfyldt, hvorved facetterne mellem stringerne ligger i eller nær skalfladens tangentplan.

### Sammenfatning

Lægges skallens snitkurver parallelt med to af stringersystemets stringersæt, er stringersystemet placeret så facetterne konvergerer mod skallens tangentplan og gøres elementerne tilstrækkeligt små, så er:

$$N_{\alpha} = S_{\alpha}/ds_{\alpha}, \quad N_{\beta} = S_{\beta}/ds_{\beta} \text{ og}$$

$$T_{\tau} = S_{\tau} \cdot \cos(\nu_{\alpha})/ds_{\alpha}.$$

Det ses heraf at de to ligningssystemer er ens. De to statiske systemer er således ækvivalente og snitkræfterne i skallen kan principielt findes ved at beregne stangkræfterne i stringersystemet.

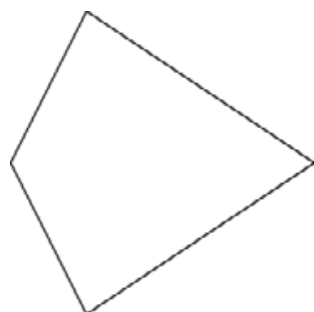


## Bilag 3 Eksempler på anvendelse af stringermetoden

### Eksempel 1

Dette eksempel beskriver hvordan stringermetodens regler anvendes på en positivt krum udkraget skal.

Her er valgt en flade, hvis symmetriske grundplan udgør en firkant med et  $60^\circ$ , to  $90^\circ$  og et  $120^\circ$  hjørne (figur 3.1.1).



Figur 3.1.1. Plan

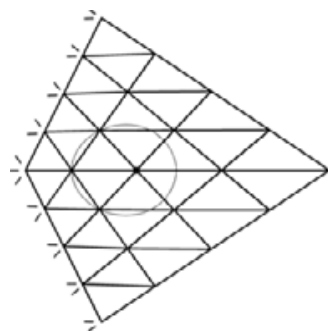


Opstalt

Skalfladen er et udsnit af en omdrejningsflade, hvis akse ligger i grundplånen symmetrilinie, og hvis meridiankurve er en trediegradsparabel. Fladen er således positivt krum.

Vi ønsker at understøtte skallen langs de to korte rande og at lade de to lange være fri.

Der tegnes et A system, hvor det ene stringersæt tegnes langs fladens meridiankurver (som også er det ene sæt krumningskurver for fladen). De to andre tegnes symmetrisk, så de udgår fra en kort rand og ender på den modsatte lange rand (figur 3.1.2).



Figur 3.1.2. Stringersystem. Plan



Opstalt

Vi løber nu reglerne igennem:

- Systemet består af tre sæt stringere der danner et netværk med trekantede masker? Ja!
- Netværket danner en sammenhængende flade, således at alle knuder er forbundet med stringere til mindst to andre knuder? Ja!
- Hver knude i netværket indgår i en stringer fra hvert sæt? Ja!
- Der ligger knuder langs randene. Ja!
- Hver stringer er understøttet i en knude på randen? Ja! På figuren er randknudernes understøtninger vist i forlængelse af de stringere der er understøttet i knuderne!
- Randen er inddelt i afsnit, hvor knuderne er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri? Ja, to dobbeltunderstøttede og to fri randafsnit!

- Ligger hver knudes projektion på en snitplan gennem tre vilkårlige naboknuder inden for fladens snit? Ja, på (figur 3.1.2) er det vist for en enkelt knude i symmetriplanen!
- En dobbeltunderstøtning må ikke ligge i randkurvens oskulationsplan.

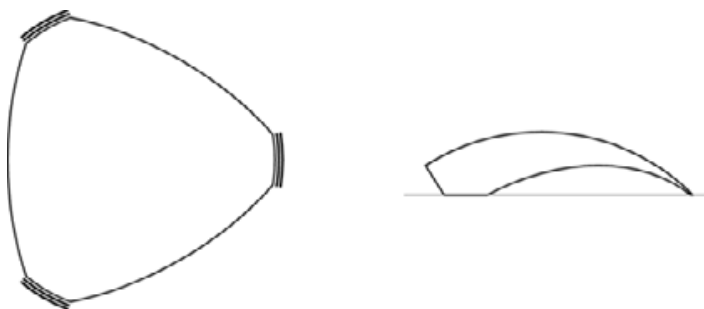
Dobbeltunderstøtningerne må således ikke ligge i randkurvens snitplan.

Når denne sidste regel er fulgt er skallen stabil og modelforsøg, se kapitlet *Modeller*, bekræfter dette. Men modelforsøgene viser også at konstruktionen er temmelig slap og at den næppe er realisabel i større skala, med mindre at man anvender meget stive materialer.

## Eksempel 2

Dette eksempel viser hvordan stringerne kan placeres på en positivt krum skal, hvis rand er opdelt i afsnit, der er skiftevis dobbeltunderstøttede og fri.

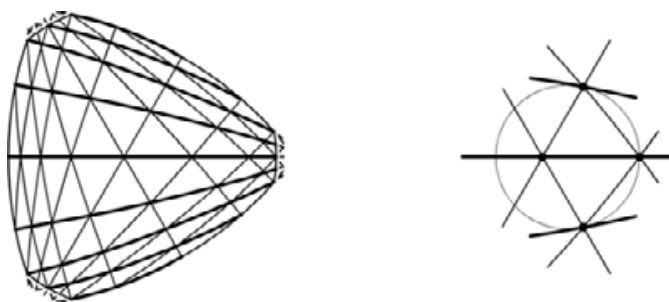
Vi vil undersøge et 1/8 udsnit af en kugleflade, der er understøttet på de tre afskårne hjørner, mens siderne er fri. Skallen har en tre gange spejlsymmetrisk grundplan (figur 3.2.1).



Figur 3.2.1. Plan

Opstalt

Der tegnes et D system, hvor hvert stringersæt tegnes fra et hjørne til den modstående side. Til sidst tegnes der stringere langs siderne (figur 3.2.2).



Figur 3.2.2. Stringersystem. Plan

Udsnit

Det ene stringersæt er trukket op med kraftig streg.

Vi løber nu reglerne igennem:

- Systemet består af tre sæt stringere der danner et netværk med trekantede masker? Ja!
- Netværket danner en sammenhængende flade, således at alle knuder er forbundet med stringere til mindst to andre knuder? Ja!
- Hver knude i netværket indgår i en stringer fra hvert sæt? Ja!
- Der ligger knuder langs randene. Ja!

- Hver stringer er understøttet i en knude på randen? Ja! På figuren er randknudernes understøtninger vist i forlængelse af de stringere der er understøttet i knuderne!
- Randen er inddelt i afsnit, hvor knuderne er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri? Ja! Dobbeltunderstøttede i hjørnerne og fri i øvrigt.

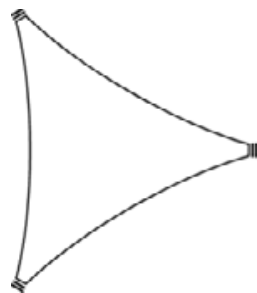
Vi bemærker at dette er et D system.

- Ligger hver knodes projektion på en plan gennem tre vilkårlige naboknuder inden for planens snit i skalfladen? Vi indtegner et snit igennem tre naboknuder til den markerede knude. I dette tilfælde er det elliptiske snit en cirkel og vi ser at knuden ligger indenfor cirklen (figur 3.2.2). Da dette er en kugleflade kan man vise at dette er tilfældet, så længe de indre vinkler i alle facetter er mindre end eller lig  $90^\circ$ . Betingelsen er således opfyldt overalt på fladen!
- En dobbeltunderstøtning må ikke ligge i randkurvens oskulationsplan.

Dobbeltunderstøtningen må således ikke ligge i randkurvens snitplan. Gør den ikke det er skallen stabil og modelforsøg viser at den da også er rimelig stiv.

### Eksempel 3

Vi vil her undersøge stabiliteten af det udsnit af kuglefladen, der bliver tilbage efter at have skåret den i eksempel 2 viste flade med tre cylinderflader. Fladens grundplan er stadig tre gange spejlsymmetrisk (figur 3.3.1).



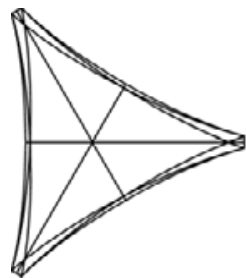
Figur 3.3.1. Plan



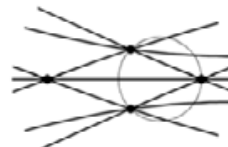
Opstalt

Vi ønsker at understøtte skallen på samme måde, det vil sige på de afskårne hjørner, og at lade siderne være fri.

Stringerne tegnes som i eksempel 2 (figur 3.3.2).



Figur 3.3.2. Stringersystem. Plan



Udsnit

Vi løber nu reglerne igennem:

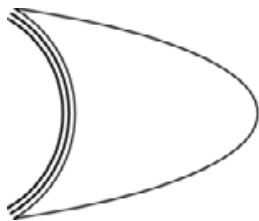
- Systemet består af tre sæt stringere der danner et netværk med trekantede masker? Ja!

- Netværket danner en sammenhængende flade, således at alle knuder er forbundet med stringere til mindst to andre knuder? Ja!
- Hver knude i netværket indgår i en stringer fra hvert sæt? Ja!
- Der ligger knuder langs randene. Ja!
- Hver stringer er understøttet i en knude på randen? Ja! På figuren er randknudernes understøtninger vist i forlængelse af de stringere der er understøttet i knuderne!
- Randen er inddelt i afsnit, hvor knuderne er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri? Ja! Dobbeltunderstøttede i hjørnerne og fri i øvrigt.
- Ligger hver knudes projektion på en plan gennem tre vilkårlige naboknuder inden for planens elliptiske snit i skalfladen? Vi indtegner et snit igennem tre naboknuder til den markerede knude. Snittet er stadig cirkulært, men nu ser vi at knuden ligger udenfor cirklen (figur 3.3.2). Betingelsen er således ikke opfyldt der hvor en indre vinkel i facetterne er større end  $90^\circ$ , det vil sige nær understøtningerne. I disse områder er skallen ikke stabil i membrantilstanden, der optræder bøjning i skallen.

Denne skal er altså ikke en ren membranskal. Heinz Isler har konstrueret en række lignende skaller og har der forøget skaltykkelsen stærkt nær understøtningerne, således at bøjning vil kunne optages i disse områder, se (Ramm 1989, p. 61- 65).

#### Eksempel 4

Dette eksempel viser hvordan stringermetoden kan anvendes på en udkraget nul-krum skal. Skalfladen er et udsnit af en cylinderskal over en buvinkel på  $120^\circ$ , der er skråt afskåret i begge ender (figur 3.4.1).



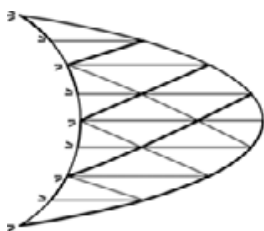
Figur 3.4.1. Plan



Opstalt

Randen tænkes dobbeltunderstøttet langs det snit, der ligger med en  $45^\circ$  vinkel på cylinderaksen, og fri langs det andet skrå snit.

Der tegnes et E system, hvor det ene stringersæt tegnes langs frembringerne og de to andre tegnes symmetrisk herom parallelt med de fri rande (figur 3.4.2).



Figur 3.4.2. Stringersystem. Plan



Opstalt

Det ene stringersæt er trukket op med kraftig streg.

Vi løber nu reglerne igennem:

- Systemet består af tre sæt stringere der danner et netværk med trekantede masker? Ja!
  - Netværket danner en sammenhængende flade, således at alle knuder er forbundet med stringere til mindst to andre knuder? Ja, det sidste er tilfældet for de to yderste knuder på den understøttede rand!
  - Hver knude i netværket fastholdes af en stringer fra hvert sæt? Ja!
  - Der ligger knuder langs randene. Ja!
  - Hver stringer er understøttet i en knude på randen? Ja! På figuren er randknudernes understøtninger vist i forlængelse af de stringere der er understøttet i knuderne!
  - Randen er inddelt i afsnit, hvor knuderne er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri? Ja, et dobbeltunderstøttet og et frit randafsnit!
- 
- Det ene stringersæt placeres langs frembringerne? Ja, de rette stringere!
  - De to andre stringersæt understøttes på hver sin side af frembringerne? Ja, det ene stringersæt er vist optrukket!
- 
- En dobbeltunderstøtning må ikke ligge i randkurvens oskulationsplan.

Dobbeltunderstøtningen må således ikke ligge i randkurvens snitplan, men kunne fx være en anden stabilt understøttet lodret cylinderskal.

Når denne sidste regel er fulgt er skallen stabil. Modeller viser at den også er rimelig stiv, se kapitlet *Modeller*. Skaltypen kendes i øvrigt fra blandt andet kasketskygge.

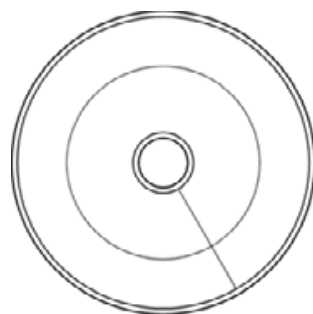
### Eksempel 5

Vi vil i dette eksempel se på nogle understøtningsmuligheder for en dobbelt-sammenhængende negativt krum skalflade.

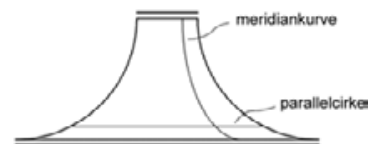
Vi betragter en negativt krum omdrejningsflade, hvis meridiankurve er en kvartcirkel og hvis randkurver er parallelcirkler. Fladens nederste rand er da en parallelcirkel, der ligger i fladens tangentplan.

Da fladen langs hele den nederste rand har vandret tangentplan og en membranflade kun kan overføre kræfter i fladens tangentplan, kan der ikke overføres lodret last langs nederste rand. Da en dobbeltunderstøtning desuden ikke må ligge i randkurvens oskulationsplan, da randknuderne i forvejen fastholdes en gang af randstringeren i denne plan, kan den nederste rand ikke umiddelbart dobbeltunderstøttes.

Vi tager derfor i første omgang udgangspunkt i at begge rande enkeltunderstøttes (figur 3.5.1).

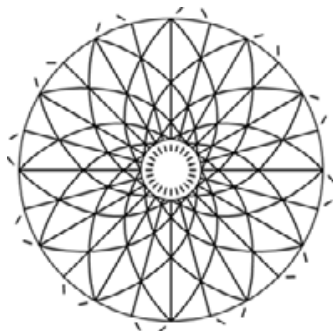


Figur 3.5.1. Plan

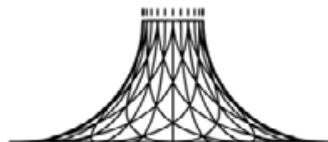


Opstalt

Der tegnes et G system, hvor de to stringersæt tegnes langs asymptotekurverne og det tredje tegnes langs meridiankurverne. Asymptotekurverne kan i planen skitsere som logaritmiske spiraler, der går fra den indre (øverste) til den ydre (nederste) rand. Da forholdet mellem krumningerne i meridianretningen og i parallelcirkelretningen er cirka 1:1, skærer asymptotekurverne den nederste rand under ca.  $45^\circ$ , (figur 3.5.2).



Figur 3.5.2. Stringersystem. Plan



Opstalt

Vi løber nu reglerne igennem:

- Systemet består af tre sæt stringere der danner et netværk med trekantede masker? Ja!
- Netværket danner en sammenhængende flade, således at alle knuder er forbundet med stringere til mindst to andre knuder? Ja!
- Hver knude i netværket indgår i en stringer fra hvert sæt? Ja!
- Der ligger knuder langs randene. Ja!
- Hver stringer er understøttet i en knude på randen? Ja! På figuren er randknudernes understøtninger vist i forlængelse af de stringere der er understøttet i knuderne.
- Randen er inddelt i afsnit, hvor knuderne er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri? Ja, begge rande er enkeltunderstøttet!
- To stringersæt ligger langs asymptotekurverne? Ja!

Det tredje stringersæt er placeret langs det ene sæt krumningskurver, nemlig langs meridiankurverne.

Vi har et G system, som er stabilt hvis understøtningerne placeres så:

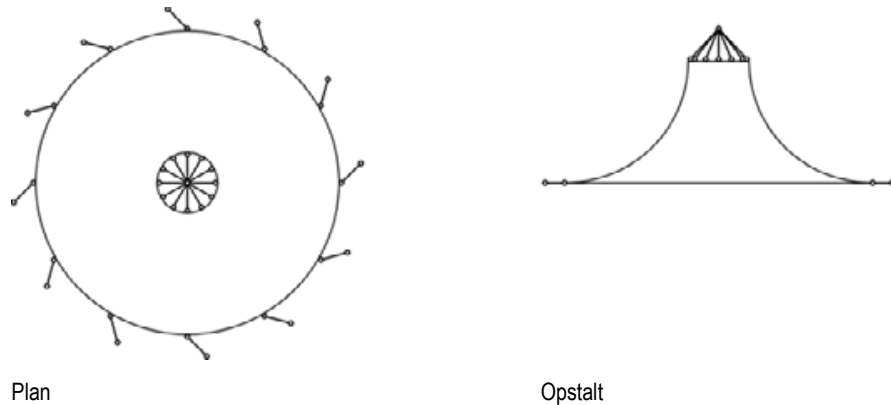
- 1 De to sæt stringere langs asymptotekurverne er understøttet i tangentplanen som et stabilt todimensionalt system.
- 2 Det tredje stringersæt er understøttet således at ingen af understøtningerne ligger i tangentplanen.

Da skal delsystemet langs asymptotekurverne enkeltunderstøttes langs den ene rand og det tredje stringersæt langs den anden rand.

Vi ser her på to løsninger:

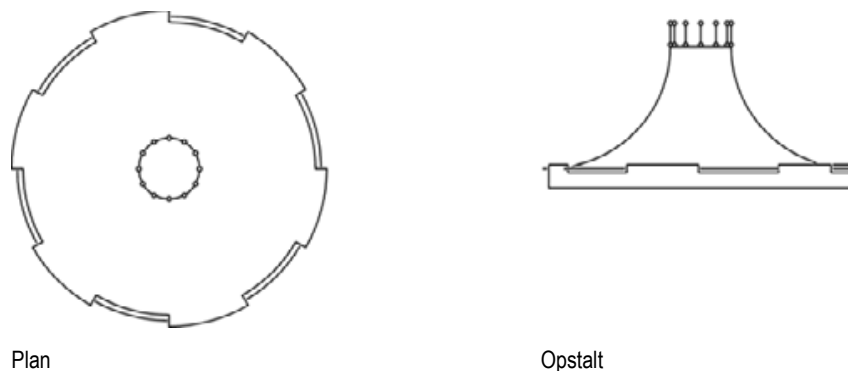
Det ene stringersæt langs asymptotekurverne understøttes i egen retning langs nederste rand. Da randstringeren danner en ring i tangentplanen, som nu hele vejen rundt er enkeltunderstøttet under en konstant vinkel i denne plan, er den fastholdt i tangentplanen jf. (figur 120) i *Stringermethoden*. De to stringersæt langs asymptotekurverne kan derfor regnes stabilt understøttet i tangentplanen. Enkeltunderstøtningerne langs den øverste rand af det tredje stringersæt må da blot ikke ligge i tangentplanen for at skallen er stabil. Men

de må heller ikke alle ligge vandret, for så kan lodret last ikke optages (figur 3.5.3).



Figur 3.5.3. Nederste rand enkeltunderstøttes i tangentplanen således at den er fastholdt i tangentplanen ved at et stringersæt langs asymptotekurverne understøttes i egen retning. Enkeltunderstøtningerne langs øverste rand skal både have en komponent i tangentretningen og i fladens normalretning.

Stringerne langs meridiankurverne understøttes langs den øverste rand i tangentplanen og vinkelret på randen, dvs. i randens normalretning. Stringerne langs asymptotekurverne understøttes langs den nederste rand. Denne rand kan betragtes som fastholdt i normalretningen af stringerne langs meridiankurverne og skal da enkeltunderstøttes så den er fastholdt tangentielt til randen og i tangentplanen, fx i randens forskydningsretning (figur 3.5.4).



Figur 3.5.4. Stringersættet langs meridiankurverne understøttes lodret langs øverste rand, dvs. i randens normalretning. Den nederste rand enkeltunderstøttes i forskydningsretningen med en fortanding.

#### Derved

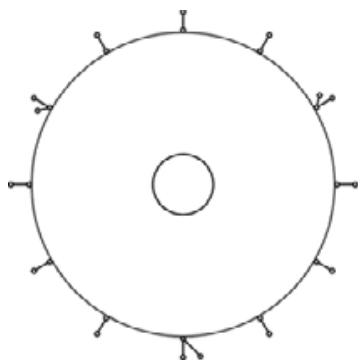
- understøttes alle stringere i tangentplanen og punkt 2 er ikke opfyldt
- understøttes den nederste rand spejlsymmetrisk

Der er således risiko for ustabilitet. Stabiliteten må eftervises enten ved en gitterberegning af stringersystemet eller ved modelforsøg.

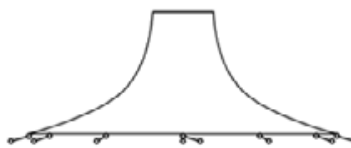
Vi betragter nu den samme flade, men flytter skallens nederste randkurve lidt op på fladen. Da falder randkurvens oskulationsplan ikke sammen med tangentplanen og nederste rand kan derfor optage lodret last. Dette åbner mulighed for nogle flere løsninger og vi undersøger følgende:

Skallen tænkes understøttet i tangentplanen og vinkelret på randen langs den nederste rand og i randens plan langs den øverste rand. Understøtningen af den øverste rand kan tænkes udformet som et plant gitter, der er fastholdt i planen med tre understøtninger.

Erstatter vi dette gitter med en skive og flytter de tre understøtninger til den nederste rand, har vi fået en enkeltunderstøttet enkeltsammenhængende flade, der er sammensat af en negativt krum flade og en plan skive. Eventuelt kan skiven erstattes med en ringbjælke langs øverste rand (figur 3.5.5).



Plan

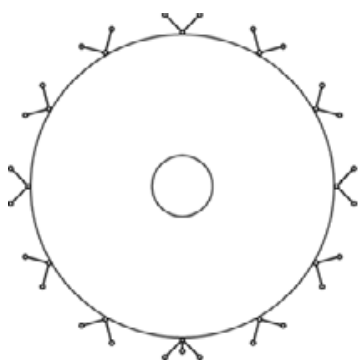


Opstalt

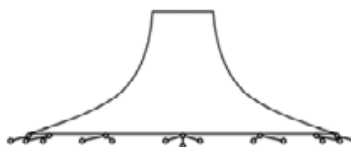
Figur 3.5.5. Nederste rand understøttes i meridianretningen og yderligere tre retninger, så fladen er fastholdt som stift legeme. Øverste rand er forstærket med en ringbjælke, der er bøjningsstiv i eget plan.

Ønskes skallen dobbeltunderstøttet langs den ene rand har vi et F system, med en ikke-successivt opbygget randstringer.

Understøttes den nederste rand i begge asymptoteretninger, er den dobbeltunderstøttet i tangentplanen, der skærer randkurvens oskulationsplan, og dermed er randen lokalt stabil. Men da delsystemet bestående af randstringer og understøtninger, er spejlsymmetrisk, må det forventes at være ustabil. Derfor tilføjes en understøtning, hvorved randsystemet bliver stabilt, men også en gang statisk ubestemt (figur 3.5.6).



Plan



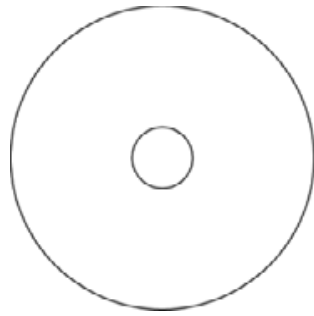
Opstalt

Figur 3.5.6. Nederste rand understøttes i begge asymptoteretninger, svarende til en dobbeltunderstøtning i tangentplanen. Da systemet er spejlsymmetrisk tilføjes en understøtning i en knude.

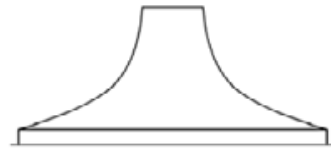
Eventuelt kan der fjernes en understøtning fra en anden randknude, hvorved randsystemet bliver statisk bestemt.

Dobbeltunderstøtningen kan alternativt udformes som en cylinderskal. Da er randen, betragtet som en del af cylinderskallen, fuldstændig fastholdt og systemet er stabilt (figur 3.5.7).





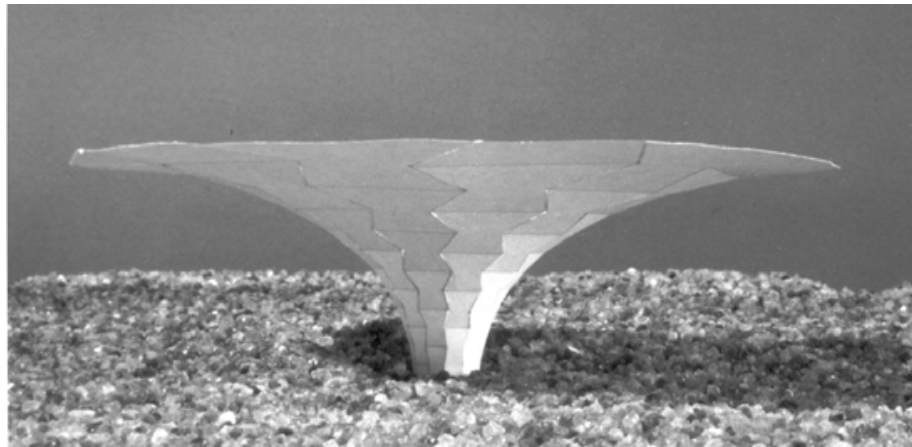
Plan



Opstalt

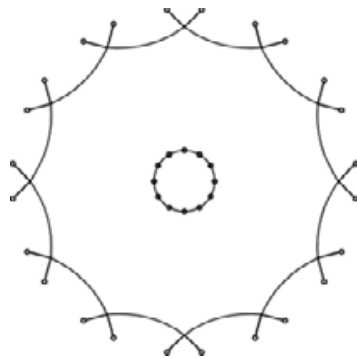
Figur 3.5.7. Nederste rand dobbeltunderstøttes på en cylinderskal.

Dobbeltunderstøttes i stedet for den inderste rand, kan den samme skalform anvendes som en fritstående overdækning, her vist som papirmodel (figur 3.5.8).

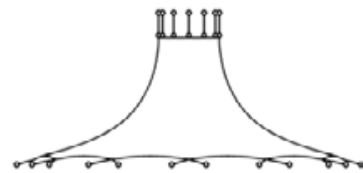


Figur 3.5.8. Inderste – og her nederste - rand dobbeltunderstøttes på en fast understøtning.

Endelig kan man overveje at konstruere skallen som en teltflade. Forspændingen kan da etableres ved at påføre stringerne langs meridiankurverne en normalkraft. Disse stringere kan desuden optage jævnt fordelt last, mens stringerne i asymptoteretningerne vil stabilisere fladen ved skævt fordelt last (figur 3.5.9).



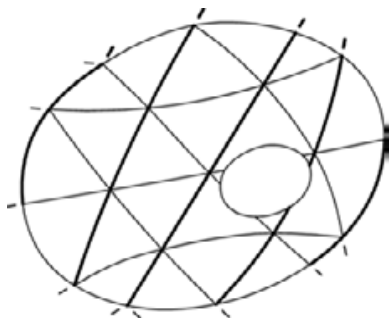
Figur 3.5.9. Teltflade. Plan



Opstalt

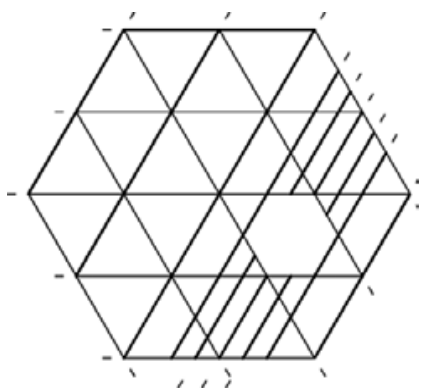
### Eksempel 6

Vi ønsker at placere et hul i en skal, der som udgangspunkt er understøttet som system C, og vil undersøge hvordan stringerne skal placeres (figur 3.6.1).



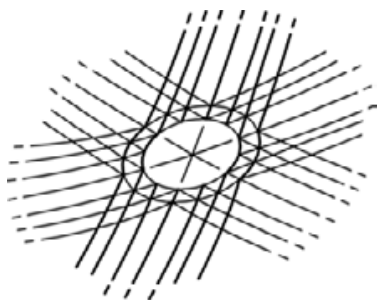
Figur 3.6.1. Skallen med stringersystem C og hullet. Et stringersæt er fremhævet. Det ses at hullet "afbryder" nogle stringere.

Hullets rand skal være konkav og da kan hullets rand behandles som en fri rand. De stringere, som hullet "afbryder" skal understøttes i den anden ende langs randen. Princippet fremgår af (figur 3.6.2).



Figur 3.6.2. Stringersystem. Princip vist for det ene stringersæt, der er fremhævet.

Stringersystemet tilpasses lokalt hulranden. Det kan gøre ved at tegne stringere gennem hullets midtpunkt og placeres de gennemgående stringere langs de fremkomne 1/6 af periferien (figur 3.6.3).



Figur 3.6.3. Stringersystem omkring hullet. Det ene stringersæt er fremhævet.

Vi løber nu reglerne for stringersystemet igennem:

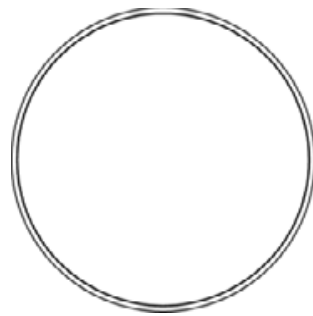
- Systemet består af tre sæt stringere der danner et netværk med trekantede masker? Ja!
- Netværket danner en sammenhængende flade, således at alle knuder er forbundet med stringere til mindst to andre knuder? Ja!
- Hver knude i netværket indgår i en stringer fra hvert sæt? Ja!
- Der ligger knuder langs randene. Ja!
- Hver stringer er understøttet i en knude på randen? Ja! På figuren er randknudernes understøtninger vist i forlængelse af de stringere der er understøttet i knuderne!
- Randen er inddelt i afsnit, hvor knuderne er henholdsvis dobbeltunderstøttede, enkeltunderstøttede eller fri? Ja! Dobbeltunderstøttede "ud for" hullerne og enkeltunderstøttet i øvrigt.

Når den sidste regel er fulgt og stringerne i øvrigt er placeret korrekt er sådan en skal med et hul stabil.

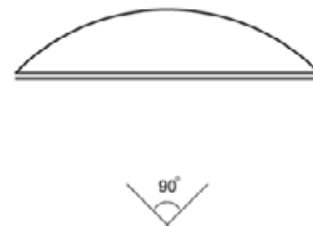
### Eksempel 7

Vi vil her se på tre forskellige eksempler på understøtning af en kuglekalot. Kuglekalotten kan enkeltunderstøttes langs hele randen, den kan understøttes som et stiftlegeme, hvis den forstærkes og den kan dobbeltunderstøttes langs fx en indre rand. Dobbeltunderstøtningen kan eventuelt udformes som cylinderskal.

Kuglekalotten er her vist med højden  $h = r \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$  og den ønskes i første eksempel enkeltunderstøttet langs randen (figur 3.7.1).

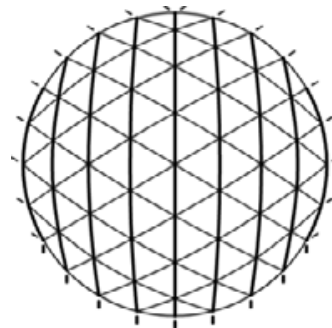


Figur 3.7.1. Plan

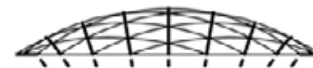


Opstalt

Stringersystem C vælges. Det ses umiddelbart at der kan tegnes et stringersystem, der opfylder reglerne. Læg mærke til at der skal tilføjes tre understøtninger udover enkelunderstøtningerne (figur 3.7.2).



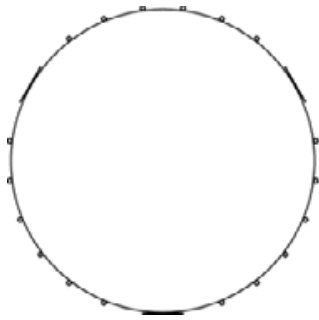
Plan



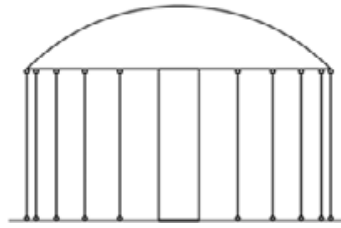
Opstalt

Figur 3.7.2. Stringersystem. Det ene stringersæt er fremhævet og på opstalten er kun understøtningerne af dette vist.

Enkeltunderstøtningerne skal udformes så den flade, som understøtningsretningerne udspænder, sammen med skalfladen danner en konveks flade. En understøtningskonfiguration bestående af lodrette søjler suppleret med tre lodrette skiver, der kan understøtte randen i tangentretningen og dermed i det vandrette plan, opfylder disse betingelser (figur 3.7.3).



Plan

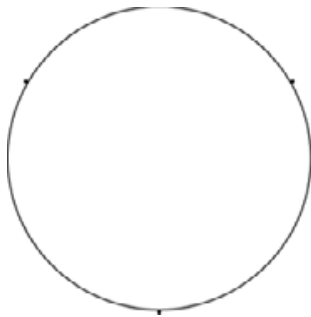


Opstalt

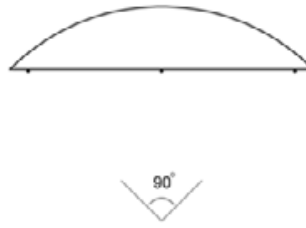
Figur 3.7.3. Understøtning bestående af lodrette søjler samt tre lodrette skiver, der understøtter skallen i vandret plan.

Bemærk at randen skal forstærkes, da understøtningerne ikke ligger i skallens tangentplan.

Vi ønsker i andet eksempel at understøtte kuglekalotten i de tre viste punkter på randen (figur 3.7.4).



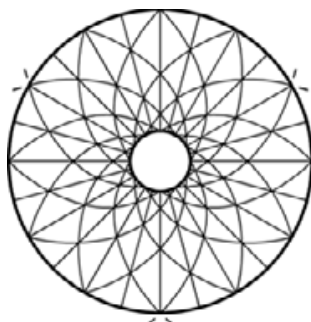
Figur 3.7.4. Plan



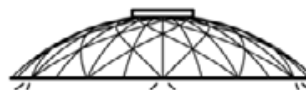
Opstalt

Det vil sige at skalfladen skal understøttes om et stift legeme. Dette kræver seks understøtninger fx to i hvert af de tre punkter. Skallen skal desuden være stabil i sit indre.

Vi bemærker at det er en omdrejningsflade og lader os inspirere af løsning 3 i eksempel 5. Der tilføjes en afstivning, der kan fungere som en indre dobbeltunderstøtning, omkring symmetriaksen. Afstivningen kan fx udformes som en momentstiv plade i form af en fortykkelse på skallen (som ikke vil kunne ses, hvis overgangen gøres glat) eller som en ringbjælke om en lanterne i skallens top. Stringerne tegnes som i eksempel 5 (figur 3.7.5).



Figur 3.7.5. Stringersystem. Plan



Opstalt

Vi ser at dette er et F system, hvor alle stringere er understøttet på den indre afstivning. Vi vil ikke løbe reglerne igennem, da det er oplagt at der kan tegnes et stringersystem, der følger dem. Systemet kan understøttes i hvilke

som helst tre punkter, men der må forventes størst stivhed, når den understøttes nær forstærkningen.

Konstruktionen kendes i øvrigt fra en almindelig salatskål, hvor ringbjælken anvendes som fod.

I tredje eksempel ønskes kalotten understøttet på en enkelt central søjle. Det ovenfor viste stringersystem F anvendes igen og den centrale søjle udformes som en cylinderskål med lodret akse. Cylinderskallen dobbeltunderstøttes i grundplanen – igen svarende til system F – og dens fri rand anvendes som dobbeltunderstøtning af kuglekalotten (figur 3.7.6).



Figur 3.7.6. Systemet opbygges af to skaller. Kuglekalotten understøttes på en cylinderskål og begge skallers stringersystemer er F systemer.

## Bilag 4 Flader, facetter og duale punkter

Det følgende er et supplement til den grundliggende fladegeometri, som den fremstilles i f.eks. (Fabricius-Bjerre 1977), hvis begreber og udtryk her benyttes.

### Flader

To gange differentiable flader gives generelt ved en parameterfremstilling af typen

$$\overline{OP} = \overline{r}(u^1, u^2), (u^1, u^2) \in \omega \quad (4.1)$$

Fladens normalvektor i et givet punkt

$$\overline{N} = \overline{r}_1 \times \overline{r}_2 \neq \overline{0} \text{ hvor } \overline{r}_1 = \frac{\delta \overline{r}}{\delta u^1} \text{ og } \overline{r}_2 = \frac{\delta \overline{r}}{\delta u^2} \quad (4.2)$$

Tangentplanen i  $P_0$

$$\overline{N}_0 \cdot (\overline{r} - r_0) = 0$$

kan i det sædvanlige koordinatsystem udtrykkes som

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 1 \Rightarrow (a_1, a_2, a_3) = \frac{\overline{N}_0}{\overline{N}_0 \cdot r_0} \quad (4.3)$$

Er fladen givet ved ligningen

$$z = F(x, y) \quad (4.4)$$

i det sædvanlige retvinklede rumlige koordinatsystem, fås følgende udtryk

$$\overline{r}_1 = (1, 0, F_x), \overline{r}_2 = (0, 1, F_y) \quad (4.5)$$

$$\overline{N} = (-F_x, -F_y, 1) \quad (4.6)$$

$$a_1 = F_x / f, a_2 = F_y / f, a_3 = -1/f \quad (4.7)$$

$$\text{hvor } f = F_x \cdot x + F_y \cdot y - F \quad (4.8)$$

### Facetternes koordinater

Er  $P_0$  et udvalgt tangentpunkt for en facet, ses at facettens plan

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 1 \quad (4.9)$$

- skærer x-aksen i punktet  $(1/a_1, 0, 0)$
- skærer y-aksen i punktet  $(0, 1/a_2, 0)$
- skærer z-aksen i punktet  $(0, 0, 1/a_3)$ .

En facets koordinater  $(a_1, a_2, a_3)$  kan derfor findes ved at "forlænge" facetten ud til skæring med akserne og beregne de reciprokke værdier.

### Duale planer og punkter

Afstanden fra en plan

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 1 \quad (4.9)$$

til origo er

$$|\overline{OP}| = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (4.10)$$

Planens stedvektor  $\overline{d_0}$  findes ved hjælp af enhedsnormalvektoren

$$\overline{e_n} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \quad (4.11)$$

til

$$\overline{d_0} = \overline{e_n} \cdot |\overline{OP}| = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (4.12)$$

Planens stedvektor  $\overline{d_0}$  afbildes i den duale punktvektor  $\overline{D_0}$ , se (Wester 1987), ved en såkaldt inversion i rummet. Sættes inversionsradius  $R = 1$  og vælges inversionens centrum i origo forenkles beregningerne i forhold til (Wester og Feilberg Hansen 1985), idet planens duale punkt da er givet ved

$$\overline{D_0} = \frac{\overline{e_n}}{|\overline{OP}|} = (a_1, a_2, a_3). \quad (4.13)$$

## Bilag 5 Gitterresultater

De følgende sider viser resultaterne af de gitterberegninger, der er foretaget på stringersystemerne på skal **a**, **b**, **c1**, **c2**, **c3**, **d**, **e** og **f**.

For alle systemerne er:

- længdeenheden sat til 1 m.
- stængernes stivhed EA sat til 70 MN
- lasten sat til 0,5 kN.

Havde længdeenheden været 6 m havde systemet i grove træk svaret til en 20 mm krydsfinerskal belastet med 50 kg - eller en papirmodel i 1:100 belastet med 5 g.

Bemærk at i resultaterne for udbøjningerne svarer x til y-retningen på skallerne og y til z-retningen på skallerne.



> gdata1

a

Navn =

Model a1

> gbereg

Antal ubekendte: 57

> gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy
1	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	0.0000000
10	0.0281198	-0.0348553
11	-0.0523996	0.1621507
12	0.0523996	0.1621507
13	-0.0281198	-0.0348553
14	-5.3594390	8.1693152
15	0.0000000	-0.6002270
16	5.3594390	8.1693152
17	0.6391889	-3.2366692
18	-0.6391889	-3.2366692
19	0.0000000	-1.7010157

faktor 2      faktor 5

> S

S =

- 0.0291
- 0.1938
- 0.1502
- 0.1447
- 0.2086
- 0.5620
- 0.6535
- 0.4210
- 0.6535
- 0.5620
- 0.2086
- 0.1447
- 0.1502
- 0.1938
- 0.0291
- 0.0997
- 0.0880
- 0.0390
- 0.2521
- 0.2521
- 0.0390
- 0.0880
- 0.0997
- 0.0032
- 0.0389

max      stng

0.0275  
0.0389  
0.0032  
-0.0212  
-0.0212

>

Stangkraeften:

B

k1	k2	S
1	10	-0.014907
2	10	0.000000
3	10	-0.000000
3	14	-0.000000
3	11	0.029849
4	11	-0.214660
5	11	0.120670
5	15	0.188378
5	12	0.120670
6	12	-0.214660
7	12	0.029849
7	16	-0.000000
7	13	-0.000000
8	13	0.000000
9	13	-0.014907
10	14	-0.014907
11	14	0.000000
11	17	0.000000
11	15	-0.089835
12	15	-0.089835
12	18	0.000000
12	16	0.000000
13	16	-0.014907
14	17	-0.014907
15	17	-0.000000
15	19	0.028480
15	18	-0.000000
16	18	-0.014907
17	19	-0.014907
18	19	-0.014907

Max. stangkraeften:

5	15	0.188378
---	----	----------

Min. stangkraeften:

4	11	-0.214660
6	12	-0.214660

»  
» gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy
1	-0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	-0.0000000
3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000
5	-0.0000000	-0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	-0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	-0.0000000
9	0.0000000	0.0000000
10	0.0004650	-0.0007442
11	-0.0068302	0.0249876
12	0.0068302	0.0249876
13	-0.0004650	-0.0007442
14	-0.1449511	0.1927712
15	-0.0000000	-0.1552437
16	0.1449511	0.1927712
17	-1.1464156	1.3962607
18	1.1464156	1.3962607
19	0.0000000	-0.1104578

i meget store end i d : 0.005  
↑ faktor 12

⇒ vil være større end her  
beregnet idet 17/18  
fastholdes at skive vinkel  
langs ret vand

Stangkraeften:

C1

k1	k2	S
1	10	-0.000000
2	10	0.000000
3	10	-0.000000
3	14	0.000000
3	11	0.000000
4	11	-0.320513
5	11	0.215829
5	15	0.216987
5	12	0.215829
6	12	-0.320513
7	12	-0.000000
7	16	-0.000000
7	13	-0.000000
8	13	0.000000
9	13	-0.000000
10	14	-0.000000
11	14	-0.000000
11	17	-0.042949
11	15	-0.076982
12	15	-0.076982
12	18	-0.042949
12	16	0.000000
13	16	-0.000000
14	17	0.000000
15	17	0.051951
15	19	0.020513
15	18	0.051951
16	18	-0.000000
17	19	-0.041657
18	19	-0.041657

Max. stangkraeften:

5	11	0.215829
5	15	0.216987
5	12	0.215829

Min. stangkraeften:

4	11	-0.320513
6	12	-0.320513

»  
» gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy
1	-0.000000	-0.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	-0.000000	-0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	-0.000000
8	0.000000	0.000000
9	0.000000	-0.000000
10	0.000000	-0.000000
11	-0.0682718	0.2417696
12	0.0682718	0.2417696
13	-0.000000	-0.000000
14	0.0735376	-0.1176979
15	-0.000000	-0.4158274
16	-0.0735376	-0.1176979
17	-0.1046624	0.3670435
18	0.1046624	0.3670435
19	-0.000000	-0.4895596

↑  
~ 0.4  
↓ faktor 0.9

Stangkraeften:

C2

k1	k2	S
1	10	0.000000
2	10	0.000000
3	10	-0.000000
3	14	-0.000000
3	11	-0.000000
4	11	-0.320513
5	11	0.089725
5	15	0.480769
5	12	0.089725
6	12	-0.320513
7	12	-0.000000
7	16	-0.000000
7	13	-0.000000
8	13	0.000000
9	13	0.000000
10	14	0.000000
11	14	0.000000
11	17	-0.160256
11	15	-0.089725
12	15	-0.089725
12	18	-0.160256
12	16	0.000000
13	16	0.000000
14	17	-0.000000
15	17	0.089725
15	19	0.160256
15	18	0.089725
16	18	-0.000000
17	19	-0.089725
18	19	-0.089725

Max. stangkraeften:

5 15 0.480769

Min. stangkraeften:

4 11 -0.320513  
6 12 -0.320513

»  
» gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy
1	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000
3	-0.0000000	-0.0000000
4	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	-0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	-0.0000000
8	0.0000000	0.0000000
9	-0.0000000	0.0000000
10	0.0000000	-0.0000000
11	-0.0080858	0.0300931
12	0.0080858	0.0300931
13	-0.0000000	-0.0000000
14	0.0160462	-0.0256821
15	-0.0000000	-0.1464404
16	-0.0160462	-0.0256821
17	-0.0594729	0.1926796
18	0.0594729	0.1926796
19	-0.0000000	-0.4469736

~ 0.2  
faktor 0.4

Stangkraeften:

C 3

k1	k2	S
1	10	-0.000000
2	10	0.000000
3	10	-0.000000
3	14	0.000000
3	11	0.000000
4	11	-0.320513
5	11	0.145921
5	15	0.360577
5	12	0.145921
6	12	-0.320513
7	12	-0.000000
7	16	-0.000000
7	13	-0.000000
8	13	0.000000
9	13	-0.000000
10	14	0.000000
11	14	-0.000000
11	17	-0.080128
11	15	-0.107992
12	15	-0.107992
12	18	-0.080128
12	16	0.000000
13	16	0.000000
14	17	0.000000
15	17	0.072399
15	19	0.040064
15	18	0.072399
16	18	0.000000
17	19	-0.045071
18	19	-0.045071

Max. stangkraeften:

5 15 0.360577

Min. stangkraeften:

4 11 -0.320513  
6 12 -0.320513

»  
» gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy
1	-0.0000000	-0.0000000
2	0.0000000	0.0000000
3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000
5	-0.0000000	-0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	-0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	-0.0000000
10	0.0000000	-0.0000000
11	-0.0268513	0.0977266
12	0.0268513	0.0977266
13	-0.0000000	-0.0000000
14	0.0421212	-0.0674156
15	-0.0000000	-0.2976718
16	-0.0421212	-0.0674156
17	-0.0878936	0.2935212
18	0.0878936	0.2935212
19	-0.0000000	-0.4488150

~ 0.3  
faktor 0.7

Stangkraeften:

d

k1	k2	S
1	8	-0.025286
1	6	-0.000005
2	6	0.010978
3	6	-0.000004
3	9	0.025035
3	7	-0.000004
4	7	0.010978
5	7	-0.000005
5	10	-0.025286
6	8	-0.000001
6	11	0.010974
6	9	-0.000001
7	9	-0.000001
7	12	0.010974
7	10	-0.000001
8	13	-0.025290
8	11	0.000003
9	11	0.000002
9	13	0.025029
9	12	0.000002
10	12	0.000003
10	13	-0.025290
11	13	0.010978
12	13	0.010978
8	14	-0.000000
10	14	-0.000000

Max. stangkraeften:

3	9	0.025035
9	13	0.025029

Min. stangkraeften:

1	8	-0.025286
5	10	-0.025286
8	13	-0.025290
10	13	-0.025290

»  
» gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy
1	-0.0000000	-0.0000000
2	0.0000000	-0.0000000
3	-0.0000000	-0.0000000
4	-0.0000000	-0.0000000
5	0.0000000	-0.0000000
6	0.0001206	-0.0002412
7	-0.0001206	-0.0002412
8	-0.0001264	-0.0005540
9	-0.0000000	-0.0009369
10	0.0001264	-0.0005540
11	0.0002005	-0.0019531
12	-0.0002005	-0.0019531
13	-0.0000000	-0.0046565
14	0.0000000	0.0000000

↑ faktor 0.4

Stangkraefter:

e

k1	k2	S
1	10	-0.044721
2	10	0.000000
3	10	-0.000000
3	14	-0.000000
3	11	0.091652
4	11	0.000000
5	11	-0.000000
5	15	-0.085440
5	12	0.000000
6	12	-0.000000
7	12	0.091652
7	16	0.000000
7	13	-0.000000
8	13	0.000000
9	13	-0.044721
10	14	-0.044721
11	14	0.000000
11	17	0.000000
11	15	0.091652
12	15	0.091652
12	18	0.000000
12	16	0.000000
13	16	-0.044721
14	17	-0.044721
15	17	0.000000
15	19	0.080623
15	18	-0.000000
16	18	-0.044721
17	19	-0.044721
18	19	-0.044721

Max. stangkraefter:

3	11	0.091652
7	12	0.091652
11	15	0.091652
12	15	0.091652

Min. stangkraefter:

5	15	-0.085440
---	----	-----------

»  
» gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy
1	-0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	-0.0000000
3	0.0000000	-0.0000000
4	0.0000000	-0.0000000
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	-0.0000000	-0.0000000
8	0.0000000	-0.0000000
9	0.0000000	0.0000000
10	0.0013949	-0.0022325
11	-0.0005995	0.0048040
12	0.0005995	0.0048040
13	-0.0013949	-0.0022325
14	0.0005590	-0.0022361
15	-0.0000000	0.0174198
16	-0.0005590	-0.0022361
17	-0.0006034	-0.0057523
18	0.0006034	-0.0057523
19	-0.0000000	-0.0425381

} faktor 0.4



f

Model nyf1

»  
 » gbereg

Antal ubekendte: 57

» gplot\_u

Flytninger:

knr.	Ux	Uy	
1	0.0000000	0.0000000	
2	0.0000000	0.0000000	
3	0.0000000	0.0000000	
4	0.0000000	0.0000000	
5	0.0000000	0.0000000	
6	0.0000000	0.0000000	
7	0.0000000	0.0000000	
8	0.0000000	0.0000000	
9	0.0000000	0.0000000	
10	0.0089642	-0.0286579	
11	-0.0039361	0.0608799	~ 12,7 · e
12	0.0039361	0.0608799	
13	-0.0089642	-0.0286579	
14	0.0034921	-0.0283718	
15	0.0000000	0.2265572	~ 13.0 · e
16	-0.0034921	-0.0283718	
17	-0.0032012	-0.0754434	
18	0.0032012	-0.0754434	
19	0.0000000	-0.5629848	~ 13.25 · e

»  
 » S

S =

-0.1659  
 0.0000  
 0.0000  
 0.0000  
 0.3358  
 -0.0042  
 0.0022  
 -0.3250  
 0.0022  
 -0.0042  
 0.3358  
 0.0000  
 0.0000  
 0.0000  
 -0.1659

~ 3.66 · e

~ 3.8 · e

faktor 4 i forhold til e

nyf1

-0.1659  
0.0000  
0.0000  
0.3337  
0.3337  
0.0000  
0.0000  
-0.1659  
-0.1659  
0.0000  
0.3234  
0.0000  
-0.1659  
-0.1659  
-0.1659

$\sim 4.01 \cdot e$

Side

## Bilag 6 Modelresultater

De følgende sider viser måleresultater og beregninger fra belastningsforsøgene foretaget på papirmodellerne **a**, **b**, **c1**, **c2**, **c3**, **d**, **e** og **f**.

<b>Papirmodeller</b>		<b>Belastningsforsøg</b>		<b>Dato: 17.1.02</b>	
<b>Model</b>	<b>a</b>	<b>Model</b>	<b>b</b>		
Last nedad		Last nedad			
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	18,9	ubelastet	18,58		
lastet	19,5	lastet	18,59		
krybning	20	krybning	18,59		
aflastet	19,3	aflastet	18,58		
krybning	18,95	krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	6,5	elastisk nedbøjning (mm)	0,1		
eftergivelighed (mm/g)	0,65	eftergivelighed (mm/g)	0,01		
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	18,95	ubelastet			
lastet	19,15	lastet			
krybning	19,3	krybning			
aflastet	19,05	aflastet			
krybning	18,95	krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	3	elastisk nedbøjning (mm)	0		
eftergivelighed (mm/g)	0,60	eftergivelighed (mm/g)	0,00		
Last opad		Last opad			
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	18,7	ubelastet	19,05		
lastet	18,95	lastet	19,05		
krybning	19,05	krybning			
aflastet	18,9	aflastet			
krybning	18,75	krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	2	elastisk nedbøjning (mm)	0		
eftergivelighed (mm/g)	0,20	eftergivelighed (mm/g)	0,00		
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	18,75	ubelastet			
lastet	18,9	lastet			
krybning	18,95	krybning			
aflastet	18,85	aflastet			
krybning	18,75	krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	1,25	elastisk nedbøjning (mm)	0		
eftergivelighed (mm/g)	0,25	eftergivelighed (mm/g)	0,00		
<hr/>		<hr/>			
Gennemsnitlig eftergivelighed		Gennemsnitlig eftergivelighed			
nedad (mm/g)	0,63	nedad (mm/g)	0,01		
opad (mm/g)	0,22	opad (mm/g)	0,00		
gennemsnit (mm/g)	0,425	gennemsnit (mm/g)	0,005		

Papirmodeller		Belastningsforsøg		Dato: 17.1.02
Model	c1	Model	c2	
Last nedad		Last nedad		
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet	15,3	ubelastet		
lastet	15,35	lastet		
krybning	15,4	krybning		
aflastet	15,35	aflastet		
krybning	15,5	krybning		
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	0,5	elastisk nedbøjning (mm)	0	
eftergivelse (mm/g)	0,05	eftergivelse (mm/g)	#DIVISION/0!	
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet	15,3	ubelastet	15,6	
lastet	15,35 ?	lastet	15,9	
krybning	15,35 ?	krybning		bøjning!
aflastet	15,3	aflastet		
krybning		krybning		
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	> 0,5	elastisk nedbøjning (mm)	3	
eftergivelse (mm/g)	#VÆRDI!	eftergivelse (mm/g)	0,60	
Last opad		Last opad		
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet	18,15	ubelastet		
lastet	18,2	lastet		
krybning	18,2	krybning		
aflastet	18,15	aflastet		
krybning		krybning		
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	0,5	elastisk nedbøjning (mm)	0	
eftergivelse (mm/g)	0,05	eftergivelse (mm/g)	#DIVISION/0!	
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet		ubelastet	17,7	
lastet		lastet	17,8	
krybning		krybning	17,85	
aflastet		aflastet	17,75	
krybning		krybning	17,7	
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	0	elastisk nedbøjning (mm)	1	
eftergivelse (mm/g)	0,00	eftergivelse (mm/g)	0,20	
<hr/>		<hr/>		
Gennemsnitlig eftergivelse		Gennemsnitlig eftergivelse		
nedad (mm/g)	0,05	nedad (mm/g)	0,60	
opad (mm/g)	0,05	opad (mm/g)	0,20	
gennemsnit (mm/g)	0,050	gennemsnit (mm/g)	0,400	

Papirmodeller		Belastningsforsøg		Dato: 17.1.02	
Model	<b>c3</b>	Model	<b>d</b>		
Last nedad		Last nedad			
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	15,55	ubelastet	18,35		
lastet	15,7	lastet	18,38		
krybning	15,75	krybning	18,38		
aflastet	15,6	aflastet	18,35		
krybning	15,55	krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	1,5	elastisk nedbøjning (mm)	0,3		
eftergivelighed (mm/g)	0,15	eftergivelighed (mm/g)	0,03		
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	15,55	ubelastet			
lastet	15,6	lastet			
krybning	15,6	krybning			
aflastet	15,55	aflastet			
krybning		krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	0,5	elastisk nedbøjning (mm)			
eftergivelighed (mm/g)	0,10	eftergivelighed (mm/g)			
Last opad		Last opad			
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	17,5	ubelastet	19,2		
lastet	17,6	lastet	19,22		
krybning	17,6	krybning	19,22		
aflastet	17,5	aflastet	19,2		
krybning		krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	1	elastisk nedbøjning (mm)	0,2		
eftergivelighed (mm/g)	0,10	eftergivelighed (mm/g)	0,02		
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5		
Målinger (cm)		Målinger (cm)			
ubelastet	17,5	ubelastet			
lastet	17,55	lastet			
krybning	17,55	krybning			
aflastet	17,5	aflastet			
krybning		krybning			
Beregninger		Beregninger			
elastisk nedbøjning (mm)	0,5	elastisk nedbøjning (mm)			
eftergivelighed (mm/g)	0,10	eftergivelighed (mm/g)	0,00		
<hr/>		<hr/>			
Gennemsnitlig eftergivelighed		Gennemsnitlig eftergivelighed			
nedad (mm/g)	0,12	nedad (mm/g)	0,03		
opad (mm/g)	0,10	opad (mm/g)	0,02		
gennemsnit (mm/g)	0,113	gennemsnit (mm/g)	0,025		

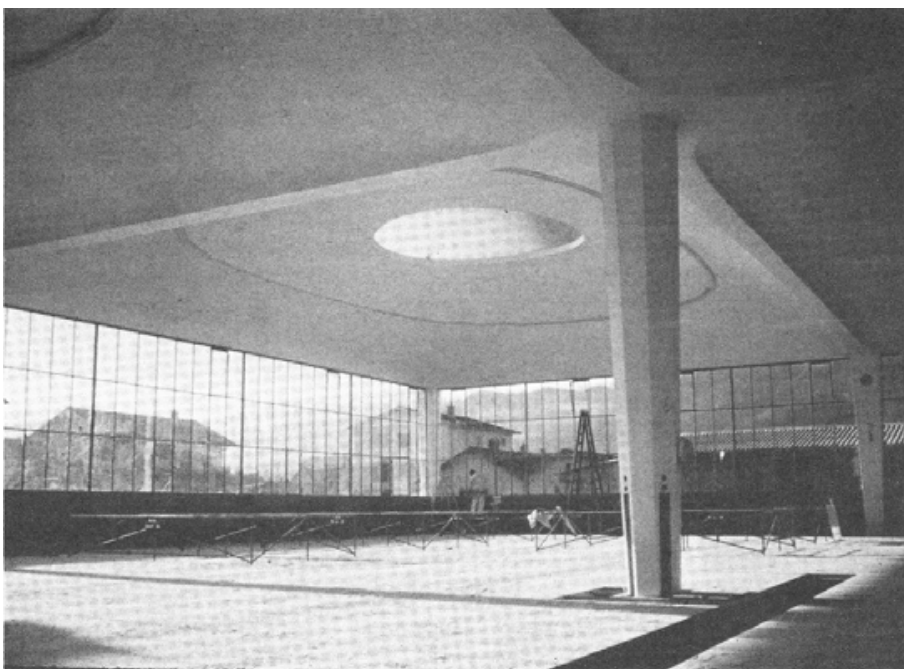
Papirmodeller		Dato: 17.1.02	Dato: 4.2.02	
Model	e	Model	f	
Last nedad		Last nedad		
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet	18,2	ubelastet	17,7	
lastet	18,4	lastet	17,9 bøjning!	
krybning		krybning	17,95	
aflastet	18,2	aflastet	17,75	
krybning		krybning	17,7	
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	2	elastisk nedbøjning (mm)	2	
eftergivelse (mm/g)	0,20	eftergivelse (mm/g)	0,20	
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet	18,2	ubelastet	17,7	
lastet	18,3	lastet	17,75	
krybning	18,3	krybning	17,75	
aflastet	18,2	aflastet	17,7	
krybning		krybning		
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	1	elastisk nedbøjning (mm)	0,5	
eftergivelse (mm/g)	0,20	eftergivelse (mm/g)	0,10	
Last opad		Last opad		
Belastning (g)	10	Belastning (g)	10	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet	19,4	ubelastet	19,8	
lastet	19,6	lastet	19,85	
krybning		krybning	19,86	
aflastet	19,5	aflastet	19,81 cirka	
krybning	19,45	krybning	19,8	
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	2	elastisk nedbøjning (mm)	0,5	
eftergivelse (mm/g)	0,20	eftergivelse (mm/g)	0,05	
Belastning (g)	5	Belastning (g)	5	
Målinger (cm)		Målinger (cm)		
ubelastet	19,4	ubelastet	19,8	
lastet	19,5	lastet	19,82 cirka	
krybning	19,55	krybning	19,82	
aflastet	19,45	aflastet	19,8	
krybning	19,4	krybning		
Beregninger		Beregninger		
elastisk nedbøjning (mm)	1	elastisk nedbøjning (mm)	0,2	
eftergivelse (mm/g)	0,20	eftergivelse (mm/g)	0,04	
<hr/>		<hr/>		
Gennemsnitlig eftergivelse		Gennemsnitlig eftergivelse		
nedad (mm/g)	0,20	nedad (mm/g)	0,10	
opad (mm/g)	0,20	opad (mm/g)	0,04	
gennemsnit (mm/g)	0,200	gennemsnit (mm/g)	0,073	

## Bilag 7 Skaller med rette rande

Positivt krumme skaller, hvis rand danner en regulær plan polygon har nogle praktiske fordele:

- de har en høj grad af symmetri, hvilket er byggeteknisk fordelagtigt
- de 3, 4 og 6-kantede skaller er lette at sammenbygge og dermed er de velegnede til byggesystemer
- de er stive, som der er redegjort for i kapitlet *Modeller*, og dermed materialeøkonomiske.

Der kendes flere eksempler på sådanne skaller (figur 7.1).



Figur 7.1. Kvadratiske skaller med rette rande, designet af Heinz Isler (Billington 1982, side 335).

Vi vil her kort beskrive hvad de rette rande og skarpe hjørner betyder for en positivt krum flades form. Fladens randbetingelser bevirker at fladen bliver nul-krum langs de rette rande og i hjørnerne får enten:

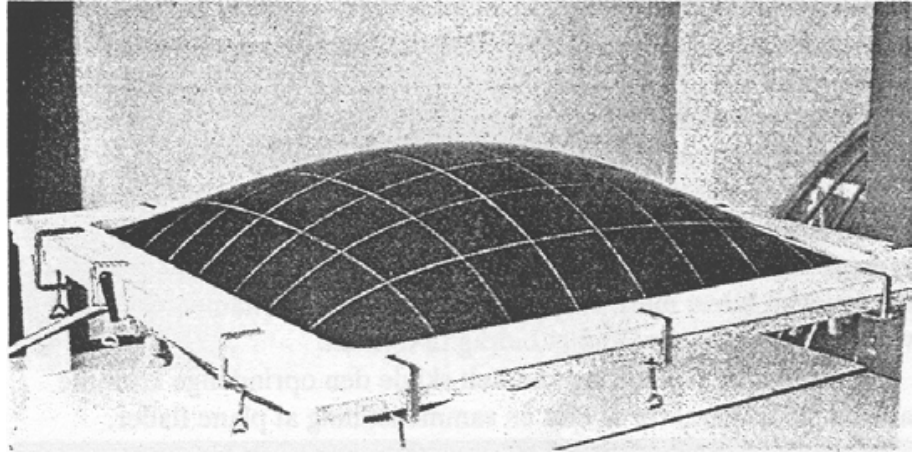
- uendelig stor krumning, dvs. fladen danner en grat, eller
- negativ krumning, dvs. fladen bliver negativ krum nær hjørnet, eller
- nul krumning, dvs. fladen bliver en kegleflade nær hjørnet.

Det kan vises at der kun eksisterer disse tre former for skarpe hjørner på krumme flader.

Hvis fladen går over i en grat nær hjørnerne, bliver krumningen uendelig stor over graten og i hjørnerne, og da kan overgangen mellem flade og væg blive glat, som ved et grathvælv.

Hvis fladen har vandret tangentplan i hjørnerne, bliver krumningen negativ der. Det er den form, der fremkommer, hvis en sæbehinde eller en gummi-membran fastholdes i en plan ramme og udsættes for overtryk. Sæbehinden bliver positiv krum på størstedelen af fladen, men ude ved hjørnerne er den negativ krum og flader ud til vandret i hjørnet. Overgangen mellem flade og væg danner et knæk (figur 7.2).





Figur 7.2. En gummimembran fastholdt i en ramme og udsat for indre overtryk, forsøg udført af Heinz Isler i forbindelse med formgivning af skaller som i figur 7.1 (Ramm & Schunk 1989, side 42).

Forlanges fladen positiv krum over det hele, udarter den i hjørnerne til at være kegleformet og dermed nul-krum, idet keglens spids danner hjørnet. Med denne type flader kan man frit vælge om overgangen mellem flade og væg skal være glat eller danne et knæk. Men det kan være vanskeligt at finde analytiske udtryk for fladerne<sup>10</sup>. En sådan facetteret flade med tregrenede hjørner kan imidlertid tegnes direkte, hvis man tager udgangspunkt i et grat-hvælv (figur 7.3) .



Figur 7.3. Kvadratiske skiveskaller med rette rande.

Da områderne nær de rette rande, som nævnt i kapitlet *Modeller*, kan betragtes som skiver, skal denne skalttype understøttes på samme måde som en pyramideformet gitterkonstruktion. Den trekantede type er således i sig selv stabil og skal understøttes som et stiflegeme - med seks understøtninger, hvilket kan gøres på flere måder:

<sup>10</sup> Professor Jørgen Nielsen har fundet en sådan firkantet flade givet ved udtrykket:

$$z = \frac{(1 - x^2)(1 - y^2)}{(1 - x^2) + (1 - y^2)}$$

- to understøtninger i hver hjørneknode, se (figur 130) i *Modeller*
- en i en, to i en anden og tre understøtninger i den tredje hjørneknode
- en understøtning langs hver af randene og en i hvert hjørne, for eksempel ved en væg langs hver rand.

Den firkantede type skal forsynes med syv understøtninger, den femkantede med otte osv.

De rette rande skal afstives. Da fladen er plan langs randen, kan en belastning, der virker vinkelret på skælfladen på en fri ret rand, kun optages med bøjning, pladevirkning. Men da spændvidden for denne "plade" er lig hele randens længde, må man enten afstive randen vinkelret på dens plan eller sikre, at belastningerne bliver tilstrækkelig små. Afstivningen kan fx ske med en vandret bjælke langs randen, en lodret væg, eller ved en sammenbygning med en naboskal.

### Statisk model

Ved en skivekonstruktion forstås her en konstruktion, der geometrisk er karakteriseret ved at være opbygget af plane elementer og statisk er karakteriseret ved, at det enkelte element kun påvirker naboelementerne med skivekræfter.

Denne definition forudsætter, at elementerne er indbyrdes simpelt understøttede og at ydre laster ikke angriber i hjørnepunkterne. Specielt gælder for statisk bestemte konstruktioner, at der i hvert indre hjørne mødes  $2n - 3$  skiver, hvor  $n$  er antal grene i hjørnet. Definitionen tillader at der lokalt optræder bøjning i elementet. Det enkelte element fungerer da som en simpelt understøttet kombineret skive/plade.

Lasterne deles op i pladelaster og skivelaster. Pladelasterne er de laster, der virker vinkelret på elementets plan. Skivelaster virker i skivens plan. Vindlast og nyttelast er typisk pladelaster, mens for eksempel tyngdekraften kan opdeles i en plade-komponent og en skive-komponent.

Snitkræfterne deles op i pladekræfter og skivekræfter. Pladekræfterne består i bøjnings- og vridningsmomenter i elementets plan samt i tværforskydningskræfter, der virker vinkelret på elementets plan. Skivekræfterne virker alene i elementets plan og består i normalkræfter og forskydningskræfter.

Der regnes på den udeformerede konstruktion og konstruktionens deformationer beregnes ikke.

#### *Pladelaste*

Laste vinkelret på elementets plan overføres med pladevirkning til kanterne. Fordelingen af tværforskydningskræfterne henholdsvis mellem kanterne indbyrdes og langs de enkelte kanter er statisk ubestemt og afhænger såvel af elasticitetsforholdene i det betragtede element, som i naboelementerne, der fungerer som understøtninger.

En elasticitetsteoretisk fordeling af tværforskydningskræfterne langs kanterne vil resultere i at reaktionerne langs kanter mellem konvekse hjørner vil være størst på midten og aftage, eventuelt blive modsat rettet, ud mod hjørnerne. Langs kanter mellem et konvekst og et konkavt hjørne vil reaktionen være størst ved det konkave hjørne.

Antages imidlertid en symmetrisk fordeling af tværforskydningskræfterne langs de enkelte kanter, kan de regnes koncentreret i kanternes midtpunkter, hvorved en statisk ækvivalent ligevægt kan findes.

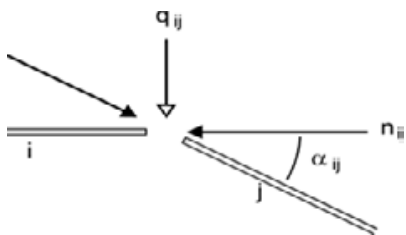
#### *Skivelaste*

Tværforskydningskraften langs kanten kan opløses i skivekræfter. Dels en normalkraft i elementets plan, dels en normalkraft, herefter kaldet reaktion, i naboelementets plan. Begge virker langs kanten. Størrelsen af normalkraft og reaktion bestemmes af vinklen  $\alpha_{ij}$  mellem de to elementer  $i$  og  $j$ :

$$n_{ij} = q_{ij} \cot(\alpha_{ij})$$

$$n'_{ji} = q_{ij} / \sin(\alpha_{ij}) \quad (8.1)$$

hvor  $n_{ij}$  er normalkraften på elementet  $i$ 's kant i samling  $ij$ ,  $n_{ji}^r$  er reaktionen fra naboelement  $j$  på element  $i$ 's kant og  $q_{ij}$  er tværforskydningskraften på element  $i$ 's kant i samling  $ij$  stammende fra fladelasten på det pågældende element (figur 8.1).



Figur 8.1. Opløsning af tværforskydningskraften  $q_{ij}$ .

Da lasten virker vinkelret på elementets plan, bliver vektorsummen af normalkræfterne på kanterne af elementet lig nul. Reaktionen, der virker som laste på naboelementerne og udgør den lokale kraftfordeling, kan beregnes med de 6 ligevægtsligninger, da elementernes gennemsnitlige kantantal er 6 på åbne flader.

Reaktionerne fra naboelementerne langs elementets kanter samt skivekomponenterne af de øvrige laster summeres vektorielt og resultatanten  $t_{ri}$  benyttes til den følgende beregning af den globale fordeling af skiveforskydningskræfterne mellem elementerne.

#### Dualmetoden

Dualmetoden er først beskrevet af (Wester & Feilberg Hansen 1985). I dualmetoden udnyttes de enkelte skivers retningsvektorer samt konstruktions topologi til at danne et analogt gitter, der kan beregnes med et sædvanligt gitterprogram. Resultanterne  $t_{ri}$  dualtransformeres til  $s_{ri}$  og udgør lasten på gitterets knuder. Gitterprogrammet beregner stangkræfterne og dualtransformeret udgør disse forskydningskræfterne imellem skiveelementerne. Beregningen resulterer således i forskydningsligevægten for skivekonstruktionen, hvorved samtlige skivelaster er bestemt.

#### Materialer og dimensioner

På dette stade i beregningerne kendes kræfterne på samtlige skiveelementer i konstruktionen. Skivetykkelsen  $h$  og elasticitetskoefficienten  $E$  skal herefter vælges.

#### Spændingsberegning

Spændinger og deformationer kan nu beregnes for hver enkelt skive. Fordelingen af lasterne langs skivens kanter har ikke haft indflydelse på de forudgående beregninger, men den har betydning for spændingsfordelingen i skiven. Ved en stivhedsbetragtning som ovenfor ses at lastoverførslen for konvekse skiver vil være størst på midten af kanten og aftage mod hjørnerne, så længe skiven ikke folder.

En simpel betragtning af kræfterne som strømme fortæller, at spændingerne i skivens indre ikke kan overskride den største resulterende spænding langs en kant. Regnes spændingsfordelingen langs kanterne for parabelformet er den største skivespænding

$$\sigma_{max} = 3/2 (n_s^2 + 3 t_s^2)^{1/2} / h l_s \quad (8.2)$$

hvor  $n_s$  og  $t_s$  er henholdsvis normalkraft og forskydningskraft langs kanten  $s$ ,  $h$  er skivens tykkelse og  $l_s$  er kantens længde.

En eventuel beregning af spændingerne i skivens indre må gennemføres med et passende elementprogram.

Hvis foldning indtræder, flytter de maksimale laste ud mod hjørnerne og det statiske system ændres drastisk. Skivelementerne vil da fungere som gitre, hvor gitterudfyldningen følger foldernes retning. Konstruktionen bliver dermed til et foranderligt gittersystem. Denne opførsel kan undersøges nærmere med modelforsøg, men sådanne instabiliteter er komplicerede og så vanskelige at forudse, at de normalt bør undgås.

## Beregningsprocedure

### Beregning af lokalkraftfordeling

Givet:

- elementernes koordinater  $\bar{r}_i$ ,  $i = 1 \dots n$
- samlingerne  $ij$
- hjørnernes koordinater  $\bar{r}_{ijk}$

Elementernes koordinater kan være givet ved planpunktet eller det duale punkt, idet de bliver normeret.

Beregn for alle kanter

$$\Delta \bar{r}_{ij} = \left| \bar{r}_{ijj+1} - \bar{r}_{ijj-1} \right| \quad (8.3)$$

deres midtpunkt

$$\bar{r}_{ij}^m = \frac{1}{2} (\bar{r}_{ijj-1} + \bar{r}_{ijj+1}) \quad (8.4)$$

og normalkraftretningen vinkelret på kanten og i naboelementets plan

$$\bar{r}_{ij}^n = \Delta \bar{r}_{ij} \times \bar{r}_j \quad (8.5)$$

Beregn for alle elementer arealet

$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{k-1} \left| (\bar{r}_{ij+m j+m+1} - \bar{r}_{ijj+1}) \times (\bar{r}_{ij+m+1 j+m+2} - \bar{r}_{ijj+1}) \right| \quad (8.6)$$

enhedsnormalvektoren

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{r}_i}{\left| \bar{r}_i \right|} \quad (8.7)$$

og tyngdepunktet

$$\bar{g}_i = \frac{1}{6 A_i} \sum_{m=1}^{k-1} (\bar{r}_{ijj+1} + \bar{r}_{ij+m j+m+1} + \bar{r}_{ij+m+1 j+m+2}) \cdot \left| (\bar{r}_{ij+m j+m+1} - \bar{r}_{ijj+1}) \times (\bar{r}_{ij+m+1 j+m+2} - \bar{r}_{ijj+1}) \right| \quad (8.8)$$

Lasten på elementet er

$\bar{F}_i$ , enkeltkraft angribende i  $\bar{f}_i$

$\bar{p}_i$ , jævnt fordelt fladelast

Lokalkræfterne på naboelementerne beregnes ved at løse ligningssystemet bestående af ligevægtsligningerne for kræfter i elementets plan

$$\sum_{j=1}^k h_{ji} \bar{r}_{ji}^n + (\bar{p}_i \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_i \cdot A_i + (\bar{F}_i \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_i = 0 \quad (8.9)$$

og kræfter vinkelret på elementets plan

$$\sum_{j=1}^k h_{ji} (\bar{r}_{ji}^n \times \bar{r}_{ji}^m) + (\bar{p}_i \cdot \bar{e}_i) \cdot (\bar{e}_i \times \bar{g}_i) A_i + (\bar{F}_i \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_i \times \bar{f}_i = 0 \quad (8.10)$$

hvor

$$\bar{n}_{ji}^r = h_{ji} \cdot \bar{r}_{ji}^n \quad (8.11)$$

Den resulterende skivelast er således summen af lasternes resultant i planen og af normalkræfterne fra naboelementerne.

Input til beregning af den globale kraftfordeling ved hjælp af dualmetoden er den resulterende skivelast's moment om origo, duallasten

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ii} = & (\bar{p}_i - (\bar{p}_i \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_i) \times \bar{g}_i \\ & + (\bar{F}_i - (\bar{F}_i \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_i) \times \bar{f}_i - \sum_{j=i}^k h_{ij} (\bar{r}_{ij}^n \times \bar{r}_{ji}^m) \end{aligned} \quad (8.12)$$

*Beregning af global kraftfordeling med dualmetoden*

Dualmetoden er beskrevet hos (Wester & Feilberg Hansen 1985), (Wester 1987) og (Feilberg Hansen 1988). Dette er kun et kort resumé, der forudsætter en statisk bestemt konstruktion.

Skivekonstruktionens duale gitter består af gitterkuderne, der svarer til skiverne og som har de duale punkters koordinater, se *Bilag 4*,

$$D_i = (a_1, a_2, a_3) \quad (8.13)$$

og gitterstængerne svarer til skivesamlingerne således at stangen  $ij$  forbinder  $D_i$  med  $D_j$

Understøtninger etableres med hjælpeskiver/hjælpekuder, der fastholdes fuldstændigt.

Gitteret påføres duallasterne i knuderne og stangkræfterne beregnes. Forskydningskræfterne mellem skiverne og mellem skiver og understøtninger findes herefter af

$$t_{ij} = s_{ij} \cdot \frac{|\overline{D_i \times D_j}|}{|\overline{D_i D_j}|} \quad (8.14)$$

hvor fortegn bestemmes jf. reglerne i (Wester 1987 p. 32).

## Bilag 9 Fuldskalamodel

Der er udført et fuldskalaforsøg med henblik på at vise at skiveskaller kan betragtes som en realistisk konstruktionstype.

Skiveskaller er facetterede skaller, hvor alle hjørner er tregrenede. I en skiveskal påvirker de plane elementer kun naboelementerne med skivekræfter. De eneste snitkræfter, der optræder i en skive, er normalkræfter og forskydningskræfter i skivens plan, og skiveskaller kan derfor betragtes som facetterede membranskaller. Disse statiske egenskaber er principielt velegnede til præfabrikerede elementer, idet der ikke fremkommer koncentrerede kræfter langs kanterne og specielt ikke overføres kræfter i hjørnerne.

Kun med en fuldskalamodel er det muligt at undersøge om de udviklede teorier og metoder kan anvendes i praksis, at undersøge konstruktionens opførelse under virkelige påvirkninger samt at vise konstruktionstypens muligheder for en bredere kreds.

De mere specifikke formål var at undersøge:

- om stringermetoden i praksis kan anvendes på skaller
- om skaller med fordel kan konstrueres af skiveelementer
- om skiveskaller er byggeteknisk simple.

Modellen blev monteret i september 1991 og har stået siden da. Den har i de forløbne 10 år været udsat for et par store storme, men ikke noget større snefald. Udover en reparation af et skudhul i en af understøtningernes skiver, er modellen ikke blevet vedligeholdt. I dette fuldskalaforsøg er således både bæreevne, konstruktive detaljer og materialer blevet afprøvet.

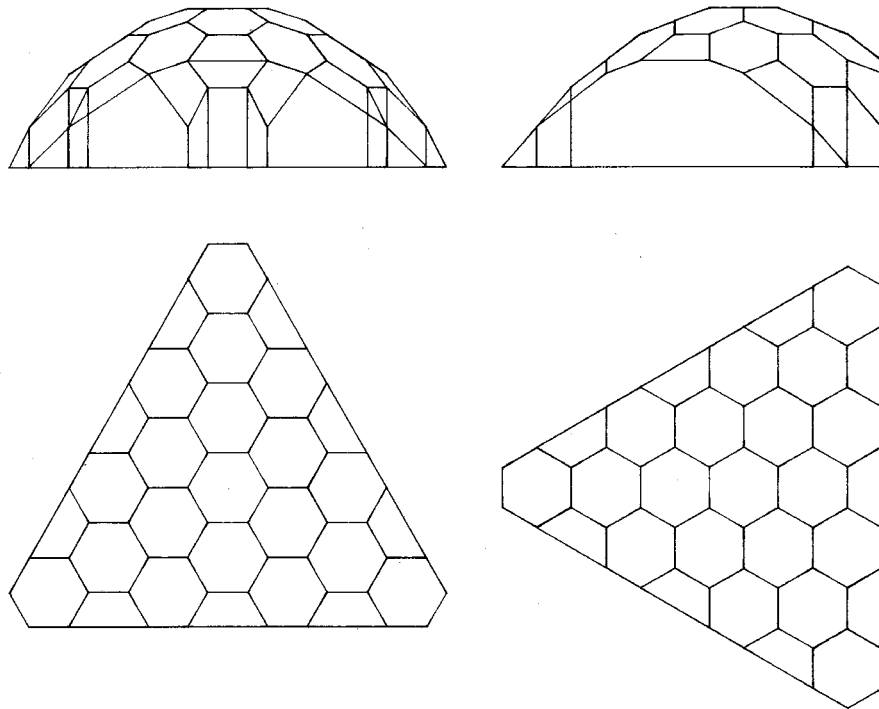


Figur 9.1. Fuldskalamodellen på By og Byg's areal i Hørsholm, fotograferet kort tid efter opførelsen september 1991.

### Udformning

Skallen er udformet som en facetteret omdrejningsparaboloide med en trekantet grundplan. Langs de tre sider er randene fri. Skallen er alene understøttet i hjørnerne. Facetteringen er et eksempel på en facettering over et plant regulært mønster og facetterne danner i grundplanen et mønster af regulære sekskanter med kantlængden 1,0 m. Den symmetriske opbygning betyder at der er mange ens elementer, nemlig enten tre eller seks af hver slags (figur 9.2).





Figur 9.2. Plan og opstalter. De relativt store facetter fremhæver at skallen er opbygget af plane elementer.

Konstruktionens data fremgår af tabel 9.1 nedenfor.

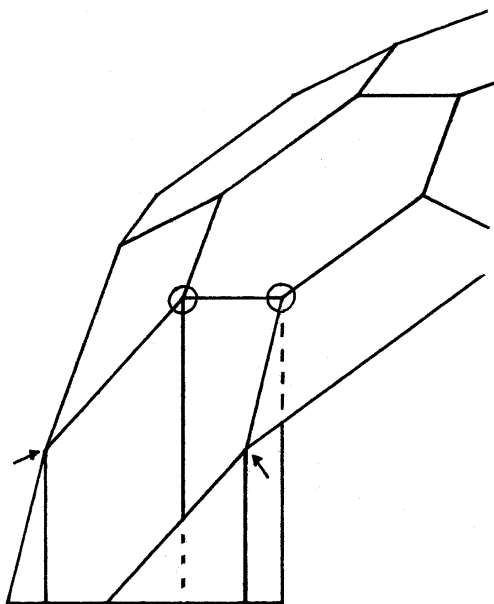
Tabel 9.1.

Data	
Højde	4,0 m
Understøtningsafstand (c - c)	9,0 m
Overdækket areal	53,3 m <sup>2</sup>
Skiveareal skal	64,0 m <sup>2</sup>
Skiveareal understøtninger	18,0 m <sup>2</sup>
Samlet kantlængde	227,0 m
Samlet samlingslængde	88,4 m
Egenvægt skiver	535 kg
Egenvægt samlinger	75 kg
Egenvægt fundamentfliser	3 x 1500 kg
Egenvægt/overdækket areal	11,4 kg/m <sup>2</sup>
Krydsfinerforbrug (19mm)	156 m <sup>2</sup> (spild 47,5 %)
Skruer (5x20, 5x25)	10.000 stk.

#### *Understøtningerne*

Understøtningerne er udformet som lodrette sekskantede rør, indpasset i grundplanens mønster af regulære sekskanter. Rørene udgør i sig selv tre cylinderskaller, der er skråt afskårne i plan med den facet, som understøtningerne erstatter. Cylinderskallerne skal dobbeltunderstøttes på en stiv plade i grundplanen og virker da som understøtninger for selve skalfladen. Rent konstruktivt består cylinderskallerne af fem lodrette skiver, der er fastgjort til en sekskantet betonplade.

Denne geometri frembringer er to firknede hjørner på hver understøtning, der kræver en forbindelse mellem to af de modsatstående skiver. Desuden skal de randskiver, der støder op til understøtningen, forsynes med en forbindelse langs randen til understøtningen (figur 9.3).

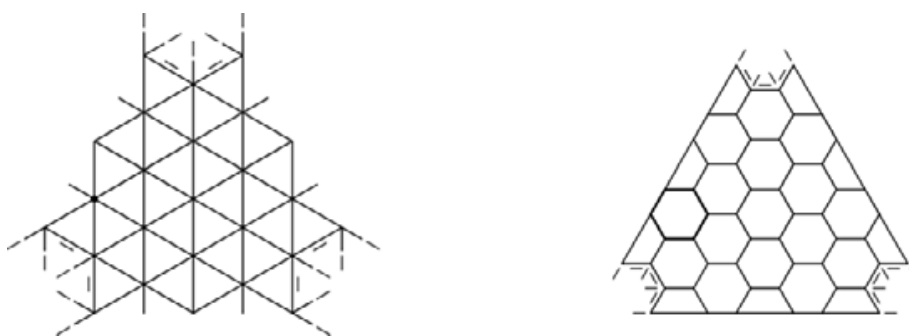


Figur 9.3. Understøtning, de to firknede hjørner er markeret med cirkler, de to manglende forbindelser med pile.

Begge disse forbindelser blev etableret med det samme hjørne-beslag, hvis udformning fremgår nedenfor.

### Stabilitet

Fuldskalamodellens stringersystem er et let modificeret D system. Vi skal ikke komme nærmere ind på skivekonstruktioners stabilitet her, blot kan det nævnes, at ved en skivekonstruktion kan stringersystemets knudepunkter placeres i skiveelementernes tyngdepunkter eller – hvis der er tale om en tangentfacettering – i tangentpunkterne og forbindelserne mellem knuderne svarer da stabilitetsmæssigt til forbindelserne mellem skiverne (figur 9.4).



Figur 9.4. Fuldskalamodellens (skaldelens) stringersystem i vandret projektion til venstre og selve skaldelen til højre. I systemet til venstre repræsenterer hver knude et skiveelement. Understøtninger er vist som en lille streg i forlængelse af – eller parallel med – den understøttede stringer. Til højre er hver understøtning vist med en lille streg parallelt med eller i forlængelse af den skivekant, der skal understøttes. En knude og det tilsvarende skiveelement er fremhævet.

### Materialer og detaljer

Materialerne blev valgt ud fra ønsket om holdbarhed, enkelhed samt kravet om, at SBI's værksteder skulle kunne stå for fremstilling og opførelse.

Desuden var det et ønske, at konstruktionen principielt skulle kunne skilles ad og samles et andet sted.

Valget faldt derfor på:

- vandfast krydsfiner til skiveelementerne
- aluminiumsplade og rustfri skruer til samlingerne.

#### *Skiveelementer*

Elementstørrelsen fordrede krydsfinerplader i dobbelt standardstørrelse: 2,4 m x 2,4 m. De blev fremskaffet i knastfri vand- og kogefast 19mm Gaboon marineplywood.

Styrke og stivhedsværdier blev anslået til at være som Canadisk Douglas Fir Plywood (DFP).

#### *Samlinger og beslag*

I første omgang var laskesamlingerne tænkt som boltesamlinger. Men problemet med boltesamlinger i træ er, at der sker en glidning, inden kræfterne kan optages. Desuden ville det være vanskeligt at placere hullerne med den fornødne præcision med så lange samlinger. Derfor valgtes selvskærende skruer som forbindelsesmiddel i samlingerne.

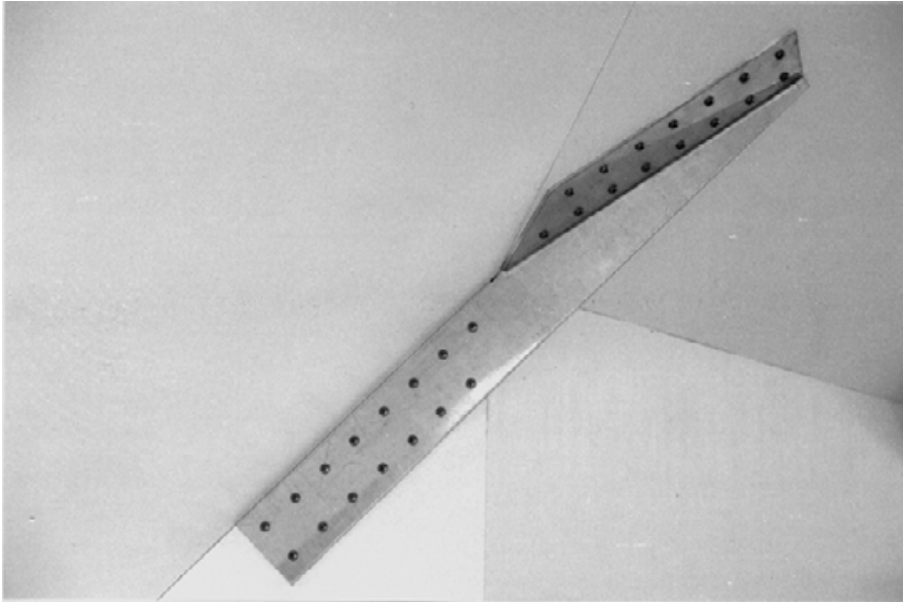
Selve samlingspladerne er udført i 2,5 mm aluminiumsplade, der er perforeret med et kvadratisk hulmønster, hulafstand  $\approx 40$  mm. Aluminium blev valgt fordi det er let at bearbejde og ikke krævede yderligere overfladebehandling. Samlingspladerne er bukket i vinkel og afklippet i enderne svarende til skivehjørnernes vinkelhalveringslinje (figur 9.5).



Figur 9.5. Samlingsdetaljer ved understøtningen.

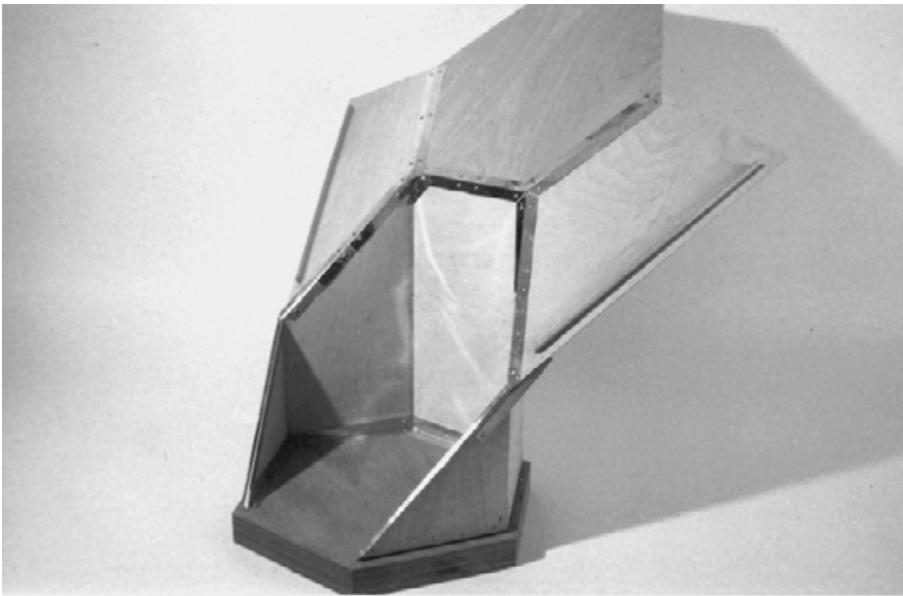
Det kvadratiske hulmønster blev valgt, for at kunne klippe pladerne op på begge leder og dermed spare 2 plader. Men det betød, at der blev brug for 25% flere skruer, end det var nødvendigt af hensyn til bæreevnen. Et enkelt-symmetrisk mønster med færre huller havde derfor været lidt billigere i materialer, til gengæld er den valgte samling væsentlig stivere og mønsteret mere regelmæssigt.

Hjørne-beslagets udformning har sit udgangspunkt i laskepladernes udformning, idet bredde og hulmønster er det samme (figur 9.6).



Figur 9.6. Hjørne-beslaget på understøtningerne.

Beslagets udformning blev fastlagt ved hjælp af en skalamodel af understøtningen i 1:5, se (figur 9.7), så det kunne benyttes til begge forbindelser.



Figur 9.7. Model af understøtningen i 1:5.

Understøtningernes fastgørelse til fundamentfliserne sker med et vinkeljern 100x50x8 mm, der boltes til flisen med ekspansionsbolte. Hulmønstret går igen i vinkeljernets brede flange og skiverne er løftet 20 mm fri af betonen, for at de ikke skal stå i det regnvand, der vil lægge sig på flisen (figur 9.8).



Figur 9.8. Samling mellem lodret skive og fundamentflise.

### Vandbrædder

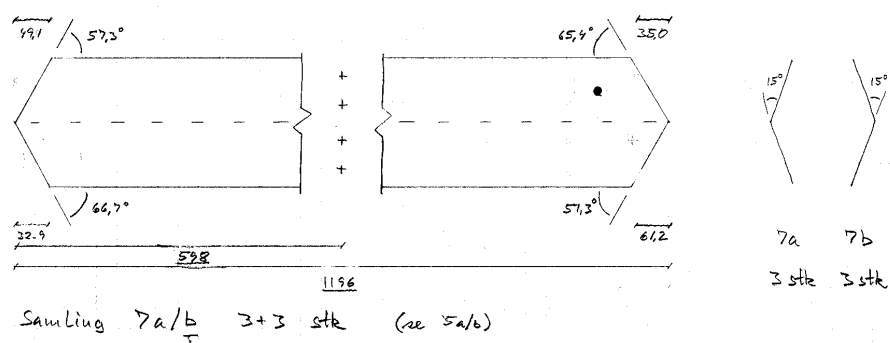
Randskiverne blev forsynet med vandbrædder. De har flere funktioner:

- sørge for at regnvand kun løber ud nogle få steder
- afstive de fri kanter på de enkelte elementer
- danne turbulens og dermed reducere vindens sug på skallen.

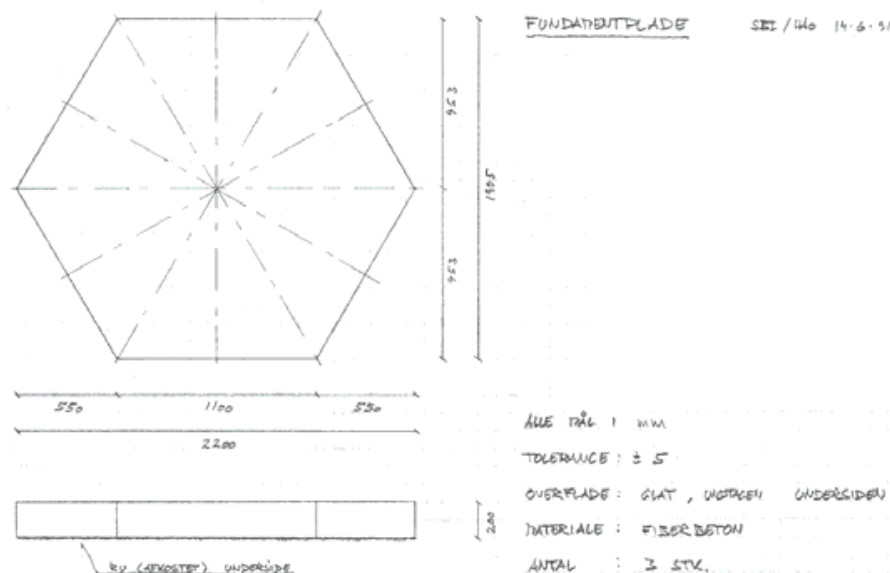
Samtidigt skulle vandbrædderne placeres så de ikke indbød til armgang langs randen. De blev fremstillet af krydsfiner, i 60 mm bredde, og monteret en halv samlingsbredde fra kanterne.

### Tegninger

Der blev fremstillet emnetegninger af alle elementer, samplingsplader, beslag og vandbrædder, se (figur 9.9 og 9.10), samt en montagetegning, se (figur 9.14).



Figur 9.9. Emnetegning: laskeplade til samling 7a/b, se (figur 9.14).



Figur 9.10. Emnetegning: fundamentplade.

### Dimensionering

Konstruktionen blev principielt dimensioneret for to lasttilfælde efter DS 410:

- jævnt fordelt lodret last, svarende til sne, regningsmæssig værdi:  $1,0 \text{ kN/m}^2$
- skæv last, svarende til vind, regningsmæssig værdi:  $1,4 \text{ kN/m}^2$ .

Modellen er placeret ca. 20 m nord for en 3 etagers bygning. Der er træbevoksning i en tilsvarende afstand både øst og vest for modellen og åben mark mod nord. For vindlasten lå følgende værdier til grund for den karakteristiske værdi<sup>11</sup>:

- Terrænklasse: 0,05 (landbrugsland)
- Hastighedstryk:  $0,54 \text{ kN/m}^2$  (højde 4,0 m)
- Formfaktor: 2,0 (størst forekomne ved åbne saddeltage).

For snelasten lå følgende værdier til grund for den karakteristiske værdi:

- Terrænværdi:  $1,0 \text{ kN/m}^2$
- Formfaktor: 0,8 (størst forekomne på saddeltage).

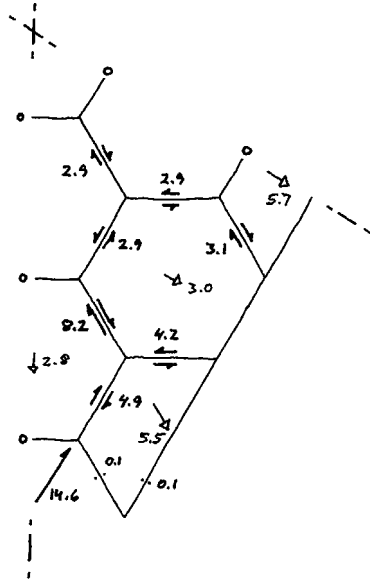
En stor del af beregningerne skulle udføres i hånden og da modellen var en mindre midlertidig konstruktion og et forsøgsobjekt, blev disse to lasttilfælde anset som tilstrækkelige.

Beregningsgangen var som beskrevet i *Bilag 8*. Først beregnes lokalkræfterne og derefter transformeres de resulterende skivekræfter til laster på konstruktionens duale gitter, se (Wester & Feilberg Hansen 1985). Den duale gitterkonstruktion beregnes på et gitterprogram, hvorefter stangkræfterne dualtransformeres til de forskydningskræfter, der skal overføres i samlingerne.

Da momentfeltet, se (Nielsen 1964), for en jævnt fordelt last er en omdrejningsparaboloide, optræder der ikke forskydningskræfter i en facetteret paraboloide, hvis den er understøttet langs hele randen. Derfor er det relativt simpelt at beregne lokalkræfterne for jævnt fordelt lodret last, de er simpelt-

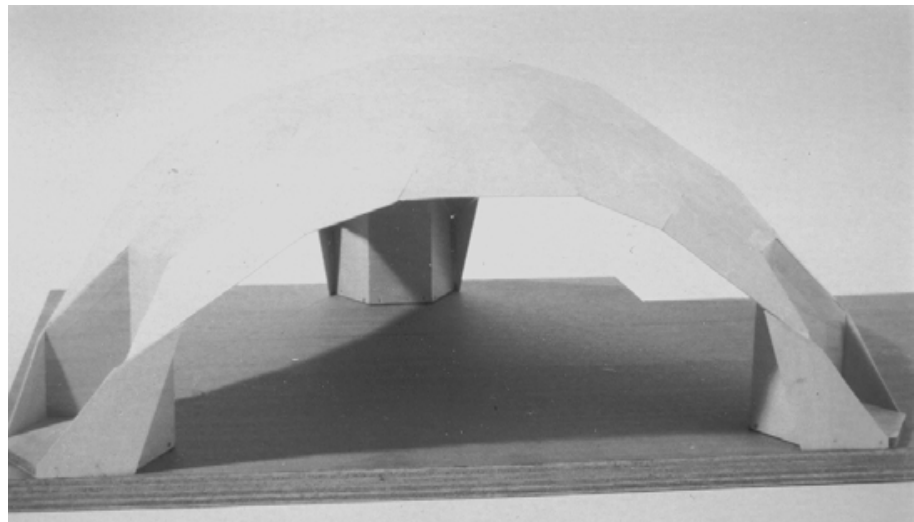
<sup>11</sup> Regningsmæssig værdi = Partialkoefficient (1,3) x formfaktor x karakteristisk lastværdi

hen lig med, men modsat rettet, de normalkræfter, der ville have været på de fri kanter, hvis der havde været et naboelement (figur 9.11).



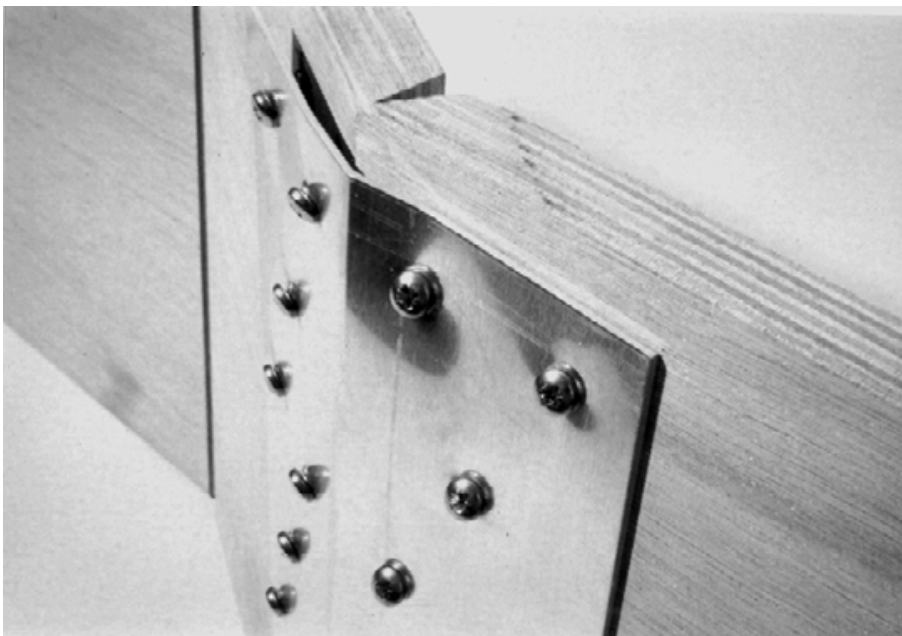
Figur 9.11. Normalkræfter på de fri kanter og de resulterende forskydningskræfter (kN), ved en jævnt fordelt last på  $1.0 \text{ kN/m}^2$  ( $1.0 \text{ kN}$  svarer til  $100 \text{ kg}$ ). Da kræfterne fordeler sig symmetrisk, er de kun vist på  $1/6$  af skallen.

Da beregning af skæv last voldte vanskeligheder, blev der i stedet bygget en skalamodel i forholdet  $1:24$ , i  $0.8 \text{ mm}$  krydsfiner. Modellen kunne uden synlige deformationer bære en last på  $5 \text{ kg}$  på øverste skive, hvilket svarer til en fladelast på  $11 \text{ kN/m}^2$  på denne skive. Da modellen ikke virkede slappere overfor skæv belastning blev det vurderet at skallen var stærk nok (figur 9.12).



Figur 9.12. Belastningsmodel i krydsfiner, skala  $1:24$ .

Understøtninger og samlinger blev beregnet i hånden. Understøtningerne blev dimensioneret med udgangspunkt i beregningen af den jævnt fordelte last som henholdsvis tryk og sug. Samlingerne blev dimensioneret til krydsfinerens forskydningsstyrke. Som kontrol gennemførtes et belastningsforsøg med en prøvesamling for at sikre, at skruernes bæreevne var som forudsat (figur 9.13).



Figur 9.13. Prøvesamling efter belastningsforsøg.

### **Fremstilling**

Fremstilling og montage blev udført af laboratoriet på SBI.

Elementerne blev ridset op manuelt med en tolerance på  $\pm 1$  mm og skåret i smig med en rundsav. Derefter blev de grundet og malet med rulle.

Samplingspladerne blev fremstillet af 2,5 mm aluminiumsplade, der blev indkøbt perforeret i det valgte mønster. Pladerne blev skåret op i strimler efter et på forhånd planlagt mønster. Derefter blev længder og afskæringsvinkler ridset op, kontrolleret og afklippet. Til sidst bukkedes samplingspladerne langs midterlinien i de respektive samplingsvinkler.

De fleste samplingsplader blev herefter skruet på deres ene element, efter at være blevet forsynet med en tætningsliste rundt langs kanten.

De kraftige vinkeljern til fundamentene blev skåret op, forsynet med skruehuller, boltehuller og sendt til forzinkning.

Modellens hovedgeometri blev afsat i terræn. Til understøtningerne afsatte vi tre cirkler og her blev mulden afgravet, hvorpå hullerne blev fyldt op med stabilt grus, som blev nivelleret ind og afrettet vandret, ca. 0.1m under terræn.

Fundamentfliserne af fiberbeton blev leveret udefra. De blev placeret, rettet ind og forsynet med vinkeljern inden montagen af skalelementerne kunne begynde.

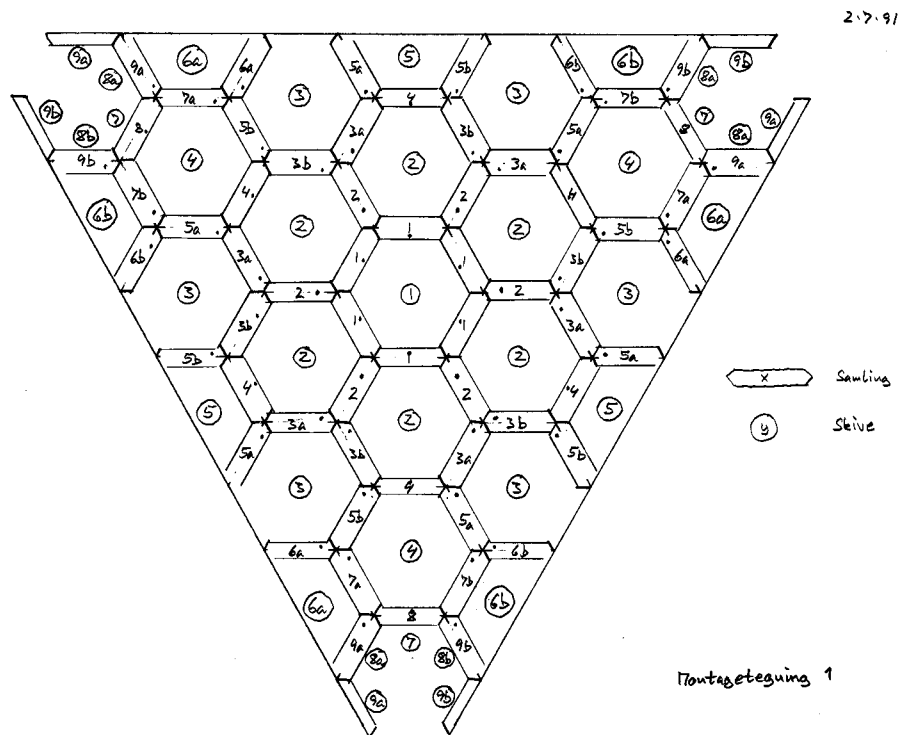
### *Montage*

Montagen var opdelt i tre faser:

- 1 Montage af understøtningernes cylinderskaller
- 2 Montage af skal
- 3 Montage af hjørnebeslag og kantforstærkninger, samt færdigmaling.



- 1 Cylinderskallernes montage krævede en omhyggelig opmåling. Det blev lidt besværliggjort af, at fundamentflisernes overflade ikke var helt plan, men var i øvrigt uden problemer.
- 2 Skallen blev monteret ovenfra. Det øverste vandrette element (1), se (figur 9.14), forsynedes med en vandtæt membran, hvorefter de 6 tilstødende elementer (2) blev monteret, dette skete på marken (figur 9.15a). En lift blev næste dag placeret midt mellem understøtningerne og de 7 samlede elementer blev lagt op på den (figur 9.15b). Herefter monteredes de 6 hele elementer (3) og de 3 halve (5). Dagen efter blæste der en nordvestlig kuling og skallen blev derfor bundet ned. På liftens tredje dag blev skallen først løftet lidt op, for at montere de sidste 9 elementer (4) og (6), hvorpå den blev hævet den sidste meter og monteret på understøtningerne (figur 9.15d).
- 3 Dagen efter monteredes hjørnebeslagene. Senere blev afstivningerne på understøtningerne monteret, de sidste hjørner fuget med elastisk fugemasse og kanter og inderside malet endnu engang.



Figur 9.14. Montagetegning.



Figur 9.15 a, b og c. Montage af selve skallen foregik ovenfra.



Figur 9.15 d. Montage af skallen på understøtning.

### *Erfaringer*

- Opridsning og udskæring af elementer tog en del tid. Nogle simple lærere og lidt rutine vil kunne nedbringe fremstillingstiden væsentligt. En computerstyret udskæring vil være hensigtsmæssigt ved en produktion af et større antal skaller.
- Elementstørrelsen var udmærket. Med en udskåren vægt på 25 kg var elementerne lette at håndtere for to mand.
- Samlingspladernes afskæring i forskellige vinkler krævede omhyggelig opmåling og var meget arbejdskrævende. Ligeså bukningen af samlingspladerne. Den skulle foretages på øjemål, efterkontrolleres og justeres. Igen vil nogle simple lærere og lidt rutine kunne nedbringe fremstillingstiden væsentligt. Også en halvautomatisk produktion og/eller reducerede æstetiske krav vil kunne mindske tidsforbruget.
- De mange skruer blev monteret med skruemaskiner. Det voldte ikke problemer og gik hurtigere end forventet.
- Samlingspladernes placering, på den konvekse side af samlingen, viste sig under montagen at være en fordel. Ved de konkave samlinger på understøtningerne var det nemlig svært at få elementerne stødt sammen, uden at der fremkom en forsætning vinkelret på elementernes plan.
- Konstruktionen er statisk bestemt. Det betød at skallen var fleksibel indtil den sidste samling mellem skal og understøtning var monteret. Det var derfor ikke så vanskeligt at positionere elementerne indbyrdes. En anordning til at spænde elementerne helt sammen under montage af samlingerne ville dog være en hjælp og vil kunne reducere montagetiden en del.



Figur 9.16. En børnehave kommer forbi kort tid efter opførelsen.

### Forsøgsresultater

Modellen har nu stået i 10 år. Den har været udsat for vind og vejr. Samlingspladerne er blevet matte og krydsfinerens overflade og yderkanter bærer præg af den manglende vedligeholdelse. Men bortset fra dette er konstruktionen ikke påvirket (figur 9.17)



Figur 9.17. Fuldsalamodellen, fotograferet september 1991 og september 2001.

### Vindlast

Ifølge Stig Rosenørn, DMI, blev den største vindstyrke i den foreliggende periode målt den 3.12.1999. Ved Sjælsmark, der ligger ca. 4 km væk, blev der målt en vindhastighed på:

- 23 m/s 10min. middelvind
- 37 m/s i stødene.

Vindretningen var V-SV.

Dette svarer til et hastighedstryk på henholdsvis  $0,33 \text{ kN/m}^2$  og  $0,88 \text{ kN/m}^2$ . Antager vi at hastigheden i vindstødende er et gennemsnit over nogle få sekunder, svarer denne til lastnormens kortidsmiddelværdi.

Da terrænklassen ved Sjælsmark formodes at være den samme som ved modellen og fastholdes formfaktoren 2,0 har konstruktionen været udsat for en vindlast på op til:

- $0,7 \text{ kN/m}^2$  over 10 min.
- $1,8 \text{ kN/m}^2$  i stødene.

Vindlasten har da overskredet den regningsmæssige vindlast på  $1,4 \text{ kN/m}^2$  med cirka 30%.

#### *Snelast*

Det største snedække, der har været målt i Sjælsmark i perioden er ifølge DMI 20 - 30cm i februar – marts 1994. Sættes sneens specifikke tyngde til  $2,0 \text{ kN/m}^3$  og fastholdes formfaktoren  $\mu = 0,8$  har største snelast været:

$$S = 0,8 \cdot 0,3\text{m} \cdot 2,0 \text{ kN/m}^3 \\ = 0,48 \text{ kN/m}^2.$$

Hvilket udgør cirka 50% af den regningsmæssige snelast.

#### **Konklusion**

Fuldskaalmodellen har vist at konstruktionstypen er realistisk. Den har også vist at stringermetoden kan anvendes i praksis, at skaller kan konstrueres af skiveelementer og at de er simple at fremstille og hurtige at opføre.

At konstruktionstypen er realistisk understreges af, at denne lette og midlertidige konstruktion har klaret flere store storme og vist sig så holdbar, at den foreløbigt har stået i 10 år uden vedligeholdelse.



Figur 9.18. Fuldskaalmodellen ved vintertid, fotograferet vinteren 1991/92.

## Bilag 10 Modelark

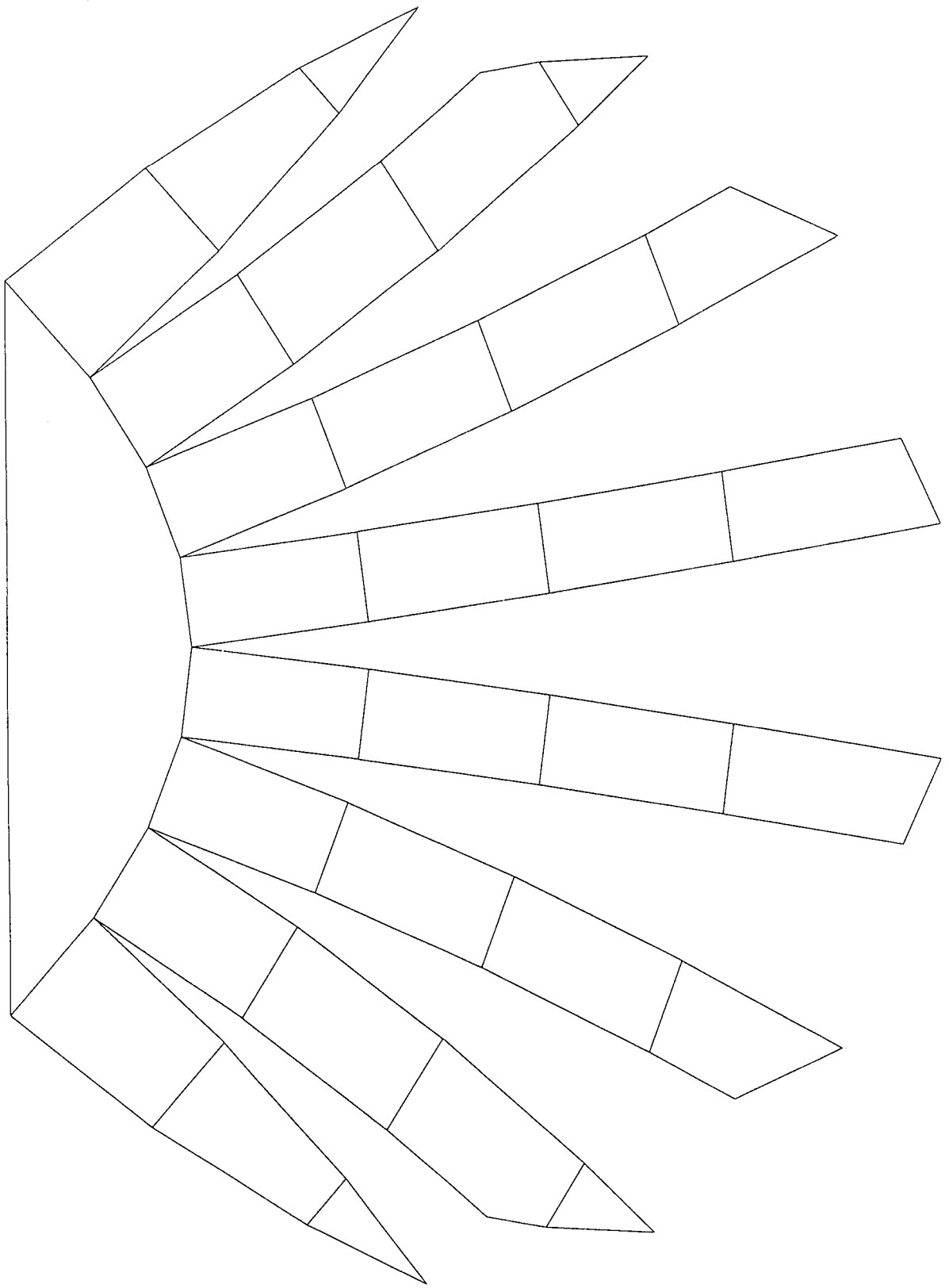
Den følgende side er en udfoldning af model **a**, der er trykt på 200g papir.

Der skal bruges en skarp hobbykniv, et skæreunderlag, en hurtigtørrende hobbylim (den type, der trækker tråde, kræver udluftning og kan nulres af fingrene er velegnet) samt noget kraftigt karton, bølgepap eller eventuelt krydsfiner som bundplade.

Modellen skæres ud med hobbykniven. Der skæres midt i stregen. Alle mellemrum skæres også bort. Øvrige kanter ridses og bukkes. Skallens elementer limes sammen langs kanterne. Sørg for at samlingerne mødes præcist i hjørnerne. Lim til sidst skallen fast på understøtningen.

Yderligere modelark med denne eller andre af de afbildede modeller kan rekvireres hos forfatteren (e-mail: [henrik.almegaard@get2net.dk](mailto:henrik.almegaard@get2net.dk)).







Denne ph.d.-afhandling henvender sig til arkitekter og ingeniører med interesse for skalkonstruktioners tekniske og formmæssige muligheder. I afhandlingen er der udviklet et sæt værktøjer, der kan anvendes i skitseringsfasen til at finde frem til en hensigtsmæssig udformning og understøtning af skaller.

Med de udviklede værktøjer er der udarbejdet en samlet oversigt over de grundlæggende skalformer således at man nemt kan få et overblik over hvilke skalformer, der kan anvendes i en given situation.

Afhandlingen omhandler ikke kun glatte skalflader i fx armeret beton eller tegl, men også skaller udformet som facetterede og elementopdelte skalflader, fx som gitterskaller og skiveskaller.

1. udgave, 2003

ISBN 87-563-1165-6

