



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

**Aalborg Universitet**

## **Noter til kurset i bølgehydraulik**

Frigaard, Peter; Hald, Tue

*Publication date:*  
2000

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Frigaard, P., & Hald, T. (2000). *Noter til kurset i bølgehydraulik*. Aalborg Universitet, Inst. for Vand, Jord og Miljøteknik, Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning.

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

NOTER TIL KURSET I

# BØLGEHYDRAULIK

PETER FRIGAARD og TUE HALD

---

Nul'te udgave November 2000  
Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning  
Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik  
AAU, Sohngaardsholmsvej 57, 9000 Aalborg

NOTER TIL KURSET I

# BØLGEHYDRAULIK

PETER FRIGAARD og TUE HALD

Nul'te udgave November 2000  
Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning  
Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik  
AAU, Sohngaardsholmsvej 57, 9000 Aalborg





# Forord

Nærværende noter er specielt skrevet til kurset i bølgehydraulik, som er placeret på konstruktionsliniens 7. semester på bygningsingeniøruddannelsen på Aalborg Universitet, 2000.

Kurset ligger i forlængelse af strømningslærekurset og er samtidig en introduktion til kurset kysthydraulik. Noterne dækker 5 forelæsninger:

- Definitioner. Udledning af hastighedspotentialet.
- Partikelbaner, hastigheder og accelerationer. Trykfeltet.
- Shoaling, refraktion, diffraktion og brydning.
- Præsentation af uregelmæssige bølger. Tidsdomæneanalyse af bølger.
- Bølgespektre. Frekvensdomæneanalyse af bølger.

Noterne er baseret på nedenstående eksisterende noter og lærebøger, hvorfra også mange figurer er hentet. En detaljeret oversigt over litteratur indenfor emnet findes bagest i noterne.

- H.F.Burcharth: Bølgehydraulik, AaU (1984)
- H.F.Burcharth og Torben Larsen: Noter i bølgehydraulik, AaU (1988).
- Zhou Liu and Peter Frigaard: Random Seas, AaU (1997)
- Ib A.Svendsen and Ivar G.Jonsson: Hydrodynamics of Coastal Regions, Den private ingeniørfond, DtU.(1989).



# Indhold

<b>1</b>	<b>Fænomener, Definitioner og betegnelser</b>	<b>5</b>
1.1	Bølgeklassifikation . . . . .	5
1.2	Beskrivelse af bølger . . . . .	6
1.3	Definitioner og betegnelser . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Lineær bølgeteori</b>	<b>9</b>
2.1	Fysisk analyse af ikke-brydende bølger med bundgrænselag . . .	9
2.2	Hydrodynamiske grundligninger. . . . .	11
2.3	Randbetingelser for plane periodiske bølger på konstant vand- dybde: . . . . .	12
2.4	Løsning af Laplanceligningen . . . . .	19
2.5	Partikelhastigheder og -accelerationer . . . . .	22
2.6	Trykfeltet . . . . .	23
2.7	Partikelbaner . . . . .	24
2.8	Diskussion af dispersionsligningen . . . . .	28
2.9	Bølgers energiindhold . . . . .	29
2.10	Vurdering af lineær bølgeteori . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Ændringer i bølgeformen</b>	<b>35</b>
3.1	Shoaling . . . . .	36
3.2	Refraktion . . . . .	38
3.3	Diffraction . . . . .	42
3.4	Bølgebrydning . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Irregular Waves</b>	<b>49</b>
4.1	Vindgenererede bølger . . . . .	49
4.2	Time-Domain Analysis of Waves . . . . .	50
4.3	Frequency-Domain Analysis . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Referencer</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Hyperbolske funktioner</b>	<b>79</b>

<b>B</b>	<b>Definitioner, betegnelser og fænomener</b>	<b>81</b>
B.1	Definitioner og betegnelser . . . . .	81
B.2	Partikelbaner . . . . .	82
B.3	Bølgegrupper . . . . .	83
B.4	Bølgeklassifikation efter oprindelse . . . . .	83
B.5	Bølgeklassifikation efter stejthed . . . . .	84
B.6	Bølgeklassifikation efter vanddybde: . . . . .	84
B.7	Bølgeklassifikation efter energiudbredelsesretninger: . . . . .	84
B.8	Bølgefænomener. . . . .	85
<b>C</b>	<b>Formler for regelmæssige bølger</b>	<b>89</b>
C.1	Lineær bølgeteori . . . . .	89
C.2	Bølgeudbredelse . . . . .	90
<b>D</b>	<b>Opgaver</b>	<b>91</b>
D.1	Bestemmelse af bølgelængden . . . . .	91
D.2	Bølgehøjdebestemmelse . . . . .	92
D.3	Beregning af bølgebrydningspositioner . . . . .	92
D.4	Bestemmelse af $H_s$ . . . . .	93
D.5	Bestemmelse af $H_{m0}$ . . . . .	93
<b>E</b>	<b>Eksempelopgaver</b>	<b>95</b>
E.1	Nul-nedkrydsnings opgave/eksempel . . . . .	96
E.2	Bølgespektre . . . . .	97



# Kapitel 1

## Fænomener, Definitioner og betegnelser

### 1.1 Bølgeklassifikation

Man kan skelne mellem flere bølgetyper alt efter hvordan bølgerne er dannet og hvordan deres periode er.

Bølgefænomen	Oprindelse	Periode
Vindstuvning	Vindpåvirkning af vandoverflade	1 – 30 dage
Tidevand	Månens og solens gravitation	ca. 12 og 24 timer
Barometrisk bølge	Ændring i lufttryk	1 – 20 timer
Tsunami	Jordskælv, undersøisk vulkan	5 – 60 min.
Seiches, vandspejlssvingninger i bugter og havnebassiner	Resonans af langperiodiske komponenter i bølgegrupper, surf beat og tsumanis	1 – 30 min.
Surf beat, svingning af middelvandspejl på kyst Jord(klippe)skredsbølge	Bølgegrupper	0,5 – 5 min.
Dønning	Vindgenererede bølger	< 40 sek.
Vindgenererede bølger	Vindpåvirkning af vandoverflade	< 25 sek.

I praksis opfattes fænomenerne i første gruppe ikke umiddelbart som bølger, men derimod som langsomme ænringer af vandspejlets beliggenhed. Sådanne fænomener betegnes derfor vandstandsvariationer, og beskrives ud fra middelvandstanden betegnet MVS.

I det følgende beskrives kun bølgefænomener knyttet til kortperiodiske bølger. Ved kortperiodiske bølger forstås typiske vindgenererede bølger, dvs. bølge-

perioder mindre end ca. 40 sek. Denne gruppe indeholder også de for danske farvande væsentligste bølgefænomener.

## 1.2 Beskrivelse af bølger

En vindblæst havoverflade fremstår med en meget uregelmæssigt bølgende overflade, hvor bølger tilsyneladende ustandseligt opstår og forsvinder, hvor mindre krusninger og bølger overlejrer større bølger og hvor bølgerne vandrer med forskellig hastighed og tildels forskellig retning. Et detaljeret beskrivelse virker således umulig, og det er derfor nødvendigt med nogle forenklinger, som gør det muligt at beskrive de større karakteristiske ændringer i bølgemønsteret.

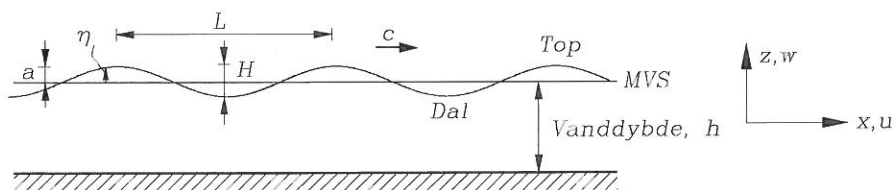
Bølgerne klassificeres således efter deres energiudbreddelsesretninger i to overordnede typer:

Efter bølge- ortogonalretningen:	2-dimensionale (plane) eller såkaldte langkammede bølger (typisk dønninger på flade kyster)
-------------------------------------	---

Med retningsspredning i horisontalplanet:	3-dimensionale eller såkaldte kortkammede bølger (typisk vindgenererede stormbølger)
--	--

I resten af disse noter betragtes bølgerne som 2-dimensionale og bølgerne beskrives v.h.a. en lineær bølgeteori, den såkaldte Stokes 1. orden teori.

### 1.3 Definitioner og betegnelser

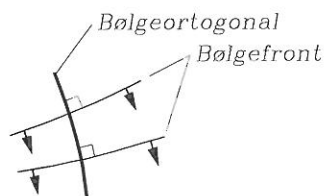


$H$	bølgehøjde
$a$	bølgeamplitude
$\eta$	Vandspejlsudsving i forhold til MVS
$L$	bølgelængde
$\frac{H}{L}$	bølgestejlhed
$T = \frac{L}{c}$	bølgeperiode, tid imellem to toppes passage af samme vertikal
$c$	er bølgeformens udbredelseshastighed, fasehastigheden
$u$	horisontal partikelhastighed
$w$	vertikal partikelhastighed
$k = \frac{2\pi}{L}$	bølgetal
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	cyklisk frekvens, vinkelhastighed
$h$	vanddybde

Bølgefronter



Bølgeortogonaler





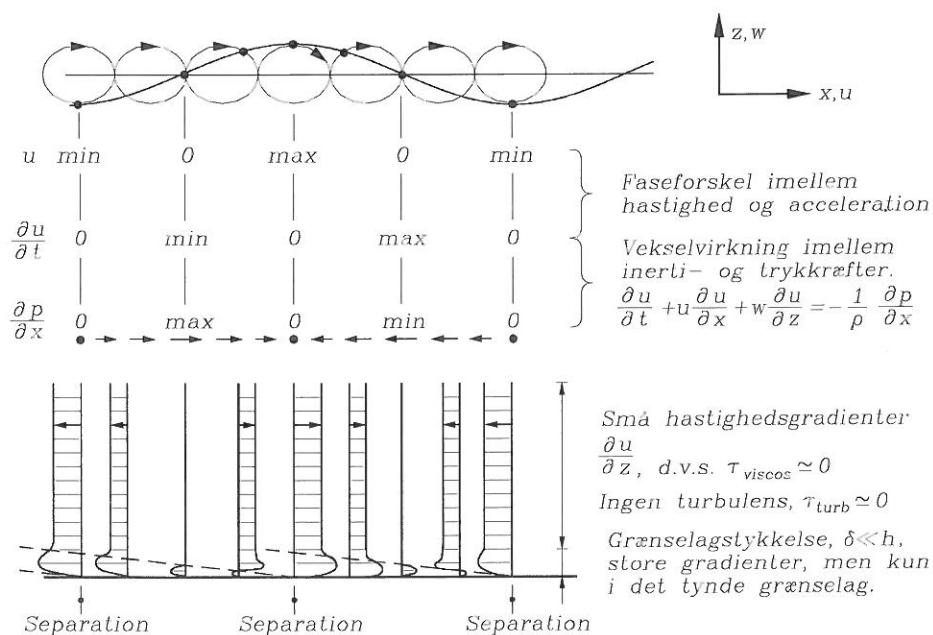


# Kapitel 2

## Lineær bølgeteori

### 2.1 Fysisk analyse af ikke-brydende bølger med bundgrænselag

I det følgende vil vi opstille en teori for ikke-brydende bølger med bundgrænselag. En analysen gennemføres med det formål at opstille simple men fysisk set relevante hydrodynamiske antagelser, som kan danne grundlag for udledning af analytiske udtryk for parametre som partikelhastighed, partikelbaner, tryk mv.



Figur 2.1: Observerede partikelbevægelser i bølger.

Grunden til den hurtigere vending af hastigheden nær væggen er, at  $\frac{\partial p}{\partial x}$  er næsten konstant over grænselagets tykkelse ( $\delta$  meget lille), hvor de små partikelhastigheder (lille inertie) medfører en hurtigere respons på trykgradienten end i den fri strømning.

I grænselaget dannes hvirvler ( $rot\vec{v} \neq 0$ ), som delvis transporteres ud i den fri strømning. Kun en lille del af de skabte hvirvler transporteres ud i den fri strømning, da hvirvlerne på grund af hurtige skift i partikelhastighederne i bølgen vil modarbejde sig selv. Grænselaget påvirker således næsten ikke den fri strømning.

I grænselaget er  $rot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \simeq \frac{\partial u}{\partial z}$ , idet  $w \simeq 0$  og dermed er også  $\frac{\partial w}{\partial x} \simeq 0$ . Da  $\frac{\partial u}{\partial z}$  antager store værdier er rotationen  $\neq 0$ , men skifter fortegn, når partikelhastigheden vender. Uden for grænselaget antages strømmingen rotationsfri ud fra følgende ræsonnement:

Da de viskose kræfter  $\simeq 0$ , og da de ydre kræfter i alt væsentligt er konservative, dvs. energibevarende (kun gravitation og trykkræfter fra vinden, idet vindforskydningspænding og overfladepænding er negligable), vil rotationen være konstant iflg. Kelvin's teorem. Da  $rot\vec{v} = 0$  oprindeligt, vil dette fortsat være gældende.

Konklusionen af ovenstående er, at den fri strømning (bølgerne) med god tilnærmelse må kunne betragtes som en *potentialstrømning*.

Hastighedspotentialet er en funktion af  $x$ ,  $z$  og  $t$ ,  $\varphi = \varphi(x, z, t)$ . Både  $\varphi(x, z, t)$  og  $\varphi(x, z, t) + f(t)$  vil repræsentere det samme hastighedsfelt  $(u, w)$ , idet  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$  er ens. Referencen for tryk vil imidlertid være forskellig.

Med indførelsen af  $\varphi$  reduceres antallet af ubekendte fra tre  $(u, w, p)$  til to  $(\varphi, p)$ .

## 2.2 Hydrodynamiske grundligninger.

Fra strømningelæren (potentialteori) hentes følgende hydrodynamiske grundligninger:

*Kontinuitetsligningen for usammentrykkelig væske (2D)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{eller} \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

*Bevægelsesligningen*

Newton's 2. lov for en *partikel* med massen  $m$  påvirket af de ydre kræfter  $\sum \vec{K}$  er,  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{K}$ .

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \vec{g} \quad (+ \text{ eventuelle viskose kræfter}) \quad (2.2)$$

*Bernoulli's ligning*

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$
$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

*Laplace-ligningen (plan strømning)*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

Løsning af ligningssystemet:

(2.3) og (2.4) er 2 ligninger med 2 ubekendte  $(\varphi, p)$ . (2.4) kan løses separat, såfremt randbetingelserne kun indeholder  $\varphi = \varphi(x, z, t)$ . Herefter kan  $p$  findes af (2.3). For potentialstrømninger kan  $p$  derfor opfattes som en slags reaktion på det allerede bestemte hastighedsfelt, en reaktion som i ethvert punkt selvsagt må opfylde bevægelsesligningerne (Newton's 2. lov).

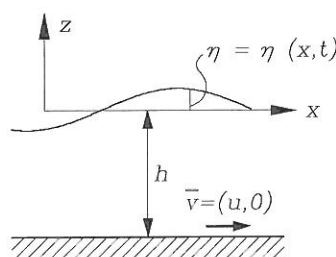
## 2.3 Randbetingelser for plane periodiske bølger på konstant vanddybde:

Vi forudsætter usammentrykkelig væske og  $\text{rot}\vec{v} = \vec{0}$ .

Randbetingelse ved bund

Ingen gennemstrømning

$$w = 0 \text{ eller } \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = -h \quad (2.5)$$



Randbetingelse ved fri overflade

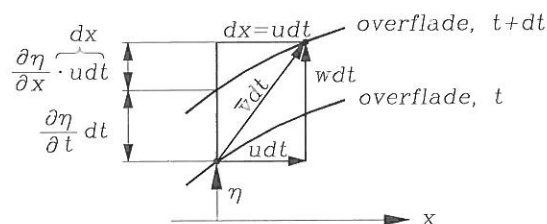
En partikel i overfladen forbliver i overfladen (kinematisk randbetingelse).

Den *kinematiske randbetingelse* kan udtrykkes ved at overfladens vertikale hastighed skal være lig med partiklens vertikale hastighed, dvs.

$$w = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} u, \text{ eller} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{for } z = \eta$$

Dette indses også af følgende figur.



Trykket i overfladen er lig atmosfæretrykket (dynamisk randbetingelse).

Den *dynamiske betingelse* udtrykkes som følger, idet vi sætter atmosfæretrykket  $p_0 = \text{konstant}$  langs overfladen, dvs.  $p_0 = p_0(t)$ , altså kun funktion af tid. Indsættes i (2.3), hvor højresiden jo netop udtrykker et konstant tryk pr. massetæthed, fås

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho} \quad \text{for } z = \eta$$



som i grænsefladen  $z = \eta$  hvor  $p = p_0$  antager formen

$$g\eta + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{for } z = \eta \quad (2.7)$$

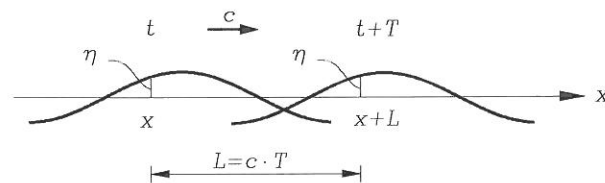
Dette kan også fås af (2.3) ved at  $p$  regnes som overtryk over atmosfæretrykket.

Randbetingelse udtrykkende konstant bølgeform (periodicitetsbetingelse)

*Periodicitetsbetingelsen* afspejler det forhold, at der er tale om en fremadskridende bølge med konstant form. Dette lægger et bånd på den måde, hvorpå  $\eta$  og  $\varphi$  (dvs. overflade og hastighedsfelt) kan variere med  $x$  og  $t$  (dvs. sted og tid).

Kravet om konstant form medfører, at

$$\eta(x, t) = \eta(X + nL, t) = \eta(X, t + nT), \quad \text{hvor } n = 1, 2, 3, \dots$$



Dette krav opfyldes, såfremt  $(x, t)$  kombineres i variabelen  $(L \frac{t}{T} - x)$ , idet  $\eta(L \frac{t}{T} - x) = \eta(L \frac{(t+nT)}{T} - (x + nL)) = \eta(L \frac{t}{T} - x)$ . Da den variable ønskes beskrevet på dimensionsløs form kan den udtrykkes som  $\frac{2\pi}{L} (L \frac{t}{T} - x) = 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x}{L})$ , hvor faktoren  $2\pi$  er tilføjet af hensyn til senere beregninger.

Vi har således formuleret periodicitetskravet til

$$\eta = \eta(\theta) \quad \text{og} \quad \varphi = \varphi(\theta, z) \quad \text{hvor} \quad \theta = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \quad (2.8)$$

Indføres  $k = \frac{2\pi}{L}$  og  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  fås

$$\theta = \omega t - kx \quad (2.9)$$

Vi skal kontrollere, at (2.8) og (2.9) svarer til en fremadskridende bølge, dvs. at for en given  $\eta$  skal  $x$  vokse med  $t$ . Af (2.9) ses, at for konstant  $\theta$ , dvs. en given  $\theta$ , vil dette være tilfældet, idet

$$X = \frac{1}{k}(\omega t - \theta)$$

Indføres  $+$  i stedet for  $-$  i (2.9) skifter bølgen udbredelsesretning.

Diskussion af løsningsmuligheder:

$$\text{Laplace-lign.} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{Bundrandbet.} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = -h \quad (2.11)$$

$$\text{Kin. randbet.} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{for } z = \eta \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Dyn. randbet.} \quad g\eta + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \\ \text{for } z = \eta \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Periodicitet} \quad \eta(x, t) \text{ og } \varphi(x, z, t) \Rightarrow \\ \eta(\theta), \varphi(\theta, z) \\ \text{hvor } \theta = \omega t - kx \end{aligned}$$

En analytisk løsning viser sig umulig.

Dette skyldes de ikke-lineære randbetingelser ved den fri overflade, samt det forhold, at den fri overflade,  $\eta$ , er en overtallig ubekendt, som ikke indgår i ligning (2.4), der kun er i  $\varphi$ . Der mangler således en styrende ligning, hvor  $\eta$  indgår.

En matematisk forenkling er påkrævet.

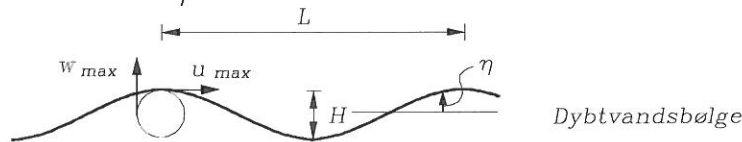
Antager vi, at  $H/L \ll 1$ , dvs. lille bølgestejlhed, viser det sig, at randbetingelserne kan lineariseres og at  $\eta$  kan elimineres svarende til, at betingelserne med god tilnærmelse kan anvendes for  $z = 0$  i stedet for  $z = \eta$ .

Linearisering af randbetingelser:

Kinematiske randbetingelse:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{for } z = \eta \quad (2.14)$$

Leddenes indbyrdes størrelsesorden vurderes som følger, idet  $\sigma$  betegner størrelsesorden. Det viser sig, at partiklerne i dybtvandsbølger følger cirkulære baner. Diameteren i en cirkulærpartikelbane er  $H$ , og i løbet af en periode  $T$  gennemløbes således en hel cirkelbevægelse. Hastigheden kan derfor approksimeres med  $\pi H/T$ .



$$\max \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_{max} = \frac{\pi H}{T} = \sigma \left( \frac{H}{T} \right)$$

$$\max \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w_{max} = \frac{\pi H}{T} = \sigma \left( \frac{H}{T} \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \sigma \left( \frac{H}{L} \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \sigma \left( \frac{H}{T} \right), \text{ idet } \eta \text{ ændres } H \text{ over tiden } T/2$$

Af (2.14) fås

$$\sigma \left( \frac{H}{T} \right) = \sigma \left( \frac{H}{T} \right) + \sigma \left( \frac{H}{L} \right) \sigma \left( \frac{H}{T} \right)$$

hvoraf ses, at sidste led er en størrelsesorden mindre end de andre led, idet  $\frac{H}{L} \ll 1$ . (Ræsonnementet kan være farligt, idet vi ikke har taget samtidigheden af ledenes værdier i regning).

Den lineariserede kinematiske randbetingelse bliver således

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \text{for } z = \eta \quad (2.18)$$

Imidlertid ved vi ikke, hvor overfladen ligger. En yderligere forenkling søges.  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , som er det eneste led i (2.18) der afhænger af  $z$ , rækkeudvikles derfor i en Taylor række til bedømmelse af mulighederne for bortkastning af højere ordens led.

Idet  $a$  repræsenterer en afvigelse fra variabelen  $z$  kan

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z)$$

Differentiationerne  $f', f'', \dots$  udføres med hensyn til den variable  $z$ .

Alternativt kan skrives

$$f(z + \Delta z) = f(z) + \frac{\Delta z}{1!} f'(z) + \frac{\Delta z^2}{2!} f''(z) + \dots$$

Altså fås

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,\eta,t) &= \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,0,t) + \frac{\eta}{1!} \frac{\partial^2\varphi(x,0,t)}{\partial z^2} + \dots \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,0,t) + \frac{\eta}{1!} \left( \frac{-\partial^2\varphi(x,0,t)}{\partial x^2} \right) + \dots\end{aligned}\quad (2.19)$$

idet  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$  er benyttet.

Da  $\eta = \sigma(H)$  og  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \sigma\left(\frac{1}{L} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \sigma\left(\frac{1}{L} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ , idet  $u = \sigma(w)$ , fås af (2.19)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,\eta,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,0,t) + \overbrace{\sigma\left(\frac{H}{L} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}^{\sigma\left(\frac{H}{L} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} \left( \frac{-1}{L} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \simeq \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,0,t), \text{ da } \frac{H}{L} \ll 1.$$

Regnes derfor i (2.14) og (2.18) med  $z = 0$  i stedet for  $z = \eta$ , svarer dette til at udelade det lille andenordensled.

Den *lineariserede kinematiske randbetingelse* forenkles herefter til

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad \text{for } z = 0 \quad (2.20)$$

Den fejl, der begås ved at bestemme  $\varphi$  langs linien  $z = 0$  i stedet for langs kurven  $z = \eta$ , er således lille af anden orden.

### Dynamisk randbetingelse

$$g\eta + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{for } z = \eta \quad (2.21)$$

Til vurdering af leddet  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 's størrelse benyttes  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$

dvs.  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = \sigma \left( \frac{1}{L} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \left( \frac{H/T}{T} \right)$ , idet  $u = \sigma \left( \frac{H}{T} \right)$ .

Heraf fås

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sigma \left( L \frac{H}{T^2} \right) \quad (2.22)$$

Yderligere haves

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 \simeq \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 = \sigma \left( \frac{H}{T} \right)^2 = \sigma \left( L \frac{H}{T^2} \right) \sigma \left( \frac{H}{L} \right) = \sigma \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cdot \frac{H}{L} \right)$$



dvs., at de kvadratiske led er små af højere orden og bortkastes derfor. Altså fås

$$g\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{for } z = \eta \quad (2.23)$$

Problemet med den ukendte beliggenhed af overfladen,  $\eta$  er dog stadig til stede.  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ , som er det eneste led i (2.23), der afhænger af  $z$ , undersøges derfor ved rækkeudvikling.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, \eta, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, 0, t) + \frac{\eta}{1!} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, 0, t) \right) + \dots \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sigma \left( L \frac{H}{T^2} \right) \text{ iflg. (2.22),}$$

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) &= \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \sigma(H) \sigma \left( \frac{1}{T} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \\ &\sigma(H) \sigma \left( \frac{1}{T} \right) \sigma \left( \frac{H}{T} \right) = \sigma \left( \frac{H^2}{T^2} \right) = \sigma \left( \frac{H}{L} \right) \sigma \left( L \frac{H}{T^2} \right) \text{ hvilket er} \\ &\sigma \left( \frac{H}{L} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) \text{ dvs. } \ll \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Andet led i (2.24) er dermed lille af højere orden og bortkastes, svarende til at der i (2.23) regnes med  $z = 0$  i stedet for  $z = \eta$ .

Den *lineariserede dynamiske randbetingelse* forenkles herefter til

$$g\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (2.25)$$

De lineariserede randbetingelser (2.20) og (2.25) kan samles i én overfladerandbetingelse. Differentieres (2.25) med hensyn til  $t$  fås

$$g \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (2.26)$$

Ved indsættelse i (2.20) fås

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (2.27)$$

Det bemærkes, at den ubekendte  $\eta$  nu er ude af randbetingelserne.

Vi kan nu resumere det matematiske problem som følger:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\
 z=0 \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (0, z, t) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} (L, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (0, z, t+T) \\
 z=-h \\
 x=0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad x=L
 \end{array}$$

Periodicitetsbetingelsen kan som anført i det foregående indføres ved at erstatte de variable  $(x, t)$  med  $\theta$  givet ved (2.9), dvs. at Laplanceligningen og randbetingelserne omskrives således at  $\varphi(\theta, z)$  i stedet for  $\varphi(x, z, t)$ .

Vi vil derfor skifte koordinater fra  $(x, t)$  til  $(\theta)$  i Laplanceligningen og i randbetingelserne.

Idet sammenhængen imellem  $x, t$  og  $\theta$  er givet ved (2.9),  $\theta = \omega t - kx$  findes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} (-k) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} (-k) \right)}{\partial \theta} (-k) = k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \quad (2.29)$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \omega \\
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \omega^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}
 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Indføres nu (2.29) i Laplanceligningen (2.4) fås

$$k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.31)$$

Indføres (2.30) i den fri overflade randbetingelse (2.27) fås

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (2.32)$$

Randbetingelsen ved bunden er uændret.

Periodicitetsbetingelsen  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} (0, z, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (L, z, t)$  ændres som følger:

$$\text{For } x = 0 \text{ og } t = t \quad \text{fås, } \theta = 2\pi \frac{t}{T}.$$

$$\text{For } x = L \text{ og } t = t \quad \text{— } \theta = 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi.$$

Ved brug af (2.28) findes, idet  $(x, t)$  erstattes af  $\theta$

$$-k \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \left( 2\pi \frac{t}{T}, z \right) = -k \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \left( 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi, z \right),$$

som skal gælde for alle  $t$  og dermed også for  $t = 0$ . Idet periodiciteten kunne være udtrykt for  $x = -L$  i stedet for  $x = L$  ses, at fortegnet for  $2\pi$  kan ændres. Altså fås

$$-k \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} (0, z) = -k \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} (2\pi, z) \quad (2.33)$$

som er den omformulerede periodicitetsbetingelse.

## 2.4 Løsning af Laplaceligningen

Laplaceligningen forsøges løst ved separationsmetoden. Vi indfører nu

$$\varphi(\theta, z) = f(\theta) \cdot Z(z) \quad (2.34)$$

i (2.31) og får

$$k^2 f'' Z + Z'' f = 0$$

som ved division med  $\varphi = fZ$  giver

$$-k^2 \frac{f''}{f} = \frac{Z''}{Z} \quad (2.35)$$

Da venstre side kun afhænger af  $\theta$  og højre side af  $z$  må begge sider være lig den samme konstant, som benævnes  $\lambda^2$ . Altså fås to ligninger

$$f'' + \frac{\lambda^2}{k^2} f = 0 \quad (2.36)$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0 \quad (2.37)$$

Ligning (2.36) har løsningen

$$f = A_1 \cos \left( \frac{\lambda}{k} \theta \right) + A_2 \sin \left( \frac{\lambda}{k} \theta \right) = A \sin \left( \frac{\lambda}{k} \theta + \delta \right) \quad (2.38)$$

hvor  $\delta$  kan sættes lig 0 svarende til et passende valg af nulpunktet for  $\theta = (x, t)$ . Altså fås

$$f = A \sin \left( \frac{\lambda}{k} \theta \right) \quad (2.39)$$

Periodicitetsbetingelsen (2.33) giver ved indsættelse af (2.34)

$$f'(0) = f'(2\pi)$$

Af (2.39) fås  $f' = A \frac{\lambda}{k} \cos\left(\frac{\lambda}{k} \theta\right)$  hvorved

$$A \frac{\lambda}{k} \cos\left(\frac{\lambda}{k} 0\right) = A \frac{\lambda}{k} = A \frac{\lambda}{k} \cos\left(\frac{\lambda}{k} 2\pi\right), \quad \text{dvs.}$$

$$\frac{\lambda}{k} = n, \quad \text{hvor } n = 1, 2, 3, \dots \quad (n \neq 0, \text{ da } \lambda \neq 0)$$

Indsættes i (2.39) fås

$$f = A \sin(n\theta) = A \sin\left(\frac{\lambda}{k} \left(\omega t - \frac{2\pi}{L} x\right)\right)$$

Da  $x = L$  skal svare til én bølgelængde, må  $\frac{\lambda}{k} = 1$ , dvs. at kun  $n = 1$  kan være en løsning. Dette ses også direkte, når det erindres, at  $\theta = 2\pi$  netop svarer til én bølgelængde.

Altså fås

$$f = A \sin\theta \tag{2.40}$$

Ligning (2.37) har løsningen

$$Z = B_1 e^{\lambda z} + C_1 e^{-\lambda z} \tag{2.41}$$

Idet  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  og  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  og vi vælger  $B_1 = \frac{B+C}{2}$  og  $C_1 = \frac{B-C}{2}$  samt indfører  $\lambda = k$ , jf. ovenstående, fås

$$Z = B \cosh kz + C \sinh kz \tag{2.42}$$

Integrationskonstanterne  $A, B$  og  $C$  i (2.40) og (2.42) bestemmes af randbetingelserne.

Indføres (2.34) i bundbetingelsen (2.5),  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  for  $z = -h$ , fås

$$Z' = 0 \quad \text{for } z = -h$$

som indført i (2.42) differentieret giver

$$B k \sinh(-kh) + C k \cosh(-kh) = 0 \quad \text{eller} \quad B = C \coth kh$$

idet  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$  og  $\cosh(-x) = \cosh(x)$ .

Ligning (2.42) bliver nu

$$\begin{aligned} Z &= C (\coth kh \cosh kz + \sinh kz) \\ &= \frac{C}{\sinh kh} (\cosh kh \cosh kz + \sinh kh \sinh kz) \\ &= C \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ved indsættelse af (2.40) og (2.43) i (2.34) fås

$$\varphi = AC \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin\theta \quad (2.44)$$

Konstanterne  $A$  og  $C$  bestemmes nu ved hjælp af den lineariserede dynamiske randbetingelse (2.25),  $\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial t}$  for  $z = 0$ , der udtrykker overfladeformen. Ved brug af (2.44) findes

$$\eta = -\frac{\omega}{g} AC \frac{\cosh kh}{\sinh kh} \cos\theta \quad , \quad (2.45)$$

hvor størrelsen  $-\frac{\omega}{g} AC \frac{\cosh kh}{\sinh kh}$  åbenbart repræsenterer bølgeamplituden  $a \equiv \frac{H}{2}$ . Bølgeformen er da givet ved

$$\eta = a \cos\theta = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (2.46)$$

og hastighedspotentialet (2.44) ved

$$\varphi = -\frac{a g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (2.47)$$

Sammenhængen imellem  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  og  $k = \frac{2\pi}{L}$  og dermed størrelsen  $c = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}$  kan bestemmes ved at anvende (2.44) i den fri overfladebetingelse (2.32),  $\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$  for  $z = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Idet } \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= AC k \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin\theta \\ \text{og } \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} &= AC \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} (-\sin\theta) \end{aligned}$$

findes ved indsættelse i (2.32) og division med  $AC$

$$\omega^2 = g k \tanh kh \quad (2.48)$$

eller idet vi indfører  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $k = \frac{2\pi}{L}$  og  $L = c \cdot T$

$$c = \sqrt{\frac{g L}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad (2.49)$$

Ligningen viser, at bølger med forskellig bølgelængde i almindelighed udbreder sig med forskellig hastighed, dvs. bølgerne er disperse. Ligningen benævnes derfor *dispersionsligningen*, hvadenten den er formuleret som (2.48) eller (2.49). Anvendes (2.48) i (2.47) fås følgende alternative formulering af hastighedspotentialet

$$\varphi = -a c \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (2.50)$$

## 2.5 Partikelhastigheder og -accelerationer

Ved differentiation af (2.47) eller (2.50) findes partikelhastighedsfeltet

$$\begin{aligned}
 u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{Hc}{2}(-k) \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \\
 &= \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \\
 &= \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx)
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

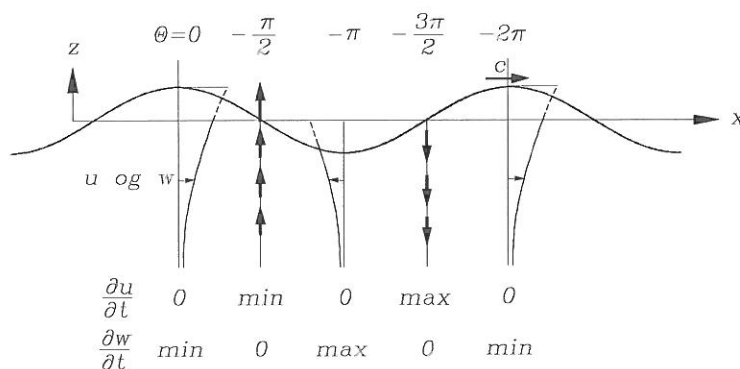
$$\begin{aligned}
 w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{Hc}{2} k \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \\
 &= -\frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \\
 &= -\frac{agk}{\omega} \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx)
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Teoretisk gælder udtrykkene kun for  $\frac{H}{L} \ll 1$ , dvs. i intervallet  $-h < Z \simeq 0$ . Imidlertid er det praksis at anvende udtrykkene også for endelige positive og negative værdier af  $\eta$ , dvs. også for  $z = \eta$ .

*Accelerationsfeltet* for partiklerne findes ved differentiation af (2.51) og (2.52)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -agk \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx) \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -agk \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx) \tag{2.54}$$



## 2.6 Trykfeltet

Trykvariationen beregnes af Bernoulli's ligning (2.3)

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.55)$$

Referenceudtrykket for  $z = 0$ , dvs. atmosfæretrykket er her sat  $= 0$ . Det følger heraf, at  $p$  regnes som overtryk over atmosfærisk tryk. Ifølge udledningerne vedrørende linearisering af den dynamiske grænsebetingelse er de kvadratiske led små af højere orden. Den lineariserede Bernoulli ligning bliver da

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.56)$$

Vi definerer nu det dynamiske tryk  $p_d$  som overtrykket over det hydrostatiske tryk (og atmosfærisk tryk jf. ovenstående), dvs.

$$p_d \equiv p - \rho g(-z) = p + \rho g z \quad (2.57)$$

som indsat i (2.56) giver

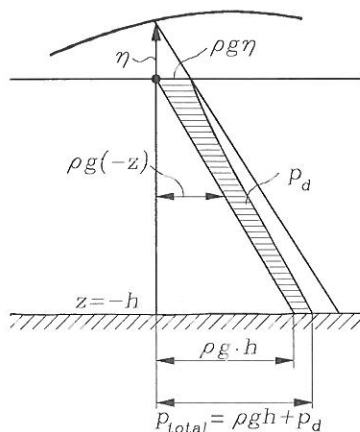
$$p_d = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.58)$$

Af (2.57) fås nu

$$p_d = \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx) \quad (2.59)$$

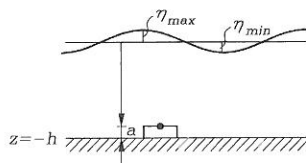
Idet  $\eta = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx)$ , ses at

$$p_d = \rho g \eta \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \text{ som i } z = 0 \text{ giver } p_d = \rho g \eta \quad (2.60)$$



For  $z > 0$ , hvor tidligere udledninger ikke gælder, regnes med hydrostatisk trykfordeling.

Bølgehøjdebestemmelse ved trykcellemåling:



Størst målte tryk:

$$\rho g(h - a) + \rho g \eta_{max} \frac{\cosh k(-(h - a) + h)}{\cosh kh}$$

Mindste målte tryk:

$$\rho g(h - a) + \rho g \eta_{min} \frac{\cosh k(-(h - a) + h)}{\cosh kh}$$

## 2.7 Partikelbaner

De tidligere udledte formler (2.51) og (2.52) beskriver hastighedsfeltet med reference til et fast punkt i rummet, dvs. en Eulersk beskrivelse. Vi søger nu et udtryk for partiklernes position  $(x(t), z(t))$ , dvs. en Lagrange beskrivelse. Principielt kan dette gøres ud fra følgende ligninger

$$\frac{dx}{dt} = u(x, z, t) \quad \frac{dz}{dt} = w(x, z, t) \quad (2.61)$$

hvor partikelhastighedskomponenterne  $u$  og  $w$  er givet ved (2.51) og (2.52). Ligningen (2.61) kan imidlertid ikke løses direkte på grund af den måde,  $u$  og  $w$  afhænger af  $x$  og  $z$ .

Vi prøver nu at linearisere (2.61) ved anvendelse af forudsætningen om lille bølgestejlhed,  $H/L \ll 1$ .

Idet vi, støttet i tidligere beregninger af  $u$  og  $w$  samt visuelle observationer, antager, at partikelbanerne er lukkede kurver, indfører vi koordinaterne til partiklens middelposition  $(\xi, \zeta)$ . Endvidere antager vi i forlængelse af 1. ordens teorien, at partiklernes udsving  $\Delta x, \Delta z$  fra henholdsvis  $(\xi, \zeta)$  er små i forhold til bølgelængde,  $L$ , og vanddybde,  $h$ . Den øjeblikkelige partikelposition er da givet ved

$$x = \xi + \Delta x \quad \text{og} \quad z = \zeta + \Delta z \quad (2.62)$$



(2.62) indsættes nu i (2.51) og (2.52), som derefter rækkeudvikles. Led, som er små af højere orden, bortkastes. Herefter løses (2.61) med hensyn til  $x$  og  $z$ . Ved brug af Taylorrækken

$$f(a + \Delta a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \Delta a + \frac{f''(a)}{2!} \Delta a^2 + \dots$$

fås ved indsættelse af (2.62) følgende rækkeudvikling af  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\sin$  og  $\cos$ .

$$\begin{aligned} \sinh k(z + h) &= \sinh k(\zeta + h) + k \cosh k(\zeta + h) \cdot \Delta Z + \dots \\ \cosh k(z + h) &= \cosh k(\zeta + h) + k \sinh k(\zeta + h) \cdot \Delta Z + \dots \\ \sin(\omega t - kx) &= \sin(\omega t - k\xi) + (-k) \cos(\omega t - k\xi) \cdot \Delta x + \dots \\ \cos(\omega t - kx) &= \cos(\omega t - k\xi) - (-k) \sin(\omega t - k\xi) \cdot \Delta x + \dots \end{aligned} \quad (2.63)$$

Indsættes i (2.51) og (2.61) fås for  $x$  koordinaten

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(\zeta + h) + k \Delta z \sinh k(\zeta + h)}{\sinh kh} (\cos(\omega t - k\xi) + k \Delta x \sin(\omega t - k\xi))$$

Idet  $k\Delta z$  og  $k\Delta x = \sigma \left( \frac{H}{L} \right) \ll 1$  ses at

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(\zeta + h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - k\xi) \quad (2.64)$$

og tilsvarende

$$\frac{dz}{dt} \simeq -\frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(\zeta + h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - k\xi) \quad (2.65)$$

Ved integration findes

$$x = \frac{\pi H}{T\omega} \frac{\cosh k(\zeta + h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - k\xi) + C \quad (2.66)$$

Denne ligning kan skrives som

$$x = \mathcal{K} \sin(\omega t - k\xi) + C \quad \text{eller} \quad \mathcal{K} \sin\theta + C, \quad \text{hvor } \theta \text{ har cyklus } 2\pi.$$

Middelpositionen  $\xi \equiv \bar{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K} \sin\theta d\theta + C = 0 + C$ , altså  $C = \xi$ .

$$x = \xi + \frac{H}{2} \frac{\cosh k(\zeta + h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - k\xi)$$

og ved tilsvarende beregninger (2.67)

$$z = \zeta + \frac{H}{2} \frac{\sinh k(\zeta + h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - k\xi)$$

(2.67) kan skrives som

$$x - \xi = A(\zeta) \sin\theta$$

$$z - \zeta = B(\zeta) \cos\theta$$

Ved kvadrering og summering findes, idet  $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$$\left(\frac{x - \xi}{A(\zeta)}\right)^2 + \left(\frac{z - \zeta}{B(\zeta)}\right)^2 = 1 ,$$

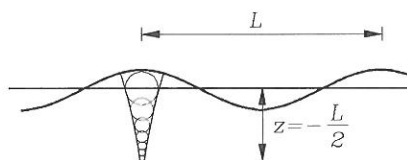
dvs. ellipser med centrum  $(\xi, \zeta)$  og  $A(\zeta)$  og  $B(\zeta)$  som henholdsvis horisontal og vertikal halvakse. Generelt er halvaksjerne funktion af  $\zeta$ , dvs. af dybden.

For dybtvandstilfældet  $\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$ , svarende til  $kh = \frac{2\pi h}{L} > \pi$  gælder, at  $\cosh kh \simeq \frac{1}{2} e^{kh}$  og  $\sinh kh \simeq \frac{1}{2} e^{kh}$ .

Ved brug af  $\frac{\cosh k(\zeta+h)}{\sinh kh} = \frac{\cosh\zeta \cosh kh + \sinh k\zeta \cdot \sinh kh}{\sinh kh}$  findes

$$A(\zeta) \simeq \frac{H}{2} e^{k\zeta}$$

$$B(\zeta) \simeq \frac{H}{2} e^{k\zeta}$$



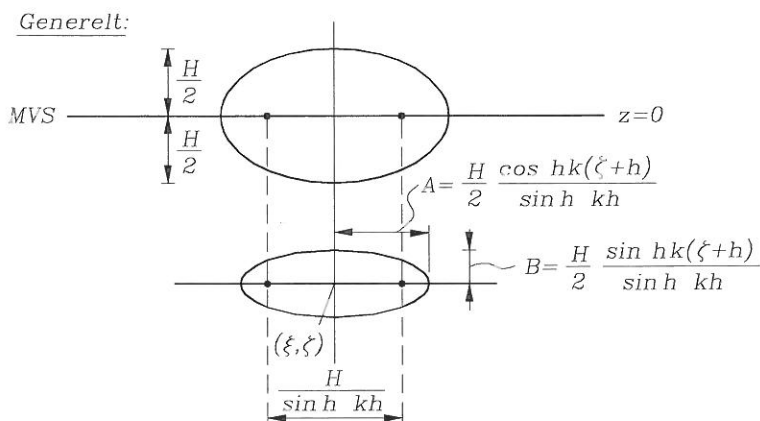
dvs. cirkulære partikelbaner med radius  $A = B$ .

For dybden  $z = -\frac{L}{2}$  er radius kun ca. 4% af  $\frac{H}{2}$ .

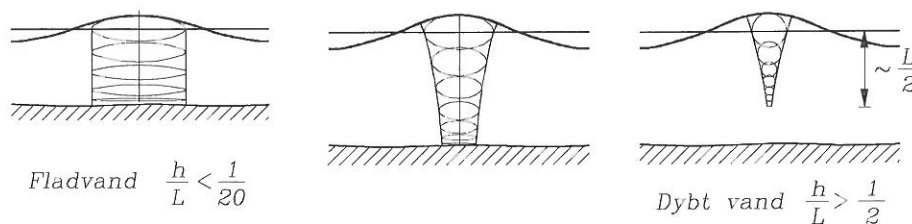
For fladvandstilfældet  $\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$ , svarende til  $kh = \frac{2\pi h}{L} < \frac{\pi}{10}$  findes, idet  $\cosh kh \simeq 1$  og  $\sinh kh \simeq kh$

$$A(\zeta) \simeq \frac{H}{2} \frac{1}{kh} \quad , \text{ altså konstant over dybden}$$

$$B(\zeta) \simeq \frac{H}{2} k(\zeta + h) \quad , \text{ altså lineært aftagende med dybden.}$$



Forskellen på partikelbanerne er illustreret nedenfor for tre vanddybder.



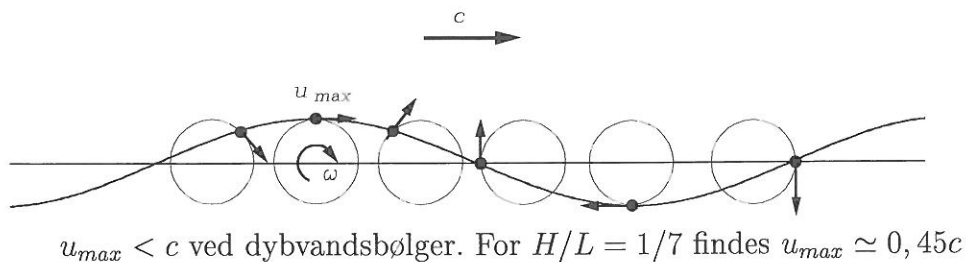
Ved lille stejthed lukkede baner (generelt ellipser):



Ved stor stejthed åbne baner, dvs. netto vandtransport:



Den tilhørende transporthastighed er dog selv ved stejle bølger mindre end 4% af  $c$ . Nedenfor er retningen af hastigheden optegnet samt partikelbaner optegnet over en periode.



## 2.8 Diskussion af dispersionsligningen

Ser vi på udtrykket for hastighedspotentialet, (2.50),

$$\varphi = -\frac{Hc}{2} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{L}x\right)$$

ses, at fastlæggelse af en bølge på en given vanddybde  $h$  kræver specifikation af  $H, c, L$  og  $T$ .

Imidlertid er disse størrelser ikke uafhængige. For eksempel er sammenhængen imellem  $c, L$  og  $h$  givet ved dispersionsligningen, (2.49),

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}}$$

og  $c, L$  og  $T$  er forbundet ved  $c = \frac{L}{T}$ .

Det kan derfor konkluderes, at såfremt  $h$  og  $H$  er givet, hvilket vil være det almindelige, behøver blot én af størrelserne  $c, L$  og  $T$  at være specificeret.

Det simpleste er, hvis  $h, H$  og  $L$  er givet (geometrien fastlagt), idet vi da ved (2.49) kan finde  $c$  og dermed  $T = \frac{L}{c}$ .

Imidlertid har man oftest givet  $T$  i stedet for  $L$ , da  $T$  er lettere at måle. Vort ligningssystem er uheldigvis indrettet således, at  $L$  ikke kan findes explicit for given  $h, H$  og  $T$ . Dette ses ved omskrivning af (2.49) til

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (2.68)$$

$L$  skal findes ved iteration.

Vi antager nu *dybtvandsbølger*, dvs.  $h \rightarrow \infty$  eller  $kh \rightarrow \infty$ . Indices 0 anvendes for dybtvandsbølger, for eksempel er  $L_0$  dybtvandsbølgelængden. Af (2.68) findes nu

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} \quad \text{eller} \quad T = \sqrt{\frac{2\pi}{g} L_0} \quad \text{eller} \quad c_0 = \sqrt{\frac{g}{k_0}} \quad (2.69)$$

dvs. at længden kun er bestemt af perioden. (Der er ingen indices på  $T$ , da denne ikke varierer med vanddybden.)

Idet  $\cosh \alpha$  og  $\sinh \alpha \rightarrow \frac{1}{2}e^\alpha$  for  $\alpha \rightarrow \infty$  og  $\tanh \alpha$  og  $\coth \alpha \rightarrow 1$  for  $\alpha \rightarrow \infty$  findes følgende af (2.50), (2.51), (2.52) og (2.59)

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{H_0 L_0}{2T} e^{k_0 z} \sin(\omega t - k_0 x) \\ u &= \frac{\pi H_0}{T} e^{k_0 z} \cos(\omega t - k_0 x) \\ w &= -\frac{\pi H_0}{T} e^{k_0 z} \sin(\omega t - k_0 x) \\ p_d &= \rho g \frac{H_0}{2} e^{k_0 z} \cos(\omega t - k_0 x) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Selv om formlerne er udledt for grænsen  $kh \rightarrow \infty$  gælder de med god tilnærmelse for  $h/L > \frac{1}{2}$ .

For *fladvandsbølger*, dvs.  $kh \rightarrow 0$ , findes tilsvarende af (2.49) eller (2.68), idet  $\tanh \alpha \rightarrow \alpha$  for  $\alpha \rightarrow 0$

$$L = \frac{gT^2 h}{L} \quad , \quad T = \sqrt{\frac{L^2}{gh}} \quad , \quad L = T\sqrt{gh} \quad , \quad c = \sqrt{gh} \quad (2.71)$$

Udbredelseshastigheden er således kun afhængig af vanddybden og ikke af perioden. Fladvandsbølger er altså ikke-dispersive, således at alle komponenter udbreder sig med samme hastighed.

Idet  $\cosh \alpha \rightarrow 1$  ,  $\sinh \alpha \rightarrow \alpha$  og  $\tanh \alpha \rightarrow \alpha$  for  $\alpha \rightarrow 0$  findes

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{HL}{2T} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \quad \text{ikke tilnærmet} \\ u &= \frac{H}{2} \frac{L}{Th} \cos(\omega t - kx) \\ w &= -\frac{\pi H}{T} \frac{z+h}{h} \sin(\omega t - kx) \\ p_d &= \rho g \frac{H}{2} \frac{z+h}{h} \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Formlerne gælder med god tilnærmelse for  $h/L < \frac{1}{20}$ .

## 2.9 Bølgers energiindhold

Når vi taler om bølgers energiindhold, tænkes der normalt på indholdet af mekanisk energi, hvilket vil sige kinetiske energi og beliggenhedsenergi. Indholdet af kinetisk energi skyldes partiklernes hastigheder. Indholdet af beliggenhedsenergi (potentielenergi) skyldes overfladens flytning fra middelvand-spejlet.

Mængden af varmeenergi indeholdt i bølgen har ingen interesse, eftersom varmeenergi aldrig kan konverteres til mekanisk energi igen. Transformationen af varmeenergi til mekanisk energi er derimod interessant, da det beskriver 'tabet' af mekanisk energi. Tabet i mekanisk energi skyldes hovedsagligt bølgebrydning. I beskrivelsen af visse fænomener, som f.eks. bølgebrydning er det nødvendigt at kende mængden af energi som transformeres.

Energiindholdet i bølgen kan vises at udbrede sig i bølgens udbredelsesretning. Faktisk er bølgens udbredelsesretning defineret, som den retning energien udbreder sig i.

*Kinetisk energi:*

Hvis vi betragter ideale væsker, er der ingen turbulent kinetisk energi tilstede. Vi betragter derfor partikelhastighederne, som skyldes 'selve' bølgen. Den øjeblikkelige mængde kinetisk energi per volumenenhed  $e_k(\theta)$  er:

$$\begin{aligned} e_k(\theta) &= \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2) \\ e_k(\theta) &= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{H\omega}{2\sinh kh}\right)^2[\cosh^2 k(z+h)\cos^2\theta + \sinh^2 k(z+h)\sin^2\theta] \\ e_k(\theta) &= \frac{1}{4}\rho\frac{gkH^2}{\sinh 2kh}[\cos^2\theta + \sinh^2 k(z+h)] \end{aligned} \quad (2.72)$$

Den øjeblikkelige mængde kinetisk energi per enhedsareal i det horizontale plan  $E_k(\theta)$ , findes ved at integrere  $e_k(\theta)$  fra bunden ( $z = -h$ ) til overfladen ( $z = \eta$ ). Da det matematisk er uhyre kompliceret at udføre denne integration, vælges det istedet kun at integrere fra bunden ( $z = -h$ ) til midelvandspejlet ( $z = 0$ ).

$$\begin{aligned} E_k(\theta) &= \frac{1}{4}\rho\frac{gkH^2}{\sinh 2kh}\left(h\cos^2\theta + \frac{1}{2}\int_{-h}^0[\cosh 2k(z+h) - 1]dz\right) \\ E_k(\theta) &= \frac{1}{16}\rho gH^2 + \frac{1}{8}\rho gH^2\frac{2kh}{\sinh 2kh}\left[\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Hvis vi midler over en periode  $T$  eller en bølgelængde  $L$  (hvilket er det samme for bølger med konstant form), fås det gennemsnitlige indhold af kinetisk energi  $E_k$  til:

$$E_k = \frac{1}{16}\rho gH^2 \quad (2.74)$$

*Potentiell energi:*

Når væsken er usammentrykkelig, og der ses bort fra overfladespændinger stammer alt den potentielle energi fra tyngdekræfterne.

Den øjeblikkelige mængde potentiel energi  $E_p(\theta)$  per enhedsareal i det horizontale plan er:

$$\begin{aligned} E_p(\theta) &= \int_{-h}^{\eta} \rho g z dz - \int_{-h}^0 \rho g z dz \\ E_p(\theta) &= \int_0^{\eta} \rho g z dz \\ E_p(\theta) &= \frac{1}{2}\rho g \eta^2 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Hvis vi midler over en periode  $T$  eller en bølgelængde  $L$ , fås det gennemsnitlige indhold af potentiel energi  $E_p$  til:

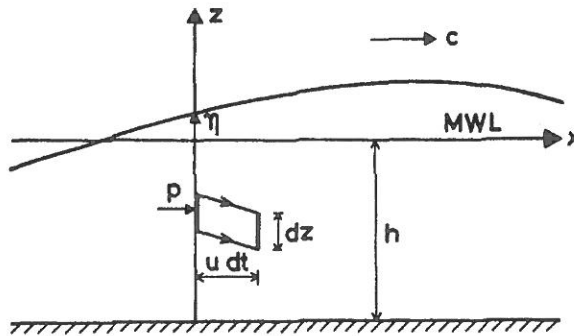
$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}\rho g \overline{\eta^2} \\ E_p &= \frac{1}{2}\rho g \frac{H^2}{4}\overline{\cos^2\theta} \quad (\text{for lineære bølger}) \\ E_p &= \frac{1}{16}\rho g H^2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Den totale energitæthed per enhedsareal i det horizontale plan  $E$  findes som summen af den kinetiske energitæthed  $E_k$  plus energitætheden af den potentielle energi  $E_p$ .

$$E = E_k + E_p$$

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (2.77)$$

Energiindholdet i bølgerne kan ikke relateres direkte til en energiligning for bølgens bevægelse. Her er det nødvendigt at betragte den gennemsnitlige energi (over en periode), der transmitteres gennem et fastholdt vertikalt snit, integreret over vanddybden. Hvis snittet er parallelt med bølgens front og har en bredde på 1 m, betegnes den gennemsnitlige transmitterede energi for energi fluxen  $E_f$ .



Figur 2.2: Definitionsfigur for beregning af energiflux.

Vi betragter det viste element. Energifluxen gennem det viste lodrette snit består dels af den transporterede mængde mekanisk energi indeholdt i kontrolvolumet, og dels af tilvæksten i kinetisk energi, d.v.s. de ydre kræfters arbejde.

*Ydre kræfters arbejde:*

På et vertikalt element  $dz$  virker den horisontale trykkraft  $p dz$ . I løbet af tidsrummet  $dt$  bevæger elementet sig afstanden  $u dt$  mod højre. Det udførte arbejde  $A$  (kraft  $\times$  vej) bliver således

$$A = \Delta E_k = p u dz dt$$

*Mekanisk energi:*

$$E = [\rho g z + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2)] u dz dt$$

Den øjeblikkelige energiflux  $E_f(t)$  per enhedsbredde per tid bliver efter bortkastning af højere ordensled, ændring af øvre integrationsgrænse samt indtrodution af overtrykket  $p^+ = p + \rho g z$  ( $p^+$  omtales også som det dynamiske tryk):

$$E_f(t) = \int_{-h}^n [p + \rho g z \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2)] u dz$$

$$E_f(t) = \int_{-h}^0 p^+ u dz \quad (2.78)$$

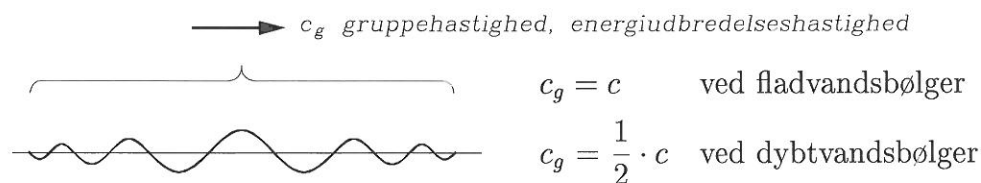
Den gennemsnitlige energiflux  $E_f$  (benævnes blot energifluxen) beregnes ved at integrere udtrykket 2.78 over en periode  $T$ , samt indsætte udtrykkene for  $p^+$  og  $u$ .

$$E_f = \overline{E_f(t)}$$

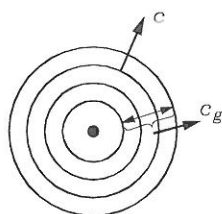
$$E_f = \frac{1}{16} \rho g H^2 c \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right] \quad (2.79)$$

$$E_f = E c_g \quad (2.80)$$

hvor vi har introduceret energiudbredelseshastigheden  $c_g = c \left( \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh 2kh} \right)$ . Energiudbredelseshastigheden  $c_g$  beskriver, hvor hurtigt bølgens energi udbreder sig. Energiudbredelseshastigheden benævnes også ofte gruppehastigheden.



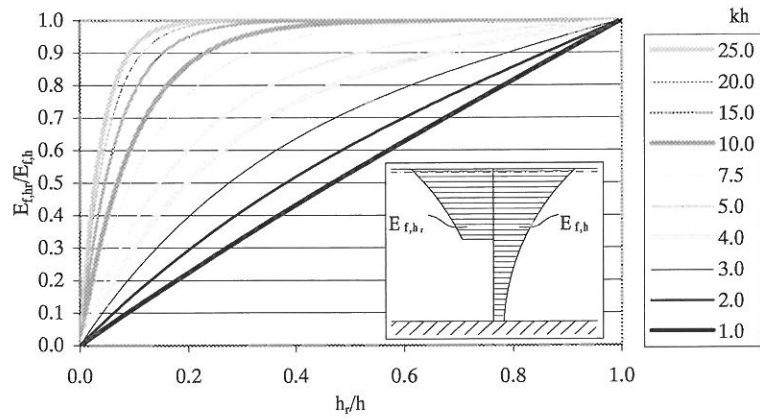
### Eksempel



Stenkast i vand forårsager ringbølger, hvor den enkelte bølge overhaler gruppen og forsvinder, medens ny bølger dukker op inderst i ringen.



Hvis fordelingen af den transporterede energi ned over vanddybden betragtes vil vi observere, at i dybtvandsbølger, d.v.s for en høj  $kh$  ligger det meste af energien tæt på vandspejlet. Når vanddybden falder bliver energien mere og mere jævnt fordelt ned over vanddybden. Dette er illustreret i figur 2.3.




Figur 2.3: Fordelingen af den transporterede energi over vanddybden.


## 2.10 Vurdering af lineær bølgeteori

På de foregående sider er den simpelste matematiske model af bølger udviklet og beskrevet. Det er indlysende for alle, som har besøgt kysten, at virkelige bølger ikke er regelmæssige og sinusformede. Spørgsmålet er: Hvornår, og i hvor høj grad vi kan anvende lineær bølgeteori for regelmæssige bølger til beskrivelsen af virkelige bølger samt den påvirkning, som disse bølger påvirker kyster, skibe og konstruktioner med.

Den udviklede teori baserer sig på, at bølgerne er dels regelmæssige og dels lineære. I langt den overvejende del af ingeniørpraksis anvendes lineær teori. Det er dog sådan, at det er normalt at anvende lineær teori for uregelmæssige bølger. I slutningen af nærværende kursus vil vi tage hul på lineære uregelmæssige bølger. På næste semester vil teorier for bølger med endelig højde (ikke-lineære bølger) blive introduceret.

For at skelne mellem lineær og ikke-lineær bølgeteorier klassificeres bølgerne efter støjheden.

$H/L \rightarrow 0$ , bølger med lille amplitude   
1. ordens Stokes bølger, lineære bølger,  
Airy bølger, harmoniske bølger

$H/L > 0,01$ , bølger med endelig højde   
højere ordens bølger, eks. 5. ordens Stokes  
bølger.

Selvom den beskrevne teori har visse begrænsninger, er det vigtigt at erkende at vi allerede nu (efter 2 kursusgange) kan beskrive bølgerne på fornuftig måde. Det er faktisk imponerende, hvor langt man kan komme med lineær bølgeteori.

Fysisk set er forskellen mellem lineær teori og højere ordens teorier, at højere ordens teorierne medtager indflydelsen af bølgen selv på dens parametre. Derfor bliver overfladeprofilet, bølgelængden og udbredelseshastigheden alle funktioner af bølgehøjden.

Lineær bølgeteori forudsiger at bølgetoppe og bølgedale er af samme størrelse. Teorier for bølger med endelig højde forudsiger derimod, at bølgetoppen er omkring dobbelt så stor som bølgedalen. For design af f.eks. niveauet af topsites til offshore konstruktioner, er det derfor vigtigt at forstå denne forskel.

Lineær bølgeteori forudsiger lukkede partikelbaner. Teorier for bølger med endelig højde forudsiger åbne partikelbaner, hvilket medfører en netto vandtransport.

## Kapitel 3

### Ændringer i bølgeformen

De fleste har vel den erfaring fra kysterne, at bølgerne ændrer sig når de nærmer sig stranden. Roligt vejr, når der kun løber mindre dønninger ind mod stranden, er særligt egnet til disse iagttagelser.

Befinder man sig langt fra stranden, vil bølgebevægelsen virke meget beskedent. Hvis man målte bølgerne, ville man se, at de meget nær var små lineære bølger, d.v.s. sinusbølger. Længere inde kan man iagttage, at bølgerne rejser sig og måske bryder.

Bølgernes rejsning skyldes i princippet tre ting. For det første medfører den mindre vanddybde, at bølgernes udbredeshastighed bliver mindre, hvorved bølgelængden bliver mindre, og dermed bliver bølgestejlheden større. For det andet vokser bølgehøjden når udbredeshastigheden bliver mindre. Grunden hertil er at da energitransporten skal være konstant må bølgehøjden øges når udbredeshastigheden falder. Herved bliver bølgestejlheden altså også større. Endelig medfører den forøgede stejlehed, at bølgerne efterhånden ændrer karakter i retning af højere ordens bølger, hvilket forøger det umiddelbare indtryk af at bølgerne vokser.

Ændringen af bølgeformen er udelukkende en konsekvens af den randbetingelse der siger, at bunden skal være en strømlinie. Teoretiske beregninger af bølgers brydning efter potentialteorien giver således resultater, som kan reproducere i laboratoriet. Forklaringen gående ud på at bølgernes brydning skyldes, at friktionen ved bunden bremser den nederste del af bølgen må derfor være forkert.

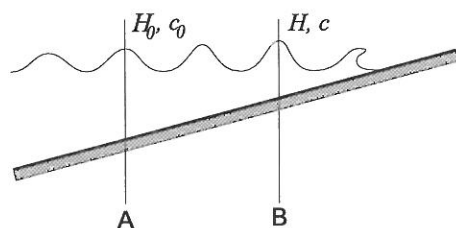
En anden og umiddelbart selvfølgelig iagttagelse er at bølgerne altid løber ind mod kysten. Vi har alle en fornæmmelse af at bølger normalt udbreder sig i vindens retning. Altså må tilstedeværelsen af kysten ændre bølgeudbredelsesretningen.

På Grenen nord for Skagen kan dette fænomen let studeres.

### 3.1 Shoaling

Vi betragter et 2-dimensionalt problem, hvor bølgerne udbreder sig vinkelret ind mod kysten. Vi antager desuden

- Bundhældningen varierer kun langsomt.
- Der er ingen energiudveksling mellem ortogonale vinkelret på kysten. (I praksis er nok at antage at energiudvekslingen er konstant).
- Der foregår ikke bølgebrydning.
- Bølgeperioden  $T$  (og dermed frekvensen  $f$  eller vinkelfrekvensen  $\omega$ ) ændres ikke.



Figur 3.1: Definitions figur til bestemmelse af 2-dimensional shoaling.

Energiindholdet i en bølge er per overflade areal

$$E = \frac{1}{8} \rho_v g H^2 \quad (3.1)$$

Energifluxen  $P$  gennem et lodret snit er energiindholdet  $E$  gange med energiudbredeshastigheden  $c_g$

$$P = E c_g \quad (3.2)$$

$$P = \frac{1}{8} \rho_v g H^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (3.3)$$

Eftersom den mængde energi der tilføres kontrolområdet ifølge forudsætningerne må være lig med den mængde energi der fjernes fra området (energi-bevarelse) følger det at

$$E^A \cdot c_g^A = E^B \cdot c_g^B \quad (3.4)$$

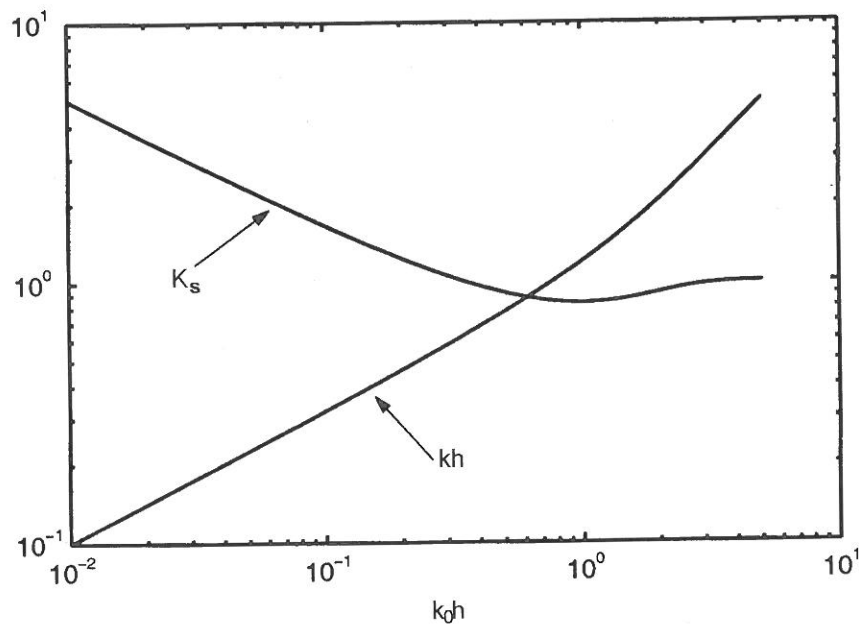
$$H^B = H^A \sqrt{\frac{c_g^A}{c_g^B}} \quad (3.5)$$

Ovenstående formel kan anvendes mellem to vilkårlige snit, men ofte antages det at A-snittet lægges på dybt vand og følgende formel fremkommer

$$\frac{H}{H_0} = K_s = \sqrt{\frac{c_0}{c}} \quad (3.6)$$

Koefficienten  $K_s$  kaldes for shoaling koefficienten. Som vist i figur 3.1 falder shoaling koefficienten først til lidt under 1, når bølgen bevæger sig ind på lavere vand. Men herefter vokser koefficienten kraftigt.

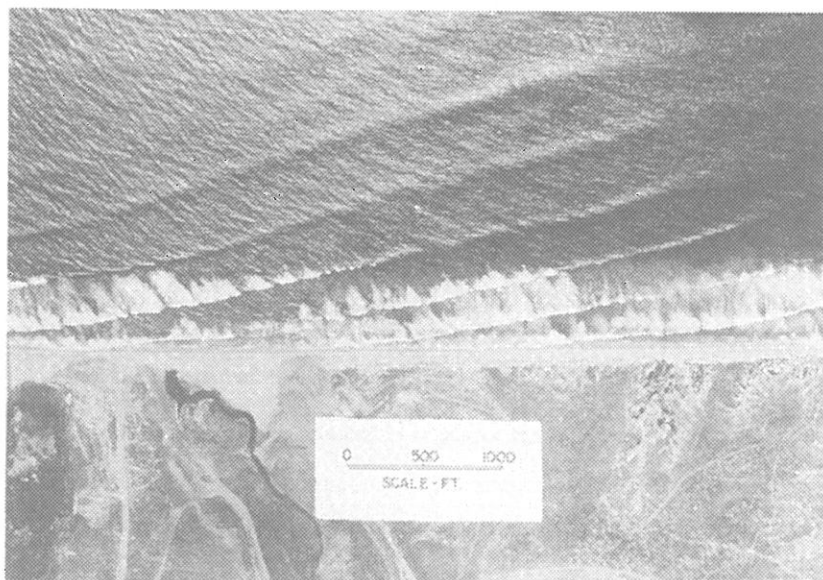
Alt i alt kan det konkluderes at bølgehøjden vokser når bølgen bevæger sig ind mod kysten. Eftersom bølgelænden samtidigt mindskes vokser bølgestejlheden altså. Bølgestejlheden vil vokse og vokse indtil bølgeformen bliver ustabil og bølgen bryder.



Figur 3.2: Variation af shoaling koefficienten  $K_s$  og den dimensionsløse dybdeparameter  $kh$ , som funktion af  $k_0 h$ , hvor  $k_0$  er dybvandsbølgetallet.

## 3.2 Refraktion

Da bølgens udbredelshastighed  $c$  aftager med aftagende vanddybde (bølgelængden bliver kortere), vil bølger som løber skævt ind mod en kyst drejes således, at de til sidst næsten løber vinkelret ind mod kysten.

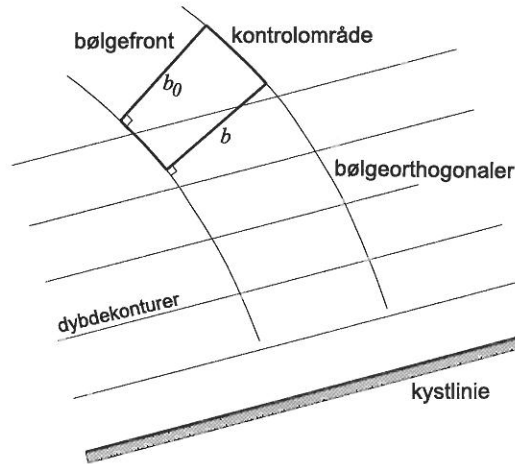


Figur 3.3: Foto visende refraktion. Bølgerne drejer når de nærmer sig kysten.

Generelt vil bølgens udbredelsehastighed variere langs bølgefronten. Resultatet er at bølgefronten vil have en tilbøjelighed til at få samme form som dybdekonturerne. Bølgeortogonalerne (som jo står vinkelret på bølgefronterne) vil ikke være rette linier, men de vil derfor bøje af i samme takt som bølgefronterne drejer. Resultatet er at bølgeortogonalerne konvergerer eller divergerer afhængigt af de lokale dybdekonturer.

Vi betragter et eksempel, hvor bølgerne udbreder sig skråt ind mod kysten. Vi antager desuden

- Bundhældningen varierer kun langsomt.
- Der er ingen energiudveksling mellem ortogonaler.
- Der foregår ikke bølgebrydning.
- Bølgeperioden  $T$  (og dermed frekvensen  $f$  eller vinkelfrekvensen  $\omega$ ) ændres ikke.



Figur 3.4: Refraktion af regelmæssige bølger over parallelle dybdekonturer.

Den energiflux  $P_{b_0}$ , som passerer snit  $b_0$  vil på grund af energibevarelse være lig med den energiflux  $P_b$  som passerer snit  $b$ . Eftersom længden af bølgefronterne ændres vil bølgehøjden også ændres.

$$E^{b_0} \cdot c_g^{b_0} \cdot b_0 = E^b \cdot c_g^b \cdot b \Rightarrow \quad (3.7)$$

$$H^b = H^{b_0} \sqrt{\frac{c_g^{b_0}}{c_g^b}} \cdot \sqrt{\frac{b_0}{b}} \Rightarrow \quad (3.8)$$

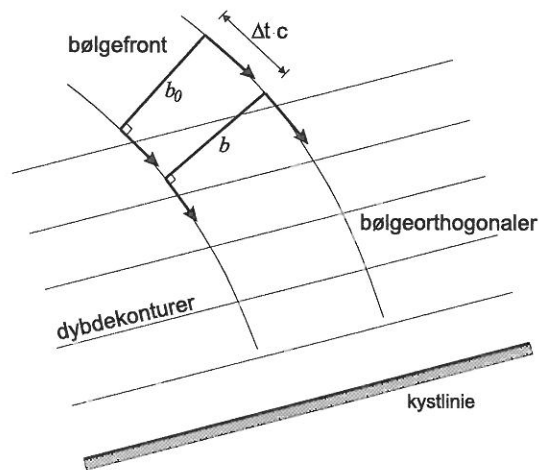
$$H^b = H^{b_0} \cdot K_s \cdot K_r \quad (3.9)$$

$$\text{hvor, } c_g = c \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

$K_r$  betegnes refraktionskoefficienten. Vi vil i det følgende kort gennemgå en metode til beregning af refraktionskoefficienten.

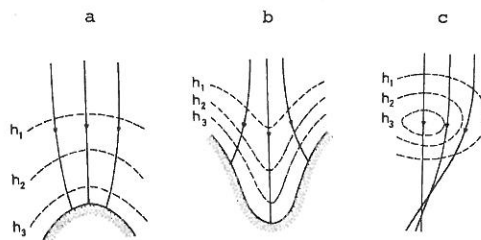
Vi kan simpelthen stille og roligt optegne bølgefrontens ændring over en givet bundtopografi ved langsomt at 'steppe' igennem problemet. Der vælges et stykke bølgefront på dybt vand. Nu beregnes bølgeudbredeshastigheden i hver 'ende' af dette stykke bølgefront. På grund af forskellige vanddybder vil hastighederne være forskellige. Nu vælges der en  $\Delta t$ , som f.eks. kan være 50 sekunder. Det beregnes, hvor langt de to ender af bølgefronten har kunne udbrede sig på disse 50 sekunder. Herefter vil vi kunne optegne bølgefronten  $\Delta t$  senere.

Det er klart at ovenstående metode i princippet skal løses numerisk.



Figur 3.5: Beregning af refraktion.

Da bølgefronterne ved refraktion drejer, vil længden af bølgefronterne ændres. Man kan heraf umiddelbart konkludere, at dette må betyde en formindskelse af bølgehøjden, hvor bølgefronterne forlænges, og en forøgelse af bølgehøjderne, hvor bølgefronterne forkortes.



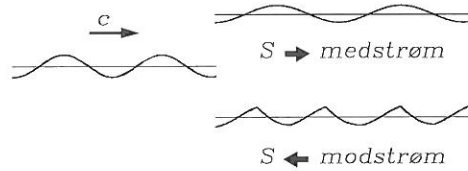
Figur 3.6: Refraktionens indflydelse på bølgehøjden. a) Forøget bølgehøjde ved kystfremspring p.g.a. koncentration af energi. b) Formindsket bølgehøjde ved fjord eller lignende p.g.a. spredning af energi. c) Forøget bølgehøjde ved (bag) undersøisk højdedrag p.g.a. koncentration af energi.

Af figur 3.6 kan det ses at det altid er fornuftigt nøje at overveje beliggenheden af en bølgepåvirket konstruktion. Det være sig ligemeget om der ønskes små bølger (små kraftpåvirkninger) eller store bølger (f.eks bølgeenergianlæg).

I praksis løses refraktion/shoaling problemet altid v.h.a. en stor numerisk bølgeudbredelsesmodel. Eksempler på sådanne modeller er D.H.I.'s System21 eller AaU's MildSim.



Hvis der er kraftig strøm i et område med bølger vil strømmen også bevirke en bølgeprofilændring som illustreret i figur 3.7. Hvis strømmen virker i samme retning som bølgeudbreddelsesretningen bliver bølgerne mere flade og langstrakte, hvorimod bølger i modstrøm bliver kortere og stejlere. Denne tilhørende ændring af fasehastigheden medfører, at bølgerne drejer hvis strømretningen og bølgeudbreddelsesretningen ikke er parallelle. Dette fænomen kaldes strømrefraktion.



Figur 3.7: Bølgeprofilændring p.g.a. strøm.

### 3.3 Diffraction

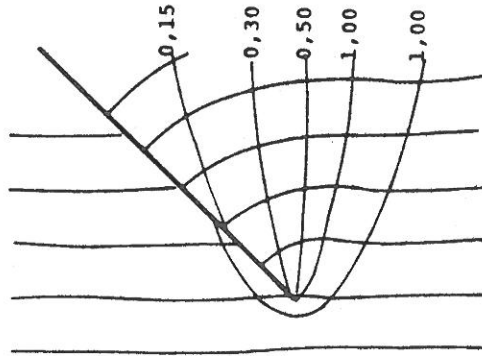
Stiller man sig og betragter bølgeuroen i en havn, vil man observere bølgeuro også i områder, som egentlig ligger i læ af molerne. Denne uro skyldes, at de indkommende bølger bøjer af rundt om molehovederne (vi ser bort fra refleksion). I læ af molen vil bølgen udbrede sig næsten cirkelformet med molehoved som centrum, med hastigt aftagende bølgehøjde ind langs fronten. Vi siger at bølgen diffrakteres.



Figur 3.8: Diffraction om molehoved.

Bølgeuroen i en havn er bestemmende for skibes bevægelser ved kaj, og dermed for størrelsen af skibenes dødtid samt kræfter i trosser og fenderværk. Også besejlingsforholdene og sedimenttransporten er influeret af bølgerne. Ligeledes spiller diffractionen en rolle ved beregning af kræfter på store offshore konstruktioner og vindmøllefundamenter. Det er derfor vigtigt at kunne bestemme bølgehøjden overalt.

Fra lyslæren kendes fænomenet diffraction. Da de grundlæggende ligninger for de fleste bølgefænomeners udbredelse formelt er de samme, kan vi drage nytte af en løsning udledt for elektromagnetiske bølgers bøjning om en halvuendelig skærm (Sommerfeld 1896).



Figur 3.9: Diffraction om en mole

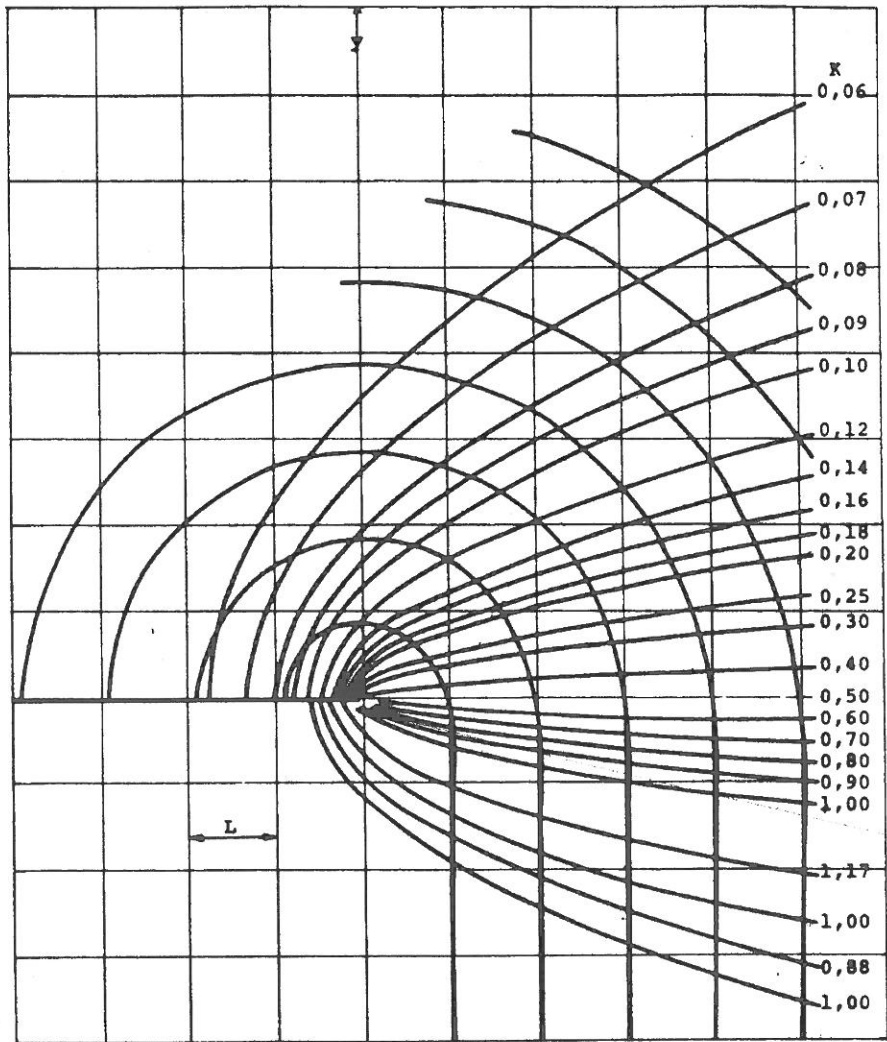
Af figur 3.9 ses ændringen i bølgehøjde. De viste tal er den såkaldte diffraktionskoefficient  $K_d$ , som defineres som den diffrakterede bølges bølgehøjde divideret med den indkommende bølges bølgehøjde. Figuren er udformet under forudsætning af, at den retlinede konstruktion, som bølgerne diffrakteres om, er fuldstændig absorberende.

Den forgående beskrivelse (Sommerfelds løsning) er baseret på en antagelse om konstant udbredeshastighed for bølgen. Som vi alle ved afhænger bølgens udbredeshastighed af vanddybden, og der er derfor implicit antaget konstant vanddybde.

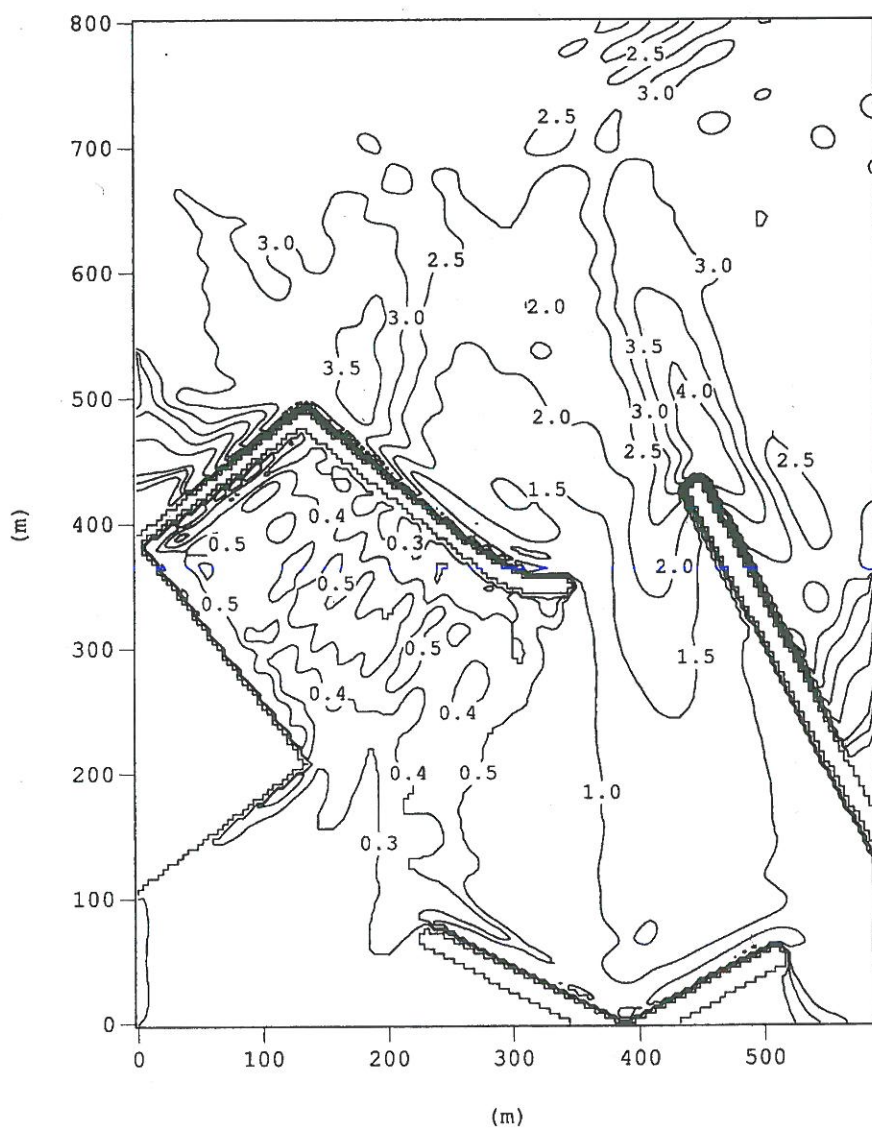
I en første designfase af en havn eller en anden lægivende konstruktion er diffraktionsdiagrammet en uvurderlig hjælp. Et endeligt design eller en dybgående analyse af en havn vil derimod skulle baseres på fysiske modelforsøg eller avancerede numeriske modelberegninger.

En større matematisk udledning fører frem til de såkaldte Mild-Slope ligninger og Boussinesq ligninger. Det ligger udenfor noternes fagområde, at foretage denne udledning, men det skal blot nævnes at kommercielle bølgeudbredelsesmodeller er baseret på disse ligninger.

Generelt løses bølgeudbredelsesproblemerne (d.v.s. shoaling, refraction og diffraktion) samlet i en sådan numerisk model. Eksempler på en sådan model er som tidligere nævnt D.H.I.'s Mike21 eller AaU's MildSim model.



Figur 3.10: Diffraktionsdiagram for fuldstændig absorberende mole.



Figur 3.11: Et eksempel på bølger i Grenaa Havn beregnet v.h.a. MildSim. Figuren viser bølgehøjderne i havnemundingen.

### 3.4 Bølgebrydning

Bølgemålinger under stormperioder viser, at bølgehøjderne næsten aldrig bliver større end ca. 1/10 af bølgelængden. Hvis vi i laboratoriet forsøger at generere høje bølger, opdager vi, at det kun er muligt at producere bølger med højde på op til mellem 1/10 og 1/8 af bølgelængden. Forsøger vi at gå længere, ser vi at bølgerne bryder.

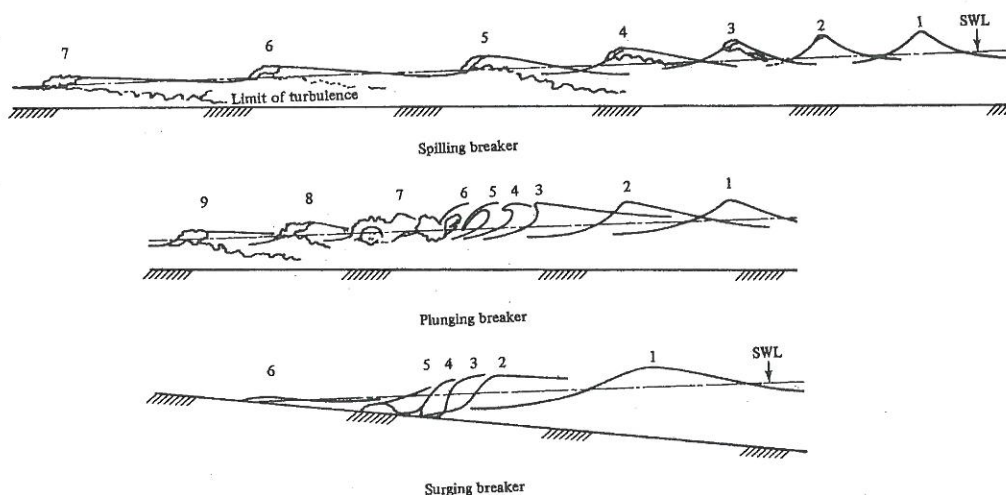
Populært siger vi, at bølgen bryder når partikelhastigheden  $u$  overstiger bølgens udbredelseshastighed  $c$ .

$$u_{max,z=0} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{L} = 0.142 \cdot \tanh(kh) \quad (3.10)$$

For fladvandsbølger, d.v.s. når  $\frac{h}{L} \leq \frac{1}{20}$  reduceres formel 3.10 til

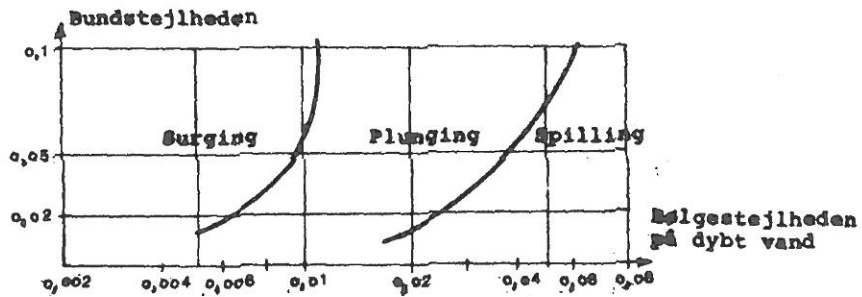
$$H \leq 0.8 \cdot h \quad (3.11)$$

I naturen finder man aldrig to ens bølger, og derfor vil brydningen ske på forskellig måde. Imidlertid kan man konstatere, at bølger bryder på i hvert fald tre principielt forskellige måder. Det bemærkes, at bølger på dybt vand bryder ved topbrænding, når vindens påvirkning har frembragt relativt stejle bølger.



Figur 3.12: Forskellige brydningsformer

Brydningsformen afhænger generelt af bølgestejlheden og bundens hældning. Figur 3.13 indikerer bølgebrydningsformens afhængighed af bølgestejlhed og bundhældning.



Figur 3.13: Bølgebrydningsformens afhængighed af bølgestejlheden og bundhældningen.

Ind gennem bølgebrydningszonen ser der henholdsvis en sænkning og en hævnning af MVS. Sænkningen af MVS sker før bølgebrydning og betegnes Set-down. Normalt er Set-down ubetydelig. Hævningen af MVS betegnes Set-up, og sker som følge af, at bølgehøjden aftager ind gennem bølgebrydningszonen. Desuden kan de brydende bølger generere kraftige strømme langs kyster, hvor bølgeortogonerne ikke er vinkelrette på bundkurverne. I forbindelse med erosion af kysten medvirker denne bølgegenererede strøm til at føre sediment væk fra erosionsområdet.





# Kapitel 4

## Irregular Waves

### 4.1 Vindgenererede bølger

Hvis man tager ud til kysten og betragter bølgerne, vil det være indlysende at bølgerne ikke er regelmæssige. Bølgerne vil bestå af en blanding af mindre og større bølger samt kortere og længere bølger. Det kan ofte være nødvendigt at kunne beskrive en søtilstand mere nuanceret end det er muligt v.h.a. regelmæssige lineære bølger.

De følgende to afsnit beskriver, hvorledes vandoverfladen kan analyseres v.h.a. standard tidsserie analyse.

## 4.2 Time-Domain Analysis of Waves

### Definition of the individual wave : Zero-down crossing

The individual wave is defined by two successive zero-down crossings, cf. 4.1. For many years it was common to use zero-up crossings to define a wave, but due to the asymmetry of natural waves, the greatest wave forces are often experienced when the wave front hits a structure. That's one of the main reasons why IAHR (1986) recommended that the height of a wave is defined as the height from a trough to the following crest in a time series. Fig. 4.2 is an example of surface

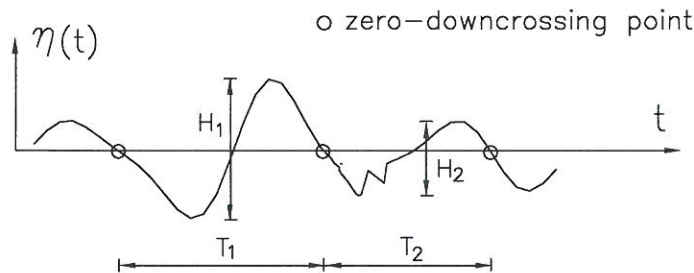


Figure 4.1: Individual waves defined by zero-down crossing.

elevation recordings. The application of zero-downcrossing gives 15 individual waves ( $N=15$ ). In Table 4.1 the data are arranged according to the descending order of wave height.

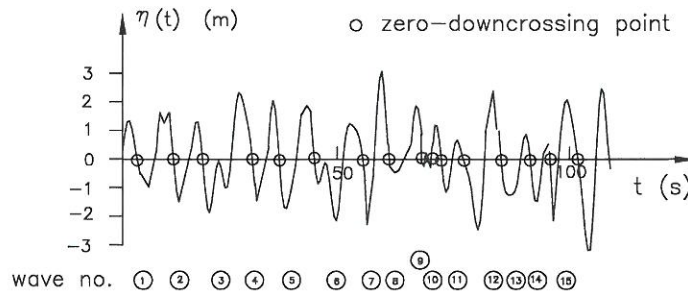


Figure 4.2: Application of zero-down crossing.

Table 4.1. Ranked individual wave heights and corresponding periods in Fig. 4.2.

rank $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$H$ (m)	5.5	4.8	4.2	3.9	3.8	3.4	2.9	2.8	2.7	2.3	2.2	1.9	1.8	1.1	0.23
$T$ (s)	12.5	13.0	12.0	11.2	15.2	8.5	11.9	11.0	9.3	10.1	7.2	5.6	6.3	4.0	0.9
wave no. in 4.2	7	12	15	3	5	4	2	11	6	1	10	8	13	14	9

### Characteristic wave heights and periods

Usually a surface elevation recording, exemplified in Fig. 4.2, contains more several hundred individual waves.

Both wave height and wave period can be considered as random variables, which have certain probability distributions.

Before these distributions are discussed, some definitions of characteristic waves will be given.

Mean wave:  $\bar{H}, \bar{T}$

$\bar{H}$  and  $\bar{T}$  are the mean values of the heights and periods, respectively, of all individual waves. Table 4.1 yields

$$\bar{H} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} H_i = 2.9 \text{ m} \quad \bar{T} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} T_i = 9.25 \text{ s}$$

Root-mean-square wave:  $H_{rms}$

This wave has a height defined as

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i^2}$$

From Table 4.1 is found

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} H_i^2} = 3.20 \text{ m}$$

Significant wave:  $H_s, T_s$  or  $H_{1/3}, T_{H_{1/3}}$

The significant wave height is the average of the wave heights of the one-third highest waves. The significant wave period is the average of the wave periods of the one-third highest waves. From Table 4.1 one finds

$$H_s = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 H_i = 4.44 \text{ m} \quad T_s = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i = 12.8 \text{ s} \quad i \text{ is the rank no.}$$

The significant wave is very often used as the design wave. The reason might be that in old days structures were designed on a basis of visually observed waves. Experiences show that often the wave height and period reported by visual observation correspond approximately to the measured significant wave. Therefore the choice of significant wave as design wave can make use of the existing engineering experience.

Maximum wave:  $H_{max}$ ,  $T_{H_{max}}$

This is the wave, which has the maximum wave height. In Table 4.1,

$$H_{max} = 5.5 \text{ m} \qquad T_{H_{max}} = 12.5 \text{ s}$$

Note, however, that  $H_{max}$  is a random variable which depends on the number of individual waves in the time series.

The maximum wave from a long time series corresponding to a storm with a return period of e.g. 100 years is often chosen as the design wave for structures which are very important and very sensitive to wave loads.

Highest one-tenth wave:  $H_{1/10}$ ,  $T_{H_{1/10}}$

$H_{1/10}$  is the average of the wave heights of the one-tenth highest waves.  $T_{H_{1/10}}$  is the average of the wave periods of the one-tenth highest wave.

Wave height with exceedence probability of  $\alpha\%$ :  $H_{\alpha\%}$

It is often practical to denote a wave height according to the probability of exceedence. Examples are  $H_{0.1\%}$ ,  $H_{1\%}$ ,  $H_{2\%}$  etc. In many situations  $H_{0.1\%}$  in the 100 year storm is used as the design wave.

## Distribution of individual wave heights

### Histogram of wave heights

Instead of showing all individual wave heights, it is easier to use the wave height histogram which gives information about the number of waves in various wave height intervals. Fig. 4.3 is the histogram of wave heights corresponding to Table 4.1.

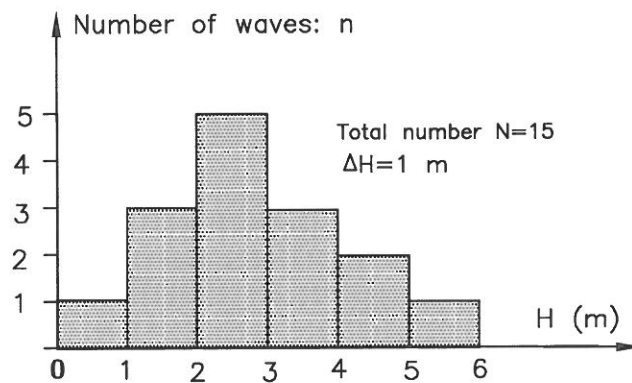


Figure 4.3: Wave height histogram.

### Non-dimensionalized histogram

In order to compare the distribution of wave heights at different locations, the histogram of wave heights is non-dimensionalized, cf. Fig.4.4.

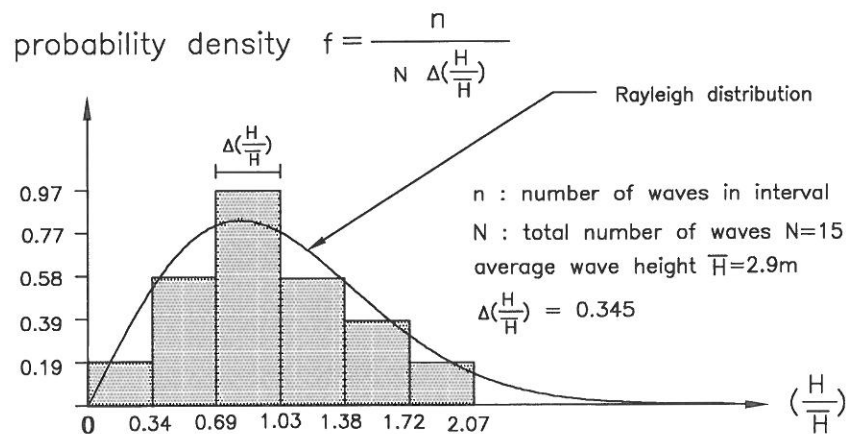


Figure 4.4: Non-dimensionalized wave height histogram.

When  $\Delta(H/\bar{H})$  approaches zero, the probability density becomes a smooth curve. Experience and theory have shown that this curve is very close to the Rayleigh distribution in case of deep water waves. In other words, the individual wave heights follow the Rayleigh distribution.

#### Rayleigh distribution

The Rayleigh probability density function is defined as

$$f(x) = \frac{\pi}{2} x \exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right) \quad \text{where} \quad x = \frac{H}{\bar{H}} \quad (4.1)$$

The Rayleigh distribution function is

$$F(x) = \text{Prob}\{X < x\} = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right) \quad (4.2)$$

#### Relation between characteristic wave heights

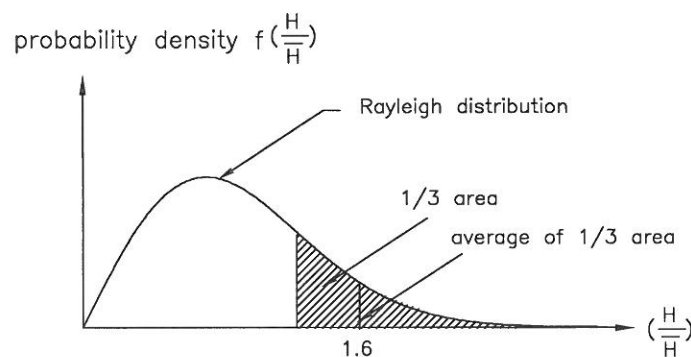


Figure 4.5: Relation between  $H_s$  and  $\bar{H}$ .

If we adopt the Rayleigh distribution as an approximation to the distribution of individual wave heights, then the characteristic wave heights  $H_{1/10}$ ,  $H_{1/3}$ ,  $H_{rms}$  and  $H_{\alpha\%}$  can be expressed by  $\bar{H}$  through the manipulation of the Rayleigh probability density function.

$$\begin{aligned} H_{1/10} &= 2.03 \bar{H} \\ H_{1/3} &= 1.60 \bar{H} \\ H_{rms} &= 1.13 \bar{H} \\ H_{2\%} &= 2.23 \bar{H} \end{aligned} \quad (4.3)$$

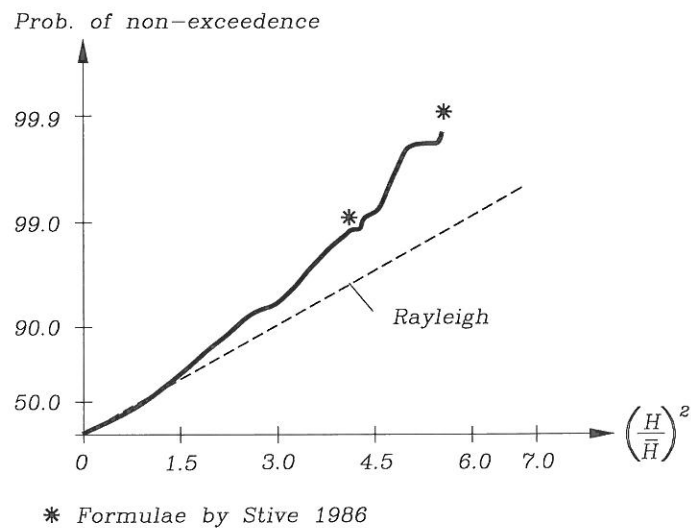
Fig. 4.5 illustrates how to obtain the relation between  $H_s$  and  $\bar{H}$ .

The Rayleigh distribution function given by  $H_s$  instead of  $\bar{H}$  reads

$$F(H) = 1 - \exp\left(-2\left(\frac{H}{H_s}\right)^2\right) \quad (4.4)$$

Individual wave height distribution in shallow water

Only in relatively deep water, the Rayleigh distribution is a good approximation to the distribution of individual wave heights. When wave breaking takes place due to limited water depth, the individual wave height distribution will differ from the Rayleigh distribution, cf. Fig. 4.6.



Figur 4.6: Comparison of the expression by Stive, 1986, for shallow water wave height distribution with model test results. Aalborg University Hydraulics Laboratory 1990.

Klopmann et al. (1989) proposed a semi-empirical expression for the individual wave height distribution. Researches have also been done by Thornton and Guza (1983) and Stive (1986).

Section 4.3 gives a more detailed discussion on the validity of the Rayleigh distribution, based on energy spectrum width parameter.

### Maximum wave height $H_{max}$

As mentioned above  $H_{max}$  is a random variable that depends on the number of waves in the timeseries. Below some facts about the distribution of  $H_{max}$  are given.

#### Distribution of $H_{max}$

The distribution function of  $X = H/\bar{H}$  is the Rayleigh distribution

$$F_X(x) = \text{Prob}\{X < x\} = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right) \quad (4.5)$$

If there are  $N$  individual waves in a storm<sup>1</sup>, the distribution function of  $X_{max} = H_{max}/\bar{H}$  is

$$\begin{aligned} F_{X_{max}}(x) &= \text{Prob}\{X_{max} < x\} = (F_X(x))^N \\ &= \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right)\right)^N \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note that  $F_{X_{max}}(x)$  can be interpreted as the probability of the non-occurrence of the event ( $X > x$ ) in any of  $N$  independent trials. The probability density function of  $X_{max}$  is

$$\begin{aligned} f_{X_{max}}(x) &= \frac{dF_{X_{max}}}{dx} \\ &= \frac{\pi}{2} N x \exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}x^2\right)\right)^{N-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

The density function of  $X$  and the density function of  $X_{max}$  are sketched in Fig.4.7.

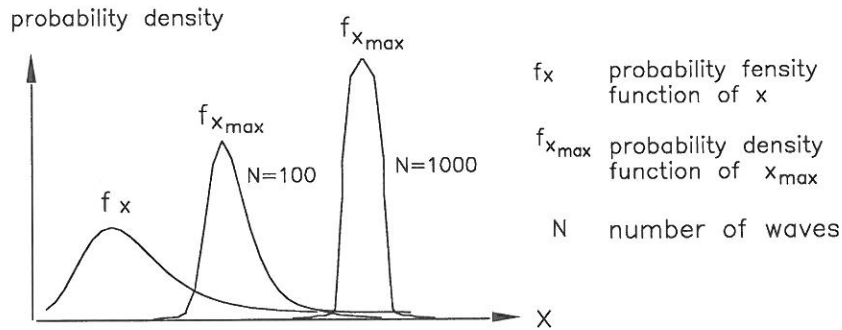


Figure 4.7: Probability density function of  $X$  and  $X_{max}$ .

<sup>1</sup>A storm usually lasts some days. The significant wave height is varying during a storm. However we are more interested in the maximum significant wave height in a short period of time. In practice,  $N$  is often assumed to be 1000.



### Mean, median and mode of $H_{max}$

Mean, median and mode are often used as the characteristic values of a random variable. Their definitions are given in Fig.4.8.

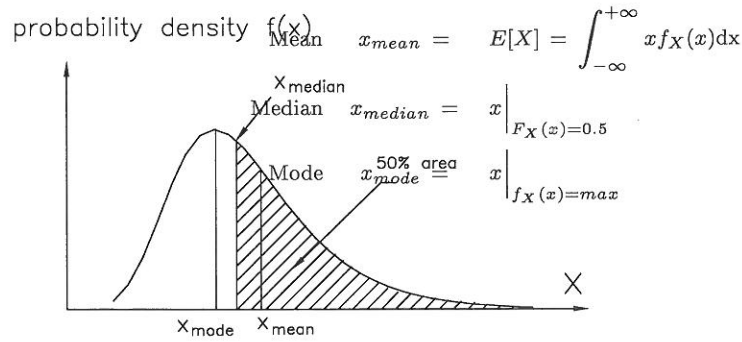


Figure 4.8: Probability density function of  $X$  and  $X_{max}$ .

By putting eqs (4.6) and (4.7) into the definitions, we obtain

$$(H_{max})_{mean} \approx \left( \sqrt{\frac{\ln N}{2}} + \frac{0.577}{\sqrt{8 \ln N}} \right) H_s \quad (4.8)$$

$$(H_{max})_{mode} \approx \sqrt{\frac{\ln N}{2}} H_s \quad (4.9)$$

Furthermore,  $(H_{max})_\mu$ , defined as the maximum wave height with exceedence probability of  $\mu$  (cf. Fig. 4.9), is

$$(H_{max})_\mu \approx \sqrt{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{N}{\ln \left( \frac{1}{1-\mu} \right)} \right)} \quad (4.10)$$

Obviously  $(H_{max})_{median} = (H_{max})_{0.5}$ .

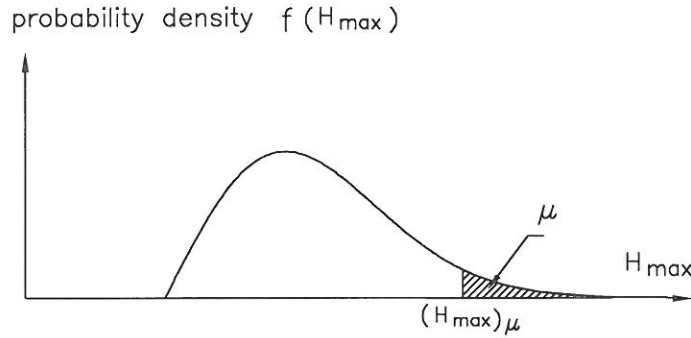


Figure 4.9: Definition of  $(H_{max})_{\mu}$ .

#### Monte-Carlo simulation of $H_{max}$ distribution

The distribution of  $H_{max}$  can also be studied by the Monte-Carlo simulation. Individual wave heights follow the Rayleigh distribution

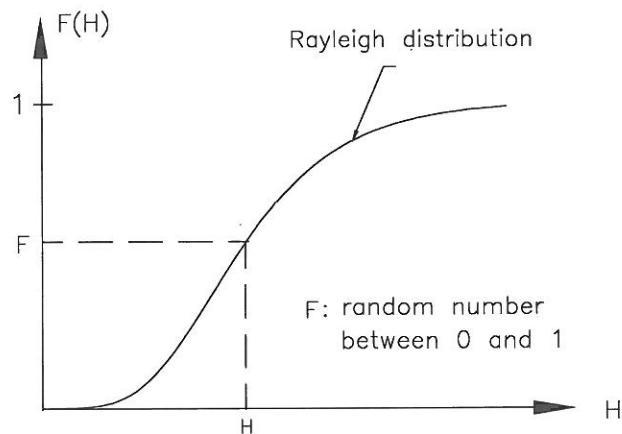
$$F(H) = 1 - \exp\left(-2 \left(\frac{H}{H_s}\right)^2\right) \quad (4.11)$$

The storm duration corresponds to  $N$  individual waves.

- 1) Generate randomly a data between 0 and 1. Let the non-exceedence probability  $F(H)$  equal to that data. One individual wave height  $H$  is obtained by (cf. Fig. 4.10)

$$H = F^{-1}(F(H)) = H_s \sqrt{\frac{-\ln(1 - F(H))}{2}} \quad (4.12)$$

- 2) Repeat step 1)  $N$  times. Thus we obtain a sample belonging to the distribution of eq (4.11) and the sample size is  $N$ .
- 3) Pick up  $H_{max}$  from the sample.
- 4) Repeat steps 2) and 3), say, 10,000 times. Thus we get 10,000 values of  $H_{max}$ .
- 5) Draw the probability density of  $H_{max}$ .



Figur 4.10: Simulated wave height from the Rayleigh distribution.

### Distribution of wave periods

It is summarized as

- When we talk about the distribution of wave periods, we often mean the joint distribution of significant wave height and significant wave period. Until now there is no general theoretical expression for the joint distribution, even though there are some so-called *scatter diagrams* based on wave recording. Such a diagram is valid only for the measurement location. The relation between  $H_s$  and  $T_s$  is often simplified as  $T_s = \alpha H_s^\beta$ , e.g. in Canadian Atlantic waters  $\alpha = 4.43$  and  $\beta = 0.5$  (Neu 1982).
- The distribution of wave periods is narrower than that of wave height.
- The empirical relation  $T_{max} \approx T_{1/10} \approx T_{1/3} \approx 1.2 \bar{T}$  (Goda 1985).

### 4.3 Frequency-Domain Analysis

The concept of a spectrum can be attributed to Newton, who discovered that sunlight can be decomposed into a spectrum of colors from red to violet, based on the principle that white light consists of numerous components of light of various colors (wave length or wave frequency).

Energy spectrum means the energy distribution over frequency. Spectral analysis is a technique of decomposing a complex physical phenomenon into individual components with respect to frequency.

Spectral analysis of irregular waves is very important for the design of structures. For example, in the oil-drilling platform design where wave forces plays an important role, it is of importance to design the structure in such a way that the natural frequency of the structure is rather far away from the frequency band where the main part of wave energy concentrates. In this way resonance phenomenon and the corresponding dynamic amplification of force and deformation can be avoided.

#### Some basic concepts of linear wave theory

##### Surface elevation

The surface elevation of a linear wave is

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx + \delta) = a \cos(\omega t - kx + \delta) \quad (4.13)$$

where	$H$	wave height
	$a$	amplitude, $a = H/2$
	$\omega$	angular frequency, $\omega = 2\pi/T$
	$T$	wave period.
	$k$	wave number, $k = 2\pi/L$
	$L$	wave length
	$\delta$	initial phase

We can also define the observation location to  $x = 0$  and obtain

$$\eta(t) = a \cos(\omega t + \delta) \quad (4.14)$$

The relation between wave period and wave length (dispersion relationship) is

$$L = \frac{g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (4.15)$$

where  $h$  is water depth.

### Wave energy

The average wave energy per unit area is

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (\text{Joule/m}^2 \text{ in SI unit}) \quad (4.16)$$

### Variance of surface elevation of a linear wave

The variance of the surface elevation of a sinus wave is

$$\begin{aligned} \text{Var}[\eta(t)] &= E \left[ \left( \eta(t) - \overline{\eta(t)} \right)^2 \right] && (\text{E: Expectation}) \\ &= E \left[ \left( \eta(t) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt && (\text{T: wave period}) \\ &= \frac{1}{2} a^2 \end{aligned}$$

### Superposition of linear waves

Since the governing equation (Laplace equation) and boundary conditions are linear in small amplitude wave theory, it is known from mathematics that small amplitude waves are superposable. This means that the superposition of a number of linear waves with different wave height and wave period will be

	superposition		wave 1		wave 2		...		wave $N$
velocity potential	$\varphi$	=	$\varphi_1$	+	$\varphi_2$	+	...	+	$\varphi_N$
surface elevation	$\eta$	=	$\eta_1$	+	$\eta_2$	+	...	+	$\eta_N$
particle velocity	$u$	=	$u_1$	+	$u_2$	+	...	+	$u_N$
dynamic pressure	$p$	=	$p_1$	+	$p_2$	+	...	+	$p_N$

## Example of variance spectrum

First we will make use of an example to demonstrate what a variance spectrum is.

### Surface elevation of irregular wave

Fig. 4.11 gives an example of an irregular wave surface elevation which is constructed by adding 4 linear waves (component waves) of different wave height and wave period. The superposed wave surface elevation is

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^4 \eta_i(t) = \sum_{i=1}^4 a_i \cos(\omega_i t + \delta_i) \quad (4.17)$$

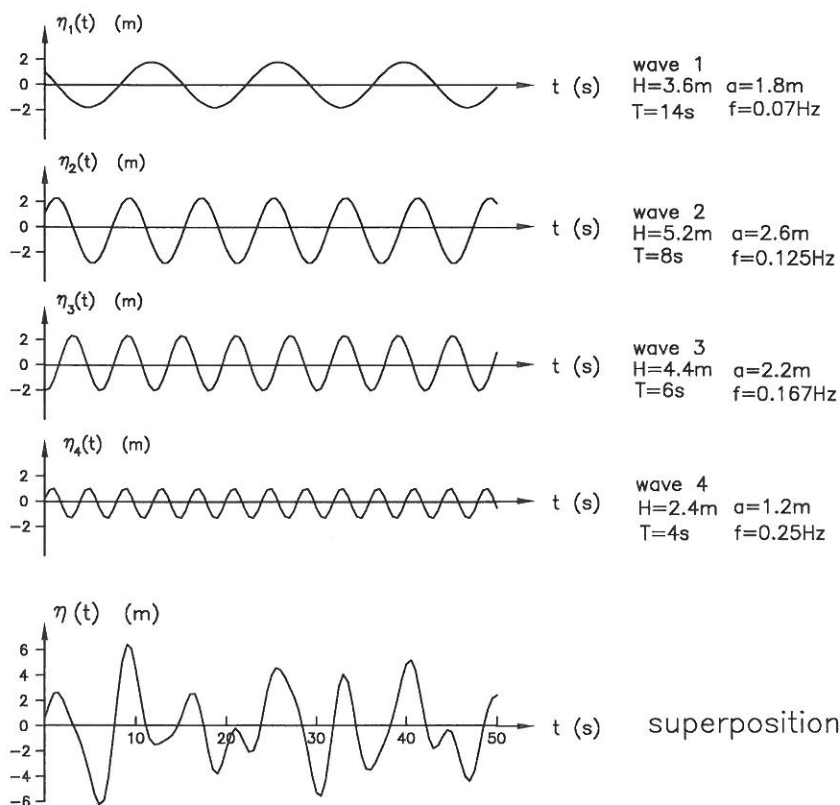
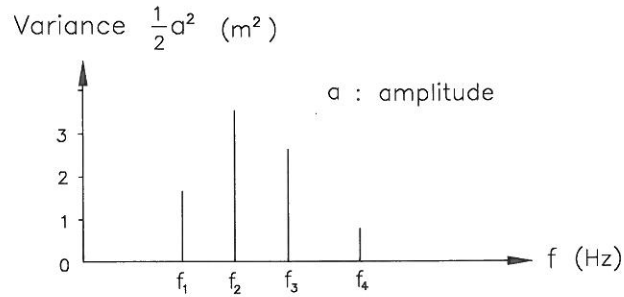


Figure 4.11: Simulation of irregular waves by superposition of linear waves.

### Variance diagram

Instead of Fig.4.11, we can use a variance diagram, shown in Fig.4.12, to describe the irregular wave.



Figur 4.12: Variance diagram.

In comparison with Fig.1, the variance diagram keeps the information on amplitude ( $a_i$ ) and frequency ( $f_i$ , hence  $T_i$  and  $L_i$ ) of each component, while the information on initial phase ( $\delta_i$ ) is lost. This information loss does not matter because the surface elevation of irregular wave is a random process. We can simply assign a random initial phase to each component.

### Variance spectral density $S_\eta(f)$

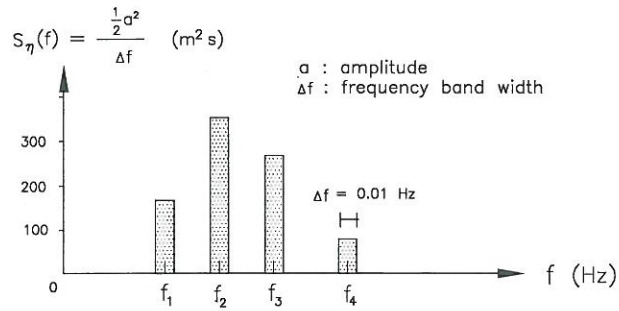
The variance diagram can be converted to variance spectrum, The spectral density is defined as

$$S_\eta(f) = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\Delta f} \quad (\text{m}^2 \text{ s}) \quad (4.18)$$

where  $\Delta f$  is the frequency band width<sup>2</sup>, cf. Fig. 4.13.

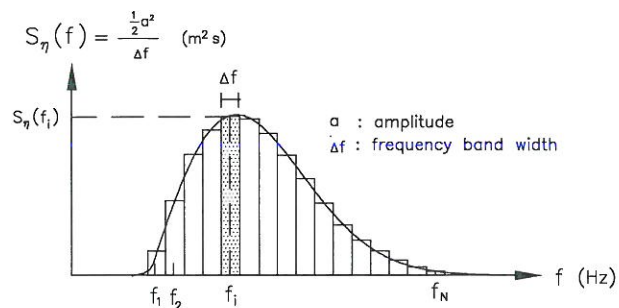
---

<sup>2</sup>we will see later that  $\Delta f$  depends on signal recording duration. In the figure it is assumed that  $\Delta f = 0.01\text{Hz}$



Figur 4.13: Stepped Variance spectrum.

In reality an irregular wave is composed of infinite number of linear waves with different frequency. Fig.4.14 gives an example of stepped variance spectrum. When  $\Delta f$  approaches zero, the variance spectrum becomes a continuous curve.



Figur 4.14: Continuous variance spectrum (wave energy spectrum).

A variance spectrum is also called energy spectrum. But strictly speaking, the energy spectral density should be defined as

$$S(f) = \frac{\frac{1}{2}\rho g a^2}{\Delta f} \quad (\text{m}^2 \text{ s}) \quad (4.19)$$

#### Construction of time series from variance spectrum

We can also construct time series of surface elevation from variance spectrum. In fig. 4.14 the known variance spectral density  $S_\eta(f)$  is divided into  $N$  parts by the frequency band width  $\Delta f$ . This means that the irregular wave is composed of  $N$  linear waves

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \delta_i) \quad (4.20)$$



The variance of each linear wave is

$$S_{\eta}(f_i) \Delta f = \frac{1}{2} a_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.21)$$

Therefore the amplitude is

$$a_i = \sqrt{2 S_{\eta}(f_i) \Delta f} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.22)$$

The angular frequency is

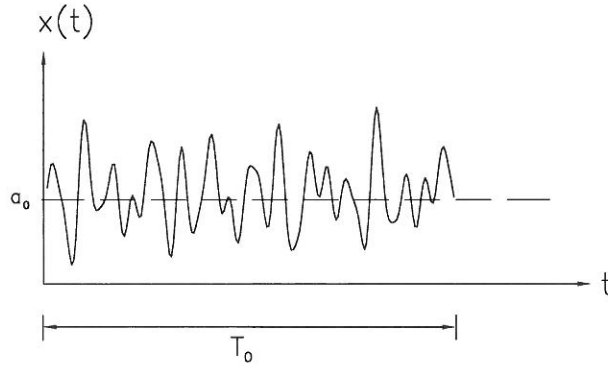
$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} = 2\pi f_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.23)$$

The initial phase  $\delta_i$  is assigned a random number between 0 and  $2\pi$ . Hence by use of Eq. (4.20) we can draw the time-series of the surface elevation of the irregular wave which has the variance spectrum as shown in Fig.4.14.

### Fourier series

Conversion of irregular surface elevation into variance spectrum is not as simple as the above example, where the linear components of the irregular wave are pre-defined (cf. Fig. 4.11). We need to decompose the irregular wave into its linear components. First let's see how it can be done with a known continuous function  $x(t)$ .

Fourier series is used to represent any arbitrary function<sup>3</sup>.



Figur 4.15: Arbitrary periodic function of time.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left( a_i \cos \left( \frac{2\pi i}{T_0} t \right) + b_i \sin \left( \frac{2\pi i}{T_0} t \right) \right) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

where  $a_i$  and  $b_i$  are Fourier coefficients given by

$$\left. \begin{aligned}
 a_i &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos \omega_i t \, dt \\
 b_i &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin \omega_i t \, dt
 \end{aligned} \right\} i = 0, 1, 2, \dots, \infty \tag{4.25}$$

Note  $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$  and  $b_0 = 0$ .

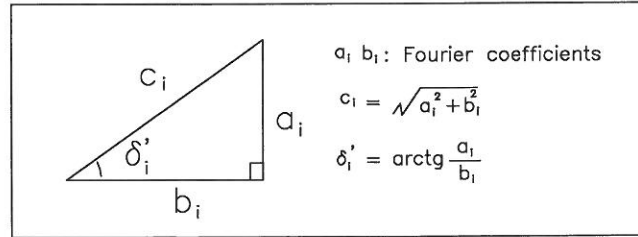
---

<sup>3</sup>Not all mathematicians agree that an arbitrary function can be represented by a Fourier series. However, all agree that if  $x(t)$  is a periodic function of time  $t$ , with period  $T_0$  then  $x(t)$  can be expressed as a Fourier series. In our case  $x(t)$  is the surface elevation of irregular wave, which is a random process. if  $T_0$  is large enough, we can assume that  $x(t)$  is a periodic function with period  $T_0$ .

Physical interpretation

Now we say that the continuous function  $x(t)$  is the surface elevation of irregular wave.  $\eta(t)$  can be expanded as a Fourier series.

$$\eta(t) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t)$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{i=0}^{\infty} (c_i \sin \delta'_i \cos \omega_i t + c_i \cos \delta'_i \sin \omega_i t) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} 2c_i (\sin \delta'_i \cos \omega_i t + \cos \delta'_i \sin \omega_i t) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} 2c_i \sin(\omega_i t + \delta'_i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} 2c_i \cos(\omega_i t + \delta_i) \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

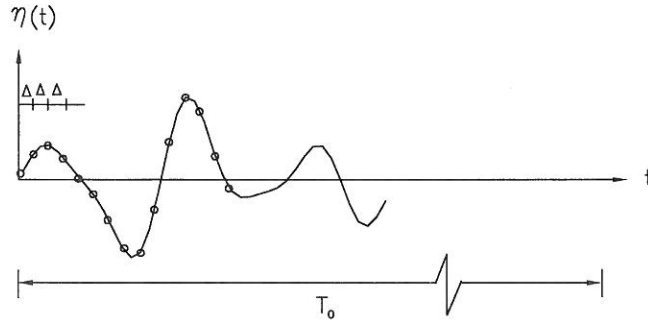
That is to say, any irregular wave surface elevation, expressed as a continuous function, is composed of infinite number of linear waves with

$$\left. \begin{array}{l} \text{amplitude} \quad 2c_i = 2\sqrt{a_i^2 + b_i^2} \\ \text{period} \quad T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{T_0}{i} \end{array} \right\} i = 0, 1, \dots, \infty \tag{4.27}$$

$\{a_i, b_i\}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , are given in Eq. (4.25).

## Discrete signal analysis

The measurement of surface elevation is carried out digitally. We do not have, neither necessary, a continuous function of the surface elevation. In stead we have a series of surface elevation measurement equally spaced in time, cf. Fig.4.16.



Figur 4.16: Sampling of surface elevation at regular intervals.

If the sampling frequency is  $f_s$ , then the time interval between two succeeding points is  $\Delta = 1/f_s$ . Corresponding to the sample duration  $T_0$  the total number of sample is  $N = T_0/\Delta$ . Thus we obtain a discrete time series of surface elevation

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \dots, \quad \eta_{N-1}$$

The Fourier coefficients

$$(a_0, b_0), \quad (a_1, b_1), \quad \dots, \quad (a_{N-1}, b_{N-1})$$

can be obtained by Fast Fourier Transforms (FFT)<sup>4</sup>. That is to say, the irregular wave surface elevation, expressed by digital time series, is composed of  $N$  linear waves

$$\eta(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i(t) = \sum_{i=0}^{N-1} 2\sqrt{a_i^2 + b_i^2} \cos(\omega_i t + \delta_i) \quad (4.28)$$

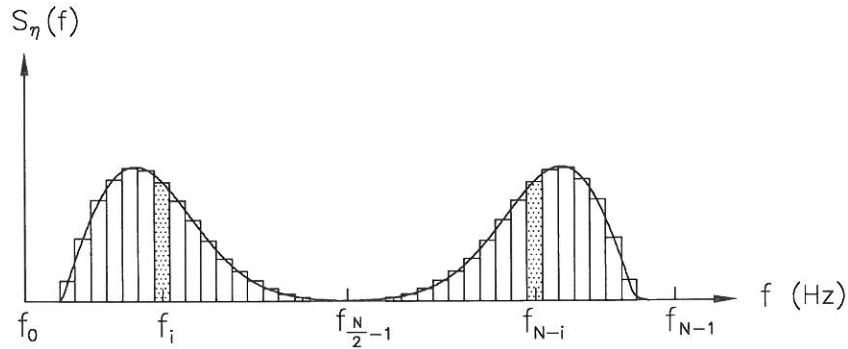
amplitude	$2\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$	}	$i = 0, 1, \dots, N - 1$	(4.29)
angular frequency	$\omega_i = \frac{2\pi i}{T_0}$			
period	$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{T_0}{i}$			
frequency	$f_i = \frac{1}{T_i} = \frac{i}{T_0}$			

<sup>4</sup>FFT is a computer algorithm for calculating DFT. It offers an enormous reduction in computer processing time. For details of DFT and FFT, please refer to Newland (1975)

Therefore we obtain the variance spectrum

$$\begin{aligned} \text{frequency width} \quad \Delta f &= f_{i+1} - f_i = \frac{1}{T_0} \\ \text{spectral density} \quad S_\eta(f_i) &= \frac{\frac{1}{2}(\text{amplitude})^2}{\Delta f} = \frac{2(a_i^2 + b_i^2)}{\Delta f} \end{aligned} \quad (4.30)$$

An example of variance spectrum is shown in Fig.4.17.



Figur 4.17: Variance spectrum.

Nyquist frequency  $f_{nyquist}$

Nyquist frequency  $f_{nyquist}$  is the maximum frequency which can be detected by the Fourier analysis.

Fourier analysis decomposes  $N$  digital data into  $N$  linear components. The frequency of each component is

$$f_i = \frac{i}{T_0} \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.31)$$

The Nyquist frequency is

$$f_{nyquist} = f_{\frac{N}{2}-1} = \frac{\frac{N}{2}-1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2} \frac{T_0}{\Delta} - 1}{T_0} = \frac{f_s}{2} - \frac{1}{T_0} \quad (4.32)$$

where  $f_s$  sample frequency

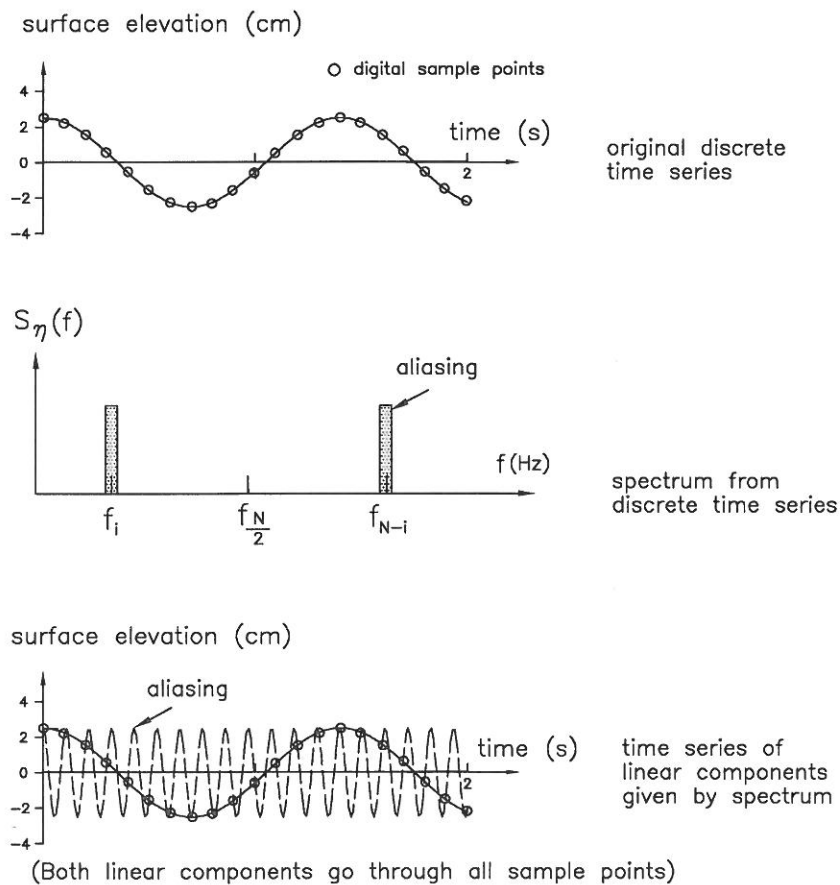
$\Delta$  time interval between two succeeding sample points,  $\Delta = 1/f_s$

$T_0$  sample duration

$N$  total number of sample,  $N = T_0/\Delta$

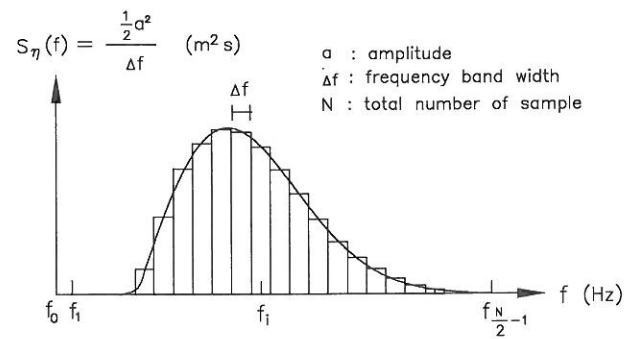
The concept of Nyquist frequency means that the Fourier coefficients  $\{ a_i, b_i \}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , contains two parts, the first half part ( $i = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ ) represents true components while the second half part ( $i = N/2, N/2 + 1, \dots, N-1$ ) is the folding components (aliasing).

Fig.4.18 gives an example on aliasing after the Fourier analysis of discrete time series of a linear wave.



Figur 4.18: Aliasing after Fourier analysis.

The solution to aliasing is simple: let  $\{ a_i, b_i \}$ ,  $i = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1$ , equal to zero, cf. Fig.4.19. That is the reason why  $f_{nyquist}$  is also called cut-off frequency. In doing so we are actually assuming that irregular wave contains no linear components whose frequency is higher than  $f_{nyquist}$ . This assumption can be assured by choosing sufficiently high sample frequency  $f_s$ , cf. Eq. (4.32).



Figur 4.19: Variance spectrum after cut-off (refer to Fig. 4.17).

### Taper data window

Fourier analysis requires that  $\eta(t)$  is a periodic function with period  $T_0$ , it may be desirable to modify the recorded time series before Fourier analysis, so that the signal looks like a periodic function. The modification is carried out with the help of taper data window.

The widely-used cosine taper data window reads

$$d(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{10\pi t}{T_0} \right) & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{10} \\ 1 & \frac{T_0}{10} \leq t \leq \frac{9T_0}{10} \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{10\pi \left( t - \frac{9T_0}{10} \right)}{T_0} \right) & \frac{9T_0}{10} \leq t \leq T_0 \end{cases} \quad (4.33)$$

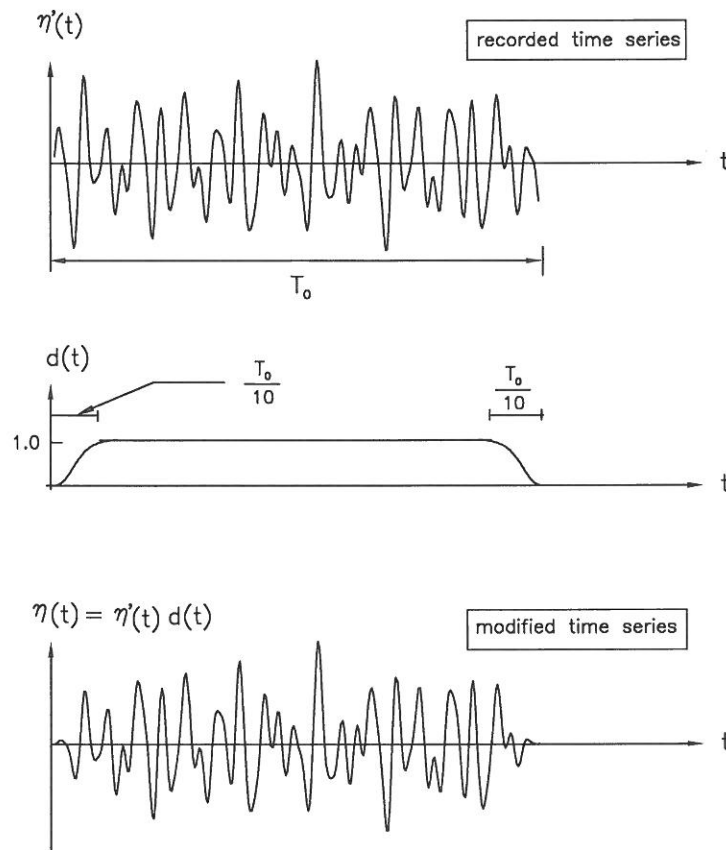
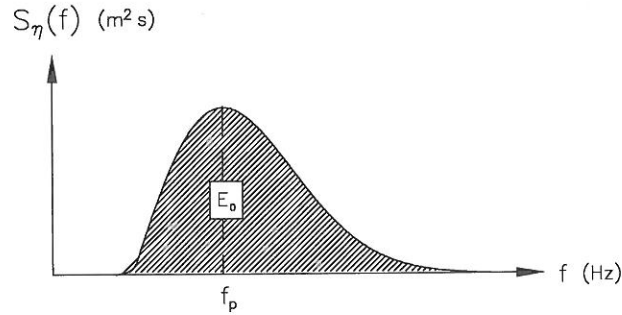


Figure 4.20: Taper data window.



### Characteristic wave height and period

The variance spectrum, illustrated in Fig.4.21, says nothing about how high the individual waves will be. Now We will see how to estimate the characteristic wave height and period based on the variance spectrum.



Figur 4.21: Variance spectrum.

n order moment  $m_n$   
 $m_n$  is defined as

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S_{\eta}(f) df \quad (4.34)$$

The zero moment is

$$m_0 = \int_0^{\infty} S_{\eta}(f) df \quad (4.35)$$

which is actually the area under the curve, cf. Fig. 4.21.

### Spectrum width parameter and validity of the Rayleigh distribution

From the definition of  $m_n$ , it can be seen that the higher the order of moment, the more weight is put on the higher frequency portion of the spectrum. With the same  $m_0$ , a wider spectrum gives larger values of the higher order moment ( $n \geq 2$ ). Longuet-Higgins has defined a spectrum width parameter

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (4.36)$$

It has been proven theoretically that

spectrum width parameter	wave height distribution
$\varepsilon = 0$ narrow spectrum	Rayleigh distribution
$\varepsilon = 1$ wide spectrum	Normal distribution

In reality  $\varepsilon$  lies in the range of 0.4-0.5. It has been found that Rayleigh distribution is a very good approximation and furthermore conservative, as the Rayleigh distribution gives slightly larger wave height for any given probability level.

Significant wave height  $H_{m_0}$  and peak wave period  $T_p$

When wave height follows the Rayleigh distribution, i.e.  $\varepsilon = 0$ , the significant wave height  $H_s$ <sup>5</sup> can theoretically be expressed as

$$H_s \approx H_{m_0} \equiv 4 \sqrt{m_0} \quad (4.37)$$

In reality where  $\varepsilon = 0.4 - 0.5$ , a good estimate of significant wave height from energy spectrum is

$$H_s = 3.7 \sqrt{m_0} \quad (4.38)$$

Peak frequency is defined as (cf. Fig. 4.21)

$$f_p = f \Big|_{S_\eta(f)=max} \quad (4.39)$$

Wave peak period ( $T_p = 1/f_p$ ) is approximately equal to significant wave period defined in time-domain analysis.

---

<sup>5</sup> $H_{m_0}$  denotes a wave height determined from spectrum while  $H_s$  or  $H_{1/3}$  is significant wave height determined from time-domain analysis. They are equal to each other when wave height follows the Rayleigh distribution.

# Kapitel 5

## Referencer

Brorsen, Michael, 1999.

*Strømningslære*

Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik, Aalborg Universitet.

Burcharth, H.F. and Brorsen, M., 1978.

*On the design of gravity structures using wave spectra.*

Lecture on Offshore Engineering, Edited by W.J.Graff and P. Thoft-Christensen, Institute of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.

Burcharth, H.F. og Larsen, Torben., 1988.

*Noter i Bølgehydraulik.*

Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning, Aalborg Universitet.

Burcharth, H.F., 1984.

*Bølgehydraulik.*

Department of Civil Engineering, Aalborg University.

Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., 1991.

*Water wave mechanics for Engineers and scientists.*

Second printing with correction, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Frigaard, P., Helm-Petersen, J., Klopman, G., Stansberg, C.T., Benoit, M., Briggs, J., Miles, M., Santas, J., Schäffer, H.A. and Hawkes, P.J., 1997.

*IAHR List of Sea State Parameters – an update for multidirectional waves.*

IAHR Seminar Multidirectional Waves and their Interaction with Structures, IAHR Congress, San Francisco.

Goda, Y., 1985.

*Random seas and design of marine structures.*

University of Tokyo Press, Japan.

IAHR Working Group on Wave Generation and Analysis, 1986.

*List of Sea State Parameters.*

Published jointly by IAHR and PIANC as a supplement to the PIANC Bulletin, January.

Klopmann, G. and Stive, M.J.F., 1989.

*Extreme waves and wave loading in shallow water.*

E & P Forum, Report No. 3.12/156.

Kofoed, J.P., 2000.

*Optimization of Overtopping Ramps for Utilization of Wave Energy.*

Report for the Danish Energy Agency, J. No. 51191/98-0017,

Hydraulics & Coastal Engineering Laboratory, Aalborg University, Nov. 2000.

Liu, Zhou and Frigaard, Peter, 1997.

*Random Waves*

Department of Civil Engineering, Aalborg University.

Neu, H.J.A., 1982.

*11-year deep water wave climate of Canadian Atlantic waters.*

Canadian Tech. Rept. of Hydrography and Ocean Sciences, 13.

Newland, D.E., 1975.

*In introduction to random vibrations and spectral analysis.*

Longman, London, 1975.

Ochi, Michel K. 1998

*Ocean Waves - The Stochastic Approach*

Cambridge University Press, Cambridge. ISBN: 0-521-56378

Sawaragi, T. 1995

*Coastal Engineering – Waves, Beaches, Wave-Structure Interaction*

Elsevier, The Netherlands. ISBN: 0-444-82068-X.

Stive, M.J.F., 1986.

*Extreme shallow water conditions.*

Delft Hydraulics, Intern Report H533.

Svendsen, Ib A. and Jonsson, Ivar G., 1980.

*Hydrodynamics of Coastal Regions.*

Den Private Ingeniørfond, Technical University of Denmark, Lyngby. ISBN: 87-87245-57-4.

Wiegel, Robert L., 1964.

*Oceanographical Engineering*

Prentice-Hall, Inc / Englewood Cliffs, N.J., London.

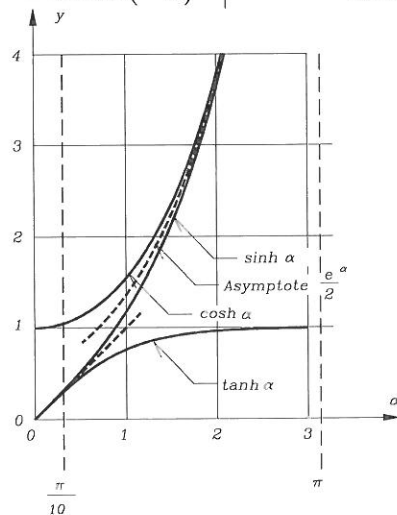
Young, I.R., 1999  
*Wind Generated Ocean Waves.*  
Elsevier, Kidlington, Oxford 1999. ISBN: 0-08-04331



# Bilag A

## Hyperbolske funktioner

$y$	$y'$
$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = -\sinh(-\alpha)$	$\cosh \alpha$
$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \cosh(-\alpha)$	$\sinh \alpha$



Grænse for  
fladvandsbølger

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{20}$$

svarende til  
 $kh = \frac{\pi}{10}$

Grænse for  
dyblvandsbølger

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$$

svarende til  
 $kh = \pi$

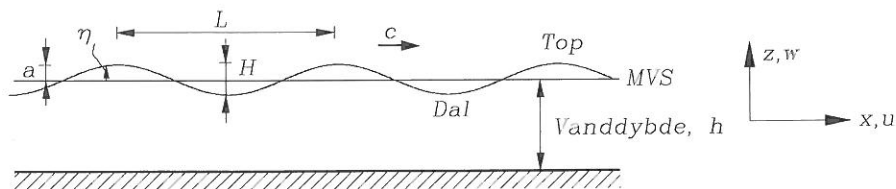




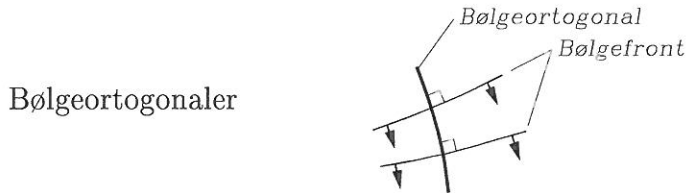
# Bilag B

## Definitioner, betegnelser og fænomener

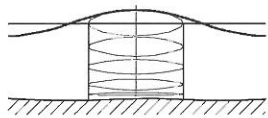
### B.1 Definitioner og betegnelser



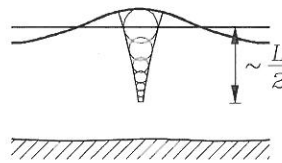
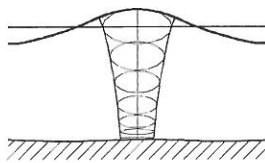
$H$	bølgehøjde
$a$	bølgeamplitude
$\eta$	Vandspejlsudsving i forhold til MVS
$L$	bølgelængde
$\frac{H}{L}$	bølgestejlhed
$T = \frac{L}{c}$	bølgeperiode, tid imellem to toppes passage af samme vertikal
$c$	er bølgeformens udbredelseshastighed, fasehastigheden
$u$	horisontal partikelhastighed
$w$	vertikal partikelhastighed
$k = \frac{2\pi}{L}$	bølgetal
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	cyklisk frekvens, vinkelhastighed
$h$	vanddybde



## B.2 Partikelbaner



Fladvand  $\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$

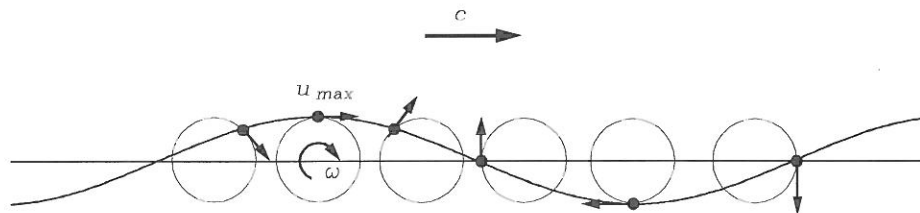


Dybt vand  $\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$

 Ved lille stejthed lukkede baner (generelt ellipser).

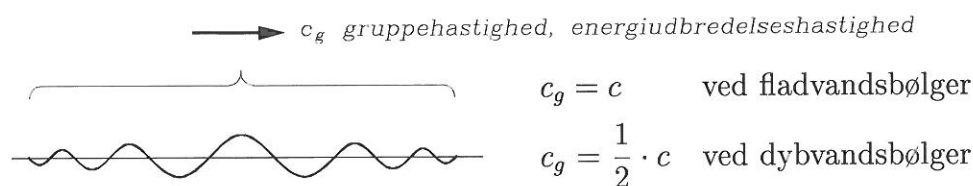
 Ved stor stejthed åbne baner, dvs. netto vandtransport.

Den tilhørende transporthastighed er dog selv ved stejle bølger mindre end 4% af  $c$ .

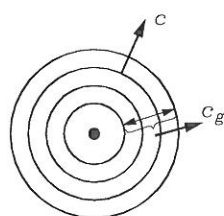


$u_{max} < c$  ved dybvandsbølger. For  $H/L = 1/7$  findes  $u_{max} \simeq 0,45c$

## B.3 Bølgegrupper



Eksempel





Stenkast i vand forårsager ringbølger, hvor den enkelte bølge overhaler gruppen og forsvinder, medens ny bølger dukker op inderst i ringen.

## B.4 Bølgeklassifikation efter oprindelse

Bølgefænomen	Oprindelse	Periode
Vindstuvning	Vindpåvirkning af vandoverflade	1 – 30 dage
Tidevand	Månens og solens gravitation	ca. 12 og 24 timer
Barometrisk bølge	Ændring i lufttryk	1 – 20 timer
Tsunami	Jordskælv, undersøisk vulkan	5 – 60 min.
Seiches, vandspejlssvingninger i bugter og havnebassiner	Resonans af langperiodiske komponenter i bølgegrupper, surf beat og tsumanis	1 – 30 min.
Surf beat, svingning af middelvandspejl på kyst Jord(klippe)skrebsbølge	Bølgegrupper	0,5 – 5 min.
Dønning	Vindgenererede bølger	< 40 sek.
Vindgenererede bølger	Vindpåvirkning af vandoverflade	< 25 sek.

## B.5 Bølgeklassifikation efter stejthed

$H/L \rightarrow 0$ , bølger med lille amplitude   
1. ordens Stokes bølger, lineære bølger,  
Airy bølger, harmoniske bølger

$H/L > 0,01$ , bølger med endelig højde   
højere ordens bølger, eks. 5. ordens Stokes  
bølger.

## B.6 Bølgeklassifikation efter vanddybde:

$h/L < \frac{1}{20}$ , fladvandsbølger

$h/L > \frac{1}{2}$ , dybtvandsbølger

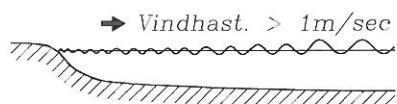
## B.7 Bølgeklassifikation efter energiudbredelsesretninger:

Efter bølgeortogonalretningen: 2-dimensionale (plane) eller såkaldte langkammede bølger (typisk dønninger på flade kyster)

Med retningsspredning i horisontalplanet: 3-dimensionale eller såkaldte kortkammede bølger (typisk vindgenererede stormbølger)

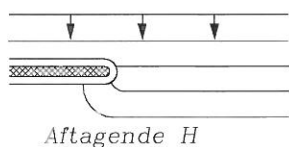
## B.8 Bølgefænomener.

I det følgende beskrives bølgefænomener knyttet til kortperiodiske bølger. Ved kortperiodiske bølger forstås typiske vindgenererede bølger, dvs. bølgeperioder mindre end ca. 30 sek.

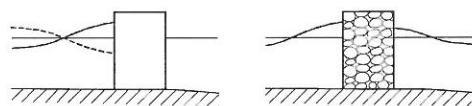


$H$ ,  $L$  og  $T$  vokser med vindhastighed og længden over hvilken vinden har virket (frit stræk).

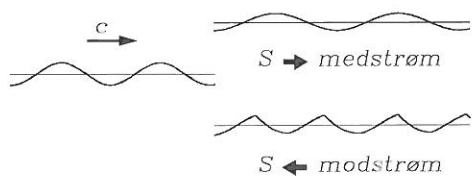
Vinddrift strøm i overfladen.



Diffraction

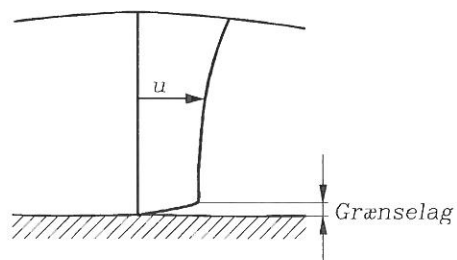


Refleksion og transmission

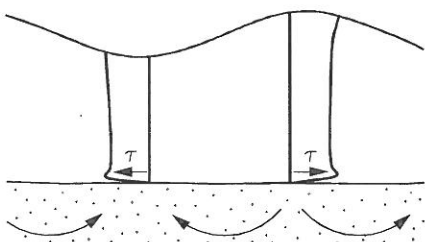
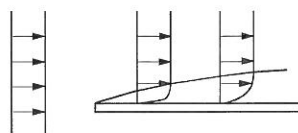


Bølgeprofilændring pga. strøm. Tilhørende ændring af fasehastighed medfører strømrefraktion, hvis  $S$  og  $c$  ikke er parallelle.

Fænomener betinget af bundens tilstedeværelse:

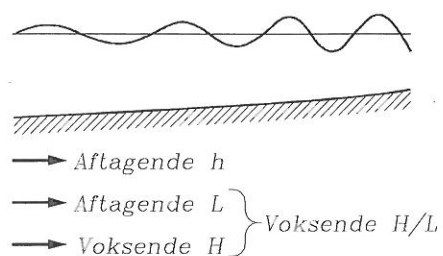


Lille grænselagstykkelse, idet tykkelsen ikke når at vokse væsentligt i den oscillerende bevægelse. Sml. grænselag i stationær strømning over en plade:

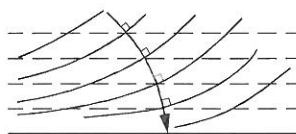


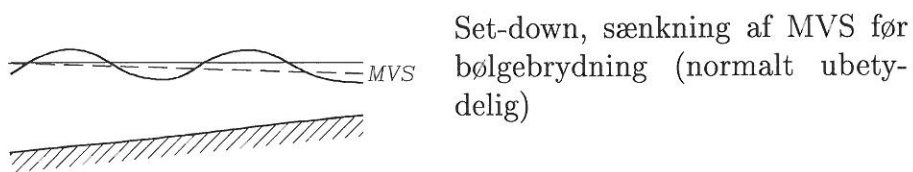
Bundforskydningsspænding (kan generere materialvandring)

Perkolation

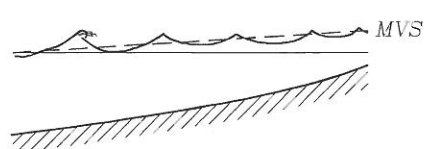


Shoaling, medfører refraction når bølgekamme og dybdekurve ikke er parallelle

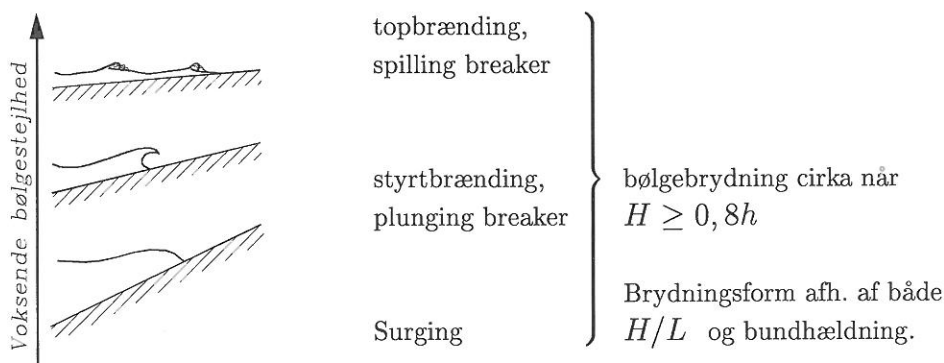




Set-down, sænkning af MVS før bølgebrydning (normalt ubetydelig)



Set-up, hævnning af MVS som følge af aftagende H ind gennem bølgebrydningszonen.



Det bemærkes, at bølger på dybt vand bryder ved topbrænding, når vindens påvirkning har frembragt relativt stejle bølger.

Brydende bølger genererer strøm langs kyster, hvor bølgeortogonalerne ikke er vinkelrette på bundkurverne.





# Bilag C

## Formler for regelmæssige bølger

### C.1 Lineær bølgeteori

$$\varphi = -\frac{a g}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (\text{C.1})$$

$$\eta = a \cos \theta = \frac{H}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (\text{C.2})$$

$$c = \sqrt{\frac{g L}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{Hc}{2} (-k) \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \\ &= \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\omega t - kx) \\ &= \frac{a g k}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{Hc}{2} k \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \\ &= -\frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\omega t - kx) \\ &= -\frac{a g k}{\omega} \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a g k \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin(\omega t - kx) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -a g k \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - kx) \quad (\text{C.7})$$

$$p_d = \rho g \eta \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \text{ som i } z=0 \text{ giver } p_d = \rho g \eta \quad (\text{C.8})$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \quad (\text{C.9})$$

$$E = \frac{1}{8} \rho_v g H^2 \quad (\text{C.10})$$

$$P = E c_g \quad (\text{C.11})$$

$$P = \frac{1}{8} \rho_v g H^2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (\text{C.12})$$

## C.2 Bølgeudbredelse

$$\frac{H}{H_0} = K_s = \sqrt{\frac{c_0}{c}} \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{H^b}{H^{b_0}} = \sqrt{\frac{c_g^{b_0}}{c_g^b}} \cdot \sqrt{\frac{b_0}{b}} \quad (\text{C.14})$$

$$(\text{C.15})$$

# Bilag D

## Opgaver

De følgende opgaver er de opgaver som anvendes i kurset Bølgehydraulik. I appendiks E findes desuden et ekstra sæt opgaver for de ivrige.

### D.1 Bestemmelse af bølgelængden

Fremstil et EDB-program til beregning af bølgelængden  $L$ .

Hvilke parametre afhænger bølgehøjden af ?

Beregn bølgelængden for følgende bølger:

- $H = 1$  meter,  $h = 10$  meter,  $T = 8$  sekunder
- $H = 1$  meter,  $h = 5$  meter,  $T = 8$  sekunder
- $H = 1$  meter,  $h = 3$  meter,  $T = 8$  sekunder
- $H = 2$  meter,  $h = 10$  meter,  $T = 8$  sekunder
- $H = 2$  meter,  $h = 5$  meter,  $T = 8$  sekunder
- $H = 2$  meter,  $h = 3$  meter,  $T = 8$  sekunder
- $H = 1$  meter,  $h = 10$  meter,  $T = 6$  sekunder
- $H = 1$  meter,  $h = 5$  meter,  $T = 6$  sekunder
- $H = 1$  meter,  $h = 3$  meter,  $T = 6$  sekunder

EDB-programmet skal anvendes som hjælp til løsning af de følgende opgaver, så gem det godt.

## D.2 Bølgehøjdebestemmelse

Opgaven starter med at vi går i laboratoriet. Her kalibreres en trykmåler. Trykmåleren placeres på bunden af bølgerenden. Nu genereres der en regelmæssig bølge med ukendt bølgehøjde. På computeren i laboratoriet opsamles der en kort tidsserie på ca 20 sekunder. Der måles med 20 Hz.

Nu består opgaven i at bestemme bølgehøjden v.h.a. den målte tryktidsserie.

## D.3 Beregning af bølgebrydningspositioner

Vi antager et kystprofil med hældningen 1:50. Langt fra kysten haves en vanddybde på 10 meter. Her er der målt en bølge med højden 2 meter og perioden 8 sekunder.

Det antages at bølgen kan beskrives v.h.a. lineær bølgeteori. Desuden antages det at bølgen bevæger sig vinkelret ind mod kysten.

Efterhånden som bølgen nærmer sig kysten, og kommer ind på lavere vand, vil bølgen begynde at shoale. Bølgen forventes at bryde når brydningskriteriet på  $H/L > 0.142 \tanh(2\pi h/L)$  er opfyldt.

- Bestem på hvilken vanddybde bølgen vil bryde
- Bestem bølgehøjden på brydningstidspunktet
- Bestem afstanden fra kysten på brydningstidspunktet
- Det antages nu at bølgen mister 75% af sit energiindhold ved brydningen, d.v.s. at bølgehøjden reduceres. Bestem den reducerede bølgehøjde
- Når bølgen bryder dannes der revler. Bestem beliggenheden af de to næste revler.
- Når I tænker på jeres besøg på stranden, hvordan vurderer I så jeres løsning.

## D.4 Bestemmelse af $H_s$

I får udleveret en målt tidsserie af elevationen  $\eta$ .

Optegn tidsserien og giv en visuel bedømmelse af bølgehøjden. Prøv at lade alle i gruppen komme med et 'hemmeligt' bud. Nu udregnes middelværdi og spredning af jeres bud på bølgehøjden.

Fremstil et EDB-program som kan udføre en nul-nedkrydsningsanalyse. Beregn nu  $H_s$  i den udleverede tidsserie.

Sammenlign den beregnede  $H_s$  med den skønnede. Kan I forstå hvorfor  $H_s$  anvendes til at beskrive bølgehøjden.

## D.5 Bestemmelse af $H_{m0}$

Sidste gang fik I udleveret en tidsserie af elevationen  $\eta$ .

- Beregn variansen i signalet. Hvad er enheden ?
- Beregn  $H_{m0}$  som  $4\sqrt{\text{variansen}}$
- Beregn spektret
- Bestem arealet  $m_0$  under spektret
- Forklar hvilken information der kan hentes ud af spektret



# Bilag E

## Eksempelopgaver

Det følgende appendiks indeholder nogle eksempler på opgaver.

Opgaverne er tænkt som selvstudieopgaver.

## E.1 Nul-nedkrydsnings opgave/eksempel

- 1) The application of the down-crossing method gives the following 21 individual waves.

wave number	wave height $H$ (m)	wave period $T$ (s)
1	0.54	4.2
2	2.05	8.0
3	4.52	6.9
4	2.58	11.9
5	3.20	7.3
6	1.87	5.4
7	1.90	4.4
8	1.00	5.2
9	2.05	6.3
10	2.37	4.3

wave number	wave height $H$ (m)	wave period $T$ (s)
11	1.03	6.1
12	1.95	8.0
13	1.97	7.6
14	1.62	7.0
15	4.08	8.2
16	4.89	8.0
17	2.43	9.0
18	2.83	9.2
19	2.94	7.0
20	2.23	5.3
21	2.98	6.9

Calculate  $H_{max}$ ,  $T_{max}$ ,  $H_{1/10}$ ,  $T_{1/10}$ ,  $H_{1/3}$ ,  $T_{1/3}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{T}$ ,  $H_{rms}$

- 2) Prove  $H_{2\%} = 2.23 \bar{H}$
- 3) Explain the difference between  $H_{1/10}$  and  $H_{10\%}$ .
- 4) Suppose individual waves follow the Rayleigh distribution. Calculate the exceedence probability of  $H_{1/10}$ ,  $H_s$  and  $\bar{H}$ .
- 5) An important coastal structure is to be designed according to  $H_{max}$ . The significant wave height of the design storm is  $H_{1/3} = 10$  m. The duration of the storm corresponds to 1000 individual waves.
- (1) Calculate  $(H_{max})_{mean}$ ,  $(H_{max})_{mode}$ ,  $(H_{max})_{median}$ ,  $(H_{max})_{0.05}$
- (2) Now suppose that the storm contains 500 individual waves. Calculate  $(H_{max})_{mean}$ ,  $(H_{max})_{mode}$ ,  $(H_{max})_{median}$ ,  $(H_{max})_{0.05}$ . Compare with the results of (1).
- (3) Use Monte-Carlo simulation to determine  $(H_{max})_{mean}$ ,  $(H_{max})_{mode}$ ,  $(H_{max})_{median}$ ,  $(H_{max})_{0.05}$



## E.2 Bølgespektre

- 1) An irregular wave is composed of 8 linear components with

wave no.	1	2	3	4	5	6	7	8
wave height H (m)	5.0	4.3	3.8	3.6	3.3	2.8	2.2	0.3
wave period T (s)	10.3	12	9.4	14	7	6.2	5	3.3

The recording length is 20 seconds. Draw the variance diagram and variance spectrum of the irregular wave.

- 2) Convert the variance spectrum obtained in exercise 1) into time series of surface elevation.
- 3) Make a computer program to simulate the surface elevation of an irregular wave which is composed of 8 linear components. Wave height and period of each component are given in exercise 1). Suppose the sample frequency is 3 Hz and the recording length is 500 seconds.
- (1) Determine  $H_s$  and  $T_s$  by time-domain analysis.
  - (2) Compare the distribution of individual wave height with the Rayleigh distribution.
  - (3) Calculate total number of linear components to be given by Fourier analysis  $N$ , frequency band width  $\Delta f$ , and the nyquist frequency  $f_{nyquist}$ .
  - (4) Draw the variance spectrum of the irregular wave by FFT analysis. (only for those who have interest.)
- 4) In reality where  $\varepsilon = 0.4 - 0.5$ , a good estimate of significant wave height from energy spectrum is

$$H_s = 3.8 \sqrt{m_0}$$

Try to find out the principle of getting this empirical relation.



