Acercar el formalismo y el uso en la educacion matematica en ingenierıa

Ravn, Ole; Valero, Paola

Published in:
Seminario de matem´atica educativa. Fundamentos de la matem´atica universitaria

Publication date:
2010

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

SEMINARIO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
Fundamentos de la matemática universitaria

MEMORIAS

Grupo de Investigación Pentagogía

Con el patrocinio de:

22, 23 y 24 de octubre de 2009

Seminario de matemática educativa. Fundamentos de la matemática universitaria
22, 23 y 24 de octubre de 2009
Volumen 1 - No. 3

Memorias

Grupo de Investigación Pentagogía

Ak 45 Nº 205-59
Fax: 6762655 o Bogotá
www.escuelaing.edu.co

Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería
Telefax: 6762655 editor@escuelaing.edu.co

Dirección editorial
Cristina Salazar Perdomo
cristina.salazar@escuelaing.edu.co

Coordinador editorial
Jorge Cañas Sepúlveda
jorge.canas@escuelaing.edu.co

Editado en LaTeX por
Carlos Abel Álvarez Pérez
carlos.alvarez@escuelaing.edu.co

Diseño de portada
Luisa Fernanda Manrique Riaño
luisa.manrique@escuelaing.edu.co

Corrección de estilo
Elkin Rivera Gómez

ISSN: 2145-7409

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

Introducción

La Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito ha venido realizando desde hace algunos años el Seminario de Matemática Educativa, organizado por el Grupo de Investigación Pentagogía. Con este seminario se busca reunir a la comunidad matemática del país en un encuentro de investigadores, profesores y estudiantes para reflexionar sobre los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y para hallarles soluciones a estos inconvenientes, intercambiando experiencias y conociendo propuestas novedosas que se desarrollan en diferentes ámbitos educativos. La idea es divulgar y socializar algunas de las experiencias que se desarrollan en la enseñanza de la matemática a niveles medio y superior, contribuir a la actualización en el quehacer del docente del área de la matemática, dar a conocer el avance y los resultados de investigaciones en temas relacionados, y generar vínculos académicos alrededor del tema de la educación matemática.

Los temas que se trataron en el presente seminario estuvieron relacionados con la problemática de la enseñanza de los fundamentos de la matemática, tales como el aprendizaje de conceptos básicos, nuevas metodologías, el uso de la tecnología en el aula, y en especial las experiencias exitosas de la enseñanza de la matemática. En esta versión se contó con la participación de conferencistas nacionales e internacionales de primera línea, como Carlos León Caamaño Espinoza, doctor en didáctica de la matemática de la Universidad de Barcelona; Alberto Campos Sánchez, doctor de la Universidad de París y profesor asociado de la Escuela Colombiana de Ingeniería; César Augusto Delgado García, doctor en didáctica de las ciencias experimentales y de la matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona; Crisólogo Dolores Flores, maestro en ciencias de la Universidad Autónoma de Guerrero (México); Ole Ravn Christensen, profesor asociado del Departamento de Educación, Aprendizaje y Filosofía de la Universidad de Aalborg (Dinamarca); Paola Valero Dueñas, profesora asociada de la misma universidad, y Carlos Eduardo Vasco Uribe, doctor en matemáticas de la Universidad de Saint Louis (Estados Unidos).

Las conferencias magistrales a cargo de los profesores invitados fueron "Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. El caso de la graficación covariacional"; "Acercar el formalismo y el uso en la educación matemática en ingeniería: el modelo ABP en acción"; "La matemática para ingenieros. Una mirada desde la didáctica de la matemática"; "Construcción de conocimiento matemático e inclusión. Experiencia con indígenas y afrocolombianos en la Universidad del Valle", y "Tres ideas fuertes del cálculo: variación, tasa y acumulación". Así mismo, contamos con los cursillos "Graficación covariacional", "Estudio epistemológico del desarrollo del álgebra lineal", "Las densidades de rotación y expansión de un campo vectorial" y "La computación a través de los juegos discretos". Además, hubo un número importante de ponencias que aparecerán al final de estas memorias.

Los organizadores

Índice general

CAPÍTULO 1

Conferencias magistrales

1.1. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. El caso de la graficación covariacional

Dr. Crisólogo Dolores Flores[1]

El pensamiento y lenguaje variacional (PLV) es el campo en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, tanto en el sistema educativo como en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados, utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral y Farfán, 2000). En cuanto vertiente investigativa, posee una triple orientación; en primera instancia, se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades de la matemática del cambio, y en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se

[1]Cicata-IPN, Cimate-UAG. cdolores@prodigy.net.mx, cdolores1@hotmail.com.
Maestro en la especialidad de físico-química, Escuela Normal Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. Licenciado en matemática educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, México. Maestría en ciencias, Área de Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctor en ciencias pedagógicas, Área Metodología de la Enseñanza de la Matemática, Instituto Superior Pedagógico Enrique J. Varona, Cuba. Investigador nacional nivel I desde 1999. Miembro de la Academia Mexicana de Ciencias. Coordinador del Cimate de la UAG desde 1998.

abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

La investigación en matemática educativa ha partido tradicionalmente del principio de que el conocimiento matemático es un saber fijo y preestablecido, ajeno a las prácticas sociales. El PLV pone en el centro de la atención las prácticas sociales asociadas a la variación en lugar del límite, como lo presumen las aproximaciones tradicionales (Dolores, 1999); por tanto, nuestros estudios se fundamentan en la aproximación socioepistemológica, la cual confiere un lugar preponderante a las prácticas sociales en la construcción del conocimiento matemático. En el contexto del PLV me referiré a uno de los procesos de representación de la variación que nosotros hemos llamado graficación covariacional (Salgado, 2007). Tanto en los textos como en la práctica escolar de la enseñanza de la matemática se conocen varios métodos de graficación de funciones, pero estos métodos omiten los procesos de variación y covariación subyacentes. En esta plática se discuten los fundamentos de la graficación covariacional, que posibilita la construcción de la gráfica misma sobre la base de tres elementos esenciales, introducidos por Dolores (1999) y Carlson et ál. (2002): la representación de los cambios, la covariación como la relación causal entre los cambios y el comportamiento de la variación atendiendo a la magnitud, la dirección y las razones de cambio.

Referencias

Cantoral, R. & Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal*, Icme-8. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), pp. 352-378.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Salgado, G. (2007). *Graficación covariacional*. Tesis de maestría. Chilpancingo Gro. México: Centro de Investigación en Matemática Educativa, UA de Matemáticas, UAG.

1.2. Acercar el formalismo y el uso en la educación matemática en ingeniería

Ole Ravn Christensen[2]
Paola Valero[3]

Resumen[4]**.**

Un problema común en el aprendizaje de las matemáticas tiene que ver con la brecha entre el formalismo y los cálculos de las matemáticas abstractas, por una parte, y su uso en un ámbito contextualizado específico, por ejemplo, en el mundo de la ingeniería, por otra. Las destrezas adquiridas mediante el aprendizaje basado en problemas (ABP), en el modelo especial que se usa en la Universidad de Aalborg, en Dinamarca, nos puede dar alguna idea de cómo tender un puente para cerrar esta brecha. A través del examen de varios ejemplos de proyectos que realizan estudiantes de primer ciclo de ingeniería, donde se recontextualizan temas matemáticos tales como matrices, ecuaciones diferenciales, análisis de *clusters*, teoría de grafos, etc., en el abordaje de problemas interdisciplinarios complejos, describimos y analizamos en detalle las competencias logradas por los estudiantes cuando hacen ese tipo de proyectos. Trataremos de mostrar cómo el trabajo de los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas, dentro de áreas contextuales, ofrece posibilidades de aprendizaje que van más allá de la clásica distinción entre el aprendizaje formal y los usos de las matemáticas universitarias.

[2]Ole Ravn Christensen es máster en matemáticas y filosofía de la Universidad de Aalborg y Ph.D. en teoría de la ciencia del Danish Centre for Educational Development in University Science. En la actualidad es profesor asociado en el Departamento de Educación, Aprendizaje y Filosofía de la Universidad de Aalborg. Investiga en educación matemática, con un foco especial en la relación de las matemáticas con otras ciencias. Un punto especial de investigación es el uso del modelo del aprendizaje basado en problemas en la pedagogía universitaria en general y en la educación matemática en particular.

[3]Paola Valero se ha interesado por desarrollar un enfoque sociopolítico para la investigación de la educación matemática, que permite relacionar las prácticas de enseñanza y aprendizaje en el aula con prácticas fuera de ella. Ha sido profesora asociada del Departamento de Educación, Aprendizaje y Filosofía de la Universidad de Aalborg, en Dinamarca, donde lidera el grupo de investigación en educación en ciencias y en matemáticas (Smerg). También es directora de estudios doctorales del programa Ciencia y Tecnología. Entre algunos de sus libros se encuentra *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: issues of power in theory and methodology* (co-editado con Robyn Zevenbergen).

[4]Este artículo se basa en "Closing the gap between formalism and application -PBL and mathematical skills in engineering", escrito por Ole Ravn Christensen en 2008 y publicado en la revista *Teaching Mathematics and its Applications*, 27(3), pp. 131-139. Agradecemos a la revista por permitir la traducción de este material al español, así como a Patricia Inés Perry Carrasco, de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, por la traducción al español del material original.

1.2.1. Introducción

En la educación universitaria, las matemáticas son una asignatura especial que se ha presentado tradicionalmente a los estudiantes como una entidad muy bien organizada. Los cursos de matemáticas se construyen a menudo sobre la estructura axiomatizada de las teorías matemáticas en cuestión. En un enfoque axiomatizado para el aprendizaje de las matemáticas, se acostumbra mostrar una porción particular de las matemáticas a partir de ciertos supuestos básicos para llegar a más y más verdades por medio de demostraciones. La presentación axiomatizada de los nuevos temas matemáticos a los estudiantes en forma de presentaciones magistrales es el modelo privilegiado para la enseñanza de las matemáticas. En este enfoque, el estudiante debe preocuparse por entender las estructuras de conceptos y procedimientos expuestas por los profesores, patrón de enseñanza y aprendizaje predominante en la mayor parte de las aulas de matemáticas de las universidades del mundo, y para la mayoría de los profesores y estudiantes, es una forma aceptada y hasta cierto punto exitosa. Sin embargo, dicho enfoque presenta un problema central: es difícil recontextualizar el formalismo abstracto de las matemáticas en un campo profesional dado. Si los estudiantes están aprendiendo matemáticas como parte de su educación para la ingeniería, necesitarán competencias especiales para utilizar el formalismo abstracto en una contexto de conocimiento diferente, pues la transferencia o la aplicación de formas de conocimiento matemático abstracto a prácticas matemáticas dentro de otras áreas de conocimiento puede ser extremadamente difícil, si no a veces imposible. Esto puede dar como resultado una brecha en la competencia de los estudiantes para usar matemáticas en sus prácticas de ingeniería; incluso puede presentarse el caso de que, sin importar cuántas matemáticas abstractas avanzadas se enseñen a los estudiantes de ingeniería, esto no ayude a cerrar tal brecha.

El problema de la transferencia de competencias de un ambiente de matemáticas formales a un ambiente de matemáticas aplicadas se ha estudiado mediante la investigación educativa en ciencias y matemáticas a nivel universitario. Basado en las teorías del aprendizaje situado como el trabajo fundamental de Lave (1988) y el avance de teorías socioculturales del conocimiento para el estudio de la educación científica y matemática, Roth (2008) ofrece evidencia de que el supuesto de la transferencia de conocimientos de un área y de un contexto a otro no es sostenible como un principio para la enseñanza de las matemáticas en la universidad. Al estudiar la manera como distintos expertos desarrollan una competencia matemática general, como la lectura de gráficas, Roth presenta pruebas de que cualquier tipo de persona -desde el profesor titular de matemáticas, hasta el estudiante, pasando por gente en ámbitos de trabajo- desarrolla habilidades específicas de lectura de gráficas con respecto al tipo de gráficas y al tema con el que suelen trabajar. Estos hallazgos sugieren que la incapacidad de transferir estudiantes del curso de matemáticas a otras áreas, como la física o las ingenierías, no son un problema de las capacidades de conocimiento de los estudiantes, sino más bien un malentendido del sistema de enseñanza y aprendizaje sobre cómo funciona el pensamiento humano, y en qué debería consistir el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, así como las competencias asociadas con ellas. Para abordar este problema en la enseñanza universitaria, Roth recomienda el uso de pedagogías activas como el aprendizaje basado en problemas (ABP), como una forma que puede abrir posibilidades de generación de conocimiento en relación con diversos contextos.

Como estamos de acuerdo con Roth, no hablamos de esta brecha en lo referente a formalismo y "aplicaciones". Dentro de la perspectiva teórica sociocultural a la que nos adherimos para referirnos a los procesos de pensamiento y aprendizaje matemático no tiene sentido hablar de "aplicaciones", ya que este término señalaría que un conocimiento o una competencia puede emplearse simplemente de manera indiscriminada, lo cual implicaría que es posible hacer una transferencia de conocimientos y habilidades de un contexto de conocimiento a otro. En cambio, decidimos usar el término "usos", que para nosotros se refiere al hecho de que cada tipo de conocimiento y de competencia parte de un juego de lenguaje matemático asociado con prácticas y reglas determinadas, y desarrollado en ámbitos contextuales definidos. El término "recontextualización" indica que cada vez que una persona entra en un campo específico y nuevo de conocimiento y práctica, la persona se involucra en un proceso complejo de reconstrucción contextual dentro de un juego de lenguaje distinto, pero que guarda similitudes con aquellos ámbitos y juegos que ya conoce. También hablamos de "competencias" para señalar el hecho de que todo conocimiento está presente sólo en relación con una acción. Para nosotros no es posible hablar de destrezas o habilidades como capacidades independientes de la participación y acción en prácticas de generación de conocimiento y de aprendizaje. Nuestras fuentes de inspiración teórica están en el trabajo del segundo Wittgenstein (1997) y en fuentes recientes como Sfard (2008), entre otros.

En este artículo analizamos un enfoque bien establecido para cerrar la brecha entre el formalismo de las matemáticas y sus usos: el así llamado modelo de aprendizaje basado en problemas (en adelante, modelo ABP). No lo investigaremos como un modelo teórico de aprendizaje, entre otros, ni compararemos diferentes tipos de modelos ABP. Más bien, nos enfocaremos en presentar varios estudios de caso provenientes de experiencias de enseñanza de matemáticas con estudiantes del ciclo básico de ingeniería y ciencias de la Universidad de Aalborg, donde toda la educación está basada en el modelo ABP. Con fundamento en estos ejemplos trataremos de esbozar algunas de las conclusiones que se pueden obtener con respecto a la brecha entre el formalismo de las matemáticas y su uso. No obstante, para comenzar, será conveniente considerar el marco educativo general en el que el modelo ABP se ha puesto en acción; por tanto, presentaremos algunos de los elementos claves del modelo ABP en la Facultad de Ciencias, Ingeniería y Medicina de la Universidad de Aalborg. A continuación mostraremos y discutiremos tres ejemplos de proyectos realizados por tres grupos de estudiantes. Con base en los ejemplos discutiremos las características de su actividad matemática, en especial en lo referente al cierre de la brecha entre formalismo y uso. Concluimos con unas reflexiones sobre las ventajas de este tipo de ambientes de enseñanza universitaria.

1.2.2. Breve reseña del ABP en Aalborg

La Universidad de Aalborg se creó a principios de la década de los setenta y se desarrolló en el espíritu de cambio que marcaba esa época de revolución estudiantil en Europa. Un aspecto de estos cambios fue la atención que se prestaba al espacio y a los procesos de aprendizaje que ocurrían en las universidades. Se decía que la educación superior trataba sólo con teoría abstracta en la "torre de marfil" de la academia, en lugar de enfocarse en problemas del mundo real que ocurrían fuera de los muros de la universidad (Illeris, 1974). En un proceso histórico complejo, donde casi toda la retórica política inicial ha desaparecido de manera gradual -o por lo menos se ha transformado radicalmente-, el modelo ABP de Aalborg es en la actualidad, y ante todo, un sistema educativo eficiente. Este sistema es, de hecho, una diversidad de modelos educativos específicos en las facultades y departamentos de la universidad, y por ello puede ser difícil señalar una característica central del modelo ABP de Aalborg. No obstante, en lo que sigue intentaremos describir algunas de las características fundamentales sobre las cuales tratamos de construir especificidades adaptadas a distintos programas de estudio. Para un recuento más elaborado y profundo del modelo ABP de Aalborg, véanse Kolmos, Fink y Krogh (2004), y Kolmos (2008).

El modelo ABP no sólo se fundamenta en la definición de problemas que guían el proceso de aprendizaje, sino que también se organiza en proyectos colectivos realizados por un grupo de hasta siete estudiantes. Este número varía mucho y normalmente decrece de modo gradual a medida que los estudiantes se especializan y tienen más experiencia. Cada grupo tiene que involucrarse en el proceso de indagación para abordar un problema, bien sea práctico o teórico, definido por ellos y que resulta en la producción semestral de un reporte de proyecto, en la mayor parte de los casos con una extensión de entre 70 y 80 páginas. En el ciclo básico de la Facultad de Ingeniería, Ciencias y Medicina -un programa educativo de un año al que trataremos de prestar un interés particular en lo que sigue-, cada grupo está asociado con dos facilitadores para la escritura del proyecto. Si tomamos un grupo de científicos de la computación como ejemplo, uno de los facilitadores es un experto en ciencias de la computación, normalmente un miembro del cuerpo profesoral del Departamento de Ciencias de la Computación. Éste es el facilitador principal y es el responsable de apoyar el avance del grupo en las competencias técnicas de algún área de las ciencias de la computación. El otro facilitador es el encargado de la contextualización del contenido técnico pertinente y cumple un papel importante en apoyar a los estudiantes en la escritura de un proyecto que cierra la brecha entre formalismo y uso, ya que ésta es su principal tarea en relación con el trabajo del grupo. Esta persona es normalmente miembro del personal académico de otra área afín. En el presente caso, Ole Ravn Christensen ha sido el facilitador contextual de los proyectos que se ejemplificarán.

Además de la escritura del reporte del proyecto, los estudiantes también asisten a diversos cursos magistrales. Algunos cursos ayudan a construir las competencias de trabajo colaborativo requeridas para funcionar en un entorno propio para el modelo ABP, cuyo foco está en los procesos de aprendizaje en los grupos, tal como la cooperación en equipos, compartir conocimiento, etc. Otros cursos apoyan los perfiles disciplinares de los estudiantes. Todos los ingenieros reciben cursos matemáticos extensos en los temas tradicionales típicos del primer ciclo universitario y, además, cada rama de ingeniería tiene cursos de apoyo en sus disciplinas particulares. El balance entre las actividades de los cursos y el trabajo de grupo para el proyecto se inclina, sin embargo, hacia este último. De los 30 puntos ECTS (*European Credit Transfer System*) que definen un semestre completo de estudios, al menos la mitad se adquieren por razón del trabajo en el proyecto, pero este número puede ser bastante más alto en algunos programas de ingeniería y ciencia.

Un ingrediente fundamental en el sistema educativo del modelo ABP es el entorno físico. Los grupos de trabajo requieren salones adecuados y, por tanto, la universidad ha invertido una extensión considerable de su planta física en construir espacio de oficina para asegurar que cada grupo de estudiantes tenga un salón propio a su disposición. Esto proporciona a los estudiantes la oportunidad de encontrarse cada día en su propia "oficina" con su propio refrigerador, tableros, computadores portátiles y demás elementos, para crear un ambiente y un espacio de trabajo que supla bien sus necesidades. Esta parte del sistema educativo no se implementa de igual manera en todos los campos universitarios, pero en las facultades de ingeniería, ciencia y medicina este sistema está totalmente desarrollado, mientras que en la facultad de humanidades el espacio físico se administra en forma diferente.

Hasta ahora no hemos analizado lo que significa que los estudiantes aprendan de una manera basada en problemas. Abordaremos este asunto dando tres ejemplos. En lo que sigue, describiremos las condiciones para los estudiantes de primer año de matemáticas y ciencia de la computación en la Universidad de Aalborg. Con esto tenemos la intención de señalar cómo es posible enseñar matemáticas nuevas a través del empleo de un modelo ABP en todas las posibles ramas de la ingeniería. Mostrando cómo se puede cerrar la brecha entre formalismo y usos en la educación en matemáticas o en ciencia de la computación, esperamos también destacar perspectivas claves de la utilización del modelo ABP para la educación matemática en ingeniería. Antes de centrarnos en los ejemplos, abordemos primero algunos de los ámbitos más específicos que los estudiantes de matemáticas y ciencia de la computación encuentran en el primer semestre de universidad.

1.2.3. El modelo ABP en acción

Los estudiantes cuyos proyectos describiremos a continuación deben trabajar en un tema general que han de elegir de un abanico de temas formulados por el grupo de facilitadores. Por ejemplo, en años recientes los estudiantes han podido elegir de un conjunto de temas como "Técnicas de microarreglos de ADN para apoyar el diagnóstico de enfermedades", el "Sistema Pagerank de Google", "Gripe aviar: medición de los escenarios de propagación", etc. Para cada uno -a menudo, aproximadamente diez temas para un semestre dado-, el grupo de facilitadores ha desarrollado una descripción de una página de extensión, donde se plantean aspectos importantes de posible problematización con respecto a esos asuntos. Este marco de referencia sirve a los estudiantes para poderse imaginar un posible proyecto, pues cuando los estudiantes eligen un tema dado, comienzan a negociar la definición de un problema abierto de indagación en ese tema, sobre el cual han de escribir un reporte. En algunos pocos casos, los estudiantes aportan ideas con respecto a temas nuevos sobre los cuales escribir, y éstos son bien recibidos por los facilitadores si el área de interés presenta problemas matemáticos o técnicos potencialmente fructíferos.

Después de que un grupo de estudiantes elige un tema, sigue un proceso arduo de exploración con el objetivo de definir un problema que guiará el proceso de aprendizaje. En este contexto, no es un ejercicio ni una situación problemática en el sentido de un problema típico matemático o de las ciencias. Un problema se refiere a una situación abierta que genera un reto de conocimiento y que demanda una solución teórica o práctica que permita abordarla. El problema puede tener un anclaje en la realidad social o tecnológica, o en un ámbito teórico. Además, el abordaje del problema requiere un proceso de investigación largo. No estamos hablando de un asunto que se resuelve en unas pocas horas o en una semana. A continuación, el grupo debe elegir una estrategia para su reporte del proyecto, de manera que en ella se combinen la teoría matemática y su uso en un contexto dado. Esto se lleva a cabo en cooperación estrecha con ambos facilitadores. Con frecuencia el proceso de investigación y aprendizaje es no lineal, frustrante y gira en torno de asuntos interdisciplinarios: ¿qué clase de matemáticas formarán parte central de este reporte del proyecto? ¿Cuál es el problema general que se quiere abordar? ¿Cómo se puede formular claramente este problema? ¿Deberíamos buscar información empírica para trabajar sobre ella? ¿Necesitaremos crear un algoritmo o incluso implementar un uso de la teoría desarrollada por nosotros mismos para resolver nuestro problema? ¿Qué tan detallado debería ser un recuento de las diferentes partes de la teoría usada? Y la lista de preguntas continúa.

Antes de entrar a discutir sobre este sistema educativo, veamos tres ejemplos de proyectos de grupos ABP reales que se ubican en el período 2005-2007 en la Universidad de Aalborg (para más información sobre el sistema educativo del primer año de estudios en ciencia, ingeniería y matemáticas en la Universidad de Aalborg, se puede visitar el sitio *www.tnb.aau.dk*). Cada ejemplo ilustra diferentes logros que han tenido estudiantes de matemáticas y ciencia de la computación a través del modelo ABP. Adicionalmente, los tres ejemplos muestran cómo los estudiantes, dependiendo de la asignatura específica, son guiados por los facilitadores e impulsados por la dinámica de su propio grupo para comprometerse en el cierre de la brecha entre el formalismo y el uso en un escenario dado que involucra matemáticas.

Ejemplo 1. Escenarios de propagación de la gripe aviar

Hace unos pocos años, la aterradora gripe aviar estaba en todas las noticias, y hubo varios reportes alarmantes de la amenaza de propagación de la enfermedad en el territorio danés. En cuestión de unos pocos y angustiosos días se vendieron cantidades grandes de píldoras de tamiflú como resultado de un amplio cubrimiento, por parte de la prensa, de la propagación de la gripe aviar en todo el mundo, y se tomaron medidas políticas tanto a escala nacional como global para contener el problema. Un grupo de estudiantes eligió como proyecto examinar el uso de las matemáticas en el cálculo de los escenarios de propagación de tal enfermedad. El grupo, conformado por siete estudiantes de matemáticas, tenía un facilitador para los aspectos contextuales y un facilitador para las matemáticas, como se mencionó antes. El primero dedicaba un tercio del total de sus horas de supervisión a este grupo en particular. Los estudiantes decidieron enfocarse en un escenario danés de propagación para su enunciado inicial del problema. Si la enfermedad alcanzaba a Dinamarca, ¿cuántas personas se enfermarían, y cuántas de ellas morirían?

Modelar la propagación de la gripe aviar se podría enfocar de muchas maneras y saber cómo elegir el modelo correcto para configurar una situación dada es naturalmente parte de lo que significa tener competencias en recontextualizar las matemáticas a través de la generación de un modelo. Pero ¿cómo hacer las matemáticas sin el conocimiento de la situación real del fenómeno en cuestión? Para responder el problema inicial, el grupo decidió buscar conocimiento biológico sobre la gripe aviar: ¿qué es y qué tan contagiosa es?, ¿cómo se transmite entre los seres humanos?, ¿cuál es la tasa esperada de éxito del antídoto tamiflú contra una pandemia?, etc.

Estas investigaciones acerca del escenario de uso cambiaron el conocimiento del grupo y, por tanto, su perspectiva sobre las matemáticas que se utilizarían en el reporte del proyecto. Después de varias reformulaciones, finalmente el grupo enunció el problema de un modo muy diferente; presentaron un problema altamente contextualizado que debía examinarse en detalle mediante el uso de métodos matemáticos para cálculos de propagación en un escenario dado. Ahora el punto focal estaba en la posible reacción extrema del público con respecto a la amenaza de la gripe aviar. Amenazas tales como la enfermedad de las vacas locas y el virus del Sars causaron tanto revuelo en el mundo como la gripe aviar. Esas enfermedades ya estaban olvidadas en el momento en que se llevó a cabo este proyecto.

Por medio de ecuaciones diferenciales de las matemáticas clásicas, los estudiantes tabularon lo que denominaron escenarios "realistas" y el "peor de los casos", sobre la base del conocimiento que habían recogido. Mediante un análisis interdisciplinario del problema contextual en relación con las ecuaciones que usaron, el grupo aprendió más que la mera solución exacta (o numérica) a una ecuación diferencial. Aprendieron sobre asuntos de confiabilidad con respecto al contenido matemático, y sobre cómo las constantes en las ecuaciones matemáticas afectan considerablemente los resultados de investigación en un ámbito complejo de uso. Por otra parte, estos estudiantes de matemáticas abordaron un fenómeno, la propagación de la gripe aviar, que no se puede interpretar en términos matemáticos sin las consideraciones de otras perspectivas científicas; de ahí el enfoque interdisciplinario que le dieron al asunto. La mayoría de los problemas de la vida real se parecen al que ellos estudiaron en que su complejidad involucra una cantidad de dimensiones que requieren conocer enfoques de resolución de problemas en varias ramas de la ciencia. Saber algo de los tipos de conocimiento que otras ciencias son capaces de manejar también hace posible que los estudiantes de matemáticas lleguen a ser conscientes de cómo las competencias matemáticas específicas marcan particularmente el trabajo de los científicos.

Ejemplo 2. Técnicas de microarreglos de ADN

En el primer semestre de 2006, un grupo de cuatro estudiantes de segundo semestre se ocupó de la nueva técnica de microarreglos de ADN. El propósito primario de esta técnica es medir qué tanto cierto gen se expresa en un individuo dado. Empleando la nueva técnica, esto se puede llevar a cabo para miles de expresiones genéticas a la vez, lo que involucra el uso de matemáticas de análisis de *cluster*, diferentes tipos de medidas, etc.

Inicialmente, el grupo formuló el problema así: "¿Se puede usar la técnica de microarreglo de ADN en la clasificación de ciertas enfermedades?". Los estudiantes hicieron investigaciones en biología para aclarar qué es realmente un gen, y para comprender la idea errónea de referirse a los genes como si estuvieran "prendidos" o "apagados". Ellos investigaron cómo los microarreglos de ADN funcionan en la práctica y visitaron un hospital donde se está utilizando la técnica en su etapa inicial. Así que establecieron una base para trabajar con el tratamiento matemático de los datos en relación con la clasificación de enfermedades.

Al usar material de caso, que incluye información sobre la expresión genética de ADN en un grupo grande de pacientes, de algunos de los cuales se sabía que tenían cierta enfermedad, los estudiantes emplearon diferentes tipos de mediciones y análisis de *cluster* para confirmar o rechazar que la nueva técnica se podía utilizar para clasificar a los individuos como enfermos o saludables. En colaboración con sus facilitadores, y a través de su trabajo y de discusiones, los estudiantes encontraron que usar diferentes mediciones de las relaciones entre diversos segmentos de la información daba resultados disímiles, y que diferentes tipos de análisis de *cluster* también producían resultados divergentes sobre el mismo conjunto de datos. Concluyeron que, a pesar de la propaganda que rodea a esta nueva tecnología, ésta no funcionaba todavía adecuadamente.

El caso de este proyecto muestra el establecimiento de un análisis metateórico especial del método matemático de análisis de *cluster*, que no habría sido alcanzable para los estudiantes sin un enfoque basado en problemas. Además, los estudiantes experimentaron de primera mano cuán desordenado es el mundo realmente: los resultados, a partir del conjunto de datos, podrían ser fallidos en alguna medida; la técnica de ADN era posiblemente algo imprecisa; los médicos que tienen que ver con la investigación en este campo con frecuencia dependen en alguna medida de científicos, tales como matemáticos o ingenieros, que tienen conocimientos del aspecto biológico del tema, y finalmente, el matemático en su propio terreno debe elegir entre varias opciones metodológicas, dependiendo del problema que tiene entre manos.

Ejemplo 3. El sistema Pagerank de Google

En el primer semestre de 2007, un grupo de siete estudiantes de segundo semestre eligió trabajar con el tema del sistema Pagerank de Google. Posteriormente, decidió trabajar sobre el asunto de las mediciones cualitativas empleadas para hacer un escalafón de las páginas de internet cuando alguien utiliza motores de búsqueda tales como Google.

Después de estudiar estos asuntos del contexto, el grupo exploró las matemáticas involucradas en el uso del sistema Pagerank de Google. Esto incluyó teoría básica y avanzada de grafos, lo mismo que el conocimiento sobre el uso de álgebra lineal básica, vectores y matrices (¡en especial la enorme matriz Google!). Además, en el reporte del proyecto se trató tangencialmente el empleo de matrices estocásticas y cadenas de Markov.

Como el grupo estaba conformado por futuros matemáticos y futuros científicos de la computación, se dedicó mucho tiempo a ganar conocimiento sobre la estructura de internet cuando se la considera un grafo. Finalmente, se analizó el aparato matemático que sustenta el motor de búsqueda de Google con referencia a las mediciones cualitativas desarrolladas al comienzo del reporte. Surgieron diversas preguntas éticas sobre los criterios menos obvios utilizados por el sistema Pagerank y se analizó de qué manera la organización matemática del sistema tenía algunos beneficios, pero también algunas deficiencias, desde el punto de vista de los usuarios.

El grupo en cuestión mostró cómo un proyecto ABP podría integrar algo tan contemporáneo como el motor de búsqueda de Google con un tema matemático, la teoría de grafos, que a menudo es difícil de ejemplificar a través de sus usos. En el trabajo también se señala el hecho de que una inmensa e impresionante cantidad de teoría -proveniente en parte de artículos y libros de investigación sobre el tema- se puede poner en juego en el modelo ABP, pues los estudiantes tuvieron que recurrir a estas fuentes de información para poder abordar su problema. Así, el modelo ABP ofrece la oportunidad de diferenciar entre los resultados de aprendizaje de diferentes grupos de estudiantes con respecto a sus ambiciones, destrezas especiales, etc.

1.2.4. El modelo ABP de Aalborg y las competencias matemáticas

Después de presentar los tres ejemplos anteriores, vamos a hacer una consideración más general del uso del modelo ABP de Aalborg en relación con el aprendizaje de las matemáticas de estos grupos de estudiantes. Es evidente que el modelo contrasta con la manera como se enseñan las matemáticas en muchos otros ámbitos educativos, y difiere, por ejemplo, de un curso tradicional, en el que el profesor presenta a los estudiantes la teoría de alguna porción de las matemáticas y, luego, ellos trabajan sobre ejercicios o demostraciones de teoremas importantes. Esta forma de enseñanza de las matemáticas entrena a los estudiantes en la sintaxis matemática pero, como se dijo al principio de este artículo, no garantiza una comprensión significativa que sea la base para relacionar estas matemáticas con las características y procesos de un ámbito temático complejo en otro campo de conocimiento. Aludiendo a los tres ejemplos, muchos de estos estudiantes se convertirán más tarde en profesores de matemáticas en diferentes niveles de educación, o trabajarán en áreas donde se requiera cierto tipo de indagación matemática en interacción amplia con otros profesionales de diferentes campos de estudio. En todas estas situaciones se requiere poder navegar en distintos ámbitos de práctica matemática dentro de una situación concreta y no sólo manejar matemáticas abstractas. Para los estudiantes de ingeniería, la posibilidad de manejar la brecha entre el formalismo y el uso se podría considerar incluso más urgente, y esto podría sugerir la conveniencia de trabajar siguiendo alguna clase de modelo ABP al enseñar matemáticas a un grupo específico de estudiantes de ingeniería.

A partir de los tres ejemplos se pueden destacar varios puntos acerca del modelo ABP. En el ejemplo 1, un grupo de estudiantes trabajó en un escenario de aplicación bastante complicado de ecuaciones diferenciales. El problema que tenían entre manos no se podría haber resuelto sin involucrarse profundamente en conocer la situación donde se iban a usar las ecuaciones diferenciales. Este enfoque significó que los estudiantes aprendieran no sólo por qué una ecuación diferencial dada tiene esta solución exacta, sino que también aprendieran cómo se deberían interpretar las diferentes constantes en un escenario dado de aplicación y qué las habría hecho cambiar de valor, etc. Esto les brindó de nuevo la oportunidad de reflexionar sobre la validez del modelo matemático porque, por ejemplo, si algún conocimiento sobre el cual el modelo estaba construido era impreciso, ello podría significar una gran inexactitud para el modelo entero. Este tipo de inexactitud podría tener consecuencias catastróficas en cuanto a la expansión de una enfermedad como la gripe aviar.

Los siguientes dos ejemplos de trabajo en proyectos ABP muestran variaciones de las mismas características para este ámbito educativo. En el ejemplo 2 se presentó cómo se hicieron consideraciones metateóricas muy pertinentes cuando se tuvo que elegir, entre muchas posibilidades, un modelo matemático dado para el análisis de ADN. Cada elección diferente del enfoque matemático realmente alteraría lo que se podría concluir a partir de los datos empíricos. Además, los estudiantes aprendieron cómo la situación de aplicación de un formalismo matemático estaba influida por muchos factores. Los datos empíricos eran erróneos, los médicos que utilizaban esta tecnología sabían poco sobre las matemáticas involucradas, etc., y por tanto, los rasgos importantes de una persona competente en usar las matemáticas llegaron a ser muy claros para los estudiantes durante la escritura del reporte. El trabajo en el proyecto mostró claramente a los estudiantes que los números no son sólo entidades abstractas, sino que tras esos números y tecnologías basadas en ellos hay una gran posibilidad de variación, dependiendo de los análisis y el conocimiento tanto de quienes construyen los modelos que hay detrás de las tecnologías, como de quienes los usan e interpretan. El diálogo de los estudiantes con los médicos en el hospital les permitió ver una dimensión del trabajo matemático que normalmente queda escondida en la enseñanza que privilegia sólo el formalismo.

Por medio del ejemplo 3 teníamos la intención de mostrar cuán impresionantes pueden ser algunas de las metas logradas por los estudiantes en el entorno de aprendizaje del modelo ABP. Incluso en grupos muy grandes, la capacidad de recoger información sobre una aplicación técnica, como el motor de búsqueda de Google y el aparato conceptual y matemático que soporta esta aplicación técnica, se puede desarrollar y aprender exitosamente. No es extraño, entonces, que los grupos de estudiantes de primer año lean artículos de investigación en los que se aborda específicamente el problema que ellos pretenden resolver. Con frecuencia, no tienen todas las herramientas para comprender los detalles de tales artículos, pero con la ayuda de sus facilitadores y de libros básicos pueden organizar todos los elementos y crear un proyecto de su propia autoría, con explicaciones que se ajustan a su propio nivel de conocimiento de las matemáticas o de la ciencia de computación, etc. El mito de la incompetencia de los estudiantes primíparos se puede revaluar fuertemente al ver a estos alumnos producir análisis tan sofisticados como los de este grupo. En el modelo ABP, los estudiantes trabajan con usos reales de las matemáticas y no sólo con sus teorías abstractas; ellos aprenden teoría matemática en un escenario más tradicional, basado en un curso, pero muy a menudo sólo utilizan estas herramientas indirectamente en los reportes de proyecto. Los cursos les presentan técnicas y herramientas que apoyan su aprendizaje en los proyectos. En este sentido, el formalismo matemático no se posiciona como la finalidad misma del aprendizaje, sino como un medio, lo cual no significa, sin embargo, que los estudiantes de hecho no manejen los detalles del formalismo y que no sean diestros en ello, sino más bien que lo segundo sucede porque lo primero genera las razones fuertes para poder enfrentar las exigencias tradicionales del aprendizaje de las matemáticas universitarias. Además, es importante tener en cuenta que los ámbitos de uso definidos por un problema que contextualiza las herramientas matemáticas simplemente no podría encajar dentro de un curso de matemáticas que considere las necesidades de todos los grupos de estudiantes. En el modelo mixto de cursos clásicos de matemáticas y aprendizaje de las matemáticas a través de ABP, se atiende tanto el entrenamiento sintáctico como la competencia de usar y recontextualizar las matemáticas. Sin embargo, si los estudiantes de ingeniería no necesitan una comprensión profunda de alguna teoría matemática como tal -que podría argumentarse como muy importante en el caso de estudiantes de matemáticas- se podría argumentar que el modelo ABP es realmente suficiente para cumplir la mayoría de las metas de aprendizaje matemático para ingeniería. Para muchos estudiantes de ingeniería, el aprendizaje de las matemáticas se puede comparar con los procesos que tienen lugar al aprender un nuevo idioma. Al trabajar con escenarios de aplicación, los estudiantes aprenden el uso del lenguaje de las matemáticas en la práctica cotidiana, es decir, donde se inician todas las complicaciones; la teoría gramatical de las matemáticas sólo los distanciará de la competencia para aprender el lenguaje en uso.

Los tres ejemplos que hemos discutido son, por supuesto, apenas tres ejemplos elegidos entre muchos otros de los proyectos que cada semestre producen los estudiantes del primer ciclo de ciencias e ingeniería en nuestra universidad. El análisis de otros proyectos podría abrirnos el espacio para descubrir muchas más características del uso del modelo ABP. En los ejemplos presentados nos hemos enfocado en los resultados de aprendizaje relacionados con la brecha entre el formalismo y el empleo de las herramientas matemáticas. A continuación nos gustaría considerar brevemente otra perspectiva de estos hallazgos sobre el modelo ABP de Aalborg que hemos tocado sólo de manera indirecta hasta ahora: el hecho de que este modelo promueve el aprendizaje activo como un principio conductor.

1.2.5. El modelo ABP de Aalborg y el aprendizaje activo

¿Cómo podemos entender el enfoque de aprendizaje basado en problemas y organizado por proyectos con respecto al aprendizaje activo en la educación universitaria? Es claro que el marco del ABP para el trabajo de los estudiantes toma en serio la forma como realmente se viven en la práctica la investigación, el desarrollo científico y la innovación (Christensen y Henriksen, en prensa). El significado de los datos, la teoría y el método en el modelo del aprendizaje basado en problemas entra en una mezcla compleja de procesos iterativos de conceptualizaciones que implican reformulaciones de problemas de investigación y nuevas conexiones entre diferentes campos de estudio, incluso conexiones transdisciplinarias. De este modo, el modelo ABP ofrece un espacio de aprendizaje activo y participativo en el sentido de que deben hacerse conexiones y recontextualizaciones entre un número de teorías, posiblemente a partir de una variedad de disciplinas, y deben ajustarse al abordar un problema concreto y un reporte de proyecto con una justificación propia, y con una clara conclusión para su audiencia.

Este aspecto del aprendizaje activo inherente al modelo ABP se relaciona con el trabajo de los estudiantes frente a un contenido específico que se debe aprender. Con todo, hay otro aspecto clave del aprendizaje activo inherente al modelo ABP que debe mencionarse. Queremos hacer hincapié en los procesos de aprendizaje que tienen lugar en los grupos que trabajan en proyectos. En una situación de ABP, los facilitadores -profesores e investigadores de la universidad que tienen a su cargo los cursos magistrales que reciben estos estudiantes- se reúnen con el grupo de estudiantes para conversar sobre qué hacer y cómo proceder. Su función es orientar y facilitar; su función no es dirigir y decidir lo que los estudiantes deben hacer. Así que la mayor parte de los procesos de aprendizaje real tiene lugar cuando los estudiantes están solos en su grupo, sin el apoyo de los facilitadores. La mayoría de los grupos trabajan durante muchas horas en sus proyectos y algunos experimentan con distintas técnicas y procesos para optimizar su aprendizaje, ayudados también por sus facilitadores en este aspecto. En cada grupo deben considerarse muchos procesos de cooperación y aprendizaje, propios de ambientes de trabajo reales. ¿Cómo deberíamos compartir la información que encontramos? ¿Quién debería escribir qué y cuándo? ¿Cómo podemos usar mejor un horario de trabajo? ¿Necesitamos alternar el liderazgo del grupo? A los estudiantes no se les dice categóricamente qué hacer en este aspecto, a pesar de que se les ofrece un curso donde se discuten diversas técnicas de colaboración, de manejo de proyectos y de reflexión sobre los procesos de elaboración de los proyectos. Todos los grupos tienen ámbitos y necesidades muy diferentes: algunos luchan con el trabajo ético de algunos miembros, otros luchan con el contenido que ha de incluirse en el reporte -los científicos de la computación, por ejemplo, quieren programar algoritmos de los resultados matemáticos que desarrollan- y otros prefieren invertir su energía en experimentar con varios sistemas para compartir conocimiento, diversos tipos de procesos de escritura, desarrollo de agendas para encuentros de grupo; incluso algunos crean un wiki para su propio espacio de aprendizaje.

Todo esto significa que los estudiantes pasan por una experiencia de aprendizaje activo y participativo, no sólo en relación con el contenido disciplinar e interdisciplinar que requieren aprender, sino también en relación con el proceso mismo de trabajar en equipo en una tarea dada. El aprendizaje activo en este aspecto ofrece a los estudiantes un entorno en el que se les invita a reflexionar y experimentar con su cooperación y comunicación de grupo de una manera que les ayuda a desarrollar competencias generales, valiosas en muchos otros contextos de su vida profesional y personal.

1.2.6. Conclusiones

En lo que sigue destacamos, por una parte, algunas de las conclusiones que se pueden sacar con respecto al modelo ABP de Aalborg en la forma en que se ha esbozado a través de los estudios de caso, y por otra, consideramos los procesos de aprendizaje activo. Algunas de las conclusiones son generales en su alcance, en tanto que otras tratan directamente con el aprendizaje de las matemáticas en la educación universitaria. Primero destaquemos algunas de las características esenciales del modelo ABP.

- El aprendizaje activo se logra permitiendo que los estudiantes trabajen sobre problemas que no están estrictamente determinados de antemano por sus profesores. Este tipo de autoría es el combustible principal que alimenta las reflexiones sobre cómo resolver un problema particular, lo cual incluye involucrarse en la formulación de una problematización de un área que se desea abordar, identificar un problema delimitado que se quiere trabajar, lo mismo que reflexionar sobre la metodología científica y el enfoque desarrollado para presentar el reporte del proyecto. La experiencia muestra que estos aspectos de la generación de un producto científico son muy complejos, por lo que se requiere la ayuda de facilitadores que tienen experiencia en la investigación como parte de su trabajo cotidiano.

- En un entorno de aprendizaje que siga el modelo ABP, se posibilita que los estudiantes desarrollen muchas competencias de trabajo en equipo y de comunicación. Asegurar un espacio de aprendizaje en el que surgen discusiones, reflexiones, diferencias de opinión, etc., implica perfeccionar la capacidad de los estudiantes para cooperar efectivamente, organizarse en equipos, reunirse y adquirir conocimientos.

Estos aspectos del modelo ABP son generales en su alcance, pero constituyen un ingrediente muy importante cuando se organiza el aprendizaje de las matemáticas. El sistema general ABP apoya la cooperación estrecha entre estudiantes, la interacción enfocada con facilitadores y moldea los procesos de aprendizaje que tendrán lugar. Además de los rasgos generales, también hemos tocado algunos que tienen una influencia directa con respecto a la brecha entre el formalismo y los usos y recontextualizaciones de las matemáticas en otros campos del conocimiento.

- El contenido matemático en el que los estudiantes llegan a ser competentes es el que realmente tiene un valor de uso específico directo para un programa educativo.

- Diversos grupos de estudiantes pueden finalmente aprender diferentes porciones de las matemáticas, dependiendo del proyecto que escriban, pero a su vez, se les ofrece la oportunidad de poder cerrar la brecha entre el formalismo y sus usos.

- A los estudiantes se les da la oportunidad de aprender que el uso de las matemáticas en otros campos del conocimiento no es un simple proceso de aplicación o de transferencia, sino que se trata de un proceso complejo de recontextualización dentro de un escenario específico de práctica.

- El modelo ABP puede integrar matemáticas en un estudio interdisciplinario de un problema del mundo real.

- El modelo también abre la posibilidad de hacer metarreflexiones y metateorizaciones que iluminan el papel de las matemáticas en la construcción de soluciones tecnológicas. Aquí la dimensión ética y social de las matemáticas se hace evidente. Este tipo de reflexiones forman parte de las competencias de un profesional en el mundo actual (Skovsmose, 2008).

Estas cuatro conclusiones definen lo que podrían considerarse algunos de los beneficios producidos al utilizar el modelo ABP para el aprendizaje de las matemáticas universitarias. Son variaciones de respuestas del modelo ABP al problema de cerrar la brecha entre el formalismo y los usos de las matemáticas: la relevancia de las matemáticas aprendidas, las matemáticas al servicio de resolver un problema determinado, el modelaje matemático en un escenario de práctica dado y la posibilidad de usar matemáticas en estudios interdisciplinarios.

Después de establecer estas conclusiones, es desde luego importante abordar el hecho de que hay muchas discusiones educativas retadoras e interesantes que involucran el uso del modelo ABP, como se ha esbozado. Durante los últimos años, el asunto de la evaluación individual de los estudiantes universitarios ha sido la prioridad de la agenda de las políticas educativas danesas. Debido al temor de que se colaran en el sistema de evaluación grupal algunos estudiantes que no se habían comprometido del todo en el proyecto -y que por tanto no habían alcanzado el nivel de competencia requerido en cada nivel-, el gobierno decidió prohibir la realización de exámenes grupales, como ha sido la tradición en la Universidad de Aalborg. ¿Cómo se puede decir cuáles estudiantes han contribuido realmente a la investigación y a escribir el reporte del proyecto? La idea de evaluar a los estudiantes inscritos en el mismo semestre en la misma universidad, pero sobre la base de reportes de proyectos muy diferentes -ellos rara vez comparten el mismo contenido matemático, aun si son estudiantes de matemáticas-, sugiere que se requieren muchas consideraciones para garantizar una evaluación ajustada a los logros de cada estudiante.

Otro desafío interesante para el modelo ABP de Aalborg es la pregunta sobre el nivel de libertad que los estudiantes deberían tener para escoger el tema de trabajo. Evidentemente, los temas están limitados por la educación en cuestión, pero algunos programas de estudio tienen definiciones muy estrictas de lo que ha de aprenderse a partir de la escritura de un reporte de proyecto dado en un cierto semestre de educación. De esta manera, los planeadores educativos tienen mucho que pensar con respecto al modelo ABP. En la práctica, puede funcionar simplemente como un marco para escribir de un modo especial un contenido casi predeterminado o puede ser un marco para procesos extremadamente abiertos desde el principio, que dejan espacio para que los estudiantes trabajen a través de un enfoque basado en problemas.

Otros retos interesantes incluyen problemas que conciernen a la diversidad en cuanto a los antecedentes culturales de los estudiantes, lo mismo que a las diferencias de edad e identidad entre miembros de grupos, etc., lo que abre el debate sobre los límites para la implementación del modelo ABP en distintos modelos educativos y para diferentes tipos de programas. La Universidad de Aalborg aborda de maneras complejas todos estos asuntos y el modelo ABP se redefine constantemente, tanto a través de la práctica educativa como de la influencia de la investigación educativa, sobre los diversos aspectos de la utilización del modelo ABP. Aquí hemos tratado de mostrar cómo el modelo es un marco benéfico para el aprendizaje de matemáticas relevantes en un escenario de uso específico y cómo los procesos de aprendizaje que ocurren a través del modelo ABP son activos en alto grado.

Referencias

Christensen, O. R. & Henriksen, L. B. (en prensa). Mathematics in context - Learning university mathematics through problems. *Nordic Studies in Mathematics Education.*

Illeris, K. (1974). *Problemorientering og deltagerstyring. Oplæg til en alternativ didaktik.* Copenhague: Munksgaard.

Kolmos, A. (2008). Problem-based and project-based learning. In O. Skovsmose, P. Valero & O. R. Christensen (eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp. 261-280). Nueva York: Springer.

Kolmos, A., Fink, F. & Krogh, L. (2004). *The Aalborg PBL-Model: progress, diversity and challenges.* Aalborg: Aalborg University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge: Cambridge University.

Roth, W.-M. (2008). The gap between university and the workplace: examples from graphing in science. In O. Skovsmose, P. Valero & O. R. Christensen (eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp. 133-155). Nueva York: Springer.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating.* Cambridge: Cambridge University Press.

Skovsmose, O. (2008). Towards a critical professionalism in university science and mathematics education. In O. Skovsmose, P. Valero & O. R. Christensen (eds.), *University science and mathematics education in transition* (pp. 325-346). Nueva York: Springer.

Wittgenstein, L. (1997). *Philosophical investigations*. Oxford: Blackwell Publishers, Ltd.

1.3. Matemática para ingenieros. Una mirada desde la didáctica de la matemática

Carlos Caamaño Espinoza[5]

1.3.1. Introducción

La preocupación por la enseñanza y el aprendizaje de la matemática ha estado presente en la comunidad matemática mundial desde comienzos del siglo XX. Esta situación se concreta en Roma (1908), durante la realización del Primer Congreso Internacional de Matemática, cuando se crea la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (Icmi, por su sigla en inglés).

Su primer presidente fue Félix Klein y su primer secretario general, Henri Fehr. Para comenzar su trabajo, esta comisión adoptó como el órgano oficial el diario internacional *L'Enseignement Mathématique*, fundado en 1899 por el propio Henri Fehr y Charles Laisant, que se mantiene en esa condición hasta hoy. La Icmi también publica, con la dirección editorial de la secretaría, un boletín que aparece dos veces al año y al que se puede acceder en internet, a partir del boletín N° 39, de diciembre de 1995 (www.unige.ch/math/EnsMath/).

Posteriormente, en el Congreso Internacional de Matemática, realizado en Estrasburgo en 1920, se crea la Unión Matemática Internacional (IMU, por su sigla en inglés), como una organización científica internacional, no gubernamental, que hace suya la Icmi como comisión oficial y cuyo propósito es promover la cooperación internacional en matemática. Esto define la posición normal de la comisión hasta hoy, de modo tal que sus destinos son establecidos por la Asamblea General de la IMU, que es también responsable de la elección del comité ejecutivo y de su financiamiento.

La IMU es miembro del Consejo Internacional de Unión Científica (Icsu, por su sigla en inglés), lo que implica que tanto la Icmi como la IMU deben respetar los estatutos del Icsu, donde se establece, por ejemplo, el principio de la no discriminación. Este principio afirma el derecho y la libertad de los científicos de asociarse en actividades científicas internacionales, sin importar la ciudadanía, la religión, la postura política, el origen étnico o el sexo.

Así, la Unión Matemática Internacional ha establecido como sus objetivos fundamentales promover la cooperación internacional en matemática, y animar y apoyar otras actividades matemáticas internacionales, para contribuir al desarrollo de

[5] ccaamano@ucm.cl. Magíster en educación matemática, Universidad de Santiago de Chile. Doctor en didáctica de la matemática, Universidad de Barcelona.

la ciencia matemática en cualquiera de sus aspectos: puro, aplicado o educativo (http://www.mathunion.org).

Por otra parte, queremos destacar uno de los acontecimientos más importantes en la vida de la comunidad matemática internacional, preocupada por la enseñanza de la matemática. Este hecho, ocurrido a fines de los años sesenta, que permitió el inicio del desarrollo de la investigación en educación matemática y que acercó posiciones entre los matemáticos y los educadores matemáticos, fue la decisión de la IMU de crear el Congreso Internacional de Educación Matemática (Icme, por su sigla en inglés), sostenido con los auspicios de la Icmi y que se realiza cada cuatro años.

El programa científico de cada Icme es planeado por el Comité de Programa Internacional (IPC, por su sigla en inglés), que trabaja independientemente del Icmi. Sin embargo, para asegurar continuidad y conformidad con principios generales del Icmi, esta comisión tiene normalmente representantes en el IPC (el presidente y la secretaria del Icmi son miembros de oficio del IPC) y uno de ellos actúa como oficial del enlace con el comité de la organización local del congreso.

La organización práctica y financiera del Icme es de responsabilidad independiente (o nacional) del comité de organización local, de acuerdo con los principios generales del Icmi. Es decir, a pesar de que la Icmi no es la que organiza un Icme, ni en los términos científicos ni en los aspectos prácticos del congreso, todos los Icme se sostienen gracias a los auspicios del Icmi.

Los Icme realizados hasta ahora son los siguientes:
Icme-1, 1969, Lyon (Francia)
Icme-2, 1972, Exeter (Reino Unido)
Icme-3, 1976, Karlsruhe (Alemania)
Icme-4, 1980, Berkeley (Estados Unidos)
Icme-5, 1984, Adelaida (Australia)
Icme-6, 1988, Budapest (Hungría)
Icme-7, 1992, Quebec (Canadá)
Icme-8, 1996, Sevilla (España)
Icme-9, 2000, Tokio/Makuhari (Japón)
Icme-10, 2004, Copenhague (Dinamarca, www.icme-10.dk/)
Icme-11, 2008, Monterrey (México, http://icme11.org/)

Algunos temas sobre enseñanza de la matemática para carreras no matemáticas, en particular para ingeniería, trabajados en los últimos eventos de la IMU, aparte de los desarrollados por la propia comunidad de educadores matemáticos, son:

1. "Matemáticas como tema de servicio" (Icmi, 1987).

2. "Matemáticas para no especialistas" (Icme-6, Hungría, 1988).

3. "Matemáticas de pregrado para diferentes grupos de estudiantes", con dos subgrupos: "Matemáticas para no especialistas en las áreas de ciencias" y "Cursos de servicio para no científicos" (Icme-7, Canadá, 1992).

4. "La transición de las matemáticas escolares a las universitarias", "Análisis de las responsabilidades de los departamentos de matemáticas" y "Sistemas matemáticos tecnosimbólicos" (Icme-8, España, 1996).

5. "Matemáticas en el nivel universitario", tratándose el problema concreto de "La formación matemática en carreras técnicas" (Icmi, Singapur, 1999).

6. En Icme-9 (Japón, 2000), Icme-10 (Dinamarca, 2004) e Icme-11 (Monterrey, 2008), estos temas se han seguido presentando, con un aumento significativo y creciente, tanto en la calidad como en la cantidad de investigaciones que se están trabajando en esta línea.

Una de las líneas de investigación más trabajadas hasta ahora está relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Ésta se ha focalizado en la búsqueda de las formas más adecuadas para enfrentar los desafíos que se presentan en los distintos niveles del sistema educativo. En particular, diversas investigaciones han demostrado las notorias deficiencias de la "enseñanza tradicional" o "enseñanza centrada en la acción del profesor en el aula". Además, en la educación universitaria está presente el hecho de que la enseñanza es generalmente axiomática, con pocas aplicaciones, con un marcado predominio de los procedimientos algorítmico-algebraicos por sobre lo conceptual, con significado, aunque éste sea intuitivo.

También se confirma la fortaleza de las teorías constructivistas, en todos los niveles de la enseñanza, aunque con distintos matices. Y se propone que estas teorías deben traducirse, en la práctica, en técnicas concretas centradas en aprendizajes basados en la resolución de problemas de situaciones reales y en pequeños grupos de trabajo.

Sin embargo, el problema clave de una formación matemática adecuada para los ingenieros sigue aún sin respuesta completa. Varias de las experiencias innovadoras conocidas, desarrolladas hasta ahora en este ámbito, se centran en estudios modelizadores en el área de análisis y estadística, lo que aún es insuficiente. Falta profundizar más en el sentido que debe otorgarse al álgebra y al álgebra lineal en unos nuevos programas de formación en ingeniería.

Por nuestra parte, en una investigación reciente (Fondecyt N°1030117, 2005), abordamos el estudio de una propuesta para la enseñanza de algunos contenidos específicos de álgebra lineal en ingeniería. En este estudio se utilizan las "bases didácticas para una formación integrada de álgebra lineal y geometría en ingeniería", que elaboramos en nuestra tesis doctoral (2001).

Nuestra idea principal es que el álgebra lineal no se desarrolló para resolver nuevos tipos de problemas relacionados con la tecnología, sino para simplificar numerosas soluciones en forma unificada.

Así, proponemos profundizar en el contacto y la relación entre el elemento algebraico con el elemento geométrico necesario para que los estudiantes puedan comprender la dimensión práctica y modelizadora del álgebra lineal, sin olvidar el tema de la forma, asociado por lo general sólo al dibujo.

1.3.2. Algunas características curriculares

En la investigación ya mencionada, a partir de una reflexión contextual de los programas de estudio de las asignaturas de álgebra y álgebra lineal, para carreras de ingeniería de diferentes universidades chilenas y de los textos más usados en ellas, logramos identificar algunas características curriculares que se han institucionalizado en su formación matemática. En general, confirmamos que:

1. Las asignaturas tienen un enfoque tradicionalista, que privilegia el desarrollo del pensamiento algorítmico-estructural.

2. No se considera explícitamente el uso de la representación gráfica de algunos conceptos que la requieren, así como su necesaria interpretación geométrica.

3. No se aprecia una orientación clara de las aplicaciones de ciertos contenidos a problemas del ámbito de la ingeniería.

Un análisis más detallado nos permitió establecer una serie de deficiencias para el logro de los objetivos de los aprendizajes matemáticos, entre las que destacamos las siguientes:

1. Se tiende fundamentalmente a la abstracción, con ausencia casi absoluta de una visión intuitiva y de consideraciones básicas de visualización.

2. Existe una desconexión temática, aunque aparentemente hay relación lógica entre los contenidos.

3. Se mezclan algunos contenidos con los de análisis funcional y no se observan elementos constructivos.

4. No se aprecia una secuencia bien organizada, de tal manera que se produzca alguna integración del álgebra con la geometría.

5. Los problemas se reducen a aquellos de tipo puramente matemático, que involucran sólo la realización de determinados cálculos y el uso de ciertos algoritmos.

6. En los instrumentos de evaluación aplicados, se mide fundamentalmente la utilización de procesos algebraicos.

Esto nos permitió establecer los elementos preliminares, que permiten justificar la conveniencia de que los estudiantes relacionen contenidos algebraicos con contextos reales del ámbito profesional y con contextos matemáticos e interdisciplinarios de estas carreras. Por consiguiente, fue posible planificar las actividades, de tal modo que los estudiantes pudieran vivir el contenido matemático a partir de diversas situaciones del mundo real y de sus propios conocimientos previos.

Además, a partir de la *objetivación de los contenidos*, realizamos un análisis histórico epistemológico de los respectivos contenidos matemáticos considerados en el estudio, determinando así el valor que le otorgaríamos a cada uno de ellos. Para tal efecto, tuvimos en cuenta:

1. Nuestra concepción de la geometría.

2. La explicación de habilidades y procesos relevantes que se debían aprender.

3. Los tipos principales de problemas que se abordarían y las estrategias generales para el trabajo de campo.

De este modo, utilizamos la geometría como método para visualizar conceptos y procesos matemáticos, ya que uno de los procesos que han caracterizado el conocimiento geométrico es la visualización. Este proceso lo entendemos, en general, como aquel que permite dar "forma" mental o física a determinados conceptos y procedimientos matemáticos, no necesariamente "figurados". Por tanto, consideramos que la geometría es un método que permite visualizar no sólo formas y figuras, sino también, y lo que es aún más relevante en la enseñanza universitaria, como un método para visualizar conceptos y procesos sistemáticos.

Tal como lo señalara Miguel de Guzmán (1994): "La visualización aparece como algo profundamente natural, tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático".

En esta forma, los estudiantes lograron reconocer los aprendizajes de los contenidos de la asignatura de álgebra lineal y apropiarse de ellos, considerados en las unidades de aprendizaje de este estudio, a partir de una perspectiva geométrica, apoyados en la visualización gráfica.

1.3.3. Construcción, reconstrucción y situación del conocimiento matemático

Aquí, los objetos geométricos se interpretan como conocimiento situado, en la medida en que permiten visualizar contenidos algebraicos y, al mismo tiempo, reconocer el valor de la interpretación de ciertos fenómenos reales. Para tal efecto, consideramos las conocidas categorías de objetivos de visualización del objeto matemático trabajado por Zimmerman (1991), esto es: a) básicos; b) funcionales; c) generales, y d) relacionados específicamente con el cálculo.

En este proceso de construcción del conocimiento, se debe considerar su forma de institucionalización, reconociendo los elementos que se han de superar. Nuestro trabajo permitió optimizar las relaciones entre el contenido algebraico y geométrico, partiendo del reconocimiento de elementos desconocidos u olvidados, necesarios para la construcción, reconstrucción y situación del conocimiento matemático requerido. Al mismo tiempo, verificamos que los contextos y la vida cotidiana desempeñan un papel fundamental en cada una de las fases del aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

Existe consenso hoy día en que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática deben ser contextuales, es decir, han de partir de contextos que revistan interés y que tengan pertinencia con el mundo real. En particular, planteamos que en la enseñanza superior la matemática para no matemáticos (por ejemplo, en ingeniería) debe basarse en la introducción del objeto matemático aplicado, pero sin "desperfilar" la propia matemática.

1.3.4. Elementos curriculares

Para planificar el desarrollo del contenido, consideramos los siguientes principios:

1. Seguir la enseñanza investigativa de Dubinsky (1996). Esto es, promover producciones que permitan reconocer cómo están pensando los estudiantes y el esfuerzo realizado para dar sentido a una situación matemática, a través de:

    a) La enseñanza cíclica: trabajo en clases, relacionado con las actividades y discusión de estos problemas y sus soluciones.

Las actividades se diseñaron de tal manera que, como resultado de realizarlas, o aun de intentarlas, el estudiante lograra hacer abstracciones reflexivas para llegar a las construcciones mentales de acciones, procesos y objetos matemáticos apropiados.

b) El aprendizaje cooperativo: creación de un ambiente de interacción social en pequeños grupos de trabajo, que conduce al desarrollo conceptual, considerando métodos alternativos de resolución de problemas planteados. Mantener la conciencia de las estructuras que están construyendo.

2. Usar las bases para la selección de contenidos y actividades de Presmeg (1999). En la elaboración de las actividades, tuvimos en cuenta las posibilidades y elementos facilitadores del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas y otros aspectos que permiten facilitar el pensamiento visual, que detallamos a continuación:

   a) Las posibilidades del pensamiento basado en imágenes:

   - Las imágenes intensas de cualquier tipo tienen ventajas nemotécnicas.
   - Las imágenes concretas son efectivas en alternancia con modos no visuales, tales como el análisis lógico o uso fácil no visual de fórmulas.
   - La imaginación dinámica es potencialmente efectiva.
   - La imaginación que está al servicio de una función abstracta es potencialmente efectiva.

   b) Los aspectos que pueden facilitar el pensamiento visual:

   - Un ambiente de clase controlado, pero relajado y sin apresuramientos.
   - El uso de dibujos por parte del profesor donde no aparezcan diagramas que no sean indispensables.
   - Uso de la imaginería del profesor, es decir, que muestre mediante gestos u otra forma de llamar la atención que está utilizando una imagen.
   - Uso de la imaginería de los alumnos: el profesor les pide a los alumnos que se hagan una imagen o que piensen en figuras en movimiento.
   - Uso de un componente móvil: se emplea el brazo, dedo o el cuerpo en movimiento de los alumnos; la utilización de modelos manipulativos y concretos.
   - Uso del color (con el Maple).
   - Enseñanza sin barreras metodológicas: el profesor apela a la intuición de los alumnos; usa métodos de búsqueda de patrones; retrasa el

empleo del simbolismo; utiliza deliberadamente conflictos cognitivos, y muestra y acepta métodos alternativos.

c) Los peligros potenciales que tratamos de evitar en el desarrollo del proceso fueron los siguientes:

- Lo concreto de una sola imagen puede ir asociada a detalles irrelevantes o puede introducir detalles falsos.
- Una imagen estándar de una figura puede inducir un pensamiento poco flexible, que impida reconocer un concepto en un diagrama no estándar.
- Una imagen incontrolable puede ser persistente y de esa manera impedir la apertura de caminos más provechosos.
- Especialmente si es vaga, la imaginería que no está asociada a un proceso de pensamiento analítico riguroso puede ser de poca ayuda.

1.3.5. Elementos semióticos-comunicativos

Para la elaboración de las actividades que permitieran reconocer el objeto matemático, partimos de las siguientes bases, aceptadas comúnmente en la actualidad:

1. La matemática es una actividad humana implicada en la solución de cierta clase de situaciones problemáticas, de la cual emergen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos.

   De acuerdo con las teorías constructivistas, los actos de las personas son la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas.

2. Los problemas matemáticos y sus soluciones se comparten en instituciones o grupos de trabajo implicados en su estudio.

   Por tanto, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

3. Las matemáticas son un lenguaje simbólico, en el que las situaciones-problema y sus soluciones se expresan. Los sistemas simbólicos matemáticos tienen tanto una función comunicativa como instrumental.

4. Las matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado. Una vez que un objeto matemático se ha aceptado como parte de dicho sistema, se puede considerar una realidad textual y un componente de la estructura global.

Puede concebirse y tratarse como una totalidad para crear nuevos objetos matemáticos e introducir nuevas restricciones en el lenguaje y el trabajo matemático.

El siguiente componente adicional, y no menos importante, está focalizado en la necesidad de utilizar multiplicidad de representaciones para la comprensión de un concepto matemático. Las clases de representaciones que utilizamos fueron las siguientes:

1. Lingüísticas
   a) Verbales (nombres, definiciones y otras).
   b) Simbólicas (algebraicas y computacionales).
2. Figurativas
   a) Modelos a escala (objetos del mundo real e imágenes en perspectiva).
   b) Gráficos (convencionales y computacionales).

De esta manera se estableció la relación entre los objetos matemáticos seleccionados y sus significados para la investigación, de acuerdo con los siguientes aspectos:

1. Pedagógico-contextual, que explica las características que sustentan el proceso de planificación de tareas para producir la construcción de significados requerida.
2. Semiótico, que orienta el reconocimiento de los elementos que facilitan la puesta en relación de los significados personales sobre los contenidos matemáticos.
3. Histórico-epistemológico, que se focaliza en los procesos de construcción del objeto matemático.

1.3.6. Comentarios finales

Lo primero es que hemos conseguido reproducir algunos resultados importantes, como los obtenidos por Alsina (1998), ya que este tipo de introducción del objeto matemático nos ha permitido:

1. Facilitar una aproximación a la educación matemática realista.
2. Combinar el conocimiento matemático con el sentido común.
3. Desarrollar la intuición como instrumento.
4. Incrementar la ingenuidad matemática y la creatividad.

5. Enriquecer los recursos para la resolución de problemas.
6. Promover el uso de algunas herramientas tecnológicas.
7. Visualizar el binomio matemática-realidad como una importante componente epistemológica.
8. Desarrollar un análisis crítico de la información.
9. Apreciar la potencia del modelaje como herramienta de enseñanza y aprendizaje.
10. Desarrollar la curiosidad matemática en descubrimientos.
11. Propiciar una aproximación investigativa en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
12. Promover el interés emocional en el aprendizaje de las matemáticas.
13. Mirar matemáticamente nuestro entorno y la sociedad.

Por último, demostramos una vez más la potencia del trabajo colaborativo, realizado con pequeños grupos de estudiantes (tres o cuatro). Esto se fortaleció con la utilización de guías de aprendizaje adecuadas, las que, junto con el contacto e integración geométrico-algebraico, permitieron que:

... los estudiantes no sólo valoraran la preocupación y el compromiso docente de su profesor, tanto en el aula como fuera de ella, sino que, más importante aún...

... reconocieran que pueden aprender matemática.

1.4. Construcción de conocimiento matemático e inclusión. Experiencia con indígenas y afrocolombianos en la Universidad del Valle

César A. Delgado García[6]
María Cristina Tenorio[7]

> "Mi trabajo sobre la educación y clase social en los primeros años, por ejemplo, me ha convencido de que el sistema escolar es, en efecto, nuestra forma de mantener un sistema clasista (...); por lo que a los niños de la parte más baja de los niveles socioeconómicos se refiere, es un sistema que mutila su capacidad de participar con plenos derechos en la sociedad, mutilación que lleva a cabo de manera efectiva y a una edad muy temprana".
>
> *Jerome Bruner*

Resumen

El aumento de cobertura en la educación superior hace visible el problema del alto porcentaje de fracaso académico en la universidad colombiana, de manera especial en la pública, a donde llegan los jóvenes de estratos populares; este problema se está contabilizando y analizando como deserción estudiantil, pero aún no se ha diagnosticado bien. Las matemáticas, y en particular el modelo pedagógico que orienta su enseñanza, son parte de esta indeseable situación. En la búsqueda de una solución, la Vicerrectoría Académica de la Universidad del Valle aprobó un proyecto de investigación (2006), el cual incluía el desarrollo de cursos piloto de cálculo para una población multiétnica que generalmente abandona sus estudios universitarios en las carreras de ingeniería, en los dos primeros años. Se deseaba comprobar que, en ciertas condiciones educativas, en un año era posible transformar la *formación matemática* que, en general, resulta insuficiente para responder a las demandas del

[6]Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia, cedel@univalle.edu.co; cedelg@gmail.com. Licenciado en matemática y física, Universidad del Valle, Colombia. Máster en matemáticas, Universidad del Valle, Colombia. Máster en didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona, España. Doctor en didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

[7]Instituto de Psicología. Proyecto Universidad y Culturas - Vicerrectoría Académica, Universidad del Valle. uniculturas@univalle.edu.co, cristenorio@cable.net.co. Psicóloga, Universidad del Valle, Colombia. Máster en psicoanálisis, Universidad de París, Francia. Doctor en psicología de la comunicación, Universidad de Barcelona, España.

currículo de estas carreras. Para este objetivo, se propuso una estrategia didáctica *socioconstructivista*, destinada a afectar las *actividades* de enseñanza y de estudio del cálculo. Tal estrategia se implementó en el marco de un proceso de investigación-intervención. Se buscaba explicitar algunas acciones que pueden servir para diseñar estrategias educativas que brinden, una oportunidad *real* de asimilar conocimientos científicos y tecnológicos, y responder a las exigencias académicas, que demanda la formación profesional en ingenierías. El resultado más destacado consistió en revertir la deserción. Hoy, después de seis semestres, permanecen en los planes de ingeniería el 65 % de los estudiantes del curso y varios han obtenido estímulos académicos.

1.4.1. Introducción

El aumento de la cobertura educativa -acción necesaria de la sociedad contemporánea, para posibilitar bienestar y oportunidades reales de inclusión a poblaciones cuya trayectoria de vida está limitada por su origen social- hace visible la lentitud de respuesta de un sistema educativo que tradicionalmente ha trabajado en función de los más preparados y más dotados, pero que, en la actualidad, no logra responder al reto de atender a aquellos que, por su origen, tienen una *experiencia diferente* de la que se desarrolla en los ambientes más afines con el *modelo pedagógico tradicional*. Según los expertos,

> La expectativa social de que la escuela revierta los procesos de desigualdad social es empíricamente falsa...; en ningún caso se observa una disminución espectacular de la herencia social en las trayectorias sociales y laborales de las nuevas generaciones respecto de las de sus padres (Pérez, 2001, p. 8).

Los documentos políticos sobre ampliación de acceso a la educación superior generalmente nos plantean que ésta posibilita el ascenso social y económico. Con todo, no explican cuáles son los mecanismos que lo hacen posible. Poco a poco empieza a ser claro que si bien el diploma profesional mejora las condiciones de contratación, realmente su mayor poder no es éste sino el hecho de comprender y aprender a manejar las reglas del juego socioeconómico en las sociedades contemporáneas:

> [...] aumenta las oportunidades de comprender el entorno cada día más ensanchado por los avances tecnológicos; permite participar en la vida social, política y económica de manera más operativa (...) incorpora a sectores sociales antes excluidos a procesos culturales *y a significados simbólicos propios de los modos de vida contemporáneos (Ibid.).*

Por esta razón, hay que leer las altas tasas de deserción en la educación superior en todos los países de América que han ampliado masivamente la cobertura

-incrementando el ingreso pero sin transformar el modelo pedagógico-, como el fracaso del sistema educativo en crear las condiciones académicas que harían posible la permanencia y graduación de los jóvenes. Un sistema educativo que no transforma las experiencias de jóvenes procedentes de familias antes excluidas de la educación media y superior, que no logra desarrollarles nuevas habilidades -necesarias en el mundo académico-, ni les ayuda a dominar las prácticas que la universidad exige para apropiarse del conocimiento formal, es un sistema que fracasa en su función social. En el nivel universitario colombiano la deserción es actualmente del 45 % (según informes del Observatorio Nacional del Ministerio de Educación). Sin embargo, si la midiéramos por estratos socioeconómicos, encontraríamos que el mayor porcentaje de fracaso se presenta en los estratos populares, rurales y de poblaciones minoritarias. Es evidente que en Colombia los pobres no han tenido el tipo de experiencias que permite desarrollar *la mente* que la universidad exige.

Pérez (2001) denuncia las consecuencias de no analizar cómo funciona el sistema educativo y de suponer que todo es resultado de los talentos individuales:

> Parecería que el papel de la escuela es estrictamente académico y administrativo: fija objetivos cognitivos, planifica tareas, diseña estrategias pedagógicas orientadas por la eficacia, el cumplimiento y el éxito, con independencia de los usuarios de tales modelos educativos. ¿Será posible hacer el bien educativo sin saber a quién? Evidentemente, no se tienen suficientes datos de deserción, rezago e ineficiencia terminal en todos los niveles educativos, como para poner en cuestión esta visión. Si se mantiene como incuestionable esta perspectiva, el saldo negativo se transfiere directamente al individuo y a su familia. Son ellos responsables del fracaso escolar por no contar con las condiciones necesarias para cumplir con las expectativas institucionales, como si éstas dependieran de ellos (Pérez, 2001, p. 3).

El estudio de la calidad de la educación que están recibiendo los niños y adolescentes revela que los factores estructurales se ubican en dos planos: el de la población estudiantil y el del sistema educativo.

Respecto al primer plano, se señalan factores *socioeconómicos y socioculturales*, y en el segundo se hace referencia a los modelos pedagógicos y a las estrategias curriculares que éstos definen[8]. Si bien con el Spadies (Sistema para la Prevención y Análisis de la Deserción en las Instituciones de Educación Superior), el Cede (Centro

[8]Compartimos la concepción de George Posner (1998), según la cual "El currículo no es más que la concreción específica de una teoría pedagógica para volverla efectiva y asegurar el aprendizaje y el desarrollo de un grupo particular de alumnos para la cultura, la época y comunidad de la que hacen parte" (Posner, 1998, p. XXVI). Sin embargo, como Posner mismo reconoce, no es una

de Estudios sobre Desarrollo Económico de Uniandes) y el Ministerio de Educación Nacional se ha medido la incidencia en la deserción de las condiciones socioeconómicas, académicas e institucionales (MEN, 2008), los factores que ellos llaman institucionales no se estudian como factores determinantes de buena o mala calidad educativa, sino como clases de instituciones: pública o privada, técnica, tecnológica o universitaria. No se estudia ni analiza qué tipo de educación se está ofreciendo, ni mucho menos se toma en cuenta cómo la masificación de todo el sistema educativo ha estado acompañada de un descenso notorio en los resultados de las pruebas de Estado. Para nosotros este punto es vital por cuanto reconocemos, como lo hace Jerome Bruner (2000), que el fracaso escolar "(...) es, posiblemente, menos una cuestión de habilidades por parte del estudiante que nuestro fracaso para comprender cómo enseñar...". En resumen, el problema de la permanencia comprende diferentes aspectos que hay que analizar en el momento de buscar estrategias para su solución.

En este último sentido se relaciona el problema citado con el que ya hace más de 20 años denominamos "Problema del empalme entre las matemáticas de la secundaria y las de la universidad" (Delgado et ál., ERM, 1990), el cual se manifiesta en altas tasas de fracaso en los primeros cursos de matemáticas, de los alumnos que ingresan a los planes de ingeniería y ciencias. Incluso es frecuente que los cursos básicos de cálculo I, cálculo II y álgebra lineal se repitan dos y tres veces. Uno de los factores que en los últimos años hacen más visible la ruptura con las matemáticas del bachillerato es el aumento de cobertura de la universidad; en parte porque los grupos son cada vez más numerosos, y en parte porque no se toman en consideración las diferentes rupturas y contradicciones que se presentan entre los tres elementos del proceso: *el modelo pedagógico, la formación matemática previa de los estudiantes y las condiciones objetivas* de la actividad de estudio del alumno. En particular, resulta preocupante que esfuerzos por ampliar la inclusión de grupos étnicos como los indígenas y afrocolombianos en la educación superior[9] se pierdan porque al cabo de dos años la deserción de éstos en los programas de ingeniería sea casi del 63 %.

Esta preocupación condujo a que la Universidad del Valle incluyera en su Plan Estratégico 2005-2015 una acción de acompañamiento a los estudiantes que ingresan por cuota de excepción étnica, a cargo del proyecto Universidad y Culturas. La gravedad de las deficiencias en la formación escolar de estos jóvenes dificultó el buen resultado de los acompañamientos con tutores, por lo cual en el 2006 se im-

propuesta hegemónica sino que es necesario reconocer la coexistencia de currículos diferentes en una misma institución. Para nosotros, el currículo se expresa en distintos niveles: *currículo propuesto, enseñado y logrado.*

[9]La Universidad del Valle estableció una "cuota de excepción étnica" que reserva el 4 % de todos los cupos de pregrado para la población indígena desde 1993 y afrodescendientes a partir de 2004.

plementó un Plan Nivelatorio Piloto en Español y en Matemáticas, con el apoyo de profesores, asistentes de investigación, practicantes, tutores y monitores de cinco facultades. La experiencia la financió la Vicerrectoría Académica.

Dos cursos piloto de cálculo I y cálculo II, que contaron con el apoyo del Departamento de Matemáticas, formaron parte del plan nivelatorio. Se tomó la decisión de matricular a los primíparos de la población indígena y afrodescendientes de las carreras de ingeniería en un mismo grupo de cálculo I. El trabajo duró un año. Los cursos se plantearon como un proceso de investigación-intervención, diseñado e implementado con el objetivo de proporcionar una oportunidad *real* a los *estudiantes que ingresan por condición de excepción étnica a los programas de ingeniería, de acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos*, y de responder a las exigencias académicas, de alto nivel, que demanda la formación profesional en ingenierías. Estas condiciones están relacionadas, principalmente, con:

- La transformación de las prácticas de enseñanza tradicionales.
- La transformación de las prácticas de estudio de los alumnos.
- El respeto por los ritmos de aprendizaje del estudiante.

Nuestro principal interés era experimentar una posible estrategia para resolver la ruptura entre el modelo pedagógico universitario y la formación matemática previa de esta población.

Nuestra hipótesis de trabajo fue, tal como en el pasado, que el problema no se resuelve pensando en la introducción de nuevos contenidos, sino que *su solución depende de qué tanto se logre transformar la cultura dominante que guía la actividad en el aula de matemáticas:* centrada, por un lado, en la explicación del profesor y en la simplificación de las dificultades inherentes al aprendizaje de conceptos matemáticos; y, por el otro, en la imitación de modelos y sus aplicaciones a problemas de "diseño"[10].

El principal resultado, cuantitativo, de este proyecto consistió en revertir *la deserción, que para la población de indígenas y afrocolombianos que ingresó en el 2005 a*

[10]Este término se acuña (Rusbult, 2000) para significar los problemas que para su solución sólo demandan conocimientos ya instalados en el repertorio del solucionador. Se contrasta con problemas de solución "creativa", en los que el solucionador no dispone de cierto conocimiento necesario para la solución y debe, por tanto, imaginarlos. Se dice que un problema es creativo si demanda la construcción de conocimientos inéditos para el estudiante, ya sea por recombinaciones novedosas de sus actuales conocimientos o por abstracción de nuevos conocimientos a partir de las coordinaciones generales de sus acciones cuando actúa sobre una situación que requiere un conocimiento específico.

ingenierías fue del 62,5 %, al cabo de cuatro semestres, a una permanencia del 65 % de la población objeto de nuestra experiencia, al cabo de cinco semestres.

El resultado cualitativo más destacable fue *la transformación sensiblemente positiva de la formación matemática de la población objeto,* pero la conclusión más importante es que *es posible incluir en el proceso educativo de nivel superior a poblaciones que ingresan a la universidad con bajos y muy bajos niveles de formación matemática, con la condición de disponer de una estrategia didáctica mediante la cual se aborde con seriedad y responsabilidad social la educación matemática.* Pero sobre todo, si tal estrategia es un compromiso institucional y responsabilidad de un equipo de profesores sensibilizados y preparados para enfrentar el reto de educar matemáticamente a los futuros profesionales.

1.4.2. Estrategia didáctica socioconstructiva

En Colombia, en los últimos 50 años, se ha pasado de una escolaridad para minorías a una escolaridad masiva. De pocos bachilleres que se formaron con la ayuda de "maestros" comprometidos con la enseñanza, que exigían el compromiso de sus alumnos y creaban hábitos de estudio, se ha pasado a graduar a jóvenes que, en su mayoría, no lograron ser motivados por el aprendizaje y menos por desarrollar estrategias que optimizaran su actividad de estudio. Los cambios en el sistema de evaluación de las escolaridades básica y media en 1994, y el afán de retener en el sistema escolar al mayor número posible de alumnos, para mostrar altas tasas de cobertura (Decreto 230 del 2002, bien llamado "de promoción automática"), nos hicieron pasar de un bachillerato para los mejores (meritocrático) a un diploma de bachiller para cualquiera que asista al colegio, aunque no aprenda sino a responder al *tipo de preguntas* del nuevo examen de Estado (Icfes).

Respecto a las prácticas de enseñanza

A medida que se comenzó a incrementar el número de jóvenes que ingresa a las universidades, se masificaron los estilos de enseñanza, con la consecuencia de volver, por fuerza de las nuevas circunstancias canónicas, a las maneras de enseñar tradicionales[11]. El maestro recibió el impacto del aumento de cobertura; varias razones contribuyen a desmotivar a los profesores que intentan sostener el compromiso con la docencia y promover en los jóvenes un interés por el conocimiento:

1. Las condiciones de asignación de cursos impiden la interacción: hasta mediados

[11] Enseñanza vertical, transmisionista, centrada en la explicación y la imitación de modelos. Esta manera de enseñar permite el control sobre los contenidos a cubrir en el tiempo que se asigna oficialmente, pero descuida el control sobre lo que el estudiante realmente aprende y la calidad de su aprendizaje.

de los años noventa los cursos de matemáticas tenían un cupo de 30 alumnos, el cual ahora se duplicó, cuando no se trata de magistrales para el doble o triple de esta población. Buscar participación y actividad de los jóvenes con estos grandes grupos se vuelve cada vez más difícil.

2. Los jóvenes que ahora ingresan están muy distantes del conocimiento requerido por los cursos universitarios iniciales; aun con la mejor voluntad, el profesor no tiene cómo afianzar los temas universitarios de los cursos sobre el vacío en la mente de sus alumnos.

3. Con frecuencia los profesores comprometidos se sienten derrotados por jóvenes que no atienden y que fracasan sistemáticamente en sus esfuerzos por entender; como tampoco tienen hábitos de lectura y estudio, no consultan los textos que los profesores les proponen.

4. Con los cambios administrativos de las universidades, los profesores tienen que dictar cada vez más cursos, investigar más, publicar, organizar y participar en eventos académicos. Así, en este modelo la enseñanza se ve afectada cuando las otras actividades se ponderan en términos salariales.

La misión del profesor actual es transmitir lo más eficientemente posible los contenidos de un programa fijo, con fechas calculadas para cada tema, lo cual lo obliga a sostener un flujo expositivo de gran velocidad para alcanzar a cubrir todos los temas del programa; es decir, que los expone ante una masa a la que no conoce y con la que no interactúa, y al final de cada período comprueba *cuánto retuvieron.*

Es necesario transformar las prácticas de enseñanza tradicionales. El profesor que enseña matemáticas, en el marco del modelo pedagógico tradicional, es un portador de información especializada, cuya función principal consiste en *exponer y explicar* los conceptos y modelos matemáticos propios de los cursos de cálculo, proponer buenos ejercicios y problemas de "diseño"[12] y evaluar las apropiaciones de contenidos de la información. Este profesor demanda de sus alumnos un esfuerzo por evocar y coordinar los elementos y procesos de la teoría que él previamente les ha presentado.

Fundamentos teóricos de nuestra estrategia de enseñanza

Siguiendo la teoría de situaciones de Guy Brousseau (1986), nos propusimos transformar este papel tradicional del profesor de matemáticas y reorientar su actividad hacia el *diseño de situaciones*[13] que son verdaderas recontextualizaciones del conocimiento que se desea enseñar y cuya solución sólo es posible mediante un proceso

[12] Ídem, nota 10.

[13] "Una situación modela lo que está en juego y las posibilidades de decisión de un actuante en un determinado medio. Se elige de tal manera que la estrategia de resolución no pueda aplicarse

constructivo de tal conocimiento a cargo del alumno, apoyado por la "mediación didáctica" del profesor. Tal mediación se constituye en torno a las "devoluciones de problemas"[14] a los alumnos que el profesor va construyendo en la "interactividad"[15], con el objetivo de provocar el compromiso del repertorio de conocimientos de los alumnos en concordancia con la tarea.

De la interacción alumno-medio y de la mediación del profesor, se espera que surja el *conflicto cognitivo* entre aquel conocimiento que el alumno cree necesario y suficiente para resolver el problema y las resistencias que opone la situación, que obligan a construir y discutir nuevos *posibles*, o un conflicto entre conocimientos ya establecidos en la mente del alumno que resultan contradictorios entre sí. Para superar este conflicto se requiere alcanzar lo que en el progreso de la interactividad se ve como conocimiento *necesario*, y luego, una vez establecido, ponerlo a prueba y validarlo: sea en acto (prueba en acto), o recurriendo a validaciones icónicas (pruebas visuales) o conceptuales (por manipulación o pruebas euclídeas) o, si es el caso, producir una prueba formal (Tall, 1995). El estudiante construye nuevo conocimiento para él, pues ya existe como conocimiento institucional. Este conocimiento "nuevo" es reconocido como válido y útil en el marco de la institución escolar que representa el profesor, en un proceso denominado institucionalización.

> Pero [la institucionalización] está, obviamente, fundamentalmente vinculada al proceso didáctico y resulta de una intervención específica. Es ella la que permite al profesor y al alumno reconocer y legitimar "el objeto de la enseñanza", si lo ven de maneras diferentes. Puede consistir en el reconocimiento por el profesor del valor de una producción de los alumnos.

---

sino gracias a un determinado conocimiento matemático; la aparición de esta decisión, sin el uso por el actuante del conocimiento contemplado, es altamente improbable" (Brousseau, 2003, p. 2).

[14]Siguiendo a Brousseau (2003), es el proceso que realiza el profesor para provocar que "la acción del alumno sea producida y justificada sólo por las necesidades del medio y por sus conocimientos, y no por la interpretación de los procedimientos didácticos del profesor" (p. 5).

[15]Este término es importante en nuestro modelo didáctico y se refiere a: *"(...) la articulación de las actuaciones de los profesores y los alumnos"* (o del adulto y del niño, en el caso de situaciones educativas no escolares) *en torno a una tarea o un contenido de aprendizaje determinado*, supone pues una llamada de atención sobre la importancia de analizar actuaciones de los alumnos en estrecha vinculación con las actuaciones del profesor, y recíprocamente (C. Coll y otros, 1995, p. 204).

> Afirma entonces: (1) que la propuesta del alumno es válida y reconocida como tal fuera del contexto particular de la situación presente; (2) que servirá en otras ocasiones, aún no conocidas; (3) que será entonces más ventajoso reconocerla y utilizarla bajo su forma esquematizada que establecerla de nuevo; (4) que será aceptada directamente por todos o al menos por los iniciados (Brousseau, 2003, p. 5).

En esta estrategia de enseñanza, la *evaluación* es ahora sistémica-formativa y permanente: *se evalúan los resultados de la interactividad* en el marco del funcionamiento de los subsistemas (alumno)-(situación adidáctica), (profesor)-(situación didáctica), que son constitutivos del sistema didáctico que los engloba.

Respecto a las prácticas de estudio

Quienes llegan a los cursos de matemáticas en los primeros semestres de carrera -matemática básica o fundamental, cálculos I y II, etc.- son jóvenes que ya vienen modelados por su escolaridad previa, en lo relativo a su papel de estudiantes. En el colegio aprendieron que ser estudiantes es asistir a clases, simular que atienden y entienden las explicaciones, entregar los trabajos (así no los hayan hecho ellos) y memorizar a última hora lo que el profesor pidió aprender; sin embargo, entre sus obligaciones estudiantiles no figura aprender seriamente los conocimientos propuestos en el programa escolar. De allí que cada vez sea mayor el desnivel entre lo que los cursos universitarios requieren como base necesaria de información en las áreas de conocimiento del currículo, y lo que los estudiantes traen como capital académico, problema potenciado por el hecho de que los estudiantes son los últimos en reconocer que no estaban listos para los cursos que matricularon. Pero, además, este entrenamiento de años para "aprender sin esforzarse", sin asumir como su tarea personal el aprendizaje, les hace creer que en las aulas universitarias pueden asumir la misma postura.

Respecto a las diversas actividades que componen el aprendizaje en la universidad y a la manera como las nuevas generaciones las cumplen o no, se han hecho hallazgos muy preocupantes.

Adrián de Garay, en su investigación del 2004 sobre las prácticas sociales, académicas y de consumo cultural de los estudiantes de tres sedes de la Universidad Autónoma Metropolitana de México [Estudio etnográfico y cuantitativo para una población de 35.000 estudiantes], al analizar las prácticas académicas, agrupándolas en seis dimensiones, encontró que el cumplimiento más alto se presenta en las actividades meramente formales. Él unió la frecuencia de asistencia a clase y la puntualidad para asistir a clase en una dimensión llamada *Responsabilidad formal*, y encontró que en las tres sedes de la UAM ésta es la dimensión que obtiene un cumplimiento más alto [lo que corrobora nuestros hallazgos: para la mayoría de los estudiantes, hoy en día su responsabilidad fundamental consiste en asistir a clases]. Sólo que aquellos factores que dan sentido a la asistencia a clases no puntúan alto en la investigación de Garay; en la dimensión *Presencia activa en clases* incluyó la frecuencia con que pregunta en clase, frecuencia con que prepara la clase y frecuencia con que discute los puntos de vista del profesor; como era de esperarse, es mucho más frecuente preguntar en clase que preparar la clase y menos aún discutir. La dimensión *Inversión de tiempo en el estudio* incluye tiempo semanal de lectura y tiempo semanal de trabajos para la universidad (que incluye tareas); sólo 10,3 % de los alumnos dedican tiempo alto; inversión media, 22,5 %; inversión baja, 37 %; inversión muy baja, 30,3 %. Es decir, que 67,3 % de los estudiantes dedican un mínimo de tiempo, pues lo gastan por fuera de clases en transportarse de la casa a la universidad y viceversa (dos a tres horas diarias), en cumplir con responsabilidades laborales, en labores caseras y en actividades de consumo cultural; la mayoría no tiene un tiempo fijo y amplio dedicado a leer, a escribir sobre lo que leen, ni para elaborar trabajos. Para otra dimensión, *Producción sistemática* (Elaboración de resúmenes y fichas), la mayor frecuencia se ubica en media: 60 %. De allí que otros puntajes muy dicientes sean los de la última dimensión: *Producción analítica* (elaboración de diagramas y de esquemas), que puntuó así: alta, 13,9 %; media, 34,1 %; nula, 52 %. Estos hallazgos dan cuenta del inmenso cambio en la cotidianidad del estudiante universitario.

Sobre tales hallazgos, concluye Garay:

> El sistema educativo mexicano, desde la educación básica hasta el nivel superior, no ha propiciado entre amplios sectores la incorporación de los hábitos del arte de organizar su trabajo y su tiempo de estudio, de proporcionarles los instrumentos y las técnicas de trabajo suficientes para el desarrollo de las habilidades y capacidades intelectuales propias de la vida académica, en particular de aquellas conducentes a la realización de prácticas escolares con una mayor exigencia cognitiva (Garay, 2004, pp. 117-118).

Por nuestra parte, hemos hecho tres investigaciones sobre la manera como asumen la escolaridad los adolescentes en los colegios de educación secundaria (en dos instituciones educativas de Cali y en dos resguardos indígenas del Cauca), y tres más en la universidad, de las cuales dos se han realizado con estudiantes de ingeniería, haciendo entrevistas con profundidad a estudiantes y profesores, observaciones etnográficas en clase, talleres, encuestas cualitativas amplias y seguimientos académicos, además de todo el trabajo de acompañamiento a los estudiantes indígenas y afrodescendientes entre 2005 y 2008, y el análisis de los logros y dificultades en los cursos del plan nivelatorio. Éstas son las bases de nuestras afirmaciones, más nuestros propios aprendizajes al ejercer la docencia a lo largo de tres décadas y al analizar los cambios en la población estudiantil y en las condiciones para ejercer la enseñanza universitaria.

- Los estudiantes consideran que su principal responsabilidad, una vez que ingresan a la universidad, consiste en asistir a las clases y talleres, llegar a tiempo, escuchar lo que el profesor expone y copiar lo que escribe en el tablero o expone en el retroproyector. Es decir, se sumergen en actividades en las que su papel es pasivo, de receptores acríticos, sin que los profesores más comprometidos con la enseñanza logren moverlos de esta pasividad. Así, cuando el profesor deja ejercicios para resolver en casa, los resuelven a medias, sin consultar el libro guía para tratar de comprender por su cuenta, pues para ellos todo el aprendizaje se debe dar en el aula. De vuelta a clase, cuando el profesor busca que participen con preguntas, sólo piden que él resuelva el ejercicio N^o X o el N^o Y, sin siquiera nombrar el concepto que no saben aplicar, ni pensar. Los estudiantes están seguros de que el trabajo que ellos deberían realizar por fuera del aula de matemáticas lo pueden sustituir por el trabajo que hace el profesor cuando les explica los problemas que ellos no lograron hacer. Y el profesor no se resiste a hacerlo, porque implícitamente cree que un buen docente debe dar las explicaciones pedidas.

- Los estudiantes saben que si no entienden lo que el profesor está explicando esto no detendrá la clase, así todo el grupo no logre entender; que es problema de cada uno aprender lo enseñado, aunque no se haya comprendido, pues todos aceptan que "cálculo es muy difícil". Por supuesto, este "aprender" cada uno lo entiende como le conviene (porque lo tranquiliza): el profesor espera que sepan resolver los problemas que les propondrá en los exámenes; no se pregunta qué tipo de aprendizaje están haciendo, ni para qué les sirve esta mecanización; tampoco se pregunta si éste es un aprendizaje superficial de corta duración (que se olvidará en pocos días), o si es un aprendizaje que transforma lo que el estudiante pensaba, puesto que le exige cuestionar lo que sabía *para avanzar a otro nivel de formalización del conocimiento matemático.*

- Suponen que las clases de matemáticas no son para discutir sobre los temas explicados, ni les interesa hacerlo. No se preocupan por sostener discusiones teóricas y las rechazan, porque las consideran innecesarias; para ellos, lo conceptual “es carreta” que hace perder el tiempo, pues lo que importa son las aplicaciones, un saber hacer sin teoría, o sin razones, como diría Piaget. Consideran que lo importante es poseer “verdades”, ya empaquetadas en fórmulas y con manual de uso. Esta posición es consecuencia del modelo pedagógico tradicional que hemos caracterizado.

Transformación de las prácticas de estudio

En nuestra estrategia proponemos otro papel para el alumno; éste no será un *receptor* de soluciones ya elaboradas -para los problemas que en algún momento de la historia se plantearon los matemáticos, y luego formalizaron en axiomas, definiciones, teoremas y algoritmos-, que él debe memorizar y cuyo funcionamiento él *imita* del modelo que proporcionan las presentaciones y explicaciones del profesor, sino que pasa a ser un *constructor de su propio conocimiento matemático*, resolviendo *problemas creativos* cuyas restricciones, en relación con los conocimientos que libremente pone en juego el alumno, hacen que se requiera cierto conocimiento para alcanzar el éxito.

Esta empresa, de ser constructor de su propio conocimiento, le demanda invertir tiempo en lo que se llama período de *familiarización* con los elementos relevantes de la situación, que lleva a reconocer y plantear la existencia de un problema; luego se requiere realizar un duro trabajo en el que el alumno utiliza su repertorio de conocimientos y fracasa, por no disponer del conocimiento necesario para la situación. Según los expertos y los testimonios de los mismos matemáticos, se sigue un período de *incubación* en el cual trabaja el inconsciente y termina cuando, como dice Poincaré (1913)[16], este trabajo se manifiesta en un “momento repentino” de “iluminación”, en el cual la solución aparece “como si surgiera de la nada”, y finalmente un último período de *verificación*, en el cual los resultados, que la iluminación presenta sólo *grosso modo*, se enuncian con precisión: “(...) los cálculos efectivos, que requieren disciplina, atención, voluntad y, por tanto, conciencia, dependen del segundo período de trabajo consciente que sigue a la inspiración (...) inseparable de la primera, la verificación” (Hadamard, 1947, pp. 103-104)[17].

En consecuencia con lo dicho, la estrategia que orienta las acciones del alumno

[16]Henri Poincaré (1854-1912). Importante matemático francés que escribió numerosas obras de matemáticas y física. Fue premiado por sus trabajos sobre el problema de los tres cuerpos. Además, fue profesor de matemáticas y física en la Universidad de la Sorbona y se preocupó por la enseñanza de las matemáticas. Escribió la obra *Mathematical creation* (1913), que es muy citada.

[17]Jacques Hadamard (1865-1963). Notable matemático francés (1945) cuyo libro *Psychology of invention in the mathematical field* (1945) es un referente cuando se estudian los procesos de pensamiento matemático.

y del profesor en torno de la construcción de conocimiento hace necesaria cierta flexibilidad en el manejo de los *tiempos oficiales* asignados para cubrir las temáticas de los programas, de tal manera que sea posible acompasar los contenidos a los *ritmos de aprendizaje* de los estudiantes, a la vez que se operan ciertas transformaciones en su formación matemática y sus concepciones sobre el aprendizaje y sobre las matemáticas, concepciones que, en la mayoría de los estudiantes, son negativas y muy arraigadas por la cultura que se desarrolla en las aulas de matemáticas tradicionales.

Nuestro reto consistió en integrar al aula de matemáticas aspectos como la *invención* y el *asombro*, la *intuición* y la *validación*, el *razonamiento* y la *lógica*, la *predicación* y los *conceptos*, los *juicios* y los *lenguajes* matemáticos, en el supuesto de que estos aspectos son constitutivos de la *actividad de estudio* que realiza tanto el matemático cuando construye matemáticas nuevas como los estudiantes que aprenden matemáticas. Tales aspectos son necesarios para la creación de nueva matemática, y surgen de nuestra profunda convicción, que encontramos también en Hadamard (1947), respecto a que para ellos *la diferencia entre la actividad que permite crear nueva matemática* a los matemáticos, *y la actividad de los alumnos* que construyen conocimiento matemático nuevo, *no es más que de grado.*

1.4.3. Conformación de los equipos de trabajo

El docente a cargo de los cursos piloto en cálculos I y II contó, en cálculo I, con el apoyo de tres asistentes de docencia, estudiantes de la maestría en matemáticas de la Universidad del Valle, con quienes se conformó el equipo para desarrollar el curso, dirigido a 61 estudiantes matriculados, de los cuales 23 eran repitentes (13 por primera vez y 10 por segunda vez); se formaron tres subgrupos para los talleres con los tres asistentes. De los 61 estudiantes que empezaron, aprobaron 29 (47,5 %) y reprobaron 32 (52,5 %).

El equipo docente que tuvo a su cargo el curso piloto de cálculo II, durante el semestre febrero-junio de 2007, estuvo conformado por el profesor titular y una asistente de docencia, estudiante de la maestría en matemáticas. El curso de cálculo II se extendió hasta incluir el período de verano (cuatro semanas con seis horas diarias: cuatro de teoría y dos de taller). En la sección de verano el equipo docente lo integraron el profesor titular del curso y una asistente, graduada en matemáticas, encargada de la sección de talleres durante las cuatro semanas que duraba el curso.

Para el curso piloto de cálculo II, de los 29 que aprobaron cálculo I, se matricularon 26 en el grupo piloto de cálculo II; dos no matricularon cálculo II y uno matriculó cálculo II en un grupo genérico y lo aprobó con una nota de cuatro coma cuatro (4,4); posteriormente matriculó cálculo III y también lo aprobó (4,1). Al grupo de cálculo II piloto ingresó una estudiante que no tomó el curso piloto de cálculo I y aprobó cálculo II piloto (3,5). Finalmente, el grupo se conformó con 27 alumnos. El curso piloto de cálculo II lo aprobaron 20 estudiantes (74,1 %) y lo perdieron siete (25,9 %). De estos alumnos, ocho matricularon el curso normal de cálculo III, pasándolo el 100 % con una nota promedio de 4,0.

1.4.4. Desarrollo de los cursos y expectativas del equipo docente

En el curso de cálculo I (cinco horas semanales, cuatro créditos) se cubrieron los siguientes temas: lógica; conjuntos y operaciones con conjuntos; conjuntos numéricos; estructura algebraica y orden de los números reales; resolución de ecuaciones e inecuaciones; método de las coordenadas; introducción a funciones. El programa oficial no contempla los tres primeros temas y los otros sólo corresponden a su tercera parte. Faltaban por cubrir los temas de funciones polinómicas, trigonométricas, límite, continuidad, derivada y sus aplicaciones. Además, habría de cumplirse con el programa de cálculo II (cinco horas semanales, cuatro créditos): integración en una variable, función exponencial y logarítmica, sucesiones y series.

Guías de Apoyo Teórico y Guías de Trabajo

Los dos cursos se desarrollaron en torno a dos tipos de guías: de *Apoyo Teórico* y de *Trabajo*, y del texto de Tom Apostol, *Calculus*, tomo I. Desde una perspectiva constructivista, se piensa en torno a *situaciones* prácticas y teóricas que hacen *necesario* un saber matemático específico (C), que no poseen los estudiantes, pero que es posible alcanzar cuando el alumno trabaja sobre un conjunto fundamental de situaciones matemáticas $S(C) = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$ en las que se ha recontextualizado C. El estudiante deberá aplicar sus conocimientos actuales ($\widehat{C}$), que en primera instancia son insuficientes para resolver cada situación o algunas de éstas: S_i, para $i = 1, 2, ..., n$. Esta limitación de $\widehat{C}$ plantea un problema (P) al alumno como consecuencia de la diferencia entre el *saber C necesario* y los conocimientos $\widehat{C}$ disponibles en el momento de iniciar la secuencia didáctica ($P = C - \widehat{C}$); el problema se resuelve cuando $\widehat{C}$ iguala a C.

La afirmación, *a priori*, que acabamos de hacer respecto a que a los estudiantes les es "posible alcanzar" el conocimiento C es relativa al estado de los conocimientos, $\widehat{C}$, que en el momento ellos tengan y a la *mediación* del profesor y de los orientadores del taller. Se trata, en la terminología de Lev Vigotsky (1996, pp. 181-186), de construir una *Zona de Desarrollo Próximo* -distancia cognitiva entre lo que el sujeto puede hacer a solas y lo que realiza con la ayuda de un experto-, en la que "(...) los conceptos espontáneos, faltos de control consciente y volitivo, encuentran dicho control (...) con la cooperación entre el niño y los adultos" (ídem, p. 185); en nuestro caso, el alumno y los profesores, en torno a $S(C)$.

En el escenario que acabamos de describir, la *Guía de Trabajo* define la estructura de la secuencia didáctica para enseñar C en torno al conjunto $S(C)$. El papel de la guía consiste en ser un instrumento que puede *mediar* las *acciones didácticas del profesor* en el proceso de enseñanza y *las acciones de los estudiantes* en su aprendizaje, cuando en torno al saber que implícitamente aparece como necesario para el éxito de la tarea se articulan las acciones del profesor con las acciones de los estudiantes alrededor de los objetos del conocimiento - interactividad (C. Coll, 1995), buscando influir en los procesos cognitivos del otro *para construir dominios de significados socialmente compartidos* - aprendizaje. Complementariamente, dado el carácter potencial de la mediación, la *Guía de Apoyo Teórico* cumple dos funciones. La primera es *poner a disposición del usuario saberes matemáticos* de acuerdo con las necesidades técnicas que demanda la construcción de C, y la segunda, ofrecer una variedad de situaciones adidácticas[18] que se *ajusten* más al estado de conocimientos del alumno -ligeramente por encima de los conocimientos actuales-, cuando las situaciones propuestas en la *Guía de Trabajo* superan el desarrollo potencial del alumno. En resumen, el profesor *ajusta sus acciones* -elaborando *Guías de Apoyo*- de acuerdo con los análisis de los resultados que producen los alumnos al responder por la *Guía de Trabajo*, en contraste con los resultados esperados de acuerdo con ciertos supuestos *a priori* que definieron el tipo de situaciones.

Mediante esta estrategia se busca hacer operativa la *ley fundamental del aprendizaje* de Vigotsky, según la cual, *todo lo que se enseñe por encima del desarrollo potencial del alumno* -determinado por lo que puede realizar con la ayuda del experto- *no se aprende, y todo lo que se enseña en su nivel actual de desarrollo* -determinado por lo que el aprendiz puede hacer por sí mismo- *ya lo sabe*. La *Guía de Trabajo* es el instrumento que puede ser mediador de las acciones, pero para que realmente lo sea, se complementa con las *Guías de Apoyo Teórico*, con el fin de ajustar las acciones según el estado real de conocimientos de los estudiantes.

[18]Situación matemática específica del conocimiento C "(...) tal que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el jugador. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación" (Y. Chevallard, M. Bosh y J. Gascón, 1997. p. 214). El término se opone a *situación didáctica*, que se refiere a "las relaciones establecidas explícita e implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático C" (ídem, p. 217). Sin embargo, las situaciones adidácticas artificiales que se plantean en el aula son parte del *medio* en el que se desarrollan las situaciones didácticas que le dan sentido y significado a la situación matemática específica del conocimiento C.

Nuestra *estrategia socioconstructivista* (Delgado, 1998) se diferencia del modelo tradicional -que fundamenta la enseñanza en la lógica de la explicación- en dos aspectos básicos:

1. *La teoría y las técnicas matemáticas no son un producto acabado u obra muerta* que se expone al estudiante para que las aprenda y en algún momento las aplique a la solución de situaciones fuera del aula. Por el contrario, al igual que el saber que elaboran los matemáticos, son el producto de la solución de situaciones problema que, en este caso, enfrenta el estudiante con la ayuda de la mediación del profesor. Por consiguiente, esta teoría y aquellas técnicas que se seleccionan para enseñarse a las nuevas generaciones *son una obra viva y siempre inacabada* para responder a los problemas susceptibles de una matematización.

2. *Se obliga a un cambio de las actividades tradicionales del profesor y del estudiante:* el primero *no es más el poseedor del saber* que centra su actividad de enseñar en la administración de "buenas explicaciones", sino que, en el marco socioconstructivista, *es más un diseñador y gestor de situaciones* adidácticas relacionadas con el conocimiento objeto de la enseñanza, que media los procesos de aprendizaje, y el segundo *pasa de ser un receptor* del conocimiento acabado, transformado y modelado por la explicación del profesor, *a ser un sujeto* que desarrolla una actividad de estudio en la que construye activamente su propio conocimiento con el objetivo de aprender matemáticas.

El primer aspecto se relaciona fundamentalmente con la actividad del profesor y en particular con el diseño de la *Guía de Trabajo* y la *Guía de Apoyo Teórico*. Como ya se dijo, la primera expresa el conjunto fundamental de situaciones $S(C)$ que se construye considerando las variables didácticas -*valores de la situación que obligan a un cambio de estrategia en una situación adidáctica* S_i-, que obligan a modificar un estado de conocimiento hacia otro mejor, adaptado a la situación.

Estas variables didácticas se determinan a partir de:

- Un estudio de la *naturaleza del conocimiento matemático* (dimensión epistemológica).
- El *estado de conocimiento actual de los estudiantes* (dimensión cognitiva).
- La *gestión de los medios y procesos* de enseñanza y aprendizaje (dimensión didáctica).

El segundo aspecto se refiere tanto a la actividad de gestión del profesor como a la actividad constructiva del estudiante. Decimos que "se obliga a un cambio de las actividades tradicionales...” porque cuando *el profesor evita proporcionar, directamente*, el conocimiento necesario para resolver la situación adidáctica, el alumno tendrá que *actuar* usando su propio repertorio de conocimientos para alcanzar el éxito en la tarea -situación adidáctica de acción (SA)-; y luego, cuando se ve obligado a compartir con los otros y comunicar el producto de su acción, *verbaliza y simboliza* sus acciones -situación adidáctica de formulación (SF)-, y dado que son inevitables las demandas de explicaciones o cuestionamientos de sus pares, deberá tratar de convencer sobre la validez de sus resultados -situación adidáctica de validación (SV)-. En este conjunto de momentos o situaciones adidácticas de la enseñanza, el profesor toma cierta distancia, pero está atento a hacer que las situaciones adidácticas evolucionen de acuerdo con el aprendizaje del saber matemático C propuesto.

El funcionamiento adidáctico es posible si el profesor genera un marco didáctico que tiene como función la regulación de la situación adidáctica. *El profesor en situación didáctica observa las acciones de los estudiantes* y en concordancia con ellas *actúa, produciendo retroalimentaciones* (positivas o negativas) para llenar lagunas -carencia de ciertos conocimientos auxiliares necesarios para alcanzar C (pero nunca el conocimiento C, que es el objeto de aprendizaje)- o para generar conflictos cognitivos con respecto a los conocimientos obstáculo[19] que estén presentes en el estudiante -situación didáctica de devolución de problema (SD)-. Así mismo, el profesor actúa para reconocer que el conocimiento construido por el estudiante es un saber matemático de pleno derecho -situación de institucionalización (SI)-. Estas acciones del profesor siempre están articuladas con las acciones del aprendiz sobre la situación adidáctica y son una respuesta a ellas para provocar el cubrimiento de una laguna o la superación de un conocimiento obstáculo.

En resumen, se espera que como producto de la operacionalización de los dos aspectos del modelo, el conocimiento C sea el resultado de satisfacer las variables de la siguiente función de conocimiento:

$$C = SA + SF + SV + SD + SI$$

Y, en consecuencia, cada guía define la estructura de la *secuencia didáctica* y cumple la función de instrumento mediador, tanto de las acciones didácticas del profesor en el proceso de enseñanza como de las acciones de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

[19]Conocimiento que funciona con éxito en ciertas situaciones, pero que en otras resulta inadecuado, genera errores o es ineficiente. Es difícil de modificar y no es idiosincrásico, pero sí necesario para construir el conocimiento nuevo.

Cómo se usaban las guías

En la primera semana del curso de cálculo I, tomamos conciencia de la magnitud de la brecha entre las demandas que planteaba el programa del curso y el estado de la formación matemática de los estudiantes; esto nos obligó a elaborar nuevas guías, adicionales a las siete inicialmente elaboradas, teniendo presente que más que trabajar sobre contenidos, buscábamos *incidir en el desarrollo de ciertas competencias para:*

- Utilizar lenguaje matemático.
- Razonar matemáticamente.
- Imaginar mundos posibles.

De esta manera, nuestro objetivo de fondo en la gestión de cada una de las guías consistió en *transformar -mediante el desarrollo de la actividad conjunta en torno al objeto de aprendizaje- la tendencia a pensar la actividad de estudio de las matemáticas como aprendizaje de fórmulas y algoritmos.*

Función del texto de cálculo

En concordancia con nuestra estrategia socioconstructivista, el texto no constituye el centro de gravedad de la enseñanza ni del aprendizaje, sino que más bien cumple la función de ser una voz autorizada, invitada para acompañar *la actividad de estudio* de la obra matemática que profesor-estudiante desarrollan en el aula.

En nuestro caso, elegimos el texto de Tom Apostol por la manera como allí se escribe la matemática, el rigor con que se presentan y validan las proposiciones matemáticas y la forma como se introducen y relacionan los temas en torno a los conceptos fundamentales del cálculo. Pero, en especial, el texto nos apoyó en la búsqueda del *equilibrio entre la técnica, la teoría y la justificación de ésta,* tan necesario para alcanzar no sólo una "comprensión práctica" (plano del conocimiento en la acción), sino evolucionar hacia la "comprensión conceptual" (plano del conocimiento conceptual), hasta lograr la "comprensión reflexiva" (plano del conocimiento reflexivo).

Nuestra metodología pretende que el alumno *aprenda a leer y a escribir matemáticas* para reflexionar y aprender de lo que se lee y se escribe. En consecuencia, se incita desde el comienzo, en las guías de trabajo y de apoyo teórico, a escribir, discutir lo que se escribe -consigo mismo y con otros-, corregir y volver a escribir. En este marco, el texto es un referente autorizado al cual se accede por la lectura, aparte de que se constituye en un instrumento que ayuda al profesor a alimentar la reflexión y a orientar a los estudiantes en la escritura de sus ideas.

Metodología y contrato didáctico

La metodología obligaba a los estudiantes a trabajar antes de clase las situaciones de la guía y a usar el encuentro con los asistentes de docencia en el taller (dos horas semanales) para aclarar dudas y recibir retroalimentaciones con el fin de realizar su obra matemática. En las clases (dos, espaciadas por un día, de 1,5 horas semanales cada una), el profesor también trabajaba con los estudiantes a partir de sus preguntas sobre el tema asignado en la guía, y trataba de desarrollar una interactividad para afectar los procesos cognitivos que orientan las acciones de los alumnos. Buscaba que se produjeran los aprendizajes, pero sin dar respuestas directas que resolvieran la situación.

Con estas ayudas, el estudiante desarrollaba una *producción escrita* sobre situaciones de la guía previamente asignadas y la entregaba *cada semana* a los asistentes de docencia para su corrección. Sin embargo, es conviene subrayar que mediando el aprendizaje con la *lógica de la construcción* y no con la *lógica de la explicación*, necesariamente se avanza en forma más lenta: la *comprensión* es un proceso demorado en el que se siembra la semilla del entendimiento, y para que se convierta en fruto hay que hacer un cuidadoso seguimiento e invertir tiempo.

El profesor diseñaba una prueba corta semanal sobre los puntos de la tarea, y se aplicaba el mismo día en que los estudiantes entregaban la tarea. En el encuentro siguiente a la entrega de las tareas, los asistentes de docencia devolvían a los estudiantes las tareas corregidas y comentadas, así como los resultados de la prueba corta. En ese momento, los asistentes de docencia, tomando en consideración los resultados, y las retroalimentaciones escritas por ellos en cada tarea o prueba, discutían con los alumnos los puntos en los que se habían detectado aprendizajes deficientes. Luego, los asistentes de docencia informaban al profesor, en un formato especial, cuáles habían sido los resultados en lo concerniente a lagunas y obstáculos más frecuentes presentes en los estudiantes. Esta información era la base con la cual el profesor planificaba el trabajo de la semana siguiente.

Es evidente que la metodología que sirvió de base para todo el curso rompía el *con-*

trato didáctico[20] sobre el cual se había fundado toda su escolaridad: la manera de concebir las clases, centrada en la interactividad entre el profesor y los estudiantes en torno a los objetos de aprendizaje; los talleres basados en lo que, según las tareas y pruebas cortas, veíamos que aún no se había comprendido; la retroalimentación escrita como comentarios referidos a sus procesos de razonamiento matemático, empleo del lenguaje matemático en los procesos de construcción, formulación y validación de los conocimientos matemáticos que se observaba en las tareas, y la exigencia de toma de conciencia del error que este modo de proceder les plantea a los alumnos como fuente y condición necesaria para el aprendizaje.

El equipo de asistentes y el profesor eran conscientes de las rupturas del contrato didáctico, necesarias para avanzar en el objetivo central del curso piloto de *disminuir la deserción* de los programas de ingeniería y, al mismo tiempo, plantear *altos niveles de comprensión* de las matemáticas. De esta manera, parte del trabajo del equipo docente era resolver las crisis con el diálogo razonado y superar las rupturas actualizando las obligaciones implícitas del contrato.

Contrato didáctico

El contrato que pusimos en práctica se fundamenta en cinco *principios*, propios de un proceso de enseñanza-aprendizaje de un curso básico:

1. Sólo interesa aquello que es fundamental y básico.
2. La necesidad es generadora de conocimiento.
3. La reflexión sobre el error es importante.
4. Interesa la superación del error.
5. Se aprende haciendo.

[20] "Es el conjunto de las obligaciones recíprocas y de las 'sanciones' que cada socio de la *situación didáctica*:

- impone o cree imponer, explícita o implícitamente, a los otros;
- y de aquellas que se le imponen o que cree que se le imponen, con respecto al conocimiento en cuestión. El contrato didáctico es el resultado de una 'negociación' a menudo implícita de las modalidades de establecimiento de las relaciones entre un alumno o un grupo de alumnos, un determinado medio y un sistema educativo. Se puede considerar que las obligaciones del profesor frente a la sociedad que le delega su legitimidad didáctica son también una parte determinante del 'contrato didáctico' " (Brousseau, 2003, pp. 5-6).

El objeto del contrato, cuyas cláusulas en su mayor parte son implícitas, es la enseñanza y el aprendizaje del saber matemático; además este contrato, que obliga al profesor a enseñar y al alumno a aprender, regula el funcionamiento del curso - *sistema didáctico*: definido por las relaciones entre el profesor, los alumnos y el saber objeto de la enseñanza. *Las rupturas del contrato generan crisis* que se toman como verdaderas oportunidades de progresar y *superar estados de funcionamiento del sistema didáctico* que impiden o limitan el acceso al nuevo conocimiento. En el curso de cálculo II, alrededor de la sexta semana se viven estas rupturas: cuando los estudiantes exigen "clases magistrales..."; "ir un poquito más rápido..." y reclaman al profesor por su flexibilidad para volver a discutir aquello que no se ha comprendido, o cuando exigen que "se les enseñen las matemáticas sin física...". Estas rupturas, cuyas manifestaciones se señalan entre comillas[21], se encuentran registradas en videos.

Expectativas del equipo docente

Existe una brecha entre las *matemáticas formales*, que se enseñan en la escuela, y las *matemáticas idiosincrásicas*, que las personas aplican para resolver los problemas de la vida cotidiana. Esta brecha se puede caracterizar en cuanto a las diferencias entre tres planos de representación del conocimiento humano (Piaget, 1985, pp. 268-271): conocimiento práctico, conceptual y reflexivo. En el primero, la comprensión queda limitada al funcionamiento aislado de esquemas de acción con acomodación momentánea a datos particulares muy limitados, como por ejemplo el cálculo de antiderivadas por la aplicación de una regla. El segundo implica una comprensión conceptual que resulta de acciones sobre representaciones semiotizadas e imágenes mentales y, por tanto, entraña asimilaciones y acomodaciones -recíprocas- entre esquemas; es decir, opera sobre los mismos esquemas de acción, más que sobre los objetos externos. Por ejemplo, la regla que permite el cálculo de una antiderivada ahora se explica en lo referente a la operación de paso al límite, aplicada a una función de pendientes de rectas secantes ancladas en un punto. Por último, la *comprensión reflexiva*, propia del tercer plano del conocimiento, se obtiene operando sobre esquemas conceptuales constituidos anteriormente.

> Su mecanismo formador, consistente en operaciones de segunda potencia -esto es, en operaciones nuevas, pero efectuadas sobre las anteriores- demuestra que se trata, una vez más, de abstracciones que parten del plano precedente, pero compuestas y enriquecidas según combinaciones hasta entonces no realizadas (Piaget, 1985, p. 270).

[21]Las expresiones entre comillas corresponden a estudiantes del curso piloto de cálculo II y se pueden consultar en el video *Cruce de miradas*, minutos 10 a 13. Disponible en el Instituto de Psicología, proyecto "Universidad y culturas" (uniculturas univalle.edu).

Por ejemplo, la comprensión de la definición ($\epsilon - \delta$) del concepto de límite es reflexiva. Implica operar sobre esquemas conceptuales como función, número real, vecindad abierta, entre otros, y usar lógicas de segundo orden donde los cuantificadores operan sobre proposiciones cuantificadas para abstraer la definición:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon)$$

Rupturas, reconstrucciones y pensamiento formal

En la comunidad de didactas de las matemáticas se comparte la idea de que el aprendizaje de las matemáticas no es un proceso continuo. Por el contrario, el aprendizaje y la comprensión exigen que se tomen en cuenta rupturas y reconstrucción de conocimientos ya adquiridos para asimilar nuevos objetos a una estructura conceptual ya establecida, ampliar el dominio de un campo conceptual, coordinar campos conceptuales que permanecían aislados o para abstraer lo que existe en un plano de comprensión (práctica, conceptual o reflexiva) y proyectarlo sobre otro más abstracto. Este trabajo está a cargo del profesor, en tanto que el conocimiento de tales rupturas se obtiene del conocimiento histórico de la evolución de las ideas matemáticas y de los informes de los estados de conocimiento de los alumnos.

Respecto al último tipo de reconstrucciones necesarias para el aprendizaje, generalmente la escuela secundaria trabaja el conocimiento en los dos primeros planos y quizás más en el primero. La ruptura entre la formación matemática que resulta de estas prácticas de enseñanza y la demanda cognitiva que plantea el trabajo para alcanzar una comprensión reflexiva es evidente.

Además, esta brecha genera actitudes y creencias negativas respecto de las matemáticas escolares. Tales actitudes y creencias ofrecen una gran resistencia a los procesos de formulación, generalización, esquematización, validación y elaboración de conjeturas, los cuales permiten superar la mera *comprensión práctica* -limitada a la asimilación de los objetos a esquemas de acción aislados, con acomodaciones momentáneas a un conjunto restringido de situaciones- y estimular el progreso hacia una *comprensión conceptual* que enriquece los esquemas de acción con representaciones semiotizadas, haciéndolos más flexibles al acceder a un mayor número de asimilaciones recíprocas, y amplía sus poderes en extensión y comprensión hasta alcanzar la *comprensión reflexiva*, que permite construir un conocimiento más estructural y, por tanto, más equilibrado. Este conocimiento reflexivo posee la flexibilidad necesaria para adaptarse a nuevas situaciones en ausencia de la influencia de la escuela.

Nuestras expectativas, respecto al cierre de esta brecha, se centraron en la modificación de las actividades de enseñanza y de estudio de las matemáticas, seguros de que aquellos estudiantes que en el modelo de enseñanza tradicional están destina-dos al fracaso -65 % de la población de ingenierías-, tienen, sin embargo, excelentes desempeños cuando aplican sus conocimientos no formalizados (idiosincrásicos) para resolver problemas complejos que surgen en situaciones de la vida cotidiana. Esperábamos poder cerrar esta brecha ofreciendo un espacio real, en el aula de matemáticas, al *conocimiento idiosincrásico*, al libre *discernimiento* y a la *imaginación*, para construir conocimiento matemático, y luego, una vez esquematizado y formalizado, reconocer su generalidad y eficacia para resolver toda una clase de situaciones (proceso de descontextualización y despersonalización).

Consideramos que para ofrecer una oportunidad efectiva a los estudiantes que ingresan por "régimen de excepción" y permitir su continuidad en el sistema educativo, además de exigir la *transformación de las prácticas de enseñanza* tradicionales *y de las prácticas de estudio* de los alumnos, era necesario *respetar celosamente sus ritmos de aprendizaje*, lo cual generaría un "atraso inicial" en el desarrollo de los contenidos del curso, de acuerdo con el programa oficial. A este respecto, esperábamos que en un momento dado, cuando los alumnos dispusieran de ciertos "instrumentos" de conocimiento básicos para acceder a una comprensión reflexiva, los ritmos se acelerarían y se podrían cubrir los temas que faltaran. Con todo, la realidad nos mostró que para la mayoría de los alumnos el crecimiento de su curva de aprendizaje era lento y no alcanzaron, durante el primer semestre, el punto de inflexión que cambiara esta tendencia.

En el segundo semestre, esperábamos que esta estrategia socioconstructivista permitiera cubrir los temas que quedaron pendientes de cálculo I y los programados para cálculo II. No obstante, había reservas relacionadas con el cumplimiento de la meta propuesta, por tres razones: 1) *las expectativas fueron demasiado optimistas* respecto al nivel de formación matemática de esta población que ingresa por régimen de excepción, pese a que preveíamos que el nivel era bajo; 2) *el atraso significativo* en los temas de cálculo I; 3) la *lentitud en que se modificaban los métodos de estudio* de los alumnos y la resistencia al cambio.

El equipo siempre fue consciente del atraso en los contenidos y los problemas curriculares que esto ocasionaba. Sin embargo, se estaba seguro de que la experiencia estaba transformando -de modo lento pero seguro- la manera como los alumnos se relacionan con las matemáticas y con otros saberes, lo que podría subsanar en parte los desfases curriculares a corto plazo, si se contaba con ayudas concretas del profesor y los asistentes de docencia, para cubrir la parte algorítmica de la matemática, necesaria para las demandas más inmediatas de cursos como el de física.

Otro aspecto preocupante al momento de iniciar el curso de cálculo II fue la gran cantidad de tema por cubrir en el semestre. No obstante, anotamos lo siguiente en el informe final de cálculo I:

> Nuestra hipótesis es que a medida que los estudiantes maduren en estos conocimientos y formas de hacer matemáticas podrán gradualmente alcanzar ritmos más acelerados de aprendizaje y ser más independientes de las explicaciones del profesor (Informe de cálculo I, 2006).

En el mismo informe afirmamos premonitoriamente:

> Se espera que en el curso de cálculo II se pueda cubrir el programa y en su defecto proponer la continuación del curso en el verano (intensivo) para cubrir los temas pendientes de cálculos I y II (Informe de cálculo I, 2006).

Y, en efecto, tuvimos que extender el curso en el verano para cumplir con nuestro compromiso inicial de cubrir los contenidos de cálculos I y II en un año, pero siguiendo los ritmos de aprendizaje de los estudiantes y no los ritmos de la explicación del profesor.

1.4.5. Resultados de los cursos piloto

Características del "quehacer" matemático en cálculo I

Un propósito central del nivel I era lograr que los estudiantes tomaran conciencia de sus errores y de sus dificultades, como condición necesaria para poderlos superar. El curso estaba basado en las prácticas de aprendizaje o, en otros términos, en la interactividad que se despliega en la clase entre el profesor, los asistentes de docencia y los alumnos, en torno a un saber matemático contextualizado en situaciones propuestas y en un medio en el que se construyen significados matemáticos socialmente compartidos.

Dificultades iniciales (cálculo I)	***Logros (final de cálculo II)***
Para los estudiantes no resultó fácil cambiar sus hábitos en la forma de aprender los conceptos. Estaban acostumbrados a que el profesor les diera la teoría -por ejemplo, una definición- y luego les pusiera ejercicios de aplicación.	Entendieron que los errores debían ser la base de un nuevo aprendizaje. Aceptaron que el ritmo de avance dependía de su posibilidad de reconocer el error en su conceptualización y razonamientos, para así lograr superarlo.

Ni el profesor ni los asistentes anticiparon los niveles tan bajos de conocimiento matemático de sus alumnos. A pesar de experiencias previas de formación, creían que podrían dedicar unas pocas semanas a fortalecer matemáticas fundamentales y luego sí pasar a los temas de cálculo I. Cuando el semestre terminó, sólo habían visto uno de los ocho temas de este curso.	Aceptaron que para aprender cálculo debían comprender las matemáticas y apropiarse de ellas como un lenguaje, y aprender a utilizarlo rigurosamente para poder razonar.
Creían que estudiar cálculo era memorizar los procedimientos y fórmulas, haciendo ejercicios que exigen aplicar eso que ya se grabó en la memoria. Por tanto, para ellos ganar los exámenes significaba que sí habían entendido y aprendido.	Aceptaron que el profesor les propone problemas y son ellos quienes deben pensar para buscar, razonando matemáticamente, la solución. Al final de cálculo II, procuraban que el nuevo monitor no les ayudara a resolver los problemas.
Pedían teoría, pero que “la explicaran fácil”. Esperaban que el profesor diera la clase para ellos anotar lo que él escribió y demostró, convirtiendo así lo enseñado en una verdad que no requiere ser pensada sino solamente aceptada.	Comprendían que si razonaban matemáticamente podían solucionar problemas en las ciencias; que física y álgebra se volvían manejables gracias a su nueva manera de razonar y a los conceptos entendidos.
Crisis. A las pocas clases los alumnos comenzaron a desmotivarse, ya que en éstas no se avanzaba mucho y les resultaban monótonas, pues siempre se retomaban los mismos temas debido a que aún no comprendían los conceptos.	Querían aprender y ser protagonistas de su proceso: conocer previamente los temas para prepararlos, dedicar el tiempo que fuera necesario (sus vacaciones de verano) para dominar los temas que les faltaban.
Querían avanzar en los temas, no en las formas de razonar ni en reconocer los errores en que se fundaban sus saberes matemáticos previos. Pedían que el profesor fuera más rápido y se angustiaban porque en los otros cursos de cálculo ya habían visto muchos temas.	Se transformaron sus prácticas de estudio. Tomaron conciencia respecto a los medios intelectuales de los que se sirve la acción exitosa.

Para el equipo de asistentes en docencia igualmente resultaba difícil aceptar el ritmo lento de avance y las crisis del grupo.	Comprendieron que se aprende haciendo. Es en situaciones de aplicación claras y bien definidas donde el saber cobra interés, y aparece como necesario para dar significado y sentido a la situación.
	Tanto el profesor[22] como los estudiantes de cálculo II aceptaron sacrificar sus vacaciones de verano y hacer clases diarias de cuatro horas para completar los temas de cálculo II, con lo cual, en un semestre vieron cálculo I y cálculo II.

Al curso de cálculo I se matricularon 61 alumnos y lo aprobaron 29 (47,5 %). Al cálculo II piloto ingresaron 28 estudiantes -no se incluye un estudiante, quien cursó y aprobó el curso piloto de cálculo I y realizó cálculo II en la modalidad normal, obteniendo una nota de 4,4-. De los matriculados en cálculo II piloto aprobaron 21 (75 %). De éstos, al siguiente semestre, ocho estudiantes matricularon cálculo III y el 100 % lo aprobó con una nota final promedio de 4,0. Dos han ganado estímulos académicos: uno de ellos ha obtenido en tres ocasiones estímulos en ingeniería civil y otro, en ingeniería de alimentos. Todos los que aprobaron cálculo II, transcurridos cinco semestres, terminaron con éxito la componente matemática de sus planes de estudio.

Debe destacarse, además, que quienes tomaron los cursos piloto de cálculos I y II han logrado una permanencia del 65 % en el ciclo básico de ingenierías[23]. En el informe se comparan estas cifras con los estudiantes de excepción étnica que matricularon cálculo I regular en el período febrero a junio de 2005, quienes tuvieron una deserción del 62,5 %.

1.4.6. Conclusiones

a) Respecto al objetivo principal

[22]El curso de cálculo II estuvo igualmente a cargo de César Delgado como profesor y Liliana Posada como asistente de docencia; en el verano, el asistente fue Carlos Ernesto Rengifo.

[23]La tasa de deserción para ingenierías en el año 2000, en el ciclo básico, fue del 58,02 %, con tendencia al alza en la medida en que la universidad ha aumentado su cobertura, sin variar su actual estrategia de recepción. En promedio, la deserción en el ciclo básico representa el 64,7 % de la deserción total.

Proporcionar una oportunidad real a los estudiantes que ingresan por condición de excepción étnica a los programas de ingeniería, para acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos de que se ocupa la Universidad del Valle.

El objetivo se logró. Sin embargo, es posible obtener mejores resultados si la estrategia didáctica de los cursos piloto se adopta como una práctica institucional que no sólo comprometa a un grupo de manera aislada, sino que sea aplicable a los cursos básicos de matemáticas y, en lo posible, extenderla a los cursos de ciencias del ciclo básico.

Se demostró, con el caso de los estudiantes que aprobaron cálculo II y matricularon al siguiente cálculo III -con una aprobación de 100 % y una nota promedio de 4,0-, que si se enfrentan las dificultades en los dos primeros semestres se evita que en los semestres avanzados se presenten pérdidas de materias y se mejoren los rendimientos en los cursos avanzados, con la ganancia que ello significa para el aprendizaje de los contenidos de la componente profesional de los diferentes planes de estudios.

Es una estrategia equivocada tratar de eliminar cursos, o incluso agregar cursos, sin estar seguro de que con ello se afecta positivamente la fundamentación básica para el desarrollo de la componente profesional.

b) Respecto a la estrategia didáctica

Obliga a un cambio de las actividades tradicionales del profesor y del estudiante: el primero *no es más el poseedor del saber* que centra su actividad de enseñar en la administración de "buenas explicaciones", sino que, en el marco socioconstructivista, *es más un diseñador y gestor de situaciones adidácticas* relacionadas con el conocimiento objeto de la enseñanza, que media los procesos de aprendizaje, y el segundo, *pasa de ser un receptor* del conocimiento acabado, transformado y modelado por la explicación del profesor, *a ser un sujeto* que desarrolla una actividad de estudio en la que *construye activamente* su propio conocimiento con el objetivo de aprender matemáticas.

Si bien esta *estrategia es costosa por el tiempo que demanda y por la resistencia que presentan los alumnos a modificar los viejos hábitos de estudio*, también es cierto que las ganancias que se obtienen a mediano y largo plazos: a) retribuyen *a la universidad*, pues los alumnos llegan mejor dotados matemáticamente a la componente profesional, se evitan costos por pérdidas en las materias de los semestres superiores y seguramente se mejora la calidad de los egresados; b) benefician a los *alumnos*, quienes aprovechan mejor los cursos y desarrollan modos críticos para actuar en el medio, poniendo en práctica, además del saber matemático, un conjunto de valores como el reconocimiento de los propios errores, para aprender de ellos, pero sobre todo para aprender de los errores de otros, superar los propios y ayudar a superar los ajenos. Esto es algo que se aprende cuando el modelo didáctico obliga a valorar el error y aprender de él.

En resumen, esta estrategia didáctica socioconstructivista mostró que es posible crear ambientes de aprendizaje colaborativos en los que se desarrolla pensamiento matemático y al mismo tiempo se logra que el estudiante *aprenda a aprender*, al igual que a valorar las ayudas del otro.

c) Respecto a la evaluación

Esta experiencia demostró la importancia que tiene desarrollar un sistema de evaluación que sea al mismo tiempo formativo y sumativo, para poder hacer el seguimiento semanal de la calidad de las realizaciones de los alumnos.

Dado que los estudiantes vienen de un sistema escolar que los acostumbró a que la evaluación no tiene rigor ni aporta consecuencias, puesto que al final todos pasan la materia y el año, resulta fundamental implementar una estrategia que los vuelva responsables de su aprendizaje semanal, en la que la revisión y corrección de la tarea les demuestre que sí importa lo que escriben o dejan de escribir en sus trabajos semanales.

En resumen, la metodología utilizada en los cursos piloto de cálculos I y II implementa una innovadora herramienta para prevenir y hacerle seguimiento a la deserción en la educación superior.

d) Respecto a la transferencia de la experiencia

El fracaso en cálculos I y II en todas las universidades es cada vez mayor. Los bachilleres no logran seguir el nivel ni el ritmo expositivo de los docentes, y esto es particularmente cierto con jóvenes procedentes de colegios públicos y de privados de sectores populares. No se trata de que les falten contenidos sino fundamentalmente de que no han rebasado el nivel práctico de las matemáticas como representación enactiva; por eso exigen que todo se les enseñe magistralmente, para ellos repetirlo, hacer ejercicios y tranquilizarse suponiendo que "ya dominan el tema". Esto implica que, dada la masificación de la educación superior, deben cambiarse las estrategias de enseñanza y de aprendizaje para que los bachilleres accedan a niveles de representación simbólica que les posibilitan un conocimiento matemático formalizado, en lugar de información que repiten sin poder pensar desde ella.

Esta experiencia proporciona elementos importantes para reflexionar sobre el problema del empalme bachillerato-universidad y la posibilidad de adoptar políticas e instrumentos que complementen los ya existentes, con el fin de que en los departamentos de servicio, como lo es el de matemáticas en la Universidad del Valle, se estimule la formación de grupos que reflexionen permanentemente sobre los problemas que se presentan en la comunicación del saber y sus relaciones con las demandas de las componentes profesionales.

Referencias

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, No. 2, pp. 33-115. Traducción al castellano: Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas, de Julia Centeno Pérez, Begoña Melendo Pardos & Jesús Murillo Ramón (1989). Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* En:
http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf.

Bruner, J. (2000). *La educación, puerta de la cultura.* España: Visor.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-Horsori, Universidad de Barcelona.

Coll, C. et ál. (1995). Actividad conjunta y habla. En B. Fernández & Z. M. Melero (comps.), *La interacción social en contextos educativos.* Madrid: Siglo XXI, pp. 193-326.

De Garay, A. (2004). *Integración de los jóvenes en el sistema universitario. Prácticas sociales, académicas y de consumo cultural de los estudiantes.* Barcelona-México: Ediciones Pomares, S. A.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Tesis doctoral. Barcelona: Publicaciones Universidad Autónoma de Barcelona.

Delgado et ál. (1990, mayo). Grupo de Educación Matemática de la Escuela Regional de Matemáticas. El problema del bajo aprovechamiento estudiantil en los primeros cursos universitarios de matemáticas. *Revista Matemáticas Enseñanza Universitaria*, Vol. 1, No. 1.

Escobar, J., Largo, E. & Pérez, C. A. (2006). Factores asociados a la deserción y permanencia estudiantil en la Universidad del Valle (1994 - 2006). Documento institucional.

Feynman, R. (1965). The character of physical law. MIT Press. Traducción al castellano: *El carácter de la ley física*. Antoni Bosh (ed.) (1980). Barcelona.

Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field.* Princeton University Press. Traducción al castellano: L. A. Santaló Sors (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático.* Buenos Aires: Espasa - Calpe, S.A.

Ministerio de Educación Nacional (2008). *Análisis de determinantes de la deserción en la educación superior colombiana con base en el Spadies.* Primera parte: factores socioeconómicos. Factores académicos e institucionales. Publicación en línea. www.mineducacion.gov.co/.

Ministerio de Educación Nacional (2008). *Análisis de determinantes de la deserción en la educación superior colombiana con base en el Spadies.* Segunda parte: deserción estudiantil y resultados de los Ecaes. Deserción estudiantil y situación laboral. Efecto de los programas de las instituciones de educación superior para disminuir la deserción estudiantil. Publicación en línea. www.mineducacion.gov.co/.

Ministerio de Educación Nacional (2008). *Deserción estudiantil en la educación superior colombiana: elementos para su diagnóstico y tratamiento.* Publicación en línea. www.mineducacion.gov.co/.

Pérez, L. (2001). Los factores socioeconómicos que inciden en el rezago y la deserción escolar. *Deserción, rezago y eficiencia terminal en las IES.* México: Anuies, Publicaciones Anuies en línea.
http://www.anuies.mx/servicios/p_anuies/index2.php?clave=publicaciones/.

Piaget, J. (1974). *La Prise de Conscience*. París: PUF. Traducción al castellano: *La toma de conciencia*. Madrid. Morata.(edición consultada 1985).

Poincaré, H. (l9l3). Mathematical creation. *The Foundations of Science.* Traducción al inglés: G. Bruce Halsted (Nueva York, 1913), p. 387.

Posner, G. (1998). *Análisis del currículo.* Bogotá: McGraw Hill.

Rusbult, C. (2000). *An introduction to design.* Material en línea, 15 de enero de 2003, en http://www.sit.wisc.edu/-crusbult/methods/intro.htm.

Tall, D. (1995, diciembre). *Justifying and proving in school mathematics.* Londres: Institute of Education, pp. 27-38.

Tenorio, M. C. (2008). ¿Para qué sirve ingresar a la universidad? *El Observador Regional*. Cali: Cidse. http://elobservador.univalle.edu.co, No. 6.

Tenorio, M. C. (2009). Inclusión social en las universidades. Posiciones. *Revista de la Universidad del Valle*, No. 3. Cali.

Vigotsky, L. S. (1996). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica (resumen del ensayo original: *Herramienta y símbolo en el desarrollo de los niños*, 1930).

1.5. Tres ideas fuertes del cálculo: variación, tasa y acumulación

Carlos E. Vasco U.[24]

Los cursos de cálculo diferencial e integral escolar de grado once y primer año de la universidad se suelen enseñar como ejercicios de manejo simbólico de expresiones, lo que en la jerga docente colombiana llamamos "boleo de símbolos", sin necesidad de entender ninguna idea fuerte de las matemáticas conceptuales. Lo mismo sucede en el álgebra escolar de grados octavo y noveno: sólo se suele "bolear Baldor" y, como consecuencia, para sacar una "E" en matemáticas de octavo a once, no hay necesidad de entender ninguna idea fuerte del álgebra ni del cálculo.

Lejos de mí menospreciar la potencia del álgebra y el cálculo. Mi tesis doctoral fue una de las primeras en el mundo en hacer álgebra abstracta con ayuda del enorme computador de la Universidad de San Luis, que no tenía 64 gigas ni 64 megas de memoria RAM, sino 64 K de memoria. Lo que no puedo ocultar es que con las sucesivas generaciones de chips cada vez más rápidos, mi tesis pronto quedó obsoleta. ¿Será que esos "boleos de símbolos", que todavía pasan por álgebra y cálculo, también quedaron obsoletos?

Álgebra, según la etimología árabe, es el arte de pasar símbolos para acá y para allá por el puente de la igualdad hasta resolver la cábala ("Al'gebr w'al mu-qabala"). Cálculo, según la etimología latina ("calculus-calculi"), era una piedrita para pasarla de aquí para allá en una mesa con rayas para obtener resultados aritméticos. La clave es la propiedad operatoria de los símbolos escritos o de las fichas para hacer cuentas. Hasta finales del siglo XVI, la mayoría de los libros con las palabras "álgebra" o "cálculo" en el título son más bien de aritmética que de álgebra, y hasta finales del siglo XVII no se distingue el cálculo diferencial e integral del cálculo aritmético y algebraico, porque apenas se estaba inventando el primero.

Defino un álgebra o un cálculo como un registro semiótico operatorio que permite encontrar símbolos de resultados únicamente a través del tratamiento de las representaciones semióticas de ese registro, sin necesidad de pensar en la interpretación de las representaciones intermedias.

Así pues, tanto el álgebra como el cálculo se refieren al manejo de sistemas simbólicos en representaciones semióticas correspondientes a distintos registros semióticos operatorios. Para manejar un registro operatorio del álgebra escolar o del cálculo

[24]Filósofo, Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, Colombia. Máster en física, Saint Louis University, Estados Unidos. Doctor en matemáticas, Saint Louis University, Estados Unidos.

escolar se requiere mucha habilidad y largo entrenamiento, pero no hace falta pensar en ninguna idea fuerte del álgebra ni del cálculo.

Pero ¿a qué sistemas matemáticos conceptuales se refieren esas representaciones semióticas operatorias que llamé "álgebra escolar" y "cálculo escolar"? En una primera aproximación, no se ve discontinuidad entre las escrituras simbólicas de un libro de álgebra y las de un libro de cálculo. Fuera de la aparición repetida de unas "eses" muy alargadas "$\int$" y del uso muy frecuente de la letra "d minúscula", un lector ingenuo no percibe gran diferencia entre los dos tipos de libros. Quizá, de vez en cuando, note unas pequeñas flechas que señalan un "ocho dormido": "$x \to \infty$" y dos palabras raras que no se encuentran en el diccionario: "gof" y "fog".

Conozco centenares, tal vez miles de estudiantes (y no digo cuántos profesores), que después de un año de boleo de cálculo en grado 11 y otro más en los dos primeros semestres de universidad, todavía no han entendido ni siquiera las ideas fuertes suficientes para comprender que los tres símbolos "$x \to \infty$" son totalmente superfluos, y que la "o pequeña" de "gof" y "fog" no es una "o" sino una abreviatura de la preposición "de", o de las expresiones "del" o "de la", y que representa sólo una de las dos posibles composiciones de operadores unarios en un sistema conceptual analítico.

Esos detalles tipográficos, aparentemente triviales en las representaciones semióticas, señalan una diferencia profunda en los sistemas conceptuales, representados por los sistemas simbólicos del álgebra escolar y del cálculo escolar. La diferencia histórica entre aritmética, álgebra y cálculo se ha ido acentuando porque el álgebra escolar se distanció de la aritmética con números particulares y se perfeccionó durante los siglos XVI al XVIII para operar con un registro semiótico muy potente para manejar los sistemas conceptuales de la aritmética generalizada, que tienen distintos tipos de números como componentes; a su vez, el cálculo escolar se perfeccionó durante los siglos XVIII y XIX para operar con otro registro semiótico, muy parecido superficialmente al anterior, pero mucho más potente para manejar los sistemas conceptuales analíticos, que tenían al comienzo distintos tipos de "cantidades variables" como componentes. Desde el punto de vista actual, las cantidades variables eran funciones del tiempo, aunque no siempre explícitamente formuladas. El cálculo se distanció del álgebra por su poder para modelar y tratar las cantidades variables y sus covariaciones, aunque ya con la geometría analítica de Descartes era teóricamente posible reducir todas las demás cantidades a longitudes de segmentos.

Antes de la invención del cálculo, por medio del análisis de las cantidades variables, Roberval, Fermat, Pascal, Cavalieri, Wallis y Barrow resolvieron, desde 1630 hasta 1680, muchos problemas que hoy se tratan en cálculo, como los máximos y mínimos, las normales a las curvas, las tangentes y las subtangentes, las áreas bajo muchas curvas y los volúmenes encerrados por varios tipos de superficies. Hacia el final del siglo XVII, entre 1665 y 1700, Newton y Leibniz inventaron independientemente dos cálculos diferentes, con cantidades variables para modelar fenómenos de la física y resolver problemas internos de las matemáticas: el cálculo con fluxiones, que llevó a la derivada con respecto al tiempo y a la integral como antiderivada, y el cálculo con diferenciales, que condujo al cálculo diferencial e integral clásico y al cálculo no estándar.

Durante el siglo XVIII se desarrollaron rápidamente los cálculos diferencial e integral de Newton y Leibniz, los cuales se confundieron en uno solo y se difundieron por toda Europa con textos y cursos escolares, comenzando con el texto de L'Hôpital y siguiendo con la *Introductio* de Euler y el *Curso* de Cauchy a principios del XIX. Durante los últimos decenios del siglo XIX, con el refinamiento de la teoría de los números reales y de las funciones definidas sobre ellos, se fueron precisando y abstrayendo los sistemas analíticos sobre los números reales, que tienen ahora distintos tipos de funciones reales de valor real como componentes. Para el manejo de estos sistemas conceptuales analíticos se estabilizó en el siglo XX lo que hoy se enseña en colegios y universidades como cálculo diferencial e integral.

Esa enseñanza se masificó a casi todas las universidades del mundo después de la segunda guerra mundial, y la industria de textos de cálculo cada vez más voluminosos y costosos ha prosperado durante más de 60 años.

Tal masificación de la enseñanza del cálculo llevó a unificarlo como un profuso inventario de ingeniosas maneras de calcular resultados de ciertos tratamientos de expresiones simbólicas dentro de un registro semiótico operatorio muy parecido al álgebra de bachillerato. Pero esa masificación llevó a la penosa situación actual de que ni siquiera se piensa en qué sistemas conceptuales representa ese registro, de tal modo que para enseñar bien las técnicas de cálculo escritas en esa álgebra rara no hace falta ninguna idea, ni fuerte ni débil. Para aprender esa álgebra rara, basta la destreza en el tratamiento simbólico de ciertas expresiones, y mientras menos se piense en los sistemas conceptuales subyacentes, mejor. El lema del buen estudiante de cálculo parece ser: "No me hagan pensar, porque me equivoco".

Infortunadamente, para los profesores de cálculo del siglo XXI, desde fines del siglo XX todos esos tratamientos simbólicos los puede hacer cada vez mejor cualquier buen programa de álgebra computacional, como el Derive y el Maple, y mejor todavía el programa Mathematica. Los profesores de cálculo encontramos cada vez más difícil mantener la ilusión de que estamos haciendo algo importante al entrenar a nuestros estudiantes para llegar a ser apenas tan "brutos" como un computador con un buen programa de procesamiento simbólico. A pesar de la creciente evidencia en contrario, a los jóvenes que se logran acercar a las "habilidades brutas" del programa Mathematica los seguimos considerando los más "inteligentes".

Poco a poco, los profesores de cálculo nos parecemos cada vez más a aquellos ilustres catedráticos de algunas facultades de ingeniería que, pese a la disponibilidad de calculadoras de mano con teclas funcionales, siguieron insistiendo hasta su jubilación en enseñar a sus estudiantes primíparos a manejar las tablas de logaritmos, las tablas de funciones trigonométricas y la regla de cálculo.

Por eso, cuando fui asesor del Ministerio de Educación Nacional (de 1978 a 1993), propuse no incluir explícitamente el cálculo en los programas para la educación media de la renovación curricular que se preparó desde 1976 hasta 1984.

Me interesaba en ese entonces que todos los estudiantes de la educación básica secundaria desarrollaran habilidades de manejo de los sistemas conceptuales numéricos por medio de sistemas simbólicos operatorios que tuvieran símbolos para números genéricos o todavía no definidos, o sea, que dominaran la aritmética generalizada, y que todos los estudiantes de la educación media entendieran al menos las ideas fuertes para el manejo de los sistemas conceptuales analíticos por medio de sistemas simbólicos operatorios con símbolos para funciones genéricas para la modelación de procesos y fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias naturales y sociales.

Había cinco columnas principales en los programas del área de matemáticas para la secundaria y media: una columna de sistemas numéricos, otra de sistemas geométricos, otra de sistemas métricos, otra de sistemas de datos y otra de sistemas analíticos. Se trataba, por supuesto, de los sistemas conceptuales respectivos, para los cuales se trabajaba con distintos sistemas simbólicos como medios para el refinamiento, control y comunicación del trabajo conceptual.

No incluí explícitamente el álgebra escolar en la educación básica, pues para mí, como se enseña ahora el álgebra, no es de por sí una disciplina matemática conceptual ni tiene ideas fuertes. Tampoco quería incluir explícitamente el cálculo escolar en la educación media, pues pensaba que como se enseña ahora no es tampoco de por sí una disciplina matemática conceptual ni tiene ideas fuertes. Propuse, pues, eliminar el cálculo de grado once y dejar el manejo de los sistemas analíticos por medio del cálculo diferencial e integral para la universidad. Podría quedar, a lo más, como asignatura electiva de último año de la enseñanza media, pensando en el sistema norteamericano de cursos de *advanced placement* o "emplazamiento avanzado" ofrecidos por las universidades en los dos últimos grados de los colegios.

Tenía para ello varias razones. Una era que, fuera de Colombia, en ningún país del mundo es obligatorio el cálculo en el último año de secundaria o media. Otra, que los profesores de cálculo de la universidad decían que los bachilleres no sabían nada de cálculo y que lo poco que creían saber era mejor que no lo hubieran aprendido, pues así se ahorrarían el tiempo necesario para desaprenderlo. De todas maneras había que repetir toda el álgebra, la geometría analítica, la trigonometría y el cálculo en el primer año de la universidad, luego era mejor emplear esos dos años de media en algo más útil. Esa razón sigue siendo válida, y cada vez oigo más esa queja entre los profesores de cálculo de los primeros años de universidad.

Efectivamente, los estudiantes de grado once terminan el cálculo sin entender ni siquiera la idea fuerte más importante del cálculo diferencial: la de tasa o rata de cambio. No entienden qué es una tasa variable o una rata de cambio variable, pues -como tampoco saben ortografía- parecen creer que una "tasa" es para tomar tinto y que una "rata" es un animal dañino.

La razón más fuerte que me llevaba en esos tiempos a no incluir el cálculo en grado once era que los bachilleres no sólo no aprendían ni siquiera esa idea fuerte del cálculo, sino que aprendían todavía menos las otras dos ideas fuertes del cálculo: ni la variación y la covariación funcional, ni la acumulación y las integrales. Un bachiller con "E" en cálculo ni siquiera podría negociar una tasa de interés o discutir un aumento de salario por inflación. Los bachilleres y sus profesores estaban, pues, perdiendo su tiempo en ese año de cálculo. Por eso era mejor quitarlo del programa de grado once.

Lamentablemente para mí y para los estudiantes de grado once, fracasé en mi intento de quitar el cálculo de ese grado. Afortunadamente para los profesores de cálculo de secundaria y media, esos nuevos programas de secundaria colapsaron con la expedición de la Ley General de Educación en 1994, que estableció la autonomía curricular con base en el PEI de cada institución, y los programas de media nunca salieron.

A pesar de que los programas de matemáticas para la secundaria y media expedidos en 1974 dejaron de ser obligatorios hace quince años, todavía siguen vigentes en la mente de los maestros y en los libros de texto. Como dice Juan Carlos Negret, "los programas de 1974 no existen, pero sí insisten". Las tradiciones escolares tienen mucha inercia; hay demasiados intereses gremialistas entre los docentes y hay todavía más intereses comerciales entre las editoriales. El cálculo de grado once sigue ahí después de 35 años.

El cálculo diferencial e integral suele enseñarse en grado once y en primer año de universidad como el manejo de un sistema simbólico que permite tratamientos múltiples, ingeniosos y potentes de ciertas expresiones analíticas. Lamentablemente, como tratamiento de ciertas representaciones semióticas sin referencia a un sistema conceptual analítico, ese tipo de cálculo no es importante por sí mismo. Por fortuna, el cálculo también puede enseñarse para desarrollar y ejercitar el pensamiento numérico, espacial y métrico, así como el pensamiento variacional que los cruza a todos, por medio de la utilización de sistemas conceptuales analíticos, con sus distintos registros simbólicos para la modelación de procesos y para resolver problemas. El pensamiento variacional es el más importante en las matemáticas, en tanto que la modelación y la resolución de problemas son los procesos más valiosos en las matemáticas escolares en colegios y universidades.

Para mí, la modelación es la formación de modelos teóricos de los procesos reales, y considero que los modelos teóricos incluyen un modelo mental intuitivo analógico y una teoría digitalizada en un lenguaje articulado que permita la comunicación y el tratamiento simbólico por medio de distintos registros semióticos. Si el cálculo diferencial e integral va a dejar de ser ese ejercicio de destrezas simbólicas que se hacen mejor por computador y va a convertirse en promotor del pensamiento variacional, la modelación y la solución de problemas han de concentrarse en el manejo de los sistemas conceptuales analíticos, y enfatizar en las ideas fuertes del cálculo.

A mi juicio, no hay otra manera de resolver problemas que la modelación, aunque se necesita también, por supuesto, el tratamiento de los algoritmos para echar a andar o a "correr" los modelos, de acuerdo con sus teorías formuladas en distintos registros semióticos, pero esa segunda parte es la que hacen mejor los computadores.

Propongo, pues, que entendamos el cálculo diferencial e integral no como un mero ejercicio de destrezas de manejo simbólico, sino como el mejor ejercicio mental para el desarrollo del pensamiento variacional, con la utilización de los sistemas conceptuales analíticos para modelar y resolver problemas de la vida cotidiana y de las ciencias naturales y sociales. Para ello hay que empezar más acá de las destrezas simbólicas, comenzando con el cultivo de las ideas fuertes del cálculo, y pasar más allá de las destrezas simbólicas, hasta construir los sistemas conceptuales analíticos y saber manejarlos con diversos tipos de registros semióticos orales, gestuales, escritos en lenguas naturales, y en lenguas formales y con distintos registros gráficos y computacionales.

En mi opinión, las tres ideas fuertes del cálculo diferencial e integral son, en primer lugar, la variación y la covariación de las cantidades de distintas magnitudes (en la que incluyo, por supuesto, la covariación funcional, la covariación lineal y el estudio local de las maneras como las funciones no lineales transmiten la variación del dominio al codominio); en segunda instancia, las razones, tasas o ratas de cambio que llevan a las derivadas, y en tercer término, la acumulación que conduce a las integrales. Ya explicaré por qué no cuento entre esas tres ideas fuertes del cálculo otras posibles candidatas, como el límite y la continuidad. Sí podría considerar una cuarta idea fuerte: las diferencias orientadas que llevan a los diferenciales y a los integrales leibnizianos. Pero de todos modos sería menos fuerte que las tres ideas que he seleccionado como las más fuertes del cálculo y, además, me obligaría a decir que las tres ideas fuertes del cálculo son cuatro.

Otra forma de decir lo mismo de manera más provocativa y provocadora sería señalar que las tres o cuatro ideas fuertes del cálculo son cinco: la covariación y "las cuatro operaciones" de suma, resta, multiplicación y división. En efecto, las integrales son sumas; los diferenciales son diferencias y actúan sobre diferencias, o sea, son restas; las derivadas son tasas, ratas o razones, es decir, son divisiones, y la multiplicación es la aplicación de las únicas funciones lineales que hay en una variable real, que a veces llamamos "escalares", o sea, que las funciones lineales son operadores multiplicadores y la aplicación de éstos a sus argumentos o multiplicandos son precisamente las multiplicaciones.

Para que se vea más clara la relación entre la multiplicación y la linealidad, observemos que la multiplicación de a por b, que escribimos "$a \times b$", se interpreta por los que preferimos escribir los operadores unarios a la izquierda, como "a veces b", con a como multiplicador y b como multiplicando:

$$a \times b = L_a(b) = ab.$$

Los que prefieren los operadores escritos a la derecha, como "a, b veces", con a como multiplicando y b como multiplicador, escriben más bien:

$$a \times b = (a)L_b = ab.$$

De ambos modos resulta una familia de operadores lineales o escalares indexada por el multiplicador. Esas dos maneras de entender la multiplicación como una familia de operadores unarios producen precisamente los únicos operadores lineales que hay en los sistemas analíticos de funciones reales de una sola variable real. Esos operadores lineales son los más importantes para la primera idea fuerte del cálculo.

1.5.1. Primera idea fuerte del cálculo: la variación y la covariación funcional

No me detengo a explicitar la naturaleza y a destacar la trascendencia del pensamiento variacional, que es ahora la meta principal de los lineamientos y los estándares de competencias del área de matemáticas para la secundaria y media en Colombia. A algunos investigadores del Cinvestav de México, como Ricardo Cantoral y sus colaboradores, les debemos los estímulos iniciales para enfatizar el pensamiento variacional en unas matemáticas escolares que en general habían estado dominadas por el pensamiento estático. A Celia Castiblanco y su equipo de trabajo para los lineamientos del área de matemáticas, y a Gloria García y Gilberto Obando para los estándares de competencias, les debemos su reformulación y expansión en el país.

Para ejercitar ese pensamiento variacional en lo numérico, lo espacial y lo numérico, es necesario volver a trabajar con magnitudes físicas y cantidades variables en el tiempo y en el espacio-tiempo, y distinguir las cantidades de sus medidas numéricas.

La primera idea fuerte es, entonces, la variación de cantidades variables dependientes del tiempo y la covariación de dos o más cantidades variables relacionadas entre sí, o dependientes una de otra. Los dos principales tipos de covariación corresponden a la suma y a la multiplicación, o para decirlo en forma más técnica, al campo conceptual aditivo y al multiplicativo.

La covariación aditiva se refleja en la adición de vectores y funciones, no sólo de números, y lleva a las diferencias orientadas, a los vectores de los espacios tangentes, a los diferenciales y a las integrales. La covariación multiplicativa se refleja en los operadores lineales y conduce a las razones, a las derivadas y a los operadores lineales sobre espacios vectoriales y funcionales.

El estudio de la variación y la covariación por medio del cálculo tiene como meta la modelación de procesos y fenómenos de la vida real con modelos mentales analógicos y teorías digitalizadas y formuladas en registros semióticos diferentes, para facilitar la resolución de problemas de la vida real.

Funciones como tipos de covariación

Los modelos mentales más apropiados para el pensamiento variacional no son sistemas numéricos o geométricos compuestos de números y figuras, sino sistemas analíticos compuestos de las funciones reales como tipos de cambio, de variación y covariación.

En las funciones no son las parejas ordenadas del grafo las que importan, sino la situación de covariación. La función como relación entre esas cantidades covariantes codifica las restricciones a la variación de una cantidad variable, considerada manipulable o independiente, y otra dependiente en su variación de la variación de la independiente.

Una cosa es una cantidad que permanece constante (en un contexto espacio-temporal dado, o dentro de un juego lingüístico específico, por ejemplo, dentro de la resolución de este problema); otra cosa es una cantidad variable en el tiempo; otra cosa es una cantidad que varía si varía otra (sería mejor llamarlas "covariables", o mejor todavía, "variables covariantes"); otra cosa es una medición de una cantidad variable (como un proceso, como un resultado anumérico, como un resultado numérico); otra cosa es el símbolo de una cantidad potencialmente variable, y otra es el símbolo del valor de una medición de una cantidad. Las mediciones dan números reales (en caso de magnitudes escalares) pero dependen del origen elegido, de la unidad que se utilice, del método de medición, del aparato que se use, etc. Piense en el tiempo como duración y como medida de la cuandicación o "ubicación temporal", o en la de la temperatura, o en la amplitud de un ángulo de giro (en grados, radianes, vueltas...)

Desde Vieta y Descartes hasta Euler, las cantidades eran variables o constantes, infinitesimales o finitas. Sin pensar en la situación de covariación no se sale de ahí. Es necesario pensar en cuál cantidad puedo hacer variar a voluntad y cuál está amarrada o ligada a esa variación y cómo. Es, pues, importante en el cálculo de una variable decir que hay al menos dos variables, una cantidad variable independiente y otra dependiente, y que la segunda variable, la dependiente, es la que se dice que es una función o es función de la otra. No es, entonces, propiamente "el cálculo en una variable" sino el cálculo de funciones de una sola variable real (y de un solo valor real). Pero desde este punto de vista, tales funciones no son sino codificaciones de modelos de covariación de cantidades variables, ya consideremos que las funciones son relaciones que restringen la variación de la dependiente según los cambios de la independiente, o que son operaciones que transforman el valor de la independiente en el de la dependiente.

Esas funciones pueden entenderse de dos maneras: como operaciones sobre cantidades variables y sus medidas numéricas, y como relaciones entre cantidades covariantes y sus medidas numéricas. En la enseñanza del cálculo por ideas fuertes se trata de estimular a los estudiantes hasta que lleguen a objetivar las funciones como elementos, componentes u objetos de otros sistemas de orden superior, los sistemas conceptuales analíticos. Como lo propone la teoría Apos o Apoe de Dubinsky, se trata de pasar de acciones y procesos a objetos y esquemas.

1. **Funciones como relaciones.** Podemos llamarlas funciones relacionales o relaciones funcionales. Solemos entenderlas con un modelo de amarre o restricción: el modelo relacional. Este modelo induce el pensamiento estático, a menos que se consideren las relaciones funcionales como amarres condicionales que regulan y restringen la variación de la imagen cuando se varía la preimagen.

2. **Funciones como operaciones.** Podemos denominarlas funciones operacio-

nales u operaciones funcionales, y es posible entenderlas mejor por medio de modelos de transformación o de máquina: los modelos transformacionales u operacionales. Estos modelos son mucho más cercanos al pensamiento variacional si se considera la variación de la imagen que la operación transforma en preimagen. Muy relacionado con los modelos operacionales es la idea computacional de que una función es un procedimiento de cálculo que produce un solo valor (*output*), siempre el mismo para el mismo insumo o sistema ordenado de insumos (*inputs*). Compárese con la idea de Lagrange: una función de una o más variables es cualquier expresión del cálculo donde figuren esas variables. Esa es la manera que más me gusta para comprender la sintaxis del álgebra de bachillerato: interpretar los términos algebraicos como instrucciones en taquigrafía.

Ampliar una diapositiva es una transformación o función operacional con respecto a la imagen. Después el observador puede relacionar la imagen proyectada con su preimagen en la diapositiva, y aparece un modelo de función relacional.

Mover el apuntador láser contra un espejo es más cercana a una relación o función relacional con respecto al punto imagen. Mover directamente el punto rojo del láser en la pared también es relacional. Así sale la tangente si se mide con la distancia del apuntador a la pared. Ponga la punta del apuntador a un metro de la pared y mida la sombra en metros.

Una cosa es la variación que la operación le hace a la preimagen, como correrla hacia adelante si la función corresponde a la ecuación $f(x) = x + 1$, o como agrandar un intervalo (a, b) globalmente si se mira la función inducida $f[(a, b)]$ con $f(x) = 2x$, pues da lo mismo si se toma como una función duplicadora puntual de los valores numéricos correspondientes a los puntos del intervalo (a, b) o como duplicadora global de los intervalos. Otra cosa es la variación de la imagen que corresponda a la variación de la preimagen, pues esa puede estudiarse también en el caso de que la variación se dé cerca de una preimagen que es un punto fijo de la función. Tal caso es muy útil para máximos y mínimos que coincidan con el punto fijo, como el cero para las funciones lineales. Precisamente se trata de reducir todo el análisis al estudio de las transformaciones lineales locales.

Funciones como modelos dinámicos de covariación

La gráfica cartesiana es estática. Como lo explica muy apropiadamente el Dr. Crisólogo Dolores Flores, las gráficas usuales de las funciones que modelan la covariación no sólo no sirven para ejercitar el pensamiento variacional, sino que lo obstaculizan. Pero hay maneras de superar ese obstáculo.

Recordemos que una cosa es el grafo de una función, que como conjunto de parejas es estático; otra cosa es la gráfica cartesiana, que como *locus* de puntos también es estática; otra cosa es la curva como imagen estática de una trayectoria (huella, memoria, estática); otra es la curva como trayectoria de un punto móvil que se va describiendo a su paso, y otra es la manera de interpretar activamente la gráfica cartesiana con la idea de los espacios tangentes, el láser y el espejo de 135° que explicaré a continuación.

Si se quiere ejercitar el pensamiento variacional, se puede pensar que R como conjunto de salida queda representado por el eje horizontal desplegado por el vector unitario e_1 y el conjunto de llegada queda representado por el eje vertical desplegado por e_2. En la visión dinámica, el punto $(x, f(x))$ del grafo es apenas un punto de quiebre de la "trayectoria de un rayo de luz" que empieza de x hacia arriba, se refleja en un espejito a 135 grados situado en el punto $(x, f(x))$, sigue horizontalmente y pega en el eje y, donde señala la imagen de x por f, $f(x)$.

Pero también se puede considerar que el conjunto de llegada R está repetido indefinidamente, una vez "encima" de cada punto x del eje horizontal. Es mejor decir "encima", pues el cero de la fibra "tapa" el punto x. No es pues "lo mismo" el punto x como punto del conjunto de salida R y el punto cero del conjunto de llegada, repetido o no. El punto $(x, f(x))$ es ahora el seleccionado por la sección del haz trivial $R \times R$ sobre x, al cual vuelve a "caer" si se usa la proyección canónica π (nótese que no cae sobre $(x, 0)$). Esto se parece más a la idea de Descartes de que el argumento de la función es la longitud del segmento del eje de las abscisas, y el valor de la función es la longitud del segmento de allí para arriba, no en el eje y. Volvemos a las cantidades variables consideradas mentalmente antes de las medidas numéricas.

Un ejemplo de la física newtoniana

Para ver cómo trabajar con cantidades variables específicas, tomo un ejemplo de la mecánica newtoniana. Vuelvo a la física del ímpetu o del impulso de los siglos XIV a XVII y a la manera como la reformularon Galileo y Newton.

Primero preciso conceptualmente dos magnitudes físicas con sus distintas cantidades constantes o variables, que considero en mi modelo mental del movimiento de un objeto masivo cuando lo impulso o lo freno: el ímpetu y el impulso.

El ímpetu o fuerza, viva o momento de un objeto en movimiento, es directamente proporcional a la masa y a la velocidad del objeto.

El impulso o la acción de un agente sobre un objeto en reposo o movimiento es directamente proporcional a la fuerza impresa aplicada al objeto y a la duración de la aplicación de esa fuerza sobre el objeto.

Defino, pues, el valor numérico del momento p como el impulso o fuerza viva que no tenga en cuenta otros posibles componentes, sino únicamente el producto de los valores numéricos de la masa y la velocidad, $p = kmv$, y utilizo las unidades apropiadas para eliminar la constante k:

$$p = mv$$

Defino el valor numérico de la acción A como el ímpetu que le da el agente al objeto sin tener en cuenta otros posibles componentes, sino únicamente el producto de los valores numéricos de la fuerza impresa y de la duración del impulso, $A = kft$, y uso las unidades apropiadas para eliminar la constante k:

$$A = ft$$

Para una duración pequeña Δt, el incremento del impulso o la acción es

$$\Delta A = f\Delta t$$

Ley del impulso: la aplicación de un impulso o acción incremental a un objeto en reposo o movimiento produce un incremento proporcional en el ímpetu o momento del objeto:

$$\Delta A = k\Delta p$$

Si utilizo las unidades apropiadas para eliminar la constante k, los valores numéricos satisfacen la igualdad:

$$\Delta A = \Delta p \qquad\qquad f\Delta t = \Delta p = \Delta(mv)$$

Si la masa es constante,

$$f\Delta t = m\Delta v \qquad\qquad f = m\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = ma.$$

Por tanto, el modelo newtoniano con una teoría que incluya la ley "$f = ma$" sólo sirve cuando la masa es constante, y por consiguiente no sirve para modelar la subida de un cohete ni el vuelo de un avión de fumigación u otros procesos en los que vaya cambiando la masa del objeto en movimiento.

Tampoco serviría el modelo si el momento incluye otros factores, como por ejemplo la velocidad de giro de una pelota de béisbol, o la resistencia del aire, o la temperatura del objeto, o si el ímpetu o acción incluye el sudor, la sensación de esfuerzo, el dolor o el ritmo cardíaco del agente, o la temperatura del ambiente. Esto no es una broma, pues si se define paralelamente el trabajo W como el producto de la fuerza impresa f por la longitud s del recorrido,

$$W = fs,$$

esto implica que el modelo del trabajo físico posnewtoniano con una teoría que incluya la igualdad

$$\Delta W = f\Delta x,$$

sea cual sea el sudor, esfuerzo, dolor y aceleración cardíaca del trabajador que lleva a la espalda un bulto de cemento de 50 kilos del camión al depósito a una cuadra de distancia por un camino plano, con una temperatura ambiente de 40 grados, el hombre no hace ningún trabajo. Más aún, si al final tira el bulto al suelo del depósito, hace trabajo negativo y, según este modelo del trabajo, le debían descontar algo del sueldo. Las cantidades variables son, pues, muchísimas: la masa del objeto, el ímpetu que lleva el objeto, la fuerza que le hago, el tiempo que dura mi esfuerzo, el impulso que le imprimo al objeto, el peso del objeto en este sitio, la temperatura ambiente aquí y ahora, el trabajo neto que hago, la energía que consumo, el sueldo que gano, etc.

Por desgracia, las matemáticas no consideran esenciales las magnitudes y sus cantidades; sin embargo, por fuera de los problemas puramente matemáticos lo más importante del cálculo sería la posibilidad de modelar procesos y fenómenos de la vida real, y manejar valores numéricos de esas cantidades variables por medio de los sistemas conceptuales analíticos y los registros semióticos respectivos. Propongo entonces, en primer lugar, volver a las magnitudes y cantidades variables y a sus modos de covariación, para modelarlas y tratarlas por medio de las funciones de los sistemas conceptuales analíticos, y ahora sí tratar las funciones con el cálculo diferencial e integral como registro semiótico potente.

1.5.2. Segunda idea fuerte: las razones, tasas o ratas

En el Congreso Nacional de Matemáticas celebrado en Cali presenté un tratamiento detallado de las diferencias y las razones en la historia de las matemáticas, hasta llegar a la consideración de éstas como parejas de operadores aditivos y multiplicativos mutuamente inversos.

Las diferencias como operadores aditivos orientados llevan a la consideración de los vectores localizados en cada punto, y a la construcción del haz tangente a la recta real R, al plano R^2 o al espacio tridimensional R^3. En cada punto p se sitúa un espacio vectorial de la dimensión respectiva, que se llama “el espacio tangente al punto p”, $T(p)$. El haz tangente es la unión disyunta de todos esos espacios tangentes, con una función de proyección que los identifica por el punto de amarre donde se sitúa la "cola" del vector respectivo. Este punto de amarre puede verse también como el vector cero del espacio vectorial respectivo.

Ya señalé que las diferencias como operadores orientados llevan a los diferenciales de Leibniz, y producen un cálculo diferencial de un sabor muy distinto del de Newton. El cálculo diferencial de Newton no se debería llamar "diferencial" sino "fluxional", ya que se basaba en las fluxiones de las cantidades fluyentes. Hoy identificamos las cantidades fluyentes con las variables numéricas escritas con una sola letra, y las fluxiones con las derivadas de esas variables con respecto al tiempo, escritas con un punto encima. Como no hace falta pensar en ideas fuertes para aprender cálculo, pocos profesores y estudiantes caen en cuenta de que hay un cálculo que comienza con el énfasis en las diferencias, lo que lleva al cálculo diferencial de Leibniz y al cálculo no estándar de Robinson y Keisler, y otro cálculo que comienza con el énfasis en las razones, lo que lleva a las fluxiones con respecto al tiempo en Newton, luego a las derivadas más generales y a los operadores lineales[25].

Son cálculos conceptualmente diferentes, basados en diversos énfasis en dos ideas fuertes distintas, que llevan a un teorema que las liga precisamente para mostrar que la extensión de las fluxiones con respecto al tiempo a derivadas más generales de cualquier variable dependiente en relación con la independiente es equivalente a la razón entre diferenciales. Como las ideas fuertes no se enfatizan, ese teorema no aparece demostrado en ninguno de los enormes libros de cálculo estándar:

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

A veces aparece como definición del símbolo "$\frac{d}{dx}$" y en ocasiones aparece al revés, como definición del símbolo "ye prima", sin que se vea rastro de la relación conceptual entre ellas ni de la necesidad de comenzar el cálculo con distintos énfasis en las diferencias y en las razones. Volveremos pronto sobre este teorema.

Las razones, como parejas de operadores ampliadores y reductores mutuamente inversos, llevan a la consideración de las transformaciones lineales entre espacios tangentes al dominio y al codominio o recorrido de las funciones reales, y a la consideración de la derivada de una función como una colección de operadores lineales que aproximan localmente la función en cada punto del dominio. Esa es la caracterización de Carathéodory que estudió César Delgado y que es la única que se generaliza a variedades de otras dimensiones y permite la extensión a las teorías de haces.

Para pensar en la derivada como tasa generalizada variable, es bueno, por ejemplo,

[25] Ver la compilación de I. Grattan-Guinness (1980-1984) sobre el tema, *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica.* Madrid: Alianza Universidad.

empezar por modelar la situación de un préstamo con una tasa de interés del 36 % anual, al 9 % trimestral, al 3 % mensual, al 7 por mil semanal y al uno por mil diario. Se toman las convenciones comerciales del año de 12 meses de 30 días. Si es interés simple, la tasa es fija y el monto inicial también, de modo que la acumulación es lineal con coeficiente fijo o constante: la tasa fija. Para estudiarla no hace falta el cálculo. Pero si el interés es compuesto, se va cambiando el monto inicial y, visto de otra manera, es como si subiera la tasa. Ese modelo permite ver cuándo vale la pena usar la aproximación exponencial y cuándo no, pero para entender las funciones exponenciales y sus distintas tasas de cambio absolutas y relativas sí es necesario el cálculo.

Lo mismo pasa con la tasa anual de inflación frente a la tasa mensual y la diaria. Si la tasa de inflación fuera del 2 % mensual, ¿cuál sería la tasa anual? Los que crean que es el 24 % perdieron su tiempo en los cursos de cálculo. Sólo manejan las cantidades constantes y las tasas fijas, y se descuadraron casi en el 3 %. No aprendieron nada de la segunda idea fuerte del cálculo.

Para la modelación y el estudio de las tasas fijas basta la aritmética generalizada, pero para la modelación y el estudio de las tasas variables y las tasas instantáneas se requiere el cálculo como registro semiótico para los sistemas analíticos. Pero no como "boleo de símbolos", sino como registro semiótico privilegiado para el estudio de los sistemas conceptuales analíticos y para la refinación y expresión de las ideas fuertes de ese cálculo.

Se puede aprovechar una comparación entre las cantidades fijas o constantes y las cantidades variables. En los modelos mentales de los procesos y fenómenos reales es claro que si la función de t que mide la cantidad seleccionada es una función constante, puede decirse que esa cantidad variable o esa función "no tiene tasa", o que "tiene tasa cero". Si la función aumenta o disminuye linealmente, la tasa es constante en cualquier forma en que se calcule y en cualquier instante t.

Cada tasa constante va con una función lineal. Pero si la tasa no es constante, como la velocidad en la caída libre, no es fácil ver qué pasa. Los físicos tuvieron que refinar sus herramientas conceptuales y sus notaciones durante 20 siglos, desde Aristóteles hasta Newton, para poder calcular lo que hoy se ve claro con las derivadas y las integrales: si g es constante, la velocidad de caída es una cantidad variable que es una acumulación integral. Esa función tiene gráfica lineal:

$$v = gt + v_o,$$

Si la velocidad inicial era nula, se ve que v cambia linealmente con el tiempo. Ahora, el total de la distancia recorrida es una acumulación integral, que se modela con una función de variación en el tiempo que es no lineal:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_o t + y_o.$$

Pero ¿qué pasa si la aceleración de la gravedad g no es constante? ¿Y qué sucede si la masa del objeto cambia, como en el caso de un cohete? Ahora sí empieza a ser potente el cálculo para resolver esos problemas de mecánica.

Pero las derivadas e integrales necesarias se pueden calcular muy bien y muy rápido con cualquier programa de tratamiento simbólico. El asunto es plantearlo apropiadamente, y eso no puede hacerse sin pensar en las ideas fuertes del cálculo.

1.5.3. Algunas observaciones sobre la notación del cálculo

En el cálculo de o en una variable, escriba

$$y = f(x) + c.$$

Yo veo cuatro variables, no una.

Sea x un número real.

$$y = kx.$$

¿k es una constante, o una constante que es variable? $k' = 0$ y $x' = 1$, o también $x' = 0$. Al menos debería serlo si es un número real. Sea f la función constante cero c_0.

Ya f es una constante, no una variable. Además, f es una función constante de la variable x.

Estudie la fórmula:

$$y = c_0(x).$$

¿Es y una variable?

No, es constante: siempre es cero. Sea f la función constante ck.

La k es ahora una variable para números reales (o complejos). c_k es una variable para las funciones constantes. ¿Por qué decir "la" función constante? Hay infinitas. No se debería decir "la" sino "una". En análisis real, las funciones constantes son una familia indexada por elementos de R. Analice la fórmula:

$$2x + 1 = 5.$$

¿Cuál es la variable? Ninguna, pues x siempre es 2.

Ya lo decía Grattan-Guinness: es una constante desconocida ("incógnita", "*unknown constant*").

Ahora analice la fórmula:

$$x^2 = 0.$$

La x tampoco es variable, pues siempre es cero.

Mire con cuidado la ecuación siguiente:

$$ax + b = 0.$$

Yo veo tres variables, no una. Otras personas podrían ver cuatro constantes, pues el cero es constante, y si a y b son constantes, x también lo es: siempre es igual $a - \frac{b}{a}$.

No aclara nada hablar de variables como letras. Es necesario volver a pensar en variables como cantidades variables en el tiempo. Descartes permite pensar únicamente en cantidades de longitud, pero no es cierto que haya pensado en hablar sólo de números reales, entre otras cosas porque no sabía cuáles eran números reales ni cuáles eran complejos o imaginarios.

Es claro en el análisis, desde Descartes y Roberval en 1630 hasta Euler y al menos en algunos pasajes de Cauchy, que se creía que el límite era de las cantidades variables, no de las letras ni de las funciones. Euler y Lagrange pensaban que las funciones eran expresiones algebraicas. Lagrange dice que "una función de una o más variables es cualquier expresión del cálculo en la que figuren esas variables de cualquier manera"[26]. Ni Euler ni Lagrange distinguían entre expresiones bien formadas o no, ni entre expresiones y fórmulas, ni entre las expresiones que sirven para el cálculo y las que no, ni entre las expresiones que sirven para el cálculo y producen siempre el mismo resultado numérico para los mismos remplazos de números en vez de variables. Para ello hay que esperar a Dirichlet y Weierstrass.

Lo que pasa es que las mediciones sucesivas en el tiempo de cualquier cantidad definen una función de R (tomando a R como conjunto ordenado de ubicadores o cuandicadores de un modelo del flujo continuo y homogéneo del tiempo, representado por un segmento de recta marcado con una flecha a la derecha y una "t" en vez de una "x"). Si el modelo del flujo es discreto, por pasos equidurantes, las mediciones sucesivas forman una sucesión, y se pueden considerar una función de los números de contar, tomándolos como ubicadores o cuandicadores. De aquí fácilmente se desliza la atención a las funciones crecientes y decrecientes, y no se cae en cuenta de que la mayoría de las funciones no lineales usuales no lo son.

[26]Ibíd., cap. 3, p. 133.

La definición de límite de la *Enciclopedia* de D'Alembert en 1765 es sólo una cantidad constante como tope superior de una cantidad variable ascendente (monótona creciente), que no puede pasar más allá de esa cantidad constante. Eso nos muestra un posible obstáculo para la comprensión del límite por parte de nuestros estudiantes, pero también nos puede sugerir una vía para su enseñanza.

Es interesante saber que 60 años más tarde, todavía Cauchy piensa que "tender a cero" o "ser infinitesimal" es propio de las variables positivas que decrecen hacia cero[27].

Se ve que tanto D'Alembert como Cauchy querían utilizar las diferencias y diferenciales como diferencias infinitesimales a la manera de Leibniz, pero no se atrevían a decirlo expresamente, y después de muchas disquisiciones la explican como el límite de diferencias finitas. Pero ya se ve en esos textos de los siglos XVIII y XIX, y comienzos del XIX, que la diferencial de f en cada punto x_0 podía considerarse la función afín cuya gráfica "sigue por la tangente" a la gráfica original de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ si se incrementa x más allá de x_0.

Algo parecido pasa con el incremento de x, llamado "Δx", que no es un infinitesimal. Se trata de un incremento vectorial a partir de x_0, modelado como una flecha con la cola en x_0, y por eso se puede escribir

$$\Delta x = x - x_0.$$

Pero eso nos lleva a fijarnos en la "x" que no es: en realidad, debería escribirse $\Delta x[x0]$, pues si se usa la notación "h", quedaría más bien

$$x + h = x + \Delta x = x + (x - x_0) = 2x - x_0,$$

que es absurdo.

Hay que tener cuidado con cuál "x" es el parámetro y cuál es el argumento variable. Por no atender a las diferencias y las razones nos olvidamos de que las diferencias tienen sentido: no es lo mismo $x_0 - x$ que $x - x_0$, puesto que viven en espacios tangentes diferentes. No gastamos tiempo en asegurarnos de que el estudiante vea que $|x - x_0|$ es el radio de la vecindad básica alrededor de x_0, en este caso un intervalo el doble de largo de ese radio. Si acaso lo hacemos, no caemos en cuenta de que la palabra "radio" está bien para bolas en R^3 y discos en R^2 (que, dicho de paso, no son esferas), pero que "radio" suena raro para intervalos de la recta real R.

[27]Para la diferencial en la *Enciclopedia*, ver Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910*, cap. 2, p. 122. Ibíd., cap. 2, p. 121. Ver la p. 144 para límite e infinitesimal en Cauchy, en su *Curso* de 1821. La continuidad de una función "entre dos límites", o sea en un intervalo, la presenta globalmente, no punto por punto, como puede verse en la p. 145.

En general, se confunden los dos sentidos de la "x": la "x" fija, que nosotros escribimos "x_0", y la "x" móvil, que se mueve hacia atrás y hacia adelante a partir de x_0, lo que lleva a $h = x - x_0$. Sólo se aclarará el absurdo de que "$x + h = 2x - x_0$" cuando se piense en espacios tangentes al dominio y al recorrido, y cuando no se enfaticen los triangulitos que parecen vivir en los espacios tangentes a la gráfica cartesiana. Fijar la atención en ello puede hacerse rigurosamente, pero eso nos llevaría a tener que sumar $f(x_0)$ a $df(x_0, x)$, perdiendo la linealidad.

Es mejor pensar de una vez en las secciones del haz de transformaciones lineales que seleccionan para cada x_0 del dominio dado la mejor aproximación lineal a f entre los espacios tangentes a x_0 y a $f(x_0)$. Ya "x" no puede remplazarse por el mismo número que antes, pues ahora indica un vector de $T(x_0)$, que corresponde al antiguo $x - x_0$, que ahora más bien debe expresarse como $a\ dx|_{x_0}$, para cierto a como coeficiente que amplía o reduce la base $dx|_{x_0}$ de $T(x_0)$, que en este caso es un espacio unidimensional.

Una cosa es que la cantidad constante a y la cantidad constante b estén en la razón r, donde r es un número real adimensional constante; otra cosa es que la cantidad variable x y la cantidad variable y estén en la razón $r(x, y)$, donde r es una función de dos variables (mientras x y y sean "razonables"), y otra tercera es que la cantidad variable x y la cantidad variable y estén siempre en la misma razón, sea que la llame r o no. Esa sí es una relación entre x y y, que permite recobrar el valor de una de ellas si se sabe la otra y se sabe cuál es la razón constante r. Si no se sabe, pero se conocen dos valores de una y uno de la otra (y se sabe a cuál de los dos corresponde), es posible averiguar la razón y el cuarto valor que corresponde a la otra. Ese es el método del precio unitario generalizado a un coeficiente de variación unitaria.

La extensión siguiente en el cálculo es de las razones constantes a las razones variables, y a las razones entre diferenciales. Las diferenciales de y ($y = f(x)$) y la de x estén en la razón $\frac{dy}{dx}$, (llamada y' o $\frac{df}{dx}$), donde esa razón es variable, igual a $f'(x)$, que es una función de una variable, y otra cosa es que esas diferenciales estén *siempre* en la misma razón, sea que se llame r o no. Eso significa que la derivada es constante, de donde se deduce que f es lineal o afín.

Pero ya indicamos que nunca se dice si $\frac{df}{dx} = f'(x)$ es una definición del símbolo "$\frac{d}{dx}$", o si leído al revés define el símbolo "$f'(x)$", o si es un teorema sobre razones de diferenciales basada en una definición de derivada por otra vía. Esa igualdad tiene un problema, y es que la x de la izquierda en dx es distinta de la de la derecha en $f'(x)$, pues falta evaluar $\frac{df}{dx}$ en un cierto x que no tiene nada que ver con dx y luego poner la raya vertical con el punto de evaluación. Debería ser

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = f'(x_0).$$

En las clases de economía se suele empezar con microeconomía antes del cálculo y se utilizan derivadas parciales cuando los estudiantes ni siquiera saben cuáles son las derivadas totales, utilizando razones heterogéneas como coeficientes por peso invertido, o por peso aumentado en el precio, etc. Cerca de un punto de equilibrio se supone que las derivadas parciales son constantes y se evalúa la variación de la cantidad producida o de la cantidad comprada. Otra cosa es la variación de las derivadas parciales: razones constantes y razones variables.

En el libro de Grattan-Guinness citado se ve que para Roberval los puntos trazaban trayectorias y para resolver problemas de tangentes se analizaban las velocidades que componían el movimiento con la regla del paralelogramo, que es la idea que sigue Barrow y, al comienzo, seguía Newton. Para éste, las diferenciales no son sino medios para calcular el objeto que le interesaba, que era la velocidad (fluxión) como tasa de cambio en el tiempo. Por eso tiene sentido el punto encima para notar la fluxión de una cantidad fluyente. En cambio, en Leibniz las diferenciales son objetos infinitesimales, aunque en el caso del triángulo rectángulo formado por la subtangente como base y la ordenada como altura, es posible ver que Leibniz podía considerarlas también cantidades finitas de longitud.

En Leibniz y en D'Alembert se ve otra definición de derivada: la razón de la ordenada como segmento vertical desde x en R (o desde $(x, 0)$) hasta $(x, f(x))$ con respecto a la subtangente como segmento horizontal desde x hasta el x-intercepto de la recta tangente a la gráfica en $(x, f(x))$. Esa podría llamarse "derivada trigonométrica" o "de razón trigonométrica", a diferencia de la derivada geométrico-trigonométrica (o "de función trigonométrica") que da el valor de la función tangente del ángulo que forma la tangente con la horizontal.

Aquí también aparece la ambigüedad entre la subtangente como segmento horizontal y la subtangente como valor numérico de la longitud de ese segmento. Eso es muy distinto de lo que pasa con la ambigüedad de la tangente como recta, como función trigonométrica, como razón entre dos segmentos o como valor numérico correspondiente a otro valor numérico dado en radianes, grados, etc.

Como lo sugiere el profesor César Delgado, es pues aconsejable introducir primero la noción de derivada puntual de Carathéodory, como la mejor aproximación lineal a la función primitiva alrededor de un punto fijo, y mejor todavía, presentar la derivada general como la sección del espacio cotangente que selecciona la colección de operadores lineales que mejor aproximan a la función primitiva en cada punto.

Por supuesto que no es fácil, y es necesario tener cuidado con este enfoque de la derivada:

1. La mejor aproximación a una función lineal es ella misma. Luego lo que da la derivada es la matriz de una aproximación local. Lo que pasa es que en dimensiones 1×1 la matriz se ve como un solo número, y puede tratarse como una nueva función de una sola variable que a su vez puede tener derivada, pero esa es una excepción propia de la unidimensionalidad de los dominios y codominios o recorridos. En cohomología, el operador de cofrontera d en torres de cocadenas siempre cumple $d(df) = 0$.

2. La recta tangente a la recta tampoco suele corresponder a una función lineal, pues si no pasa por el origen, es una función afín pero no lineal. Creer que toda función de gráfica lineal es lineal es un error típico.

3. La mejor aproximación global a una curva por una recta en general no es la tangente, ya que puede haber una recta de mínimos cuadrados que se ajuste mejor globalmente. Suele ser una secante. Debe ser, pues, la mejor “localmente”.

4. Pero “local” no significa “en el punto”, sino “cerca del punto”, en el espacio tangente pegado al punto preimagen, y *también* hacia el espacio tangente pegado a la imagen (de lo contrario, habría que restar $f(x_o)$), pues una aproximación lineal manda siempre el cero al cero.

5. Desde el punto de vista de las razones, tasas o ratas variables, la derivada es entonces una *familia* de funciones

$$Df = \{f'|P : P \quad dom(f)\}\,,$$

que es una familia de un solo parámetro P, que está indexada por P, que es el punto del dominio D de f donde se pega el espacio tangente T_P. Allí $f'|_P$ es la transformación lineal que mejor aproxima localmente a f al transformar vectores del espacio tangente T_P hacia el espacio tangente T_Q que está pegado en el punto $Q = f(P)$ del codominio de f que corresponde al valor de la función f en P.

Así se puede reformular también rigurosamente la diferencial de f, df

$$df : D \times T(D) \to T(Y)$$

como una función de dos variables: una, que es el índice o parámetro, tomada del dominio D de la función, y otra del haz tangente $T(D)$. Entendemos el haz tangente como unión disyunta de los espacios tangentes T_P para los puntos P de D. La función de dos variables df proyecta sus imágenes en el haz tangente del conjunto de llegada $T(Y)$, entendido como unión disyunta de los espacios tangentes T_Q para los puntos $Q = f(P)$ de $f[D]$, la imagen del dominio D por la función inducida en las partes de R.

La función df le hace corresponder a la pareja (P, v_P), con el vector $v_P = vdx_P$, expresado en la base usual de T_P, es decir, a la pareja $(P, v_P) = (P, vdx_P)$, un vector w_Q de T_Q con $Q = f(P)$:

$$w_Q = w_{f(P)} = df((P, v_P) = df(P, vdx_P) = wdy_Q \text{ en } T_Q = T_{f(P)}.$$

Rigurosamente, $df(P, vdx_P) = Df|P(vdx_P) = f'|_P(vdx_P)$.

Para un vector de la base de T_P, dx_P, como la derivada en una dimensión se reduce a un coeficiente multiplicativo, y $Df|_P$ es sólo un número; esta expresión se puede reescribir así:

$$df(P, vdx_P) = Df|_P dx_P = f'|_P dx_P,$$

de donde se deduce formalmente que la razón entre vectores, o sea la transformación lineal que envía el uno al otro es, en una dimensión,

$$\frac{df(P, dx_P)}{dx_P} = Df|_P = f'|_P.$$

Si se utiliza el punto x donde termina el vector dx_P como variable:

$$\frac{df(P, x)}{dx_P} = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]\Bigg|_P = Df|_P = f'|_P.$$

Este es el teorema ya mencionado que liga los diferenciales con las derivadas, que sólo vale en una dimensión, y que no es ni una definición de df, ni de $\frac{df}{dx}$, ni de "efe prima", pues se definió $Df = f'$ por otro lado como una colección de límites de funciones, una para cada P del dominio de f.

El resultado es un vector $w_Q = w_{f(P)} = wdy_Q$ expresado en la base usual de $T_Q = T_{f(P)}$. En el caso usual de una sola dimensión, se suele dar sólo la magnitud o tamaño v de v_P en la base usual de T_P, $\{dx_P\}$, el coeficiente a de la matriz de $f'|_P$ en las bases respectivas y el tamaño w de $w_Q = w_{f(P)}$ en la base usual de $T_Q = T_{f(P)}$, $\{dy_Q\} : w = av$ en R. Así, $df(P, \_)$ actúa como un funcional lineal sobre T_P y la diferencial df es una sección del haz cotangente $T^*(D)$[28].

[28] R. López-Gay, J. Martínez-Torregrosa, A. Gras-Martí, G. Torregrosa. On how to best introduce the concept of differential in physics. Disponible en internet en el URL http://www.fisica.uniud.it/girepseminar2001/CS07/MARTI_02_FINAL.pdf. M. Artigue & L.

1.5.4. Tercera idea fuerte: la suma, la acumulación y la integral

Leibniz introdujo la suma de diferenciales como un operador de acumulación, y tomó la inicial de "summa", la "S", y la alargó como "$\int$" para indicar una suma extendida, sin precisar lo que hoy llamaríamos las condiciones de existencia del límite. La idea fuerte es la acumulación de diferencias, no la del límite.

La integral definida puede considerarse una suma de masas $m_k = f(x_k)\Delta\mu_k$ sobre una descomposición del complejo simplicial C en simplejos pequeños σ_k respecto a la medida μ, con cualquier $x_k \in \sigma_k$:

$$\sum f(x_k)\Delta\mu_k : \; k \text{ recorre los } k \text{ de } C.$$

La medida μ puede ser de longitud, de área, de volumen o de hipervolumen, y $\mu_k = |\sigma_k|$ es la medida respectiva del hipervolumen del simplejo σ_k en el que f se puede considerar una densidad constante. Bastan, pues, las funciones escalonadas, nos olvidamos de las discontinuidades y obtenemos funciones poligonales, que por supuesto también son integrables.

Puede modelarse el espacio métrico de salida con una resolución suficientemente fina como complejo simplicial, y calcular la suma. Esa es la idea de la integral de Riemann (y de la de Daniell), pero porque la medida como contenido parece obvia sobre intervalos o sobre cuadraditos, o sobre cubitos, etc. En general, la genialidad de Lebesgue fue caer en cuenta de que se necesitaba una medida aditiva y sigma-aditiva para poder definir el contenido como medible con respecto a la medida $\Delta\mu$, y hacer explícita la necesidad de multiplicar esa medida $\Delta\mu$, en el límite $d\mu$, por la función f integrable tomada como densidad.

La integral definida de una función real es un producto exterior (o "apareamiento", llamado "evaluación")$[\_, \_]$ de valor real entre cadenas simpliciales μ-medibles de dimensión n, con el operador de frontera ∂, y cocadenas de n-formas, con el operador de diferenciación d, que es aditivo [Z-lineal] a izquierda y R-lineal a derecha, y que es dual con respecto a los operadores de frontera ∂ y de cofrontera d (o que cumple la adyunción):

$$[C, dF] = [C, \partial F].$$

Nótese que el lado izquierdo es una evaluación en el piso $n+1$: se trata de evaluar una $(n+1)$-forma sobre una $(n+1)$-cadena, y el operador d *sube* la función o n-forma

Viennot (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. Misconceptions and Educational Strategies in Science & Mathematics. Ithaca, NY: Cornell University Press. M. Artigue (1989). Le passage de la différentielle totale à la notion d'application linéaire tangente. En *Procedures différentielles...* (Annexe I). Université Paris 7, Irem et LDPES.

F a la $(n+1)$-forma dF. El del lado derecho vive en el piso n, pues el operador ∂ *baja* la $(n+1)$-cadena a la frontera de C, que es una n-cadena.

En una dimensión, esta idea se puede comparar con el modelo mental de la densidad lineal de un alambre vs. la masa marcada en el alambre desde la punta del rollo. La 0-forma es una función de la masa según la longitud del alambre (esto sirve al menos para pensar en funciones crecientes monótonas, pues no habría densidad cero ni densidades negativas). La densidad no tiene que ser uniforme. La F generaliza la densidad uniforme a densidades variables pero continuas; ni siquiera hace falta que sean mínimamente suaves (basta que "suban" por el operador d a funciones continuas o 0-formas). Para evaluar la integral, ni siquiera es necesario que sean continuas, si los puntos de quiebre son aislados. Piense en una poligonal arriba en la gráfica de la integral y en una densidad como función escalonada. Piénsese en esta relación entre poligonales y funciones escalonadas como una generalización de la derivada para funciones continuas pero no suaves, ni siquiera mínimamente suaves (para no entender "suave" como C-infinito, ni siquiera C_1).

Por eso dF es una 1-forma, una colección de transformaciones lineales con el mismo parámetro que los espacios tangentes, y por eso parece una función de x. Pero x apenas es un índice que identifica a dF en la sección o familia, pero los argumentos que toma dF son vectores del espacio tangente $T(x)$. En el caso de funciones y formas de valor real (extendible a los complejos), el grupo $GL(n,m)$ se reduce a $GL(n,1)$ y por tanto dF es una sección del haz cotangente: en cada punto x selecciona un funcional lineal de $T^*(x)$ que actúa sobre vectores de $T(x)$ y produce números reales.

Si C se reduce a un intervalo cerrado $[P,Q]$ de la recta real:

$$\partial[P,Q] = \{Q, \neg P\},$$

y si F es una función sobre puntos (una 0-forma) tal que $f = dF$, la evaluación de F en $\{Q, \neg P\}$ es fácil:

$$[C,f] = [C,dF] = [\partial C, F] = F(Q) - F(P).$$

En la adyunción $[C,dF] = [\partial C, F]$ se encuentra resumido:

- El teorema fundamental del cálculo en los niveles 1 y 0 [para 1-regiones o segmentos o intervalos o 1-complejos de intervalos o 1-simplejos, no para sus longitudes];
- El teorema de Green para 2-regiones en los niveles 2 y 1 [para 2-regiones o 2-intervalos o 2-complejos de 2-intervalos o 2-simplejos, no para sus áreas, que son los 2-volúmenes];

- El teorema de Stokes para 3-regiones en los niveles 3 y 2 [para 3-regiones o 3-intervalos o 3-complejos de 3-intervalos o 3-simplejos, no para sus volúmenes, que son los 3-volúmenes]; y

- El teorema generalizado de Stokes en los niveles n y $n-1$ [para n-regiones o n-intervalos o n-complejos de n-intervalos o n-simplejos, no para sus n-volúmenes].

Pero no voy a introducir esas ideas en el primer año de universidad, aunque sí puedo recomendar que se introduzcan al comienzo del cálculo diferencial las ideas fuertes de que las diferencias orientadas dx son vectores del espacio tangente a un punto p del dominio y las diferenciales orientadas df son vectores del espacio tangente al punto $f(p)$, y la razón $\frac{df}{dx}\big|_p$ es el coeficiente de la transformación lineal que mejor aproxima la covariación modelada por f cerca de p. En el cálculo integral, la idea fuerte es que se trata de evaluar la acumulación de áreas de rectángulos como suma de los diferenciales sobre cadenas de intervalos $[P, Q]$ del dominio como bases, multiplicados por la altura $f(x)$, y por tanto basta saber la antiderivada en los puntos superior e inferior de cada intervalo y evaluar la integral sobre cada eslabón de la cadena $C_P = [P, Q]$:

$$[C_P, f] = [C_P, dF] = [\partial C_P, F] = F(Q) - F(P).$$

1.5.5. ¿Y el límite?

Parece que la mayoría de los profesores de cálculo que conozco piensan que el límite es la idea más importante del cálculo. Se sorprenden de que en mi lista de tres, cuatro o cinco ideas fuertes del cálculo no figuren el límite ni la continuidad. Es que para mí el límite no es la idea fuerte central, sino que es una manera de analizar la covariación al nivel micro, o sea, de pensarla como la transmisión de la variación del dominio al codominio o rango por las funciones como relaciones o condiciones relacionales de restricción de la covariación, o como operadores o máquinas transmisoras de la variación.

Los estudiantes tienen razón en no tratar de pensar en ninguna idea fuerte en el trabajo con límites en el cálculo. Veamos algunos usos de la palabra límite que ellos sí conocen:

- El límite de la finca por el norte es el río Bogotá (lindero).

- No están claros los límites entre Colombia y Venezuela (linderos, fronteras, bordes o *borders*).

- El límite de un círculo es la circunferencia (frontera).

- El límite de velocidad en la autopista Norte es 80 km/h (tope, pero se lo saltan).
- La codicia no tiene límites.

Hay por lo menos dos casos de límite utilizados en primaria. Ya los niños de cuarto y quinto grado trabajaron los límites de muchas series infinitas con los decimales periódicos. 1/3 = 0,333...

También trabajaron el área del círculo como límite de la suma de las áreas de los triangulitos, con base muy cerca de la circunferencia y altura muy cercana al radio. Supongamos que sabemos qué es π como razón ampliadora del diámetro a la circunferencia, un poco más de tres veces, como 3+(1/7); como el radio es la mitad del diámetro, la razón ampliadora del radio a la circunferencia es 2π, un poco más de seis veces, como 6+1/4. El área del disco es la suma de las áreas de los triangulitos isósceles $A(T) = \frac{bh}{2}$, donde h se acerca al radio r y la base se acerca a un arquito de la circunferencia C:

$$A(D) = \sum A(T) = \sum \frac{bh}{2} = \frac{r}{2}\sum b = \frac{r}{2}C = \frac{r}{2}(2\pi r) = \pi r^2.$$

Con la notación de Leibniz, esto es simplemente:

$$A(D) = \int dA(T) = \int \frac{bh}{2} = \frac{r}{2}\int dC = \frac{r}{2}C = \frac{r}{2}(2\pi)r = \pi r^2.$$

Si usted quiere ponerle subíndices, hágalo: escriba T_1, T_2, T_3, ... T_n. Pero fíjese que así como subir el dos en r^2 es una manera de decir "eleve r al cuadrado", de pronto alguien cree que T_2 es otra manera de decir "sáquele a T la raíz cuadrada".

Recuerde que por el primer subíndice que escriba, pierde la comunicación con la mitad de los estudiantes de su salón; con el segundo subíndice, pierde la comunicación con la mitad de los restantes, y así sucesivamente. Sin necesidad de tomar el límite, muy pronto no le va a quedar ni medio estudiante que comprenda las ideas fuertes del cálculo. El trabajo conceptual con ese tipo de límite intuitivo es suficiente para el cálculo escolar, pues los refinamientos usuales no sólo son inútiles, sino contraproducentes. Veámoslo por casos:

Las funciones constantes aniquilan la variación que ocurre alrededor de un punto cualquiera del dominio y, por tanto, en este caso el límite no sirve para nada. Por supuesto, se puede probar formalmente que el límite existe y es la constante k de c_k. Para encontrar la derivada tampoco hace falta el límite, pues la derivada como mejor aproximación lineal a la variación local constante -o falta de ella- siempre es la función lineal cero. Aquí no hay problema de máximos y mínimos, ni de tangentes, ni de subtangentes, ni de normales. Tampoco hay problema en integrar el área bajo la curva (que en este caso es recta); es obvio, sin necesidad de límites, que el área del rectángulo a partir del cero es base por altura, que la base es x y que la altura es c_k. Esa integral como acumulación lineal del área es pues $A(c_k) = c_k x$, y si se mira el área de la última banda vertical de altura c_k al moverse en el eje de las abscisas de x hacia adelante o hacia atrás, el diferencial de área en el punto x es claramente $c_k dx$, donde dx es un vector del espacio tangente en $x, T(x)$. Con *software* interactivo, esta variación es inmediata.

Las funciones lineales transmiten fielmente la variación que ocurre alrededor de un punto del dominio de la misma manera en todas partes, a lo más con un coeficiente fijo de ampliación o reducción, que suele confundirse precisamente con la derivada. Por eso la derivada de una función lineal parece constante. Por lo tanto, en este caso de los modelos que sólo requieren una función lineal, el límite tampoco sirve para nada. Por supuesto que se puede probar formalmente que el límite existe en cada punto y que es el mismo valor de la función lineal en ese punto: el límite $L = l_P$ en p de la función lineal L_a que cumple $L_a(x) = ax$ es

$$L = l_P = limL_a|_P = ap.$$

Pero ahí no figuran la x, ni la flecha, ni el ocho dormido. Sería mejor escribir $limL_a = L_a$, donde $L_a(x) = ax$.

En este caso de las funciones lineales, para encontrar la derivada tampoco hace falta el límite, pues la derivada de una función lineal como mejor aproximación lineal a la variación local siempre es la misma función lineal, y por eso parece que la derivada fuera siempre el mismo coeficiente a. Parece, pues, que fuera una función constante, pero el que es constante es el coeficiente, no la función lineal.

En el caso de la función idéntica, $f(x) = x$, la gráfica es la diagonal principal del plano cartesiano, y es claro que la derivada es 1 y que el área bajo la curva a partir del cero en cualquier punto x es la mitad del área del cuadrado de lado x. No hacen falta particiones, ni sumas de Riemann, ni límites. La extensión a las demás funciones lineales es obvia.

Aquí es bueno aprovechar los resultados de integración que ya se saben, para redescribirlos como resultados de acumulación de áreas de barritas o rectangulitos de altura $f(x)$ y que tienen como base un vectorcito del espacio tangente $T(x)$: en el caso del rectángulo para las funciones constantes no hacen falta límites; en el caso del cuadrado se ve el triángulo rectángulo isósceles claro y se sabe cuánto tiene que dar el área como suma acumulada.

Las demás funciones, que ni son constantes ni son lineales, transmiten bastante enrevesadamente la variación que ocurre alrededor de un punto del dominio. Como sabemos algo sobre funciones constantes y funciones lineales, pero muy poco sobre las no lineales, por eso el objeto del cálculo diferencial e integral es linealizar localmente los modelos no lineales. Para sistematizar y formalizar rigurosamente ese trabajo de linealización sí hace falta el límite, pero no para enseñar las ideas fuertes del cálculo.

Por ejemplo, cerca de los máximos, mínimos y puntos de inflexión, parece que todas las funciones no lineales usuales fueran funciones localmente constantes. Si la gráfica es “mínimamente suave”, tiene tangente en cada punto y no hay problema en entender la derivada. Cuando se puede encontrar una tangente horizontal, hay un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. No hacen falta límites ni derivadas ni diferenciales. Si la gráfica de esa función no lineal es continua, no hay problema en entender la integral sin necesidad de límites, al menos más allá de los límites de primaria: entender $1/3 = 0{,}333...$ y entender cómo se calcula el área del círculo por triangulitos, o la del triángulo por barritas.

Arquímedes hizo ese trabajo mucho antes de Cristo, y Galileo y Cavalieri hicieron eso en 1650, mucho antes de Newton y Leibniz. Eso basta para la modelación de muchos procesos fenómenos. Si usted cree que se necesita más rigor, use los infinitesimales de Abraham Robinson, como lo hizo Sergio Fajardo cuando enseñó cálculo con el texto de Keisler.

Otra alternativa es usar los límites al estilo de Weierstrass, pero después de asegurarse de que los estudiantes están pensando en vecindades básicas y en sus radios; en que se imaginen que pueden aproximarse todo lo que quieran (épsilon mayor que cero: $\epsilon > 0$) al valor del codominio y en subir todo lo necesario ($n > M$) en el dominio o bajar todo lo necesario en el dominio (radio menor que delta, $r < \delta$) para que la covariación se transmita sin problemas.

Podríamos decir que la transmisión de la variación lleva fácilmente a dos tipos de límites sobre espacios ordenados: el límite hacia adelante o hacia arriba, cuando la variación tiende a infinito, o aumenta sin límite, y el límite hacia atrás o hacia abajo, cuando la variación tiende a cero. Eso sirve para las sucesiones, las asíntotas y otros casos interesantes, y luego se puede pasar a los topes inferior y superior de munditos pequeños o vecindades básicas. Por ejemplo, el mundo del intervalo $(1, \infty)$ ordenado hacia adelante se pasa por la transformación recíproco al mundito $(0, 1)$ ordenado al revés. Allí se puede trabajar el límite cero con Cauchy, con infinitesimales o sin éstos. Pero todavía no se está trabajando con la covariación de dos cantidades arbitrarias modelables por las longitudes. Sólo por la covariación de una sola cantidad variable en el tiempo, que sería una covariación entre duraciones y cantidades, que también se pueden medir como las longitudes, pero entendiendo el flujo del tiempo hacia la derecha en el eje de las abscisas.

Descartes estudió el problema de las normales a las curvas como ajustes de arcos de circunferencia a las curvas, y pudo haber obtenido el radio de la mejor circunferencia osculante como medida de la curvatura local y como recíproco de la segunda derivada. Pero no le interesaba sino la normal a la curva en un punto, y la tangente se definía como la normal a la normal en ese punto, lo cual le permitía definir tangente a la curva sin necesitar ninguna noción de límite (se ocultaba en los movimientos de los arcos de circunferencia). Le pasaba la noción intuitiva de límite a la determinación de la normal por variación y ajuste de arcos de circunferencia.

El problema de las tangentes era más bien el de las subtangentes, que eran longitudes de segmentos en el eje de las abscisas, no rectas osculantes, y que ahora ni se mencionan. Lástima que no se mencionen, puesto que es muy ilustrativo ver la semejanza del triángulo rectángulo grande de base, la subtangente y altura la ordenada, con el triángulo de variación preferido por Leibniz en el punto $(x, f(x))$. Como esa semejanza se mantiene para cualquier ampliación o reducción del triangulito de variación, se ve por qué los diferenciales no tienen que ser "infinitesimales" y por qué la derivada parece ser simplemente la razón de la altura $f(x)$ a la subtangente, o sea la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente, en este caso puede identificarse con la hipotenusa del triángulo grande, con el eje de las abscisas.

El problema de las tangentes como rectas se resolvía si se sabía solucionar el de las normales a las curvas, con la definición de tangente como la recta normal a la normal a la curva. Ahí no aparece el límite en la definición de la tangente, como sí aparece si se define tangente como límite de las secantes. Por eso en las tangentes a un círculo no aparece el límite.

Podemos suponer que el círculo es una curva rectificable como polígono de suficientes lados, como para no distinguir ningún ladito recto a simple vista. Así, el radio es perpendicular al punto central del lado pequeño y la tangente es su prolongación. Podemos suponer las curvas útiles para la modelación de procesos y fenómenos como rectificables, asumir que localmente la rectificación es un ladito recto, y así podemos describir las normales como perpendiculares al punto medio de la rectificación y las tangentes como prolongaciones de la rectificación. Ahí hay una noción intuitiva de límite que es suficiente. Eso hicieron Roberval, Fermat, Pascal, Wallis y Barrow antes de Newton y Leibniz, y después L'Hôpital, Euler y hasta Cauchy. Sólo Dirichlet y Weierstrass avanzaron más en la formalización y la vigorización lógica de los argumentos. Pero ¿para qué exigir rigor en la argumentación si no se entiende qué es lo que se está argumentando?

La definición actual de límite es estática. No se permite a los estudiantes que hablen de "tender a", de leer el ocho dormido ∞ como "infinito", etc. Pero si se supone un modelo ordenado linealmente, se puede hablar del límite hacia adelante o del límite hacia atrás, y distinguir con claridad los casos en que el límite está dentro del sistema sobre el que se toma el límite o no.

El límite de los números de contar como ubicadores ordenados (primero, segundo, etc.) hacia atrás es el 1, que es el primero y está adentro. Hacia adelante es el ocho dormido, ∞, que está afuera, en la compleción de un solo punto del sistema anterior.

El límite de los números naturales tomados como cardinales finitos hacia atrás es el cero, que es el cardinal de los conjuntos vacíos, y está adentro. Hacia adelante los cardinales finitos también tienen límite: alef cero, $\aleph_0$, el primer cardinal límite infinito, que está fuera de los cardinales finitos, pero dentro de los cardinales. Si se toman los números naturales como ordinales finitos, el cero es un ordinal, porque todos sus subsistemas no vacíos tienen primer elemento (no hay ninguno, luego...). Por tanto, el límite hacia atrás es el ordinal 0, y hacia adelante es el ordinal omega, ω, el primer ordinal límite infinito, que está fuera de los ordinales finitos, pero dentro de los ordinales.

En los reales, con el modelo de la compleción de dos puntos, el límite hacia atrás es el ocho dormido negativo, $-\infty$, y hacia adelante es el ocho dormido positivo, $+\infty$. Ambos están fuera del sistema de los reales. Si consideramos los reales como insertados en el eje de los reales en el plano complejo C, podemos ver que con el modelo de la esfera de Riemann $C \cup \infty$ (que es holomorfa al plano complejo por proyección estereográfica), el límite hacia adelante y hacia atrás (y hacia adelante en cualquier semirrecta $r \cdot exp(i\theta)$) es el ocho infinito ∞ como Polo Sur de la esfera de Riemann.

La función recíproca en la esfera de Riemann es una rotación rígida de media vuelta sobre los puntos $+1$ y -1, con lo que se ve inmediatamente que es homotópica con la identidad. Sin esa visión dinámica es difícil hacer un análisis complejo. Sin el ocho dormido interpretado como Polo Sur, es difícil hacer el trabajo de polos, residuos y divisores. No habría análisis complejo sin ese trabajo de Riemann con el modelo de la esfera con el Polo Sur sellado.

La dualidad de la definición generalizada de integral indefinida como una forma que produzca otra forma exacta y por tanto cerrada cambia el sentido de la dirección vertical en que uno suele modelar la derivación, que se suele pensar "hacia abajo" y la integración como "hacia arriba".

El límite es importante en la sistematización y en la fundamentación rigurosa del análisis, pero en el cálculo no. Descartes, Roberval, Fermat, Wallis, Newton, Leibniz, D'Alembert, Euler, Lagrange, Fourier y con frecuencia el mismo Cauchy no tenían claro qué era el límite y lo utilizaban a su manera en forma oportuna en cada caso. D'Alembert explícitamente habla de cantidades ascendentes y de no poder pasarse más allá del límite. Ya vimos que el mismo Cauchy no sabía bien qué era tener límite cero y creía que era sólo algo dinámico para funciones positivas descendentes. Su definición de límite cero no se aplicaría a la función constante cero, ni su definición general a las funciones constantes. Además, para mayor confusión, en su definición de continuidad usa la palabra "límite", pero para las fronteras de un intervalo del eje de las abscisas.

El límite empieza a sistematizarse con la convergencia de las sucesiones y las series, no con las funciones reales. Las sucesiones y las series empezaron a considerarse en el siglo XX no como funciones sobre los números naturales, sino como una extensión obvia de las parejas, las triplas, las cuaternas ordenadas. Son apenas ejemplos de sistemas bien ordenados. Se consideraban también variables que cambiaban no continuamente sino por saltos en el tiempo, y para acelerarlo se podía ir disminuyendo la duración de cada lapso, como en el caso de la paradoja de Zenón.

Ésta dice si uno recorre la mitad del camino en una unidad de tiempo, la cuarta parte siguiente en otra unidad de tiempo, etc., uno nunca llega al otro extremo del camino. Pero si uno recorre la mitad del camino en una unidad de tiempo, la cuarta parte siguiente en media unidad de tiempo, etc., en dos unidades de tiempo llega al otro extremo del camino. Para lograr ese concepto no se necesitan épsilons ni deltas, sino manejar el modelo mental de las cantidades variables de longitud y duración, formularlo con cuidado en los casos de ascender desde el primer paso hacia el infinito y descender hacia el cero.

Pasemos ahora al límite más general, ya no aplicado a una cantidad variable sino a la covariación de dos cantidades variables: la independiente, con valores indicados por x, y la dependiente, con valores indicados por y, regulada por una función f, cuyos valores $f(x)$ son precisamente los valores $y : y = f(x)$.

Es mejor pensar primero en mover la x cuando es menor que un cierto punto fijo p hacia la derecha (o hacia arriba) para acercarse al punto fijo p desde la izquierda (o por debajo y hacia arriba). Se puede comenzar con funciones monótonas crecientes o decrecientes y luego se estudian otras más complicadas, pero que tienen oscilaciones con porciones crecientes y decrecientes.

Así se va viendo cómo transmite la función f la variación del movimiento de x cerca del punto p al movimiento de $f(x)$, sin necesidad de pensar en p ni en $f(p)$. El movimiento de x hacia p puede subir el valor de $f(x)$, bajarlo, dejarlo quieto u oscilar, y uno se fija si $f(x)$ tiende a algo: ¿se acerca todo lo que uno quiera a un valor L?

"El límite de f cuando x tiende a p desde la izquierda es L".

Luego se piensa en mover la x cuando es mayor que p hacia la izquierda (o hacia abajo) para acercarse a p desde la derecha (o por encima y hacia abajo), y uno se fija si $f(x)$ tiende a algo: ¿se acerca todo lo que uno quiera a un valor M?

"El límite de f cuando x tiende a p desde la derecha es M".

Luego se mueve la x en ambos lados de la p y se ve si $f(x)$ tiende a lo mismo por los dos lados. Si ese es el caso, $L = M$ y podemos escribir

"El límite de f cuando x tiende a p es L".

Veamos algunas preguntas capciosas para mostrar que el límite, como se enseña en cálculo, no es una idea fuerte de los sistemas conceptuales analíticos:

- No es claro cuántas variables tiene la expresión "El límite de $f(x)$ cuando x tiende a p es L".
- ¿Puede escribirse "El límite de $f(x)$ cuando y tiende a z es L?".
- ¿Para qué es cada una de esas variables y por qué puede remplazarse en dónde?
- ¿Tiene que aparecer dos veces la x?
- Si aparece dos veces, ¿figura o no figura la x en la expresión? (si x es una variable ligada "no figura en una expresión"). Si no figura, ¿para qué escribir "$f(x)$"? Basta escribir "f".
- A veces se ve un ocho dormido en vez de la p o en vez de la L. ¿Puede estar en vez de la f o de la x?
- Sea x un número real. ¿Qué significa *lim* de x cuando $x \to p$ es p?

Nada. Si x es un número real, no es una función y no podría aparecer en el lugar de las funciones. En la expresión "*lim* de x cuando $x \to p$ es p" parece que falta una variable para la función o para el valor que se mueve (lo que pasa es que aquí la x es una notación muy engañosa: es una variable para la función idéntica y para el argumento de la función idéntica).

La L depende de f y de p. ¿Depende de x? Si no depende de x, debería escribirse "$L(f, p)$", "$L_{f(p)}$".

Esa es la clave: el límite de una función f, si existe, es otra función L_f:

$$lim f = L_f. \qquad (lim f)|_p = L_{f(p)}.$$

1.5.6. ¿Y la continuidad?

La continuidad tampoco es una idea fuerte del cálculo, pues para el cálculo diferencial todas las funciones tienen que ser diferenciables, y toda función diferenciable es continua. Lo que interesa no es la continuidad sino una mínima "suavidad" (pero sin entender "suave" como C infinito, ni siquiera como C_1). Se trata de que las curvas correspondientes a funciones no lineales sean continuas y rectificables para tener normales y tangentes.

Además, todas las funciones que aparecen para modelar procesos reales son continuas y diferenciables: las constantes, las lineales, las polinómicas, las multilineales, las trigonométricas, las exponenciales, las logarítmicas y las logísticas. ¿Cuáles más sabe usted que sean útiles para la modelación? Yo pensaría en las funciones escalonadas y en las poligonales, pero esas son constantes por piezas o afines por piezas, y en cada una de tales piezas la derivada es obvia y la integral se puede calcular fácilmente. Si se piensa en la idea fuerte de integral como acumulación o suma, se ve que las sumas de Riemann no son sino integrales de funciones escalonadas, que el punto intermedio puede escogerse en cualquier parte del intervalo y que la integral es una función poligonal continua y PL o lineal por piezas.

Por otra parte, en la definición de continuidad en topología no se utiliza el límite. Basta mirar la función inversa inducida en las partes, y ver si esa función transporta abiertos en abiertos. Equivalentemente, se puede usar el test de la banda horizontal, parecido al test de la banda vertical para la funcionalidad. Si la proyección de toda intersección de la gráfica cartesiana con una banda horizontal es un abierto en el eje x, la función es continua. Otro problema es que sólo sea continua en su dominio, como $f(x) = \frac{1}{x}$. Si le molesta una discontinuidad, repárela, y si no la puede reparar, quítela del dominio. Luego la continuidad no es ninguna idea fuerte del cálculo.

Más aún, con el trabajo virtual en pantalla, la continuidad se reduce a la contigüidad de los pixeles. Si se considera vecindad básica de un pixel un cuadrito de nueve pixeles, la vecindad básica de cada punto no puede tener sino tres posiciones para el punto anterior y tres para el siguiente, y todo el trabajo de la representación semiótica cartesiana en pantalla se reduce a trabajar con parejas de enteros. Ni siquiera harían falta los números racionales, mucho menos los reales.

1.5.7. Conclusiones

La primera conclusión la formulé al explicar la primera idea fuerte del cálculo, la de la variación y covariación de las cantidades. Propongo, pues, que la enseñanza del cálculo por ideas fuertes nos exige volver a las magnitudes y a las cantidades variables y a sus modos de covariación, para modelarlas mentalmente, comunicar esos modelos y sus teorías verbal, gestual y gráficamente, y tratar las cantidades variables y sus covariaciones por medio de las funciones de los sistemas conceptuales analíticos. Cuando se llegue a cierta agilidad mental de modelación de la covariación, se podrán tratar las funciones con el cálculo diferencial e integral como registro semiótico potente.

Como *segunda conclusión* podemos decir que al comenzar la enseñanza del cálculo por ideas fuertes debemos atender cuidadosamente a las diferencias y, sobre todo, a las razones de diferencias y a las razones de diferenciales. Las diferencias orientadas nos permiten introducir de una vez los espacios tangentes a cada punto y el haz tangente a la recta real, tanto sobre el dominio como sobre el codominio. Allí encontraremos, sin necesidad del límite, los diferenciales de la variable independiente y de la dependiente como vectores del espacio tangente respectivo, y las razones como operadores activos nos permitirán introducir la derivada como la colección de las mejores aproximaciones lineales en cada punto del dominio. Esas aproximaciones lineales son transformaciones de un espacio vectorial anclado en un punto x del dominio a otro espacio vectorial anclado en el punto $f(x)$ del codominio o recorrido. El profesor puede pensar productivamente que se trata de una sección del haz cotangente correspondiente al haz tangente, que es precisamente la 1-forma que selecciona la transformación lineal que mejor aproxima localmente la función primitiva, pero la terminología todavía no es apropiada para los estudiantes de primer año de universidad.

Otra conclusión de este enfoque es que las derivadas de las funciones constantes no sirven para nada, y que las derivadas de las funciones lineales son ellas mismas. Por consiguiente, el cálculo por ideas fuertes empieza sólo cuando queremos linealizar las funciones no lineales que codifican covariaciones de cantidades variables o sus medidas numéricas para utilizar sus aproximaciones lineales como herramientas de cálculo.

La idea fuerte de las razones entre diferencias nos lleva a *otra conclusión*: a considerar que la derivada es una familia de funciones, una para cada punto del dominio, y que la manera como la consideramos -como otra función derivada de la función primitiva- se debe a una afortunada casualidad: en una dimensión, las funciones lineales tienen matrices que se pueden confundir con un único coeficiente de ampliación o reducción, y si nos olvidamos de la transformación lineal y pensamos sólo en el coeficiente, la derivada nos parece una función de una sola variable. Por tanto, si no es lineal, se le puede volver a aplicar el tratamiento de linealización y obtener la segunda derivada.

Recordemos también la conclusión que vimos al final del tratamiento del límite:

> Como la L del límite no depende de x, sino de f y de p, debería escribirse "$L(f,p)$", "$L_{f(p)}$".

Esa es la clave: el límite de una función f, si existe, es otra función L_f:

$$lim f = L_f. \qquad\qquad (lim f)|_p = L_{f(p)}.$$

La *conclusión* es, pues, que el límite es un operador de orden superior sobre el sistema conceptual analítico de las funciones, en el que no figuran ni la x, ni la flechita, ni el ocho dormido. Las funciones continuas son simplemente el subconjunto estable bajo el operador lim, pues f es continua si y sólo si $lim f = f$. El límite y la continuidad no son, entonces, ideas fuertes del cálculo, sino consideraciones finas y potentes para analizar los modos de covariación de las cantidades variables covariantes, de gran importancia en la sistematización y formalización rigurosa del análisis, pero no en la modelación de procesos y fenómenos de la realidad por medio del cálculo.

Esa misma *conclusión* podría reaparecer al final de las tres, cuatro o cinco ideas fuertes del cálculo, teniendo cuidado de que para las derivadas y antiderivadas es necesaria una reducción para lograr que las imágenes de los operadores no se vayan muy lejos sino que vuelvan a casa:

La derivada de una función f, si existe, es otra función f' (con el operador $(\_)'$ por la derecha) o Df (con el operador $D(\_)$ por la izquierda), pero es una función de dos variables: un parámetro p para un punto del dominio de f y un argumento x en una bola, esfera o intervalo alrededor de p. El operador de derivación produce, pues, una familia de funciones lineales. Esta familia puede considerarse la imagen de un operador de orden superior der o D sobre el sistema conceptual analítico de las funciones reales:

$$der \ \ f = f' = Df. \qquad\qquad (der \ \ f)|_p(x) = f'(p)(x) = Df(p)(x).$$

En esta conceptualización, el conjunto estable del operador der o D son las funciones lineales, pues f es lineal si y sólo si $der \ \ f = Df = f$.

Pero si se olvida que $f'(p) = Df(p)$ es una transformación lineal con una matriz en la base usual, que en una dimensión se puede pensar sólo como un número, se puede decir que la derivada de una función f, si existe, es otra función de una variable p para un punto del dominio de f. Por tanto, se le puede volver a aplicar el operador de derivación, pero ahora sobre otra interpretación de la variable p, que antes era el parámetro, no el argumento: $der \ \ f = f' = Df$. Sólo para una dimensión:

$$der \ \ der \ \ f = f'' = DDf = D^2 f. \qquad (der \ \ f)|_p = f'(p) = DDf(p) = D^2 f(p).$$

En esta conceptualización, no generalizable a dimensiones superiores, el conjunto estable del operador *der* o D es muy distinto: contiene sólo la familia de las traslaciones de la función exponencial usual por funciones constantes: Si $der \quad f = f$, existe una constante $k \in R$ tal que $f = exp_e + c_k$, que se acostumbra escribir si $der \quad f(x) = f(x)$, existe una constante $k \in R$ tal que $f(x) = exp_e(x) + c_k(x) = e^x + k$.

Paralelamente, la diferencial de f, si existe, es otra función df, pero es una función de dos variables: un parámetro p para un punto del dominio de f y un argumento dx_p para un vector de $T(p)$:

$$dif \quad f = df. \qquad\qquad (dif \quad f)|_p(dx_p) = df(p)(dx_p).$$

La integral indefinida o antiderivada de f, si existe, puede considerarse otra función, pero es una función de dos variables: un argumento x, $x \in \text{dom } f$, para una primitiva F fija tal que $F' = f$, que puede ser cualquiera de ellas o escogerse para que $F(x) = 0$, y una constante k, $k \in R$:

$$\text{int } f = D^{-1}f = I_f. \qquad\qquad (\text{int } f)(x, k) = F(x) + k.$$

Otra forma de entender la integral indefinida o antiderivada de f, si existe, es pues como una familia de funciones de un solo argumento x, pero indexada por una constante k:

$$intf = \{G | \exists F, F' = f \wedge \exists k \in R, \forall x \text{ dom } f, G(x) = F(x) + k\}.$$

Tenemos entonces otro operador de orden superior sobre el sistema analítico de las funciones reales que produce familias de funciones reales.

La integral definida de f, intdef f, si existe, puede considerarse también otro tipo de función sobre un intervalo $[a, x]$, o una función de dos variables: un argumento a, que indica el punto a la izquierda del intervalo de integración, y otro argumento x, que indica el punto a la derecha del intervalo de integración, que van a ser los argumentos para evaluar el resultado con cualquier primitiva F tal que $F' = f$:

$$[\text{intdef } f]([a, x]) = F(x) - F(a).$$

Otra manera de entender la integral definida de f sobre un intervalo $[a, x]$, si existe, es como un operador de evaluación que evalúa el valor de f sobre ese intervalo $[a, x]$, apareamiento que cumple la dualidad o adyunción ya mencionada, y que es calculable por cualquier primitiva F tal que $f = dF$:

$$\text{intdef } ([a, x], f) = [[a, x], f] = [[a, x], dF] = [\partial[a, x], F] = F(x) - F(a).$$

Nótese finalmente que la derivada y el diferencial son familias de funciones, y la integral como antiderivada también lo es. El diferencial generaliza la noción de diferencia orientada variable. La derivada generaliza la noción de tasa o rata variable, y la integral definida generaliza la noción de acumulación.

Todo ello sólo tiene sentido en el estudio de la modelación de la covariación de cantidades variables por medio del sistema conceptual analítico formado por las funciones reales. Esas son las ideas fuertes del cálculo.

CAPÍTULO 2

Talleres y cursillos

2.1. Graficación covariacional

Dr. Crisólogo Dolores Flores[1]

Resumen
Tanto en los textos como en la práctica escolar de la enseñanza de la matemática se conocen varios métodos de graficación de funciones. Sin embargo, en estos métodos se omiten los procesos de variación y covariación subyacentes en ellas. En este artículo se plantea un método novedoso de graficación que posibilita la construcción de la gráfica misma sobre la base de tres elementos esenciales: se representan los cambios de las variables, la covariación como la relación causal entre los cambios y el comportamiento de la variación en razón de magnitud y dirección, y las razones entre los cambios. En este contexto, el objetivo del curso taller consiste en lograr que los asistentes interioricen este método y puedan así incorporarlo a su práctica docente.

[1]Cicata-IPN, Cimate-UAG. cdolores@prodigy.net.mx, cdolores1@hotmail.com
Maestro en la especialidad de físico-química, Escuela Normal Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. Licenciado en matemática educativa, Universidad Autónoma de Guerrero. México. Maestría en ciencias, Área de Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Área Metodología de la Enseñanza de la Matemática, Instituto Superior Pedagógico Enrique J. Varona, Cuba. Investigador nacional nivel I desde 1999. Miembro de la Academia Mexicana de Ciencias. Coordinador del Cimate de la UAG desde 1998.

2.1.1. Marco conceptual

A continuación describiremos el marco conceptual de la covariación, realizaremos una caracterización de la graficación covariacional -en la que expondremos su significado- y concluiremos con un ejemplo de dicha graficación. Esta forma de graficación, objeto principal de nuestra atención en este texto, está apoyada sobre dos elementos básicos: las ideas derivadas del pensamiento y lenguaje variacional, y las derivadas del razonamiento covariacional. Carlson et ál. (2002) desarrollan la noción de razonamiento covariacional y lo definen como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo las formas en que cambian una con respecto a la otra. En la tabla 1 se proporciona una descripción de las cinco acciones mentales del razonamiento covariacional y de los comportamientos asociados. Las acciones mentales del marco conceptual de la covariación proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación; con todo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, relativa a una tarea particular, sólo se puede determinar examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibido en la ejecución de esa tarea.

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamientos**
Acción mental 1	Coordinando el valor de una variable con los cambios en la otra.	Etiquetando los ejes, coordinando las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
Acción mental 2	Coordinando la dirección de los cambios de una variable con los cambios en la otra variable.	Construyendo rectas crecientes. Verbalización consciente de la dirección de cambio de la salida, a la vez que se consideran los cambios de entrada.
Acción mental 3	Coordinando la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Trazando puntos/ Construyendo líneas secantes. Verbalización consciente de la cantidad de cambio en la salida, considerando los cambios en la entrada.

Acción mental 4	Coordinando la razón de cambio promedio de la función con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada.	Construyendo líneas secantes contiguas para el dominio. Verbalización consciente de la razón de cambio de salida (con respecto a la entrada) considerando incrementos uniformes en la entrada.
Acción mental 5	Coordinando la razón de cambio instantáneo de la función con cambios continuos en la variable independiente para el dominio entero de la función.	Construyendo una curva continua con indicaciones claras de cambios de concavidad. Verbalización consciente de los cambios instantáneos en la razón de cambio para el dominio entero de la función (la dirección de concavidad y los puntos de inflexión son correctos).

2.1.2. Niveles de razonamiento covariacional

En el marco teórico covariacional se describen cinco niveles de desarrollo de las imágenes de covariación. Estas imágenes se presentan en relación con las acciones mentales soportadas por cada imagen.

Nivel 1 (L1). *Coordinación.* En este nivel, las imágenes de la covariación pueden soportar la acción mental de coordinación del cambio de una variable con los cambios en la otra variable (MA1).

Nivel 2 (L2). *Dirección.* En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden soportar las acciones mentales de coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable. Las acciones mentales identificadas como MA1 y MA2 están soportadas por las imágenes de L2.

Nivel 3 (L3). *Coordinación cuantitativa.* En el presente nivel las imágenes de la covariación pueden soportar las acciones mentales de coordinación de la cantidad de cambio en una variable con los cambios en la otra variable. Las acciones mentales identificadas como MA1, MA2 y MA3 están soportadas por las imágenes de L3.

Nivel 4 (L4). *Razón promedio.* En el nivel de la razón promedio, las imágenes de la covariación pueden soportar las acciones mentales de coordinación de la razón de cambio promedio de la función, con cambios uniformes en la variable de entrada. La razón de cambio promedio puede utilizarse para coordinar la cantidad de cambio de la variable de salida con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como MA1 hasta MA4 son soportadas por las imágenes de L4.

Nivel 5 (L5). *Razón instantánea.* Nivel en el cual las imágenes de la covariación pueden soportar las acciones mentales de coordinación de razón instantánea de cambio de la función, con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una conciencia de que la razón instantánea de cambio resultó de refinamientos más y más pequeños de la razón de cambio promedio, así como también la conciencia de que el punto de inflexión esta donde la razón de cambio pasa de creciente a decreciente y viceversa. Las acciones mentales identificadas como MA1 hasta MA5 están soportadas por las imágenes de L5.

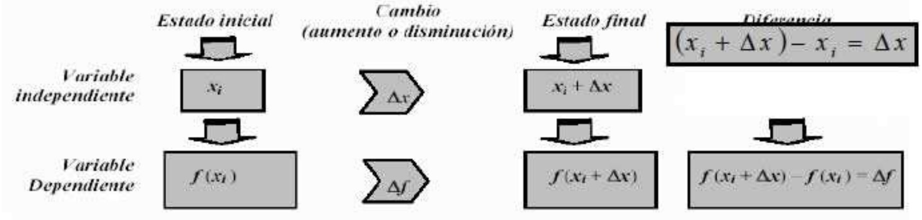
2.1.3. El pensamiento y lenguaje variacional

Cantoral (2000) caracteriza el pensamiento y lenguaje variacional como el campo en el que se estudian los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Le presta particular atención sl estudio de los procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados, utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. En cuanto vertiente investigativa posee una triple orientación: en primera instancia, se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades de la matemática del cambio; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social, mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio

Uno de los trabajos en los que se discuten aspectos esenciales del pensamiento y lenguaje variacional es el libro *Una introducción a la derivada a través de la variación*, de Dolores (1999), en el cual se señala que las variables son un elemento básico de la matemática que se utilizan para estudiar los procesos de variación, procesos en los que se involucran al menos dos variables que necesariamente se relacionan entre sí. Si esas relaciones se expresan mediante fórmulas matemáticas, entonces el estudio de los procesos de variación se facilita bastante; por medio de las fórmulas las variables se pueden manipular convenientemente, pues con ellas se pueden realizar operaciones matemáticas comunes; las fórmulas tienen la gran ventaja de indicar con precisión cómo se relacionan las variables y las relaciones entre variables se pueden expresar mediante fórmulas algebraicas, para cuya obtención primero hay que identificar lo que cambia y lo que no cambia, asignar una letra a lo que cambia, buscar la relación entre las variables y expresarla mediante una fórmula. Ésta es muy importante, pues nos permite saber cuánto vale una variable cuando la otra tiene un cierto valor. Lo anterior a su turno es posible gracias a que una variable depende de otra, y a su vez la fórmula es la expresión algebraica de una relación funcional, es decir, es la fórmula de la función. Las imágenes de las funciones pueden cambiar de maneras muy distintas: unas pueden ser crecientes, otras decrecientes; unas no crecen ni decrecen, otras crecen uniformemente, otras más lo hacen en forma variada, etc. Para comprender el comportamiento de una función, o sea, para entender cómo cambia, es necesario determinar cuánto cambia; esto es de enorme utilidad si se pretende saber cuánto crece una función creciente o cuánto decrece si es decreciente. En realidad, el término variación está estrechamente ligado al proceso de medición del cambio. El cambio se produce cuando se pasa de un estado inicial a un estado final; por tanto, para medir el cambio de una variable basta restar de su valor adquirido en el estado final, su valor adquirido en el estado inicial; entonces el cambio se mide por la diferencia: $x_f - x_i = \Delta x$.

En términos generales, si y es una función de x, es decir: $y = f(x)$, para medir lo que cambia $f(x)$, se requiere primero considerar un estado inicial x_i; a este valor de x le corresponde $f(x_i)$. Después de un cambio que experimente x_i, de x_i a $x_i + \Delta x$ (un estado final), $f(x)$ experimentará también un cambio a un estado final, y éste quedará como $f(x_i + \Delta x)$.

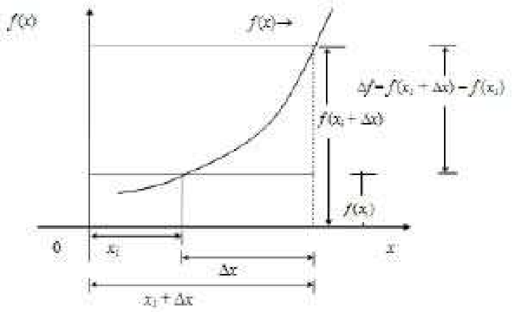
A un cambio de la variable independiente corresponde un cambio de la variable dependiente. Estos cambios se obtienen por medio de diferencias, como se resume a continuación:



Cuadro N° 1. Diferencias que cuantifican cambios, tanto en la variable independiente como en la variable dependiente.

Lo anterior se puede representar en el plano, para observar mejor cómo cambian las variables relacionadas por medio de la fórmula $f(x)$ (figura 1).

Figura 1

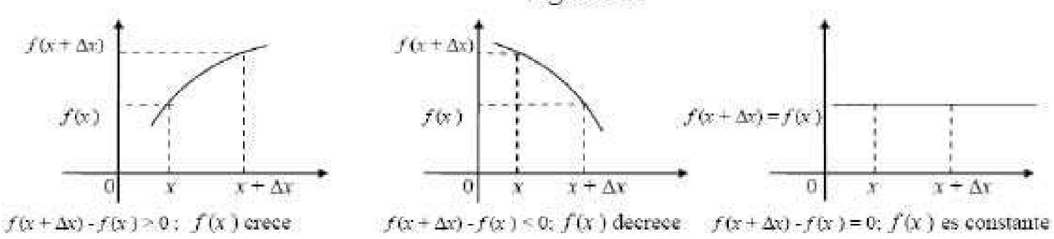


Cabe señalar que la diferencia es el modelo fundamental para medir la variación y el cambio. Con las diferencias se puede predecir una enorme variedad de las cualidades del comportamiento variacional de las funciones. Por ejemplo:

- Si $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$ (para todo x perteneciente al intervalo $(x, x + \Delta x)$ y $\Delta x > 0$ preferentemente pequeño), entonces $f(x)$ es creciente.
- Si $f(x+\Delta x)-f(x) < 0$ (en las mismas condiciones anteriores), entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(x, x + \Delta x)$.
- Si $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ (con las condiciones anteriores), entonces $f(x)$ no crece ni decrece en el intervalo $(x, x+\Delta x)$, es decir, se mantiene constante, no cambia.

Estas desigualdades, que en el fondo representan las comparaciones entre las ordenadas, nos permiten determinar cómo cambia $f(x)$. La respuesta es más evidente si se utilizan representaciones geométricas:

Figura 2



Tal vez se ha notado que cuando se habla de cambios, necesariamente se les relaciona con otros cambios, pero en realidad no puede hablarse de cambios sin relacionarlos con otros; por ejemplo, cuando se estudian los cambios de las distancias en la caída libre de los cuerpos, siempre se hace referencia al cambio de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo. Cuando se estudian procesos de variación no sólo interesan los cambios por sí mismos sino también su dirección y sentido; cuando se trata de magnitudes vectoriales, interesan su rapidez o la velocidad con que se comportan. La rapidez es el módulo de la razón del cambio de distancia entre el cambio del tiempo.

Así las cosas, se puede concluir que los cambios relativos se miden por medio de razones o cocientes entre cambios. Esta es una de las ideas más importantes del cálculo diferencial, pues siempre que se estudia un fenómeno de variación lo importante no es sólo determinar los cambios, sino determinar qué tan rápido cambia eso que cambia y la mejor forma de averiguarlo es por medio de las razones entre los cambios. Este tipo de razones son llamadas razones de cambio promedio y mediante ellas se comparan cambios *grandes*. No miden con precisión la rapidez o la velocidad, únicamente dan una especie de promedio. Proporcionan una información gruesa acerca de los procesos de variación.

La obtención de la velocidad precisa del cambio en un instante o en un punto sólo fue posible introduciendo en la matemática los *cambios infinitamente pequeños*. Y esto no fue fortuito, puesto que los cambios en los movimientos continuos que ocurren en la naturaleza tienen esta propiedad. Estos cambios se modelan con los *diferenciales*. Las razones entre los diferenciales permiten medir con precisión la velocidad o la rapidez del cambio en un punto o en un instante en un proceso de variación continua. Existen muchas razones de cambio que toman nombres específicos, como la *aceleración*, que es la razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo; la *intensidad de la corriente eléctrica*, que es la razón de cambio entre la cantidad de electricidad que pasa por una sección transversal de un conductor respecto del tiempo; el *gasto*, que es la razón entre el volumen de un líquido que fluye en un conducto en relación con el tiempo, etc. En todos estos casos, subyace una idea general: las razones o cocientes entre cambios. Aquí aparece un nuevo concepto matemático: razones de cambio, creado de la abstracción de otros más simples: las diferenciales. Una abstracción más compleja creada de otras abstracciones simples. A esta abstracción se la conoce con el nombre de *velocidad instantánea*, caso particular de la derivada. Este es, por tanto, un concepto matemático creado para medir la variación relativa; en concreto, mide lo que cambia una variable respecto de otra en un instante. Dada la trayectoria de un cuerpo o si se quiere la relación funcional que lo rige, la determinación de su velocidad en cualquier punto es posible por medio de las razones de cambio instantáneas; por el contrario, el otro problema, dada la velocidad del cuerpo, obtener su trayectoria o la fórmula de su relación funcional, originó *la integral*. La derivación y la integración, por tanto, son procesos inversos y ambos describen aspectos esenciales de la variación. Finalmente, la velocidad instantánea se obtiene del límite del cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando Δt tiende a cero (Δs es la cantidad de cambio en la distancia y Δt es la cantidad de cambio en el tiempo). De este modo, la velocidad instantánea se obtiene dividiendo cambios infinitamente pequeños. Los aspectos del pensamiento y lenguaje variacional descritos serán fundamentales para comprender la caracterización que mostraré de la graficación covariacional, dado que forman parte de ella.

2.1.4. Caracterización de la graficación covariacional

En Salgado (2007) se define la graficación covariacional como las actividades de representación gráfica en las que se involucra la coordinación de dos cantidades variables, atendiendo las formas en que cambia una con respecto a la otra. El elemento central de esta graficación es el cambio y no sólo la ubicación de los puntos como en las formas tradicionales. El cambio se calcula mediante diferencias y éstas son representadas gráficamente mediante segmentos de recta. Así, las curvas o gráficas en principio son poligonales, cuyos segmentos son "grandes"; a medida que los cambios van disminuyendo de tamaño, se alcanza mayor fineza. En términos programáticos, para la graficación covariacional es necesario realizar las acciones siguientes:

1. ¿Qué cambia? Identificar, establecer o definir qué variables se representarán y su relación entre ellas.

2. ¿Cuánto cambia? Calcular y coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable y representarlos en el plano mediante segmentos de recta.

3. ¿Cómo cambia? Coordinar gráficamente la dirección de los cambios de una variable con los cambios en la otra variable.

4. ¿Qué tan rápido cambia? Calcular las razones de cambio promedio con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada y representarlas gráficamente.

5. ¿Cómo se comporta puntual y globalmente la gráfica? Calcular razones de cambio instantáneas y representarlas gráficamente.

Para ilustrar la graficación covariacional, graficaremos la expresión: $s(t) = t^2$.

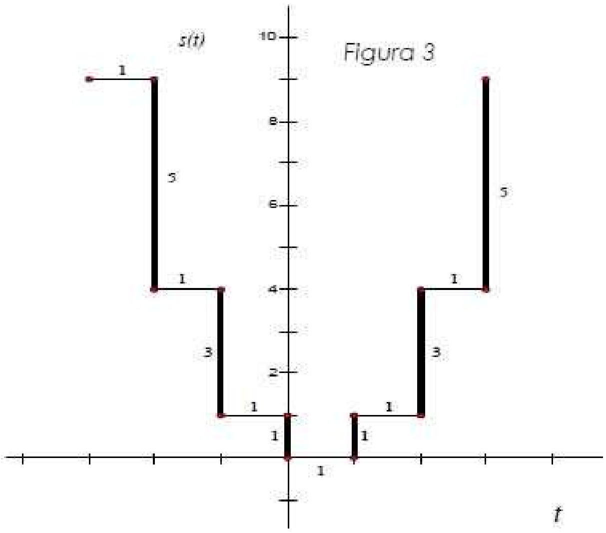
1. ¿Qué cambia? En este caso, s cambia si cambia t, ya que t es la variable independiente y s es la variable dependiente.

2. ¿Cuánto y cómo cambia? Calcularemos y coordinaremos la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable y los representaremos en el plano mediante segmentos; también coordinaremos la dirección de los cambios de una variable con los cambios en la otra.

Tabla 2. Obtención de los cambios				
t_i	Δt	$t_f = t_i + \Delta t$	**Cantidad de cambio** $\Delta s = s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$	**Si *t* cambia ¿Cuánto y cómo cambia *s*?**
-3	1	-2	-5	Si *t* crece de – 3 a 1, *s* decrece 5
-2	1	-1	-3	Si *t* crece de -2 a -1, *s* decrece 3
-1	1	0	-1	Si *t* crece -1 a 0, *s* decrece 1
0	1	1	1	Si *t* crece de 0 a 1, *s* crece 1
1	1	2	3	Si *t* crece de 1 a 2, crece 3
2	1	3	5	Si *t* crece 2 a 3, *s* crece 5 unidades
3	1	4	7	Si *t* crece de 3 a 4, *s* crece 7

Mostraremos gráficamente cuánto cambia s con respecto a t.

- Cuando x cambia 1 unidad de -3 a -2, y cambia 5 unidades de 9 a 4.
- Cuando x cambia 1 unidad de -2 a -1, y cambia 3 unidades de 4 a 1.
- Cuando x cambia 1 unidad de -1 a 0, y cambia 1 unidad de 1 a 0.
- Cuando x cambia 1 unidad de 0 a 1, y cambia 1 unidad de 0 a 1.
- Cuando x cambia 1 unidad de 1 a 2, y cambia 3 unidades de 1 a 4.
- Cuando x cambia 1 unidad de 1 a 2, y cambia 3 unidades de 1 a 4.



Gráficamente, ¿cómo cambia s con respecto a t?

- Cuando t cambia de -3 a -2, $s(t)$ decrece 5 unidades (de 9 a 4).
- Cuando t cambia de -2 a -1, $s(t)$ decrece 3 unidades (de 4 a 1).
- Cuando t cambia de -1 a 0, $s(t)$ decrece 1 unidad (de 1 a 0).
- Cuando t cambia de 0 a 1, $s(t)$ crece 1 (de 0 a 1).
- Cuando t cambia de 1 a 2, $s(t)$ crece 3 (de 1 a 4).
- Cuando t cambia de 2 a 3, $s(t)$ crece 5 unidades (de 4 a 9).

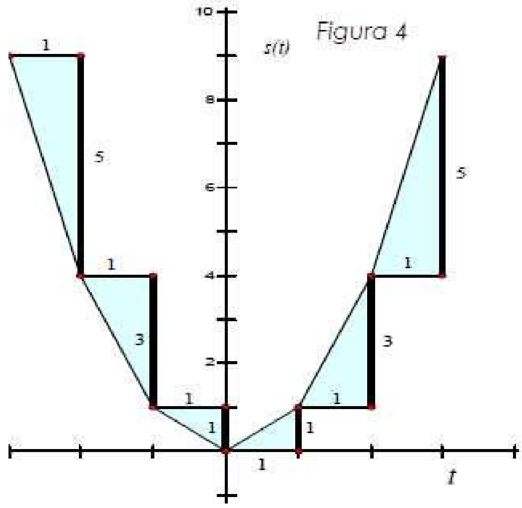


Figura 4

Tabla 3. Obtención de los cambios y razones entre cambios				
t_i	Δt	Valor final $t_f = t_i + \Delta t$	Razón de cambio promedio: $\Delta s/\Delta t$	Si t cambia ¿qué tan rápido cambia s?
-3	1	-2	-5	Si t cambia de -3 a -2, la rapidez promedio es de 5.
-2	1	-1	-3	Si t cambia de -2 a -1, la rapidez promedio es 3.
-1	1	0	-1	Si t cambia de -1 a 0, la rapidez es 1.
0	1	1	1	Si t cambia de 0 a 1, la rapidez promedio es 1.
1	1	2	3	Si t cambia de 1 a 2, la rapidez es 3.
2	1	3	5	Si t cambia de 2 a 3, la rapidez es 5.
3	1	4	7	Si t cambia de 3 a 4, la rapidez promedio es 7

3. ¿Qué tan rápido cambia? Calcularemos la razón de cambio promedio con incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada y los representaremos gráficamente:

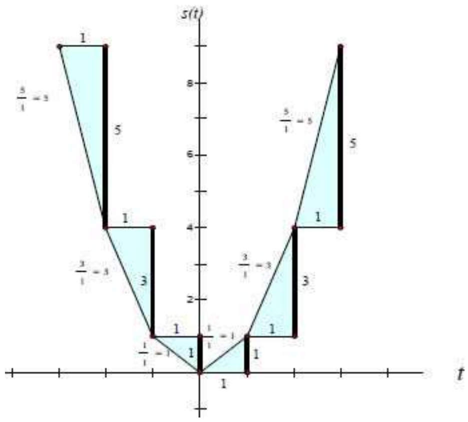


Figura 5

4. ¿Cómo se comporta puntual y globalmente la gráfica? Calcularemos razones de cambio instantáneas y las representaremos gráficamente. Para saber cómo se comporta puntual y globalmente la gráfica se requiere reducir "suficientemente" los intervalos de variación. Comenzaremos con incrementos $\Delta t = 1$.

Tabla 4. Obtención de los cambios y razones entre cambios

t_i	Δt	$t_f = t_i + \Delta t$	Razón promedio de cambio: $\Delta s/\Delta t$
...	...	...	...
-3	1	-2	-5
-2	1	-1	-3
-1	1	0	-1
0	1	1	1
1	1	2	3
2	1	3	5
3	1	4	7
...	...	...	...

A renglón seguido mostraremos gráficamente los cálculos de la tabla anterior:

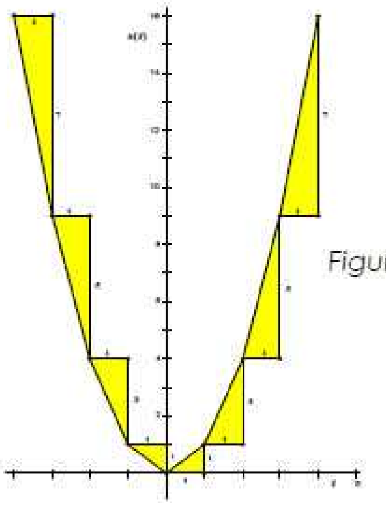


Figura 6

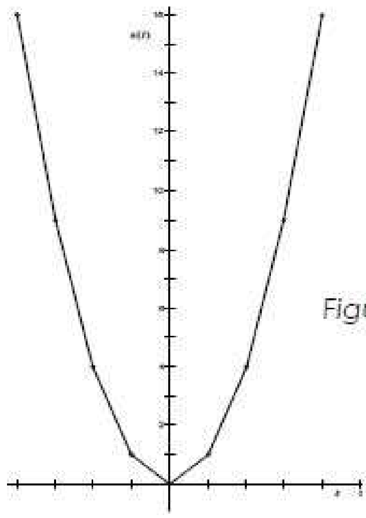
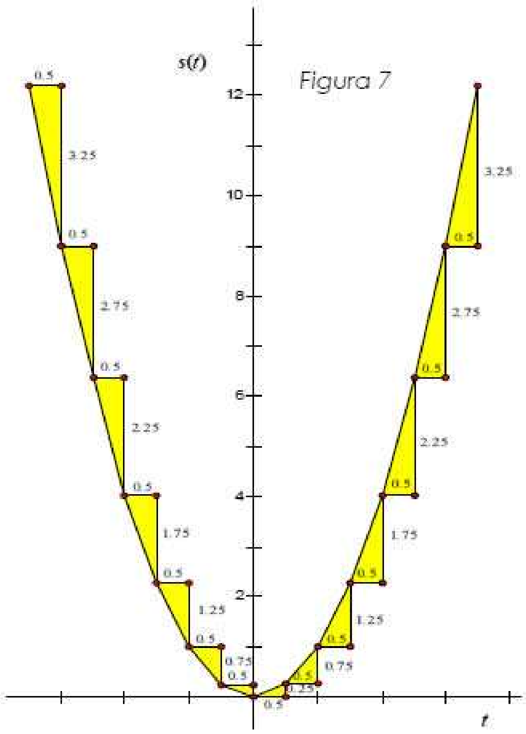


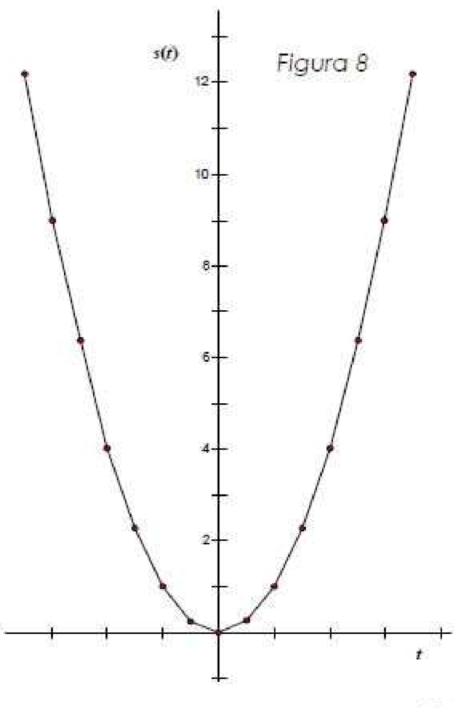
Figura 7

Para lograr mayor fineza, ahora haremos los cambios más chicos $\Delta t = 0{,}5$:

Tabla 5. Obtención de los cambios con Δt=0.5				
t_i	Δt	$t_f = t_i + \Delta t$	$\Delta s = s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$	**Razón promedio de cambio: $\Delta s / \Delta t$**
-3	0.5	-2.5	-2.75	$-\frac{-2.75}{0.5} = -5.5$
-2.5	0.5	-2	-2.25	$\frac{-2.25}{0.5} = -4.5$
-2	0.5	-1.5	-1.75	$\frac{-1.75}{0.5} = -3.5$
-1.5	0.5	-1	-1.25	$\frac{-1.25}{0.5} = -2.5$
-1	0.5	-0.5	-0.75	$\frac{-0.75}{0.5} = -1.5$
-0.5	0.5	0	-0.25	$\frac{-0.25}{0.5} = -0.5$
0	0.5	0.5	0.25	$\frac{0.25}{0.5} = 0.5$
0.5	0.5	1	0.75	$\frac{0.75}{0.5} = 1.5$
1	0.5	1.5	1.25	$\frac{1.25}{0.5} = 2.5$
1.5	0.5	2	1.75	$\frac{1.75}{0.5} = 3.5$
2	0.5	2.5	2.25	$\frac{2.25}{0.5} = 4.5$
2.5	0.5	3	2.75	$\frac{2.75}{0.5} = 5.5$

A continuación mostraremos gráficamente los cálculos de la tabla anterior:





Ahora lo haremos con incrementos de $\Delta t = 0{,}25$:

Tabla 6. Obtención de los cambios con Δt=0.25				
t_i	Δt	$t_f = t_i + \Delta t$	$\Delta s = s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$	Razón de cambio $\Delta s/\Delta t$
-1.5	0.25	-1.25	-0.6875	$\frac{-0.6875}{0.25} = -2.75$
-1.25	0.25	-1	-0.5625	$\frac{-0.5625}{0.25} = -2.25$
-1	0.25	-0.75	-0.4375	$\frac{-0.4375}{0.25} = -1.75$
-0.75	0.25	-0.5	-0.3125	$\frac{-0.3125}{0.25} = -1.25$
-0.5	0.25	-0.25	-0.1875	$\frac{-0.1875}{0.25} = -0.75$
-0.25	0.25	0	-0.0625	$\frac{-0.0625}{0.25} = -0.25$
0	0.25	0.25	0.0625	$\frac{0.0625}{0.25} = 0.25$
0.25	0.25	0.5	0.1875	$\frac{0.1875}{0.25} = 0.75$
0.5	0.25	0.75	0.3125	$\frac{-0.3125}{0.25} = 1.25$
0.75	0.25	1	0.4375	$\frac{0.4375}{0.25} = 1.75$
1	0.25	1.25	0.5625	$\frac{0.5625}{0.25} = 2.25$
1.25	0.25	1.5	0.6875	$\frac{0.6875}{0.25} = 2.75$

A continuación mostraremos gráficamente los cálculos de la tabla anterior:

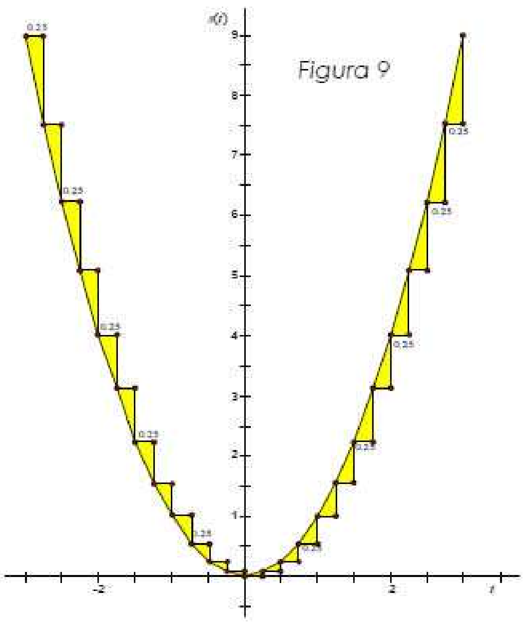


Figura 9

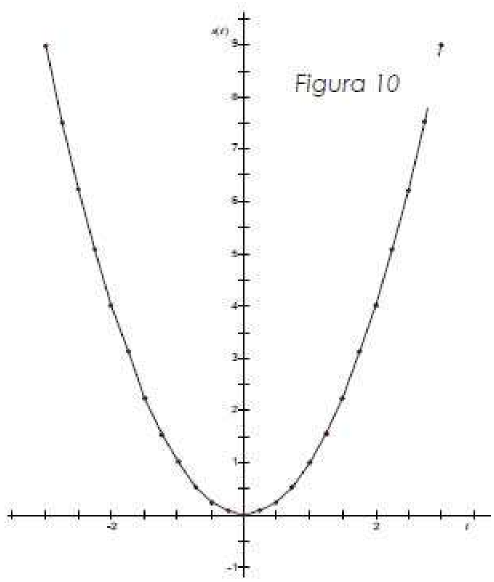


Figura 10

Como puede verse, luego de refinamientos en la variable de entrada, la gráfica es cada vez más fina. A renglón seguido mostraremos una serie de ejemplos para calcular razones de cambio instantáneas en puntos específicos, mediante refinamientos en la variable de entrada.

2.1.5. Conclusión

Las formas de graficación tradicionales consideran secundario lo variacional y privilegian el trazado del dibujo de la gráfica de la función a partir de ubicar un conjunto discreto de puntos. Otras centran su atención en el cálculo de los máximos, mínimos o puntos de inflexión para bosquejar la gráfica de la función; otras más determinan el comportamiento de la gráfica de la función a partir de los parámetros de la fórmula; algunas, a través de las operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación y división, obtienen el bosquejo de la función producto, etc., mientras que la graficación covariacional es una forma de graficación integradora, ya que permite construir a la par la gráfica de la función y establecer el comportamiento variacional de ésta.

La graficación por tabulación es la que más se utiliza en el nivel básico (secundaria) y en el nivel medio superior, cuando se trabaja la graficación de funciones. En este artículo se propone una nueva técnica para graficar funciones continuas en el plano, propuesta dirigida al estudio de la graficación en el nivel medio superior. Por tanto, una pregunta importante por responder es la siguiente: ¿cuál es la diferencia que existe entre la graficación por tabulación y la graficación covariacional? Para responder este interrogante, enlistaremos las diferencias esenciales entre cada una de las técnicas de graficación.

TABLA 6. Graficación por tabulación vs. graficación covariacional

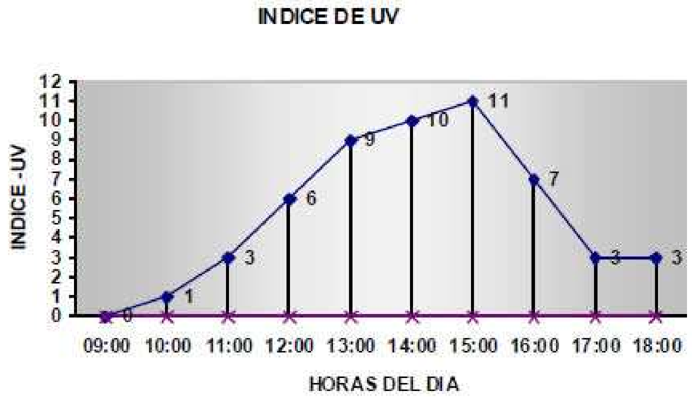
Graficación por tabulación	**Graficación covariacional**
En este tipo de graficación se relega a un segundo plano la correlación causal entre las variables.	En todo el proceso de graficación predomina la conciencia de la correlación causal entre eso que cambia.
Se considera que los estudiantes tienen ya formada una idea de curva no necesariamente como poligonal.	Se considera que una curva está formada por “segmentos” de recta. Cuanto más pequeño sean esos segmentos, mayor fineza ganará la gráfica.
No se enfatiza sobre la naturaleza de lo que cambia o de lo que se quiere representar, simplemente se representan las x y las y o las funciones.	Se parte de identificar qué cambia y la correlación entre eso que cambia.

Se representan las x y las y como entes abstractos y los valores que adquieren dependen del arbitrio del profesor. Aquí se dice "asignemos los valores: -2, -1, 0 , 1, 2, a x", "si x vale tanto y vale tanto".	Se hace explícito el proceso de cambio que le confiere razón de ser a eso que cambia, utilizando variables concretas. "Si el tiempo t cambia de 1 a 1,5, averigüemos qué sucede con la distancia s".
Se usa fundamentalmente la fórmula de $f(x)$ para calcular las coordenadas de los puntos.	Para gráficas se usan esencialmente Δx, Δy para calcular los cambios, estableciendo la relación causal entre los cambios de x y los cambos de y; la fórmula de $f(x)$ se utiliza para calcular Δy.
Los cambios no interesan, por lo que no se representan gráficamente; sólo se unen puntos consecutivos, sin cuestionarse sobre su significado variacional.	Se representan gráficamente los cambios y no sólo los puntos. Importa esencialmente lo que sucede "entre" los puntos y no sólo el valor de las coordenadas de los puntos.
Se pasa de un punto a otro, sin cuestionarse lo que sucede en el intermedio; tampoco se cuestiona sobre cuánto cambian las variables.	Para graficar interesa cuánto y cómo cambia la variable independiente, al igual que este cambio qué efectos tiene sobre los cambios de la variable dependiente. "Si el tiempo t cambia de 1 a 2, la distancia s aumenta 4 unidades".
No son motivo de análisis la rapidez de la variación ni su representación gráfica. La pendiente se asocia con la derivada hasta cuando ésta es motivo de estudio y no cuando se grafica una función.	Se enfatiza sobre la razón de cambio promedio. Ésta se asocia con la inclinación de los segmentos de recta que forman la "curva".
No es motivo de discusión la fineza o precisión de la curva.	La poligonal, o sea la gráfica buscada, será más precisa si se reducen suficientemente los cambios de la variable independiente.

2.1.6. Actividades que se plantean

1. De acuerdo con los datos de la Red Automática de Monitoreo Atmosférico, en el Distrito Federal el día 13 de agosto de 1997 se registraron los siguientes índices

de radiación ultravioleta (UV) emitida por el Sol (se recomienda exponerse al Sol con cautela cuando el índice de radicación UV es mayor que 7) (gráfico 2).



a) ¿Cuánto cambió el índice UV en cada hora?

b) ¿En qué horas el índice UV ascendió más rápidamente?

c) ¿En qué intervalos el índice UV descendió más velozmente?

d) ¿En qué intervalo el índice UV no cambió?

2. A continuación se dan algunas fórmulas que describen la posición $s = f(t)$, de ciertas partículas que se mueven a lo largo del eje de coordenadas. Obtenga para cada una la fórmula que permite calcular los cambios Δs, y haga las gráficas correspondientes.

   a) $s = t + 2$

   b) $s = 1{,}86t^2$

   c) $s = t^3 - 2t^2 + 1$

   d) $s = 10$

   e) $s = \frac{1}{t+1}$

3. Obtenga la expresión que permite cuantificar los cambios a partir de la información dada.

   a) Para la función: $f(r) = \pi r^2$, cuando r cambia de $r = 1$ a $r = 2$

   b) Para $A(l) = l^2$, cuando l cambia de l a $l + \Delta l$

   c) Para $y = f(x)$, cuando x cambia de x_i a $x_i + h$

4. Las fórmulas que describen la caída libre de los cuerpos sobre la superficie de algunos planetas son:

a) $s(t) = 1{,}86t^2$, Marte

b) $s(t) = 4{,}9t^2$, Tierra

c) $s(t) = 11{,}44t^2$, Júpiter

Supóngase que s es la distancia recorrida en metros y t el tiempo en segundos. ¿En qué planeta los cuerpos caen más rápidamente? ¿En cuál lo hacen con mayor lentitud? Justifique sus respuestas y grafique mediante la graficación covariacional.

5. Supongamos que una partícula se mueve en línea recta en el plano cartesiano, parte del punto $A(1,2)$ y después se ubica en el punto $B(3,5)$. ¿Cuánto cambió su posición respecto a x y respecto a y?

6. Una recta que pasa por el origen se genera de modo que $\Delta x = \Delta y = 1$. Trace la gráfica de la recta y obtenga su ecuación.

7. ¿Cómo se comportan Δx y Δy en la recta que tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x+1$? Represente los Δx y Δy y dibuje la gráfica de la recta.

8. Cae agua dentro de un tanque cúbico de 2,5 m de arista, a razón de 1 litro por segundo:

   a) Obtenga una fórmula para el volumen V en función de la altura h.

   b) Deduzca la fórmula para la altura h en función del tiempo t.

   c) Encuentre la fórmula que mida los cambios de volumen (ΔV) si $\Delta h = 1$ cm.

9. Si $\Delta y = 0$ $[y = f(x)]$, ¿cuál o cuáles de las siguientes opciones se satisface? Justifique sus respuestas.

   a) $f(x_i + \Delta x) > f(x_i)$

   b) $f(x_i + \Delta x) = f(x_i)$

   c) $\Delta x = 0$ para todo x

   d) La variable dependiente no cambia, pero la variable independiente es posible que sí.

10. Si $\Delta y > 0$ $[y = f(x)]$, ¿cuál o cuáles de las siguientes alternativas es cierta?

    a) $f(x + \Delta x) > f(x)$

    b) $f(x + \Delta x) < f(x)$

    c) $\Delta x = 0$ para todo x

d) $f(x + \Delta x) = f(x)$

Referencias

Cantoral, R. & Farfán, R. (2000). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis,* en R. Cantoral, *El futuro del cálculo infinitesimal*, Icme-8. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), pp. 352-378.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Salgado, G. (2007). *Graficación covariacional.* Tesis de maestría. Chilpancingo Gro. México: Centro de Investigación en Matemática Educativa, UA de Matemáticas, UAG.

2.2. Estudio epistemológico del desarrollo del álgebra lineal

Alberto Campos[2]

2.2.1. Génesis

Aportadores en el siglo XVII

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Alemán	Sistema lineal. Determinante.
James Stirling (1692 - 1770). Escocés	n curva algebraica por $\frac{1}{2}n(n+3)$ puntos. Cúbicas de Newton. Cónicas.
Colin Maclauring (1698 - 1746). Escocés	Sistemas 2×2, 3×3, 4×4 (1729) (1748). Intersección de curvas.

Aportadores en el siglo XVIII

Gabriel Cramer (1704 - 1752). Suizo	Sistemas lineales $n \times n$, sin pruebas (1750). n curva algebraica por $\frac{1}{2}n(n+3)$ puntos. Paradoja de Cramer.
Leonhard Euler (1707 - 1783). Suizo	Condiciones para unicidad de sistemas lineales. Interacción de álgebra y geometría en dimensión 3. Ejes de cuádrica real.
Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783). Francés	n soluciones lineales para una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.
Alexandre Théophile Vandermonde (1735 - 1796). Francés	Determinantes como teoría.

[2]Doctor de la Universidad de París. Profesor honorario de la Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813). Francés	Para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales se vale de procedimientos que actualmente pertenecen a teoría espectral.
Caspar Wessel (1745 - 1818). Noruego	$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (iniciación).
Pierre Simon, marqués de Laplace (1749 - 1827). Francés	Desarrollo de un determinante.
Jean Robert Argand (1768 - 1822). Suizo	$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (iniciación). Módulo de un número complejo.
Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Alemán	1811. Eliminación en sistema lineal $m \times n$. Vocablo determinante en 1801. 1801. *Disquisitiones arithmeticae.*
Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857). Francés	Teoría de determinantes. 1815. Teoría de matrices.

Aportadores en el siglo XIX

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851). Alemán	Teoría de determinantes.
William Rowan Hamilton (1805 - 1865). Irlandés	$n = 4$. Teorema de Hamilton-Cayley $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (1834). Cuaterniones (1843). Álgebra dentro de cuaterniones. Dimensiones superiores.
Hermann Günther Grassmann (1809 - 1877). Alemán	Dimensiones superiores (1844). Lecciones de extensión lineal (1844): espacio vectorial, subespacio, conjunto generador, independencia, base, dimensión, transformación lineal, $\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W)$.

Benjamin Peirce (1809 - 1880). Estadounidense	Álgebra asociativa lineal (1870).
James Joseph, con seudónimo Sylvester (1814 - 1895). Británico	Adoptó el vocablo matriz. Teoría de invariantes.
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897). Alemán.	Teoría axiomática para determinantes. (1903). *On determinant theory.* Teoría axiomática de matrices. Forma canónica llamada de Jordan. Formas bilineales y cuadráticas. Teoría espectral.
Arthur Cayley (1821 - 1895). Británico	1843. Geometría analítica n-dimensional. 1850. 1858. Matrices $m \times n$. Teoría. 1858. Teorema de Cayley-Hamilton. Problema de Cayley-Hamilton. Las matrices forman un álgebra. Matrices y cuaterniones. 1844. Octoniones. Dimensiones superiores.
Charles Hermite (1822 - 1901). Francés	n formas lineales de cualquier grado. Una letra para una aplicación lineal. Operación sobre aplicaciones lineales. Problema de Cayley-Hermite.
Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 - 1852). Alemán	Teoría aritmética de formas n lineales. Un signo para una aplicación lineal. Operaciones sobre aplicaciones lineales. Teoría de invariantes.
Leopold Kronecker (1823 - 1891). Alemán	Tratamiento axiomático de determinantes. (1903). *Lectures on determinant theory.* Formas bilineales y cuadráticas. Teoría espectral.
Henry John Stephen Smith (1826 - 1883). Irlandés	Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916). Alemán	1870. Sumas y productos de enteros algebraicos. Suplemento X, 1871, en edición de obra de Dirichlet. Investigación con H. Weber sobre extensiones.
Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922). Francés	Teoría de matrices. Teoría espectral. Forma canónica de Jordan.
Josiah Willard Gibbs (1839 - 1900). Estadounidense	Parte real y parte vectorial de producto de cuaterniones.
Charles Sanders Peirce (1839 - 1914). Estadounidense	Números reales, números complejos, cuaterniones son las únicas n-uplas que son álgebra de división.
Heinrich Weber (1842 - 1913). Alemán	Definición axiomática de grupo y de campo.
Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917). Alemán	1878. *On linear substitutions and bilinear forms.* Teoría espectral: Cauchy, Jacobi, Weierstrass, Kronecker.
Oliver Heaviside (1850 - 1925). Británico	Parte real y parte vectorial en producto de cuaterniones. 1880. Producto escalar. Producto vectorial.
Giuseppe Peano (1858 - 1932). 1888. Italiano	Cálculo geométrico. Espacio vectorial sobre los reales (sistema lineal). Dimensión de un espacio vectorial. Base de un espacio vectorial. Espacio vectorial de polinomios de una variable.
Erhard Schmidt (1876 - 1959). Alemán (de origen estonio)	1908. Sistemas lineales en infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas.
Hans Hahn (1877 - 1934). Austríaco	1922. *Über Folgen linearer Operationen.*

Otto Töplitz (1881 - 1940). Alemán	1909. Sistemas lineales en infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas.
Amalie Emmy Noether (1882 - 1935). Alemana	1921. *Ideal theory in rings*. Módulo.
Hermann Weyl (1885 - 1955). Alemán	1918. Axiomas para espacio vectorial real.
Stefan Banach (1892 - 1945). Polonés	1932. *Théorie des opérations linéaires.*
Norbert Wiener (1894 - 1964). Estadounidense	1922. *The group of the linear continuum.*
Emil Artin (1898 - 1962). Austríaco	Años veinte. Linealización de la teoría de Galois.

2.2.2. Estructuración

Bartel Leenert van der Waerden (1903 - 1996). Holandés	1930 - 1931. *Moderne algebra.*

Temas en el capítulo XV (edición 1937). *Álgebra lineal.*

El álgebra lineal trata de formas lineales, módulos de tales formas lineales, homomorfismos o transformaciones lineales entre ellos.

106. Módulos. Formas lineales. Vectores. Matrices.
107. Módulos respecto a un campo. Ecuaciones lineales.
108. Módulos respecto a anillos euclidianos. Divisores elementales.
109. El teorema fundamental de grupos abelianos.
110. Representaciones y módulos de representación.
111. Forma normal de una matriz en un campo conmutativo.
112. Divisores elementales y función característica.
113. Formas cuadráticas. Formas hermíticas.

Son ocho temas expuestos en una perspectiva completamente axiomatizada. La exposición avanza sin que, por ejemplo, los teoremas estén enumerados, todo está argumentado. El lenguaje es conciso y no hay motivaciones para los diversos desarrollos. Se proponen unos cuantos ejercicios al final de cada sección, no tan complejos ni tan numerosos como en Bourbaki. Todo el desarrollo cubre 36 páginas. No es un texto para introducir el álgebra lineal en el primer nivel universitario.

Enunciados que llevan el título de teorema:

Teorema de solubilidad.
Teorema de divisores elementales.
Teorema fundamental de grupos abelianos.
Teorema de unicidad en una descomposición de módulo.
Teorema de los vectores propios de una transformación.

Tampoco el capítulo II de *Algèbre*, de Bourbaki (1970), dedicado al álgebra lineal, es un texto elemental. Abarca 210 páginas. El lenguaje es igualmente abstracto. Cada parágrafo tiene un buen número de ejercicios, nada triviales, muchos de los cuales están precedidos del signo de dificultad. En los ejercicios del capítulo II aparecen el teorema de Desargues, un teorema de Erdös-Kaplansky, otro teorema de Kaplansky, el teorema de Papo, el teorema del cuadrilátero completo y el llamado teorema fundamental de la geometría proyectiva.

1970. Bourbaki. *Algèbre*.

Temas del capítulo II de *Álgebra lineal* (210 pp.):

§ 1. Módulos.

§ 2. Módulos de aplicaciones lineales. Dualidad.

§ 3. Productos tensoriales.

§ 4. Relaciones entre productos tensoriales y módulos de homomorfismos.

§ 5. Extensión del anillo de los escalares.

§ 6. Límites proyectivos y límites inductivos de módulos.

§ 7. Espacios vectoriales.

§ 8. Restricción del campo de los escalares en los espacios vectoriales.

§ 9. Espacios afines y espacios proyectivos.

§ 10. Matrices.

§ 11. Módulos y anillos graduados.

Bourbaki llama *grupo de operadores* a la situación en la que se tiene un conjunto C y un grupo G junto con una acción de C hacia G, a la cual se dota, mediante axiomas, con algunas propiedades.

Un *módulo* es un tipo particular de grupo de operadores en el que el conjunto está dotado con la estructura de grupo aditivo y los operadores son los elementos de un anillo.

Espacio vectorial es un caso especial de módulo en el que el anillo es remplazado por un campo.

Método

¿Cómo pudo llegarse a la estructuración que aparece en Van der Waerden o en Bourbaki?

Al tomar en cuenta los diversos aportes, pueden advertirse como cauces en una cuenca hidrográfica. Al intentar seguir sus cursos, es factible decantar grandes temas que han de conducir a la estructura aludida.

Moore trata de mostrar diversas fuentes que confluyen en la axiomatización del álgebra lineal: geometría euclidiana, sistemas lineales, ecuaciones diferenciales lineales, Grassmann, Dedekind, Peano, Weyl.

Todavía no se tiene, según Moore, el impulso que en verdad suministra el análisis funcional con nombres como los de Banach, Hahn, Wiener, secundados por las investigaciones de John von Neumann al axiomatizar los espacios de Hilbert (1927). Se logra un amplio espectro teórico, utilizable igualmente para las necesidades de expresión de la física.

En la matemática china de los “Nueve capítulos” se expone “un método sistemático para resolver conjuntos de ecuaciones lineales con cualquier número de incógnitas” según el comentario acompañante de Van der Waerden.

En el problema citado por Van der Waerden se trata de comparar rendimientos en la cultura comparada de tres granos diferentes, para lo cual se aducen tres conjuntos de datos.

Se exhibe la situación en el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

Se trata de saber el valor de x, y, z.

Según la fuente aludida, los matemáticos chinos disponen los coeficientes del sistema así:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ & & \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

En la columna de la derecha están los coeficientes de la primera ecuación.

En la columna del medio están los coeficientes de la segunda ecuación.

En la columna de la izquierda están los coeficientes de la tercera ecuación.

El texto del problema asigna un papel especial al número 3, que es el número de gavillas del grano superior en la columna derecha.

Resolver el sistema va a consistir en transformar el arreglo ya obtenido de los coeficientes del sistema en otro arreglo con coeficientes nulos.

De tres veces la columna del centro se resta dos veces la columna derecha:

$$3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ \\ 34 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \\ \\ 102 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ \\ 24 \end{pmatrix}$$

De tres veces la columna izquierda se resta la columna derecha:

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ \\ 78 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ \\ 39 \end{pmatrix}$$

Ahora el arreglo es así:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ & & \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Ya hay dos elementos nulos, se busca uno más a partir del último arreglo.

De cinco veces la columna izquierda se resta cuatro veces la columna central.

$$5\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ \\ 39 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 40 \\ \\ 195 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 4 \\ \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \\ \\ 99 \end{pmatrix}$$

Ahora el arreglo de los coeficientes es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

El sistema lineal inicial se ha transformado en el siguiente:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99. \end{aligned}$$

De donde la solución:

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}, \qquad y = \frac{17}{4}, \qquad x = \frac{37}{4}.$$

En Mesopotamia se resolvían problemas de la misma laya, tal vez más sistemáticamente. Por ejemplo, para un problema con tres incógnitas suponían una relación cuadrática en las tres variables, sin añadirle dificultades. Para dos de las variables planteaban relaciones que se transcriben linealmente en ecuaciones cartesianas de primer grado, lo cual indica por lo menos buenos tanteos de tipo lineal.

Bourbaki menciona dos reglas primitivamente bien conocidas: la de tres y la de falsa posición. En diversos problemas, Diofanto echa mano de la solución por falsa posición, a veces doble, lo que hace más intrincada todavía el álgebra retórica, la utilizada generalmente por Diofanto.

Pensar linealmente puede esquematizarse en la capacidad de resolver ecuaciones reducibles a la forma $ax = b$, sea con el lenguaje del álgebra retórica, sea con el del álgebra sincopada introducida por Diofanto, sea mediante el simbolismo cartesiano.

Hay un problema reproducido en libros de divulgación de historia de la matemática, particularmente indicado. Aparece una versión en [p. 1020. *Científicos griegos.* Tomo II. Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas por Francisco Vera. 1970. Aguilar. 1190 pp.]. Otra versión, más entendible, aparece en [p. 156. Jean-Paul Collette. *Historia de las matemáticas.* I. (1973). 2003. Siglo XXI Editores. $x + 347$ pp.], tomada de historiadores franceses. Dice así:

“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó la sexta parte; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto, deduce su edad".

Con notación cartesiana, se transcribe:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

de donde $x = 84$ años. Así que fue niño hasta los 14 años, adolescente hasta los 21, se casó a los 33, tuvo un hijo a los 38, el cual murió cuando su padre tenía 80 años.

Algunos de los 189 problemas que constituyen parte de la herencia de Diofanto dan ya procedimientos lineales que, desde luego, hay que leer entre líneas en la redacción retórica de los problemas que resuelve.

Según Bourbaki, Apolonio de Perga inspira a Fermat algunas de las ideas claves para el desarrollo del álgebra lineal. Por ejemplo, clasificar las curvas planas según el grado de la ecuación que la describe. Una ecuación de primer grado es una recta y una de segundo grado es una cónica. Ideas que, obviamente, aparecieron en *Géométrie*, de Descartes (1637).

Otra observación igualmente clave es la del carácter lineal de las fórmulas de transformación de coordenadas presente en Fermat y que de algún modo han de estar en el fondo de la clasificación de las cónicas.

Euler llamó afinidad a la relación entre curvas que permite pasar de la una a la otra por la transformación $x' = ax$, $y' = by$.

Según Cajori [*A History of Mathematical Notations*. Two Volumes Bound As One. $xvi + 451$. $xii + 367$. Dover. (1928). 1993. § 459], la más temprana notación para determinante proviene de Leibniz, quien origina los determinantes en Europa. En carta [28 IV 1693] al marqués de L'Hôpital, escribe tres ecuaciones así:

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0. \end{aligned}$$

Explica Cajori que la notación es topográfica, es decir, Leibniz denota 10, 11, 12 lo que actualmente se denota a_{10}, a_{11}, a_{12}.

Leibniz escribió, pues, por primera vez, un sistema lineal mediante una notación con doble índice, bastante cómoda para el caso. La carta va más adelante con el procedimiento de solución. Es así como surge el papel capital de ese número intrínsecamente asociado a todo sistema lineal, cuyo conocimiento es indispensable para resolver el sistema. Leibniz se ocupó varias veces del concepto que surgía.

Una secuencia interesante es la relativa a la solución de sistemas lineales.

Había la experiencia en la antigua matemática china, luego en la de Mesopotamia, posteriormente la de Alejandría con Diofanto; también se puede anotar la de Bagdad, cuando Joarizmi, por ejemplo, se ocupaba de problemas lineales.

Después, prácticamente hay que llegar hasta Maclaurin, quien en 1729 (Hauchecorne y Suratteau) publicó fórmulas resolutivas para 2, 3, 4 ecuaciones con igual número de incógnitas. Cuando el par de números no coincidía, generalmente se atribuía a que el problema estaba mal puesto. Las fórmulas, según la misma fuente, se publicaron en 1748, póstumamente.

Stirling había probado que una curva de grado n es determinada por $\dfrac{n(n+3)}{2}$ puntos.

Cramer formuló la paradoja que lleva su nombre y a la que se llega con los resultados de Maclaurin y de Stirling. Según el primero, dos curvas de grados m, n se intersecan en $m \cdot n$ puntos.

Según Stirling $\dfrac{n(n+3)}{2}$ puntos determinan una curva de grado n. Pero (ahí está la paradoja), dos cúbicas se intersecan en 9 puntos (Maclaurin), así que $\dfrac{n(n+3)}{2}$ puntos (Stirling), para $n = 3$, no determinan una única cúbica.

Cramer planteó el problema mediante ecuaciones lineales, lo cual lo obligó a ocuparse a fondo de las fórmulas resolutivas.

Cramer indujo fórmulas generales sin deducirlas. La paradoja, se dice a veces de Cramer - Euler, la explicó Plücker posteriormente.

Bézout (1779, *Théorie générale des équations algébriques*) se ocupó también a fondo en la solución de sistemas lineales.

Es de recalcar el papel de Joseph Fourier, en su tratado *Théorie analytique de la chaleur* (1822). A Fourier le resultó planteado un sistema lineal en infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas, $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x_j = b_i$, $i \in \mathbb{N}^*$.

Fourier resolvió (Bourbaki pone el verbo entre comillas) una parte finita del sistema resultante, suprimiendo previamente los términos donde los subíndices i, j superaran un número n fijado y empleando luego fórmulas como las de Cramer; obtenida así una solución parcial, pasó al límite haciendo tender n a infinito.

Los atrevidos enunciados de Fourier eran los de un técnico, no los de un matemático; dado que el sistema procedía de problemas reales, había que buscarle solución. Fue una excelente circunstancia para los matemáticos el tener que tomar frase por frase para darle a cada una un sentido matemático porque la indagación resultó altamente enriquecida. Los matemáticos se familiarizaron con el estudio de sistemas infinitos de ecuaciones lineales; por este camino llegarán al concepto de módulo.

Según Bourbaki, el problema de la solución en números enteros de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros es resuelto en parte por Hermite y con toda generalidad por H. J. Smith, quien introdujo en 1861 (Hauchecorne y Suratteau) el estudio de la matriz aumentada en la solución de un sistema lineal. Dorier cita *On systems of linear indeterminates equations, and congruences* (Smith, 1861).

También según Bourbaki, es Kronecker quien da forma definitiva a los teoremas acerca de sistemas lineales con coeficientes reales o complejos.

Para completar la información sobre quiénes más aportaron a la solución de sistemas lineales infinitos, conviene anotar lo referente a sistemas que brotaron en el análisis funcional.

Erika Luciano, en *At the origins of functional analysis: G. Peano and M. Gramegna on ordinary differential equations* (*Revue d'histoire des mathématiques*, 12 (2006), pp. 35-79. Société Mathématique de France) hace una reseña completa de la indagación guiada por Peano en Turín, particularmente la de la tesis de María Gramegna. Sin embargo, ningún título de artículo de Peano menciona expresamente la infinitud de los sistemas lineales considerados.

Por otra parte, ninguno de los autores que sustentan el presente trabajo acerca del álgebra lineal destaca a Peano.

Se alude, pues, a cuatro artículos destacados en la bibliografía, aunque no en el texto por Bourbaki, así como por Dorier y por H. Moore.

Los cuatro artículos se referencian según el orden de publicación.

1908. E. Schmidt. Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen UnbeKannten (*Acerca de la solución de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas*). Rend. Palermo. XXV (1908), pp. 53-77.

1909. O. Toeplitz. Ueber die Auflösung unendlichvieler Linearer Gleichungen mit unendlich vielen UnbeKannten (*Acerca de la solución de una infinidad de ecuaciones lineales con una infinidad de incógnitas*). Rend. Palermo. XXVIII (1909), pp. 88-96.

1913. F. Riesz. *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*. París. Gauthier-Villars.

1921. E. Helly. Ueber Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen UnbeKannten (*Acerca de sistemas de ecuaciones lineales con una infinidad de incógnitas*) Monatsh. fur Math und Phys XXXI (1921), pp. 60-91.

Hay una especie de ascenso y de descenso para el concepto de determinante.

Es Leibniz quien se da cuenta de la importancia del número que se presenta al intentar resolver cualquier sistema lineal, así sea el más sencillo, $ax = b$, dado que ha de ser $a \neq 0$.

Maclaurin y Cramer avanzan en la disposición de la solución asiendo firmemente el determinante del sistema.

Euler esboza la discusión acerca de la unicidad de la solución con base en el determinante.

La notación ideada por Cramer era tan clara que se impuso enseguida.

Laplace (1772) introdujo la fórmula conocida para el desarrollo de un determinante por cofactores.

Vandermonde (1772) pensó en una teoría para los determinantes por sí mismos, es decir, con independencia de su empleo en los cálculos.

Bézout (1779) continuó el estudio de la solución de sistemas lineales y, para ello, el de los determinantes.

El nombre del concepto aparece por primera vez, según Cajori, en Gauss:

"Las funciones de dos indeterminadas $ax^2 + 2bxy + y^2$, donde a, b, c son enteros dados, es una forma de segundo grado. El número $b^2 - ac$, de cuya índole dependen las propiedades de la función, es el determinante de la forma de segundo grado"[p. 121, p. 123, en *Disquisitiones Arithmeticae* (1801). 1995. Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. Bogotá. $xii + 492$ pp].

Gauss introdujo la siguiente relación:

Dos formas cuadráticas binarias $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, y, $F(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$, donde a, b, c, A, B, C son números enteros, son equivalentes si existe una aplicación lineal $(x, y) \to (X, Y)$, con determinante igual a uno, que transforme $f(x, y)$ en $F(X, Y)$.

Así mismo y allí mismo, para el estudio de formas binarias y ternarias, Gauss introduce la que luego será la fórmula para el producto de dos aplicaciones lineales (sustituciones), en lo cual anticipa el cálculo de matrices, todavía no formulado.

En libros de historia de la matemática se dice que fue Cauchy quien impuso el vocablo determinante. Es cierto que en 1815 publicó un artículo en cuyo título parece querer resumir lo que significa:

“Memoria acerca de las funciones que no pueden obtener sino dos valores iguales y de signos contrarios consecuentemente a transposiciones operadas entre las variables que aquéllos contienen”.

Kronecker y Weierstrass, en sendos ensayos de axiomatización, ambos publicados póstumamente, describieron al determinante como función multilineal alternada de n vectores en un espacio de n dimensiones.

Puede afirmarse que la importancia alcanzada por la noción de determinante en las investigaciones a lo largo del siglo XIX es la que todavía conserva en los textos de álgebra lineal para los primeros cursos universitarios.

Un dato revelador es la información bibliográfica de Dorier, según la cual Thomas Muir publicó cuatro volúmenes titulados *The theory of determinants in the historical order of development* (1890-1923; Dover, 1960).

Cabe subrayar que los determinantes aparecieron mucho antes de las matrices, a pesar de lo que sugieren los textos corrientes que tratan los dos temas a la par, como puede convenir en múltiples aplicaciones.

Históricamente las matrices irrumpen a mediados del siglo XIX. Según Hawkins (Moore, p. 269), diversos matemáticos sugirieron el álgebra de matrices casi al mismo tiempo, independientemente: Cayley, Laguerre, Eisenstein y Sylvester.

Para Laguerre, según la misma fuente, una matriz es una representación para imaginarios de Galois, para números complejos, para cuaterniones.

Todavía hay textos en los que se introducen las matrices como arreglos de números en líneas y columnas cuando, en teoría, una matriz es sencillamente una representación de una aplicación lineal.

Fue Cayley, en los años cincuenta del siglo XIX, quien desarrolló gran parte de la teoría de matrices, a la cual Sylvester había dado el nombre. Una de las grandes memorias acerca de la teoría de matrices es de Cayley (1858), que compendia resultados de dos décadas de activas investigaciones.

Por supuesto, muchos otros matemáticos continuaban desarrollando la teoría. Brotaban, desde luego, cantidad de cuestiones por la relación alcanzada entre determinantes y matrices.

Por lo visto anteriormente, interesa anotar los dos siguientes:

Henri Poincaré (1886). Sur les déterminants d’ordre infini. *Bulletin de la Société mathématique de France*, XIV, pp. 77-90.

Helge von Koch (1891). Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles. *Acta Mathematica*, XV, pp. 53-63.

Uno de los grandes cultivadores de las nuevas creaciones fue Frobenius. En un amplio programa de investigación inspirado por Kronecker y en el que también participaba Weierstrass, la obra de Frobenius consistió en decantar los resultados anteriores. Introdujo, por ejemplo, el concepto axiomatizado de formas lineales linealmente dependientes o independientes; igualmente, introdujo la noción de rango, que va a convertirse en la idea clave para expresar, por ejemplo, la solubilidad de un sistema lineal.

Ahí comienza el descenso para el lenguaje teórico de los determinantes, que sigue siendo omnipresente en las aplicaciones.

Conviene recordar otros vertederos de ideas para el álgebra lineal. Un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas admite como solución una combinación lineal de formas lineales.

Un teorema de D'Alembert es el siguiente:

La solución general de una ecuación no homogénea es la suma de una solución particular y de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

Euler y Lagrange destacaron de manera similar el papel de las ecuaciones diferenciales lineales.

Grassmann creó un camino directo hacia la concepción del álgebra lineal en su tratado de vanguardia *Teoría de la extensión*.

Él construyó un vasto edificio algebraico geométrico, que se apoyó sobre una concepción intrínseca casi axiomatizada de espacio vectorial con n dimensiones (Bourbaki), anticipando así los grandes conceptos del álgebra lineal.

La obra, de una gran complejidad, había que estudiarla a fondo para que comenzara a fructificar, lo que hizo primordialmente Peano, quien allí pudo forjar la axiomatización para los espacios vectoriales, como se los conoce en la actualidad. Los axiomas para la aritmética de Peano provienen de Dedekind, en el espíritu de Grassmann.

Así pues, refinando los procedimientos para resolver sistemas lineales, no sólo los sistemas finitos, sino también los originados por cuestiones en el análisis funcional, en infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas; haciendo luego un alto en ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, y reflexionando finalmente en las lucubraciones de Grassmann, así se recorre el largo camino que culmina a mediados del siglo XX en el álgebra lineal.

Con todo, resulta indispensable pensar en el ambiente donde se han depurado todos esos pensamientos, es decir, en la geometría euclidiana. Prácticamente visible por todas partes en los planes de estudio hasta los años cincuenta del siglo XX, retrocede y deja el lugar a la recién llegada álgebra lineal.

Bourbaki alude particularmente a la teoría de magnitudes expuesta por Euclides en el libro V de *Elementos* y a la versión geométrica de los números expuesta en el libro VII.

La algebraización cartesiana de la geometría obligará poco a poco a olvidar el contenido para dedicarse exclusivamente al estudio de la forma. Gran parte de los conceptos del álgebra son refinamientos de los de la geometría. Ahora, la mejor manera de estudiar geometría es pasando por el álgebra lineal.

2.2.3. Función

Si atisbos de procedimientos en álgebra lineal aparecen incluso cuando la matemática cultivada proveía únicamente a las necesidades del comercio, es porque resolvía problemas urgentes de manera bastante comprensible.

Conviene comparar el desenvolvimiento del álgebra lineal, por ejemplo, con el del cálculo diferencial e integral. Éste requería un algoritmo para calcular áreas y volúmenes y no fue fácil dar con él; sin embargo, se perfila antes del álgebra lineal. Ésta comienza a manifestarse antes, pero prácticamente sólo llega al público matemático a mediados del siglo XX, a pesar de que no se queda atrás respecto del cálculo diferencial e integral, en cuanto a las aplicaciones.

Es curioso que el álgebra, incluso la más abstracta, conserve algo del carácter que le atribuía Viète cuando distinguía la *logística numerosa*, o aritmética, de la *logística speciosa*, o álgebra. El álgebra toda parece estar más del lado de la aritmética que de la geometría.

Es muy difícil caracterizar conceptos altamente subordinantes como el de álgebra.

No obstante, desde el punto de vista genético, álgebra ha sido el estudio de operaciones algebraicas, término por precisar; para concebirlo con más nitidez, ha de tenerse en cuenta que tales operaciones son independientes de la naturaleza de los elementos sobre los cuales se efectúan las operaciones.

Una operación algebraica es una función que hace corresponder a dos elementos dados un tercer elemento bien determinado.

Hay fundamentalmente dos clases de operaciones algebraicas.

Una en que el conjunto de definición de la función es el producto cartesiano de dos conjuntos idénticos al conjunto donde la función toma valores. Bourbaki la llama ley de composición. Operación interna puede también denominarse, aunque se siga estando alejado de lo que quiere indicarse.

Un segundo tipo de operación es aquel en el que se considera un conjunto no vacío cualquiera y un segundo conjunto cuyos elementos son llamados operadores. Entonces la operación hace corresponder a una pareja de elementos, uno de cada uno de los conjuntos, un elemento bien determinado del primer conjunto. Se dice entonces que se opera sobre este primer conjunto con elementos del segundo conjunto. A esta operación se la puede llamar externa, o acción de uno de los conjuntos sobre el otro.

Ahora, Bourbaki recuerda que según el capítulo IV de su teoría de conjuntos, dado un conjunto no vacío y una o varias operaciones internas o externas, con algunos axiomas, se obtiene una estructura. A estas estructuras Bourbaki las llama algebraicas. Entonces, álgebra es el estudio de las estructuras algebraicas.

Así, según el mismo capítulo IV de Bourbaki, hay diversas especies de estructuras determinadas por los axiomas.

En el capítulo primero de su tratado de álgebra, Bourbaki desarrolla la teoría de las estructuras algebraicas.

En el capítulo segundo se desarrolla la teoría relativa al álgebra lineal.

En el capítulo tercero se desarrolla el álgebra multilineal.

Esta es la presentación de Bourbaki en la nueva edición de 1970.

Van der Waerden, en la edición de 1937, concebía tres términos:

- Formas lineales con coeficientes en un anillo.
- Módulos de formas lineales.
- Homomorfismos o transformaciones lineales entre los módulos.

La teoría se desarrolla según las hipótesis que se hagan acerca del anillo.

2.2.4. Problemas

Desde el punto de vista de la enseñanza para cualquier asignatura, surge la cuestión de cuál ha de ser el contenido de un curso en caso de introducirla en un plan de estudios. No hay materia, por elemental que sea, para la que no haya que formular preguntas paralizantes acerca de la intensidad, de la finalidad, del acervo teórico, del acervo práctico, de la evaluación finalmente. Dado el auge de la computación, este es, desde luego, un punto más de examen.

El álgebra lineal no escapa a tales urgencias. ¿Cómo se puede presentar el cuestionamiento?

Los temas obligados de un curso de álgebra lineal en el primer nivel universitario son los siguientes: Sistemas lineales. Matrices. Determinantes. Regla de Cramer.

Vectores. Espacios vectoriales. Combinación lineal. Dependencia e independencia lineal. Base. Dimensión. Rango. Cambio de base. Base ortonormal. Transformación lineal. Proyección. Isomorfismo. Valores propios. Vectores propios. Formas canónicas. Formas cuadráticas. Secciones cónicas. Ecuación diferencial matricial. Teorema de Cayley-Hamilton.

Indudablemente, la noción de determinante tiene un papel clave en cuanto diversos conceptos de álgebra lineal suponen el de determinante; puede aseverarse que es capital en las aplicaciones.

Ahora bien, en Van der Waerden, edición de 1937, los determinantes son aludidos en diversos contextos pero no son introducidos axiomáticamente, es decir, no son tratados como sería de suponerse.

Desde luego que para una completa satisfacción teórica, la noción de determinante hay que ubicarla con el álgebra multilineal. Es lo que hace Bourbaki al desarrollar en el parágrafo 8 del capítulo III, "Álgebra multilineal", los siguientes temas: Determinante de un endomorfismo. Caracterización de los automorfismos de un módulo libre de dimensión finita. Determinante de una matriz cuadrada. Cálculo de un determinante. Menores de una matriz. Desarrollo de un determinante. Aplicación a las ecuaciones lineales. Caso de un campo conmutativo. El grupo unimodular. Módulo asociado a un endomorfismo de A-módulo. Polinomio característico de un endomorfismo.

Allí aparecen, entonces, los temas que hacían falta para el curso elemental de álgebra lineal.

Sin embargo, es inocultable el desfase que hace adaptar al álgebra lineal lo que en realidad queda explicado satisfactoriamente sólo en el álgebra multilineal. Y, claro, no hay manera de presentar este álgebra de modo elemental.

Que no es únicamente cuestión de reparos lo atestigua el pasaje siguiente de [p. 14. Gian-Carlo Rota (1997). *Indiscrete thoughts*. Birkhäuser $xxii + 280$ pp.] donde figuran tres eminencias en la matemática del siglo XX: Emil Artin en teoría de números algebraicos; Claude Chevalley en teoría de grupos; André Weil en geometría algebraica.

"Incluso la enseñanza del álgebra lineal en el primer nivel universitario lleva la impronta muy visible de la mano de Emil Artin: había que estar lejos de cualquier mención de bases y determinantes (entredicho extraño, si se considera cómo le gustaba calcular). La alianza de Emil Artin, Claude Chevalley y André Weil había sido formada para suprimir toda traza de determinantes y de resultantes en álgebra. Dos de ellos (André Weil no había fallecido) probablemente estén ahora revolcándose en su tumba".

Algún historiador puede anotar que se trata simplemente de un episodio más, como el de la pugna en el siglo XIX de geómetras analíticos y sintéticos.

Puede considerarse planteado en estos términos el problema de la orientación para los cursos de álgebra lineal: aplicaciones como las requieren los técnicos o enfoque teórico a la altura de Artin, Chevalley o Weil.

La elección no es fácil; tampoco lo es una mixtura. La decisión, finalmente, no la tomará en general quien imparte el curso sino la institución donde el curso se desarrolla.

Referencias

Bourbahi, Nicolás (1969). *Éléments d'histoire des mathématiques. Algèbre linéaire et multilinéaire*, pp. 78-91. 1974. Hermann, 379 pp. (1984). 2007 Springer, 376 pp.

Cajori, Florián (1928). *A history of mathematical notations*. 1993. Dover. $xvi + 451$ pp. $xii + 367$ pp. (two volumes bound as one).

Dorier, Jean-Luc. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, XXII, pp. 227 - 261.

Fearnley-Sander, Desmond (1979). Hermann Grassmann and the creation of linear algebra. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 86, No. 10, pp. 809 - 817.

Grassmann, Hermann (1844). *Teoría de la extensión*. 1947. Espasa-Calpe, 334 pp.

Moore, Gregory H. (1995). The axiomatization of linear algebra 1875 - 1940. *Historia Mathematica*, XXII, pp. 262 - 303.

Van der Waerden, Bartel Leenert (1983). *Geometry and algebra in ancient civilizations*. Springer-Verlag, $xii + 223$ pp.

Van der Waerden, Bartel Leenert (1985). *A history of algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Springer-Verlag, $xi + 271$ pp.

2.3. Las densidades de rotación y expansión de un campo vectorial

Ernesto Acosta Gempeler[3]
Bernarda Aldana Gómez[4]

2.3.1. Introducción

Este trabajo se escribió como material para el cursillo "Otro enfoque de la enseñanza del curso de cálculo vectorial", para el Seminario de Matemática Educativa realizado en la Escuela Colombiana de Ingeniería del 22 al 24 de octubre de 2009. Es el resultado de muchas reflexiones acerca del curso impartido por los profesores en la Escuela durante varios semestres.

Presentamos a continuación las curvas, las superficies y los sólidos como imágenes de funciones vectoriales, siendo estas últimas un instrumento fundamental para el estudio de la geometría de estos objetos geométricos, que en últimas servirán para modelar objetos físicos, por ejemplo. Definimos la integral de funciones definidas en estos objetos geométricos presentando los elementos de longitud de arco, área de superficie y volumen de sólido en términos de sus parametrizaciones. Introducimos los conceptos de densidad de circulación y densidad de flujo en una curva, mediante las cuales definimos las densidades de expansión y rotación de un campo. Estos últimos conceptos permiten una formulación y demostración más amable de los teoremas de la divergencia y la rotación (Stokes).

2.3.2. Curvas y superficies

Consideraremos primero funciones vectoriales definidas en algún intervalo I de números reales y que toman valores en el espacio de vectores bidimensionales o tridimensionales. Más precisamente, funciones de la forma:

$$\mathbf{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$$

Por ser esta última una función que toma valores en $\mathbb{R}^3$, tiene tres componentes escalares: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Cada una de estas componentes escalares está determinada por una función definida en I y que toma valores en $\mathbb{R}$. El intervalo I es el dominio de

[3] Matemático de la Universidad Nacional, magíster en matemáticas de la Universidad del Valle y doctor en matemáticas de la Universidad de Cornell. Profesor de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

[4] Licenciada en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y magíster en matemáticas de la Universidad Nacional. Profesora de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

la función vectorial puede ser de cualquiera de las siguientes formas: $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$ (o sin que los extremos reales sean parte del dominio). Siendo $x,y,z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas en un intervalo real y que toman valores en $\mathbb{R}$, se puede extender lo aprendido en los cursos de cálculo diferencial e integral a funciones vectoriales. Por ejemplo, si los lmites $\lim_{t\to a} x(t)$, $\lim_{t\to a} y(t)$ y $\lim_{t\to a} z(t)$ existen, se tiene que

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}\,(t) = \left\langle \lim_{t\to a} x(t), \lim_{t\to a} y(t), \lim_{t\to a} z(t) \right\rangle,$$

la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$ ser diferenciable en I si cada una de sus componentes escalares lo es. Además, la derivada de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$ en $t = a$ viene dada por

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(a) = \left\langle \frac{dx}{dt}(a), \frac{dy}{dt}(a), \frac{dz}{dt}(a) \right\rangle$$

siempre y cuando las derivadas $\frac{dx}{dt}(a)$, $\frac{dy}{dt}(a)$ y $\frac{dz}{dt}(a)$ existan.

Por otro lado, si cada una de las componentes escalares, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$ se puede integrar sobre $[a,b]$, entonces la integral de $\mathbf{r}$ entre a y b viene dada por

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left\langle \int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt \right\rangle$$

En fin, podemos hacer cálculo diferencial y cálculo integral de funciones vectoriales recurriendo al cálculo de sus componentes escalares.

Curvas

El vector $\langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ se puede interpretar como el vector posición de un punto P de coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$. Así, cuando t recorre el intervalo I, el punto P describe una curva en el espacio, cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

En otras palabras, el conjunto de puntos

$$\{(x,y,z); x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), t \in I\},$$

que no es otra cosa que el recorrido de la función vectorial, es una curva en el espacio[5]. Por definición, una curva será el recorrido de una función vectorial. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función vectorial cuyo recorrido es

[5]En este contexto supondremos que las funciones vectoriales que parametrizan las curvas tienen derivadas continuas.

precisamente C. Una parametrización de C es una función vectorial cuyo recorrido es C.

Por ejemplo, consideremos una recta en el espacio que pasa por el punto $P(a,b,c)$ y que es paralela al vector $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$. La condición para que un punto $Q(x,y,z)$ esté en la recta es que los vectores PQ y $\mathbf{v}$ sean paralelos o, en otras palabras, que para algún número real t, se tenga $PQ=t\mathbf{v}$. Esta última condición se puede escribir en términos de las componentes escalares de los vectores, dando como resultado

$$x-a=tv_1, \quad y-b=tv_2(t), \quad z-c=tv_3(t),$$

que es la parametrización de la recta

$$\mathbf{r}(t)=\langle a+tv_1, b+tv_2, c+tv_3\rangle\,,$$

$\mathbf{r}$ parametriza a la recta que pasa por $P(a,b,c)$ y que tiene vector director $\mathbf{v}\ \langle v_1,v_2,v_3\rangle$. En otras palabras, esta recta es una curva. Considere la curva en el espacio, cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x=x(t), \qquad y=y(t), \qquad z=z(t), \qquad t\in I.$$

Es decir, la curva parametrizada por la función vectorial

$$\mathbf{r}\,:I\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{r}(t)=\langle x(t),y(t),z(t)\rangle$$

Como $\mathbf{r}$ es derivable en t y $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}(t)=\mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{o}$, para todo $t\in I$. Entonces, el vector

$$\mathbf{r}'(t)=\left\langle\frac{dx}{dt}(t),\frac{dy}{dt}(t),\frac{dz}{dt}(t)\right\rangle=\langle x'(t),y'(t),z'(t)\rangle$$

es un vector tangente a la curva en el punto $P(x(t),y(t),z(t))$. Una curva es regular si tiene una parametrización $\mathbf{r}$, para la cual $\|\mathbf{r}'\|\neq 0$. Para curvas regulares podemos definir el vector unitario

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

que es el vector tangente unitario a la curva en el punto $P(x(t),y(t),z(t))$. La geometría de las curvas se hace estudiando el comportamiento del vector tangente unitario.

Superficies

Tenemos también funciones vectoriales de dos variables. Son funciones definidas en alguna celda $[a,b]\times[c,d]$ y que toman valores en el espacio de vectores bidimensionales o tridimensionales. Más precisamente, una función vectorial (tridimensional) de dos variables es una función de la forma:

$$\mathbf{r}\,:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{r}(t,s)=\langle x(t,s),y(t,s),z(t,s)\rangle$$

Por ser una función que toma valores en $\mathbb{R}^3$, ésta tiene tres componentes escalares: $x(t,s)$, $y(t,s)$, $z(t,s)$. Cada una de estas componentes escalares está determinada por una función definida en $[a,b]\times[c,d]$ y que toma valores en $\mathbb{R}$. La celda $[a,b]\times[c,d]$ es el dominio de la función vectorial. Obsérvese que para cada valor fijo s_0 en $[c,d]$, $\mathbf{r}(\cdot,s_0) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial de una variable y que para cada valor fijo t_0 en $[a,b]$, $\mathbf{r}(t_0,\cdot) : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial de una sola variable. Si estas últimas son derivables, escribiremos sus derivadas como $\mathbf{r}_t$ y $\mathbf{r}_s$, respectivamente.

El recorrido de una función vectorial de dos variables es una superficie cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x = x(t,s), \qquad y = y(t,s), \qquad z = z(t,s).$$

En otras palabras, el conjunto de puntos

$$\{(x,y,z); x = x(t,s), \quad y = y(t,s), \quad z = z(t,s), (t,s) \in [a,b]\times[c,d]\},$$

que no es otra cosa que el recorrido de la función vectorial, es una superficie en el espacio[6]. Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es una superficie si existe una función vectorial de dos variables cuyo recorrido es precisamente S. Una parametrización de S es una función vectorial cuyo recorrido es S.

Obsérvese que las curvas $\mathbf{r}(\cdot,\mathbf{s_o})$ y $\mathbf{r}(\mathbf{t_o},\cdot)$ están contenidas en la superficie y, por consiguiente, los vectores tangentes $\mathbf{r}_t$ y $\mathbf{r}_s$ a cada una de estas curvas, en ese orden, son, por ende, tangentes a la superficie. Diremos que una superficie es regular si $\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_s$ es no nulo en cada uno de sus puntos. La variación de los vectores tangentes unitarios sobre la superficie da información sobre la geometría de las superficies.

El conjunto S de puntos (x,y,z) tales que $ax+by+cz=0$ es una superficie. En efecto, S es un plano y los vectores $\mathbf{u} = \langle 0,-c,b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -c,0,a\rangle$ son paralelos a S. Por consiguiente, el punto de coordenadas (x,y,z) está en el plano si, y solamente si, el vector $\langle x,y,z\rangle$ es combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$: $\langle x,y,z\rangle = t\langle 0,-c,b\rangle + s\langle -c,0,a\rangle$. Esta última no es otra cosa que una parametrización del plano.

También tenemos superficies en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, el disco

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\right\}$$

es una superficie. En efecto, $\mathbf{r} : [0,2]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{r}(u,v) = \langle u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v\rangle$ es una parametrización de D. Es claro que

$$D = \{(u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v) : (u,v) \in [0,2]\times[0,2\pi]\}.$$

[6] Así como lo hemos supuesto en el caso de curvas, supondremos aquí que $\mathbf{r}_t$ y $\mathbf{r}_s$ son continuas.

2.3.3. Integrales múltiples

En cursos de cálculo anteriores se estudió el concepto de integral de una función f de una sola variable, definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Los conceptos relacionados son los de partición de un intervalo, suma de Riemann y límite de una suma de Riemann, los que vamos a extender a funciones de varias variables. Dos resultados importantes que se usan frecuentemente son que el límite de una suma de Riemann de una función continua, cuando la norma de la partición tiende a cero, siempre existe (es decir, toda función continua definida en un intervalo cerrado es integrable) y el teorema fundamental del cálculo que dice que el valor de la integral de una función continua sobre un intervalo cerrado es la diferencia de los valores de una primitiva en los extremos del intervalo (¡dándole vuelta al problema de calcular sumas de Riemann de la función!).

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Una partición del intervalo $[a, b]$ se obtiene escogiendo un número finito de puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Podemos suponer que estos puntos son equidistantes, es decir, que $x_{k+1} - x_k = (b-a)/n = \Delta x$. Una suma de Riemann está definida por una partición (o sea, por la escogencia de un número natural n) y por la escogencia de un punto de muestra x_k^* en cada uno de los subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ de $[a, b]$ definidos por la partición, así:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(f, n, *) &= f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1}) \\ &= f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x \cdots + f(x_n^*)\Delta x \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x\end{aligned}$$

La integral de f sobre $[a, b]$ es el límite de estas sumas de Riemann cuando n tiende a infinito (que existe para funciones continuas e independientemente de los puntos de muestra escogidos):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(f, n, *) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Nuevamente en este caso, para extender el concepto de integral debemos tener en cuenta funciones con dominios más complejos que en el caso de una sola variable. Lo que haremos es extender el concepto a funciones f cuyos dominios son 2-celdas (rectángulos con lados paralelos a los ejes coordenados):

$$\begin{aligned}R &= \{(x, y) : a \le x \le b, \quad c \le y \le d\} \\ &= [a, b] \times [c, d],\end{aligned}$$

La extensión a funciones f cuyos dominios son 3-celdas (paralelepípedos rectangulares con caras paralelas a los planos coordenados):

$$\begin{aligned} P &= \{(x,y,z) : a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad e \le z \le h\} \\ &= [a,b] \times [c,d] \times [e,h]. \end{aligned}$$

es natural y no involucra ideas muy diferentes de las consideradas en dos variables.

En el caso de dos variables, una partición de R se obtiene escogiendo particiones de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ y $y_0 = c < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d$, respectivamente. Así, la 2-celda R queda dividida en $m \times n$ subceldas de la forma $[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. La escogencia puede hacerse de tal modo que $x_{k+1} - x_k = (b-a)/n = \Delta x$ y que $y_{j+1} - y_j = (c-d)/m = \Delta y$, en cuyo caso todas las subceldas tendrán la misma área $\Delta A = (x_{k+1} - x_k)(y_{j+1} - y_j) = ((b-a)/n)((c-d)/m) = \Delta x \Delta y$. Escogemos un punto de muestra (x^*_{kj}, y^*_{kj}) en cada subcelda $[x_k, x_{k+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ y definimos la suma de Riemann de f correspondiente a esta partición y esta escogencia de punto de muestra así:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(f, n, , m, *) = \\ = \;& f(x^*_{11}, y^*_{11})\Delta A + f(x^*_{21}, y^*_{21})\Delta A + \cdots + f(x^*_{n1}, y^*_{n1})\Delta A \\ + \;& f(x^*_{12}, y^*_{12})\Delta A + f(x^*_{22}, y^*_{22})\Delta A + \cdots + f(x^*_{n2}, y^*_{n2})\Delta A \\ &\vdots \\ + \;& f(x^*_{1m}, y^*_{1m})\Delta A + f(x^*_{2m}, y^*_{2m})\Delta A + \cdots + f(x^*_{nm}, y^*_{nm})\Delta A \\ = \;& \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{kj}, y^*_{kj})\Delta A \end{aligned}$$

La integral de f sobre R es el límite de estas sumas de Riemann cuando n y m tienden a infinito (que existe para funciones continuas e independientemente de los puntos de muestra escogidos):

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_R f(x,y)dA &= \textstyle\lim_{n,m\to\infty} \mathcal{R}(f, n, m, *) \\ &= \textstyle\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x^*_{kj}, y^*_{kj})\Delta A \end{aligned}$$

Evidentemente, el cálculo de una integral doble o triple es una tarea muy dispendiosa a través de las sumas de Riemann. Sin embargo, tales sumas son un instrumento de aproximación muy útil de estas integrales. Veremos ahora un método para calcularlas sin necesidad de recurrir a las sumas de Riemann. Éste consiste en escribir la integral (múltiple) como una integral iterada, es decir, una secuencia de integrales unidimensionales parciales que se calcularán recurriendo al teorema fundamental del cálculo. Definamos primero lo que es una integral iterada. Lo haremos en el caso de funciones de dos variables; el caso de tres variables es similar.

Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, $R = [a, b] \times [c, d]$, una función continua. Para cada $x \in [a, b]$ definimos $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Resulta que la función $A : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, y por consiguiente se puede calcular su integral:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx,$$

que se conoce como integral iterada. El teorema de Fubini, que es una generalización del principio de Cavalieri para calcular volúmenes de sólidos, establece que la integral doble de f sobre R es igual a esta integral iterada. Explícitamente, si f es continua en R se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy \end{aligned}$$

Para dar cuenta de las integrales de funciones definidas en regiones más generales que las 2-celdas y las 3-celdas, como por ejemplo curvas, superficies y sólidos, recurriremos a la parametrización que portan estos objetos geométricos.

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, definida en una superficie regular D del plano y $\mathbf{r}$ una parametrización de D

$$\mathbf{r} : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v) \rangle,$$

(e inyectiva)[7].

Una partición de la superficie D en subregiones D_{ij} se obtiene a partir de una partición de $[a, b] \times [c, d]$ en subceldas $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$:

$$D_{ij} = \{(x(u, v), y(u, v)) : (u, v) \in [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]\}.$$

Escogemos en cada subregión D_{ij} el punto $P_{ij}(x(u_{i-1}, v_{j-1}), y(u_{i-1}, v_{j-1}))$. Una suma de Riemann de f sobre D con respecto a la parametrización $\mathbf{r}$ y a una partición de D en $m \times n$ subregiones, está definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f, m, n, \mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \left\| \Delta u\, \mathbf{r}_u \times \Delta v\, \mathbf{r}_v \right\|, \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \left\| \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \right\| \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

[7]Hemos puesto inyectiva entre paréntesis porque en realidad la inyectividad se exige a la restricción de $\mathbf{r}$ en el interior $(a, b) \times (c, d)$ de la 2-celda.

donde $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son las derivadas de $\mathbf{r}$ con respecto a u y a v, respectivamente, en P_{ij}. La integral de f sobre D con respecto a $\mathbf{r}$ [8] es el límite de $\mathcal{R}(f, m, n, \mathbf{r})$ cuando m y n tienden a infinito:

$$\begin{aligned}\iint_D f dA &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{i,j}) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v \\ &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x(u,v), y(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dudv\end{aligned}$$

La aparición de $\|\Delta u\, \mathbf{r}_u \times \Delta v\, \mathbf{r}_v\|$ en la suma de Riemann se debe a que ésta es el área del paralelogramo formado por $\Delta u\, \mathbf{r}_u$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v$, que es una aproximación del área de la subregión D_{ij}.

Obsérvese que si $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\mathbf{r} : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por $\mathbf{r}(u,v) = \langle u, v \rangle$, entonces $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = 1$, y por consiguiente

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f dA = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(u,v) dudv.$$

Es decir, las integrales sobre 2-celdas es un caso particular de integrales sobre superficies (¡por supuesto!, las 2-celdas son superficies).

Como ejemplo calculemos la integral de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el disco $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ con respecto a la parametrización de D que dimos anteriormente. Tenemos que

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \|\langle \cos v, \operatorname{sen} v \rangle \times \langle -u \operatorname{sen} v, u \cos v \rangle\| = u,$$

y por tanto,

$$\iint_D f dA = \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} u^2 u dudv = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} u^3 dv \right) du = 8\pi$$

Sea $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, definida en una curva regular D del plano y $\mathbf{r}$ una parametrización de C

$$\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(u) = \langle x(u), y(u), z(u) \rangle,$$

(e inyectiva)[9].

Una partición de la curva C en subarcos C_i se obtiene a partir de una partición de $[a,b]$ en subintervalos $R_i = [u_{i-1}, u_i]$:

$$C_i = \{(x(u), y(u), z(u)) : u \in [u_{i-1}, u_i]\}.$$

[8] El teorema de cambio de variable garantiza que el valor de la integral es independiente de la parametrización.

[9] Hemos puesto inyectiva entre paréntesis porque en realidad la inyectividad se exige a la restricción de $\mathbf{r}$ en el interior (a,b) de la 1-celda.

Escogemos en cada subarco C_i el punto $P_i(x(u_{i-1}), y(u_{i-1}), z(u_{i-1}))$. Una suma de Riemann de f sobre C con respecto a la parametrización $\mathbf{r}$ y a una partición de C en m subarcos, está definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f,m,\mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} f(P_i)\,\|\Delta u\,\mathbf{r}'(P_i)\|\,, \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} f(P_i)\,\|\mathbf{r}'(P_i)\|\,\Delta u. \end{aligned}$$

La integral de f sobre C con respecto a $\mathbf{r}$ [10] es el límite de $\mathcal{R}(f,m,\mathbf{r})$ cuando m tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_C f dL &= \lim_{m\to\infty} \textstyle\sum_{i=1}^{m} f(P_i)\,\|\mathbf{r}'(P_i)\|\,\Delta u \\ &= \textstyle\int_{[a,b]} f(x(u), y(u), z(u))\,\|\mathbf{r}'(u)\|\,du \end{aligned}$$

La aparición de $\|\Delta u\,\mathbf{r}'\|$ en la suma de Riemann se debe a que ésta es la longitud del vector $\Delta u\,\mathbf{r}'$, que es una aproximación de la longitud del subarco C_i.

Como ejemplo calculemos la integral de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la curva $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}$ con respecto a la parametrización de C que dimos anteriormente. Tenemos que

$$\|\mathbf{r}'\| = \|\langle -2\operatorname{sen} u, 2\cos u\rangle\| = 2,$$

y por tanto,

$$\int_C f dL = \int_{[0,2\pi]} 8du = \int_0^{2\pi} 8du = 16\pi$$

En resumen, para definir el concepto de integral múltiple de funciones definidas sobre *curvas*, *superficies* y *sólidos*, recurrimos a sus parametrizaciones mediante funciones vectoriales $\mathbf{r}$ de una, dos y tres variables, respectivamente. Para diferenciar la *dimensión* de la integral introducimos los siguientes elementos de integración:

1. Elemento de **longitud** de arco:

$$dL = \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

2. Elemento de **rea** de superficie:

$$dA = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,dudv$$

3. Elemento de **volumen** de sólido:

$$dV = |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w|\,dudvdw$$

[10] El teorema de cambio de variable garantiza que el valor de la integral es independiente de la parametrización.

Con esta terminología podemos escribir:

1. $\int_{\text{curva}} f dL = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$

2. $\iint_{\text{superficie}} f dA = \int_a^b \int_c^d f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dudv.$

3. $\iiint_{\text{sólido}} f dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(\mathbf{r}(u,v,w)) |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_w| dudvdw.$

2.3.4. Rotación y expansión de campos vectoriales

Los campos vectoriales son un tipo de función que se usa para modelar fenómenos de asignación vectorial, como por ejemplo el campo de velocidades de un fluido, el campo eléctrico, el campo magnético y el campo gravitacional. Desde el punto de vista matemático, un campo vectorial es una función definida en algún conjunto y que toma valores en un espacio vectorial. Nos ocuparemos aquí del estudio de campos vectoriales bidimensionales y tridimensionales. Un campo vectorial bidimensional es una función $\mathbf{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x,y) = \langle P(x,y), Q(x,y) \rangle \, ; \quad (x,y) \in D.$$

Un campo vectorial tridimensional es una función $\mathbf{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \rangle \, ; \quad (x,y,z) \in D.$$

La mejor forma de representar un campo vectorial es dibujando a partir de unos cuantos puntos $(x,y) \in D$ los vectores $\mathbf{F}(x,y)$ correspondientes.

Circulación y flujo

Los dos conceptos más importantes relacionados con campos vectoriales son el flujo y la circulación, que se hacen evidentes al estudiar la interacción de los campos con curvas y superficies. Analizaremos primero estos dos conceptos en campos vectoriales bidimensionales, para los cuales nos interesa estudiar su interacción con curvas contenidas en sus dominios.

Consideremos un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ y una curva C en D parametrizada por una función vectorial $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Definimos la densidad de circulación del campo $\mathbf{F}$ en el punto $(x(t), y(t))$ de la curva por

$$\delta_c(x(t), y(t)) = \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{T}(t),$$

donde $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario a la curva en el punto $(x(t), y(t))$. En otras palabras, la densidad de circulación de $\mathbf{F}$ en el punto $(x(t), y(t))$, $\delta_c(x(t), y(t))$, es la componente tangencial del campo en ese punto.

Definimos la densidad de flujo del campo $\mathbf{F}$ en el punto $(x(t), y(t))$ de la curva por

$$\delta_f(x(t), y(t)) = \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{N}(t),$$

donde $\mathbf{N}(t)$ es el vector normal unitario a la curva en el punto $(x(t), y(t))$, que se obtiene al girar $\mathbf{T}(t)$ 90 grados hacia la derecha (o hacia la izquierda, dependiendo de la orientación que quiera darse a la curva). En otras palabras, la densidad de flujo de $\mathbf{F}$ en el punto $(x(t), y(t))$, $\delta_f(x(t), y(t))$ es la componente normal del campo en ese punto. Obsérvese que las densidades de circulación δ_c y flujo δ_f de un campo son funciones escalares con dominio C, la curva parametrizada por la función vectorial $\mathbf{r}$. Por ser $\mathbf{N}$ el vector que se obtiene al rotar $\mathbf{T}$ 90 grados hacia la derecha, se tiene que como

$$\mathbf{T} = \left\langle \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right\rangle$$

entonces

$$\mathbf{N} = \left\langle -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right\rangle.$$

Así como al integrar la densidad de masa se obtiene la masa, en este caso al integrar la densidad de circulación del campo sobre la curva se obtiene la circulación del campo a lo largo de la curva:

Circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva =

$$\begin{aligned}
&= \int_C \delta_c dL \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) \, \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \, \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_a^b P(\mathbf{r}(t)) x'(t) + Q(\mathbf{r}(t)) y'(t) dt \\
&= \int_C P dx + Q dy \\
&:= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}
\end{aligned}$$

Así mismo, al integrar la densidad de flujo del campo sobre la curva se obtiene el flujo del campo a través de la curva:

Flujo de $\mathbf{F}$ a través de la curva =

$$
\begin{aligned}
&= \int_C \delta_f dL \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \left\langle -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \right\rangle \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \\
&= \int_a^b \langle P(\mathbf{r}(t)), Q(\mathbf{r}(t))\rangle \cdot \langle -y'(t), x'(t)\rangle\, dt \\
&= \int_a^b Q(\mathbf{r}(t))x'(t) - P(\mathbf{r}(t))y'(t)dt \\
&= \int_C Qdx - Pdy \\
&= \int_C \widetilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{L},
\end{aligned}
$$

donde $\widetilde{\mathbf{F}} = \langle Q, -P\rangle$ es el campo dual del campo $\mathbf{F}$. Lo que se muestra en la cadena de igualdades es que el flujo de un campo a través de una curva es igual a la circulación del campo dual a lo largo de la misma curva.

Densidad de rotación y densidad de expansión

Los conceptos de densidad de rotación y de densidad de expansión son claves para entender los conceptos de rotacional y divergencia de un campo vectorial y los teoremas fundamentales: el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia. La idea es calcular la circulación y el flujo por unidad de área en cada uno de los puntos del dominio del campo vectorial. Haremos esto en el punto $(0,0)$ que supondremos en el dominio de un campo vectorial bidimensionales $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$. Supondremos además que las componentes escalares del campo, P y Q, tienen derivadas parciales continuas en $(0,0)$.

Aproximemos la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo del borde del cuadrado de vértices $(\Delta x, \Delta y)$, $(-\Delta x, \Delta y)$, $(-\Delta x, -\Delta y)$ y $(\Delta x, -\Delta y)$, orientado con el movimiento de las manecillas del reloj, en la siguiente forma:

Circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de $C =$

$$\begin{aligned}
&= \text{Suma de circulaciones de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de cada lado de C} \\
&\approx 2\Delta y \mathbf{F}(\Delta x, 0) \cdot \mathbf{j} + 2\Delta x \mathbf{F}(0, \Delta y) \cdot (-\mathbf{i}) \\
&\quad +2\Delta y \mathbf{F}(-\Delta x, 0) \cdot (-\mathbf{j}) + 2\Delta x \mathbf{F}(0, -\Delta y) \cdot \mathbf{i} \\
&= 2\Delta y(Q(\Delta x, 0)) - Q(-\Delta x, 0)) - 2\Delta x(P(0, \Delta y) - P(0, -\Delta y)) \\
&= 4\Delta x \Delta y Q_x(\alpha, 0)) - 4\Delta x \Delta y P_y(0, \beta) \\
&= 4\Delta x \Delta y(Q_x(\alpha, 0)) - P_y(0, \beta)),
\end{aligned}$$

donde $\alpha \in (-\Delta x, \Delta x)$ y donde $\beta \in (-\Delta y, \Delta y)$. En el último paso se hizo uso del teorema del valor medio para derivadas. Si utilizamos la continuidad de las derivadas parciales de P y Q, obtenemos:

Densidad de rotación de $\mathbf{F}$ en $(0, 0)$
:= Circulación por unidad de área de $\mathbf{F}$ en $(0, 0)$

$$\begin{aligned}
&= \text{lím}_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\text{Circulación de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de } C}{\text{área de } C} \\
&= \text{lím}_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{4\Delta x \Delta y(Q_x(\alpha, 0)) - P_y(0, \beta))}{4\Delta x \Delta y} \\
&= Q_x(0, 0) - P_y(0, 0)
\end{aligned}$$

Aproximemos el flujo del campo $\mathbf{F}$a través del borde del cuadrado de vértices $(\Delta x, \Delta y)$, $(-\Delta x, \Delta y)$, $(-\Delta x, -\Delta y)$ y $(\Delta x, -\Delta y)$ en la siguiente forma:

Flujo de $\mathbf{F}$ a través de $C =$

$$\begin{aligned}
&= \text{Suma de flujos de } \mathbf{F} \text{ a través de cada cara} \\
&\approx 2\Delta y \mathbf{F}(\Delta x, 0) \cdot \mathbf{i} + 2\Delta x \mathbf{F}(0, \Delta y) \cdot \mathbf{j} \\
&\quad +2\Delta y \mathbf{F}(-\Delta x, 0) \cdot (-\mathbf{i}) + 2\Delta x \mathbf{F}(0, -\Delta y) \cdot (-\mathbf{j}) \\
&= 2\Delta y(P(\Delta x, 0)) - P(-\Delta x, 0)) + 2\Delta x(Q(0, \Delta y) - Q(0, -\Delta y)) \\
&= 4\Delta x \Delta y P_x(\alpha, 0)) + 4\Delta x \Delta y Q_y(0, \beta) \\
&= 4\Delta x \Delta y(P_x(\alpha, 0)) + Q_y(0, \beta)),
\end{aligned}$$

donde $\alpha \in (-\Delta x, \Delta x)$ y donde $\beta \in (-\Delta y, \Delta y)$. En el último paso se hizo uso del teorema del valor medio para derivadas. Si utilizamos la continuidad de las derivadas parciales de P y Q, obtenemos:

Densidad de expansión de $\mathbf{F}$ en $(0,0)$
:= Flujo por unidad de área de $\mathbf{F}$ en $(0,0)$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{lím}_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C}{\text{área de } C} \\
&= \operatorname{lím}_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{4\Delta x\Delta y(P_x(\alpha,0)) + Q_y(0,\beta))}{4\Delta x\Delta y} \\
&= P_x(0,0) + Q_y(0,0)
\end{aligned}
$$

Las densidades de rotación y de expansión se pueden calcular en todos los puntos del dominio del campo $\mathbf{F}$, de la misma manera en que se calculó en el punto $(0,0)$. En resumen, tenemos:

$$\text{Densidad de rotación de } \mathbf{F} \text{ en } (x,y) = Q_x(x,y) - P_y(x,y)$$

$$\text{Densidad de expansión de } \mathbf{F} \text{ en } (x,y) = P_x(x,y) + Q_y(x,y).$$

Circulación de campos gradiente

Un ejemplo de campo vectorial es el que proviene del gradiente de una función (de dos o de tres variables). El argumento que presentamos a continuación, válido para funciones de dos o de tres variables, es para mostrar que la circulación de un campo gradiente no depende de la curva que se considere sino del punto de partida y del punto de llegada. Considere una función f de varias variables con dominio D y C una curva en D parametrizada por una función vectorial $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow D$ continua. Calculemos la circulación del campo vectorial ∇f a lo largo de C:

Circulación de ∇f a lo largo de C =

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d(f\circ \mathbf{r})}{dt}(t)dt \\
&= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))
\end{aligned}
$$

Recíprocamente, si la circulación de un campo $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva dentro del dominio sólo depende de los extremos de la curva, entonces el campo vectorial es un campo gradiente. En efecto, debido a la suposición hecha, está bien definida la función $f(x,y,z) = \int_{[(a,b,c),(x,y,z)]} \delta_c dL$, donde la integral se calcula sobre cualquier curva que parta del punto (a,b,c) y termine en el punto (x,y,z). Se puede demostrar que $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ (ejercicio).

2.3.5. Divergencia y rotacional

La idea ahora es extender los conceptos de densidad de rotación y de densidad de expansión a campos vectoriales tridimensionales. Para esto, tenemos que extender el concepto de flujo de un campo a través de una curva al de flujo de un campo a través de una superficie. Supongamos que S es una superficie contenida en el dominio D de un campo vectorial $\mathbf{F}$, y que ésta es orientable, es decir, que podemos parametrizarla de manera inyectiva mediante una función vectorial $\mathbf{r} : \mathcal{R} \longrightarrow D$, y tal que $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|$ no se anule. Sea $N(u,v) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)/\,\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|$. La densidad de flujo del campo en cada punto de la superficie se define como la componente del campo en la dirección del vector normal: $\delta_f(x,y,z) = \mathbf{F}(x,yz) \cdot N(u,v)$. El flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie es la integral de δ_f sobre la superficie:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_S \delta_f dr &= \textstyle\iint_S \mathbf{F} \cdot N dr \\
&= \textstyle\iint_{\mathcal{R}} \mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dudv \\
&= \textstyle\iint_{\mathcal{R}} \mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv
\end{aligned}$$

Con este concepto de flujo de un campo a través de una superficie podemos generalizar el concepto de densidad de expansión de un campo tridimensional en los puntos de su dominio. En efecto, consideremos una 3-celda centrada en $(0,0,0)$; calculamos el flujo de $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ a través de la 3-celda, dividimos por el volumen de la 3-celda y hacemos tender sus lados a cero. Obtenemos así la densidad de expansión del campo $\mathbf{F}$ en el punto $(0,0,0)$. Al hacer explícitamente los cálculos, tal como en campos bidimensionales, se obtiene que la densidad de expansión en un punto (x,y,z) es $P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z)$. Es frecuente en la literatura sobre el tema llamar divergencia a la densidad de expansión y escribirlo así:

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Como la circulación de un campo tiene sentido únicamente a lo largo de una curva, definiremos la densidad de rotación de un campo tridimensional en un punto de su dominio referida a un plano que pasa por él. Como en los casos anteriores, calcularemos esta densidad en el punto $(0,0,0)$ en el plano parametrizado por $\mathbf{r}(x,y) = \langle x, y, ax+by\rangle$. Calculemos la circulación de $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ a lo largo del paralelogramo C de vértices

$$(\Delta x, \Delta y, a\Delta x + b\Delta y), \quad (-\Delta x, \Delta y, -a\Delta x + b\Delta y),$$

$$(-\Delta x, -\Delta y, -a\Delta x - b\Delta y) \quad \text{y} \quad (\Delta x, -\Delta y, a\Delta x - b\Delta y)$$

orientado en contra del movimiento de las manecillas del reloj:

Circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de $C =$

$$\begin{aligned}
&= \text{Suma de circulaciones de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de cada lado de C} \\
&\approx 2\Delta y\sqrt{1+b^2}\mathbf{F}(\Delta x, 0, a\Delta x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \langle 0, 1, b\rangle \\
&\quad +2\Delta x\sqrt{1+a^2}\mathbf{F}(0, \Delta y, b\Delta y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \langle -1, 0, -a\rangle \\
&\quad +2\Delta y\sqrt{1+b^2}\mathbf{F}(-\Delta x, 0, -a-\Delta x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \langle 0, -1, -b\rangle \\
&\quad +2\Delta x\sqrt{1+a^2}\mathbf{F}(0, -\Delta y, -b\Delta) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \langle 1, 0, a\rangle \\
&= 2\Delta y(Q(\Delta x, 0, a\Delta x)) - Q(-\Delta x, 0, -a\Delta x) + bR(\Delta x, 0, a\Delta x)) - bR(-\Delta x, 0, -a\Delta x)) \\
&\quad -2\Delta x(P(0, \Delta y, b\Delta y) - P(0, -\Delta y, -b\Delta y) + aR(0, \Delta y, b\Delta y) - aR(0, -\Delta y, b\Delta y)) \\
&= 4\Delta x\Delta y(Q_x(\alpha_2, 0, a\Delta x) + aQ_z(-\Delta x, 0, \beta_2) + bR_x(\alpha_3, 0, a\Delta x) + abR_z(-\Delta x, 0, \beta_3)) \\
&\quad -4\Delta x\Delta y(P_y(0, \alpha_1, b\Delta y) + bP_z(0, -\Delta y, \beta_1) + aR_y(0, \alpha_4, b\Delta y) + abR_z(0, -\Delta y, \beta_4)),
\end{aligned}$$

donde $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \in (-\Delta x, \Delta x)$ y donde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_4, \beta_4 \in (-\Delta y, \Delta y)$ (ver circulación). En el último paso se utilizó el teorema del valor medio para derivadas. Dividiendo por el área del paralelogramo, $4\Delta x\Delta y\sqrt{1+a^2+b^2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\text{Circulación de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de } C}{\text{área de } C} \\
&= \frac{Q_x(\alpha_2, 0, a\Delta x) + aQ_z(-\Delta x, 0, \beta_2) + bR_x(\alpha_3, 0, a\Delta x) + abR_z(-\Delta x, 0, \beta_3)}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \\
&\quad - \frac{P_y(0, \alpha_1, b\Delta y) + bP_z(0, -\Delta y, \beta_1) + aR_y(0, \alpha_4, b\Delta y) + abP_z(0, -\Delta y, \beta_4)}{\sqrt{1+a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

y si usamos la continuidad de las derivadas parciales de P, Q y R, obtenemos:

Densidad de rotación de $\mathbf{F}$ en $(0, 0, 0)$ referida al plano $z = ax + by \quad =$

$$
\begin{aligned}
&= \text{lím}_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\text{Circulación de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de } C}{\text{área de } C} \\
&= \text{lím}_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \\
&\quad \Bigg(\frac{Q_x(\alpha_2,0,a\Delta x)+aQ_z(-\Delta x,0,\beta_2)+bR_x(\alpha_3,0,a\Delta x)+abR_z(-\Delta x,0,\beta_3)}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \\
&\quad - \frac{P_y(0,\alpha_1,b\Delta y)+bP_z(0,-\Delta y,\beta_1)+aR_y(0,\alpha_4,b\Delta y)+abP_z(0,-\Delta y,\beta_4)}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \Bigg) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}(a(Q_z-R_y)+b(R_x-P_z)+(Q_x-P_y)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \langle -a,-b,1\rangle \cdot \langle R_y-Q_z,-(R_x-P_z),Q_x-P_y\rangle ,
\end{aligned}
$$

derivadas parciales evaluadas en $(0,0,0)$.

Obsérvese que el vector $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\langle -a,-b,1\rangle$ es un vector perpendicular al plano $z = ax+by$ y de norma 1. El otro factor es un vector que recibe el nombre de rotacional del campo $\mathbf{F}$ y que en los libros de texto se suele escribir rot$\mathbf{F}$. Dos conclusiones importantes de lo obtenido son:

1. La densidad de rotación en un punto (x,y,z) de un campo vectorial $\mathbf{F}$ referida a un plano con vector normal unitario $\mathbf{N}$ es

$$\text{rot}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{N},$$

   donde

$$
\begin{aligned}
\text{rot}\mathbf{F} &= \langle R_y-Q_z,-(R_x-P_z),Q_x-P_y\rangle \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

2. La densidad de rotación de $\mathbf{F}$ referida a planos paralelos a los planos XY, XZ y YZ son rot$\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{k} = Q_x-P_y$, rot$\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{j} = P_z-R_x$ y rot$\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{i} = R_y-Q_z$, respectivamente.

En la terminología de las densidades, tenemos:

1. Densidad de rotación de $\mathbf{F}$ en un punto (x,y,z) es

$$\delta_{\text{rot}} = \text{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$$

   donde $\mathbf{N}$ es el vector normal al plano sobre el que queremos calcularla.

2. Densidad de expansión de $\mathbf{F}$ en un punto (x, y, z) es

$$\delta_{\text{exp}} = \text{div}\mathbf{F}.$$

Podemos ahora calcular la densidad de rotación de un campo $\mathbf{F}$ en una superficie, calculándola en cada punto de la superficie referida al plano tangente, es decir, calculando la componente normal a la superficie del rotacional de $\mathbf{F}$. En el caso de que la superficie esté parametrizada por una función vectorial diferenciable $\mathbf{r} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tenemos a la mano un vector normal unitario en cada punto: $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$, ya que los vectores $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son vectores linealmente independientes, tangentes a la supeficie. Podemos calcular así la densidad de rotación en cada uno de los puntos de una superficie mediante la fórmula $\text{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$; en otras palabras, la densidad de rotación en una superficie viene dada por:

$$\delta_{\text{rot}} = \text{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

Usando esta notación, podemos escribir la rotación total de un campo $\mathbf{F}$ sobre una superficie S, parametrizada mediante una función vectorial diferenciable $\mathbf{r} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\iint_S \delta_{\text{rot}} dA &= \textstyle\iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dA \\
&= \textstyle\iint_{\mathcal{R}} \text{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \dfrac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dudv \\
&= \textstyle\iint_{\mathcal{R}} \text{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dudv \\
&= \textstyle\iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}
\end{aligned}$$

La expansión total de un campo $\mathbf{F}$ en un sólido D, parametrizado mediante una función vectorial diferenciable $\mathbf{r} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se escribe así:

$$\begin{aligned}
\textstyle\iiint_D \delta_{\text{exp}} dV &= \textstyle\iiint_D \text{div}\mathbf{F} dV \\
&= \textstyle\iiint_{\mathcal{P}} \text{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v, w)) \left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w\right| dudvdw
\end{aligned}$$

y la circulación de un campo $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C, parametrizada mediante una función vectorial diferenciable $\mathbf{r} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se escribe así:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_C \delta_c dL &= \textstyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dL \\
&= \textstyle\int_{\mathcal{I}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\
&= \textstyle\int_{\mathcal{I}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \textstyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}
\end{aligned}$$

Estamos ahora en capacidad de enunciar los teoremas fundamentales: el de la divergencia y el de Stokes.

Teorema de la divergencia. Suponga que $\mathbf{F}= \langle P, Q, R\rangle$ es un campo vectorial definido en un subconjunto cerrado y acotado D de $\mathbb{R}^3$ que se puede parametrizar mediante una función vectorial diferenciable $\mathbf{r} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Si las componentes escalares de $\mathbf{F}$ tienen derivadas parciales continuas, entonces la expansión total del campo en D es igual al flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera ∂D de D. Más precisamente, se tiene que:

$$\iiint_D \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$$

Teorema del rotacional(Stokes). Suponga que $\mathbf{F}= \langle P, Q, R\rangle$ es un campo vectorial definido en un subconjunto cerrado y acotado D de $\mathbb{R}^3$, y que S es una superficie con borde que se puede parametrizar mediante una función vectorial diferenciable $\mathbf{r} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Si las componentes escalares de $\mathbf{F}$ tienen derivadas parciales continuas, entonces la rotación total del campo sobre S es igual a la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo del borde ∂S de S. Más precisamente, se tiene que:

$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}$$

2.3.6. Demostración de los teoremas

Dedicaremos esta última sección a la demostración de los teoremas fundamentales.

Teorema del rotacional (teorema de Stokes)

Supongamos que $\mathbf{F}= \langle P, Q, R\rangle$ es un campo vectorial definido en un subconjunto cerrado y acotado D de $\mathbb{R}^3$, y que S es una superficie con borde contenida en D y que se puede parametrizar mediante una función vectorial diferenciable $\mathbf{r} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Consideremos una partición de S en subregiones S_{ij} obtenida a partir de una partición de $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ en subceldas $\mathcal{R}_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$:

$$S_{ij} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]\}\,.$$

y escogemos en cada subregión S_{ij} un punto P_{ij}. La suma de Riemann

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\delta_{\mathrm{rot}}, m, n, \mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathrm{rot}\mathbf{F}(P_{ij})\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\Delta u\Delta v \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta_{\mathrm{rot}}(P_{ij})\,\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,\Delta u\Delta v,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son las derivadas parciales de $\mathbf{r}$ con respecto a u y a v en P_{ij}, respectivamente, es una aproximación de la rotación total de $\mathbf{F}$ sobre S, que no es otra cosa que la integral:

$$\begin{aligned}\textstyle\iint_S \delta_{\mathrm{rot}}\, d\mathbf{A} &= \textstyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} \delta_{\mathrm{rot}}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dudv \\ &= \textstyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} \mathrm{rot}\mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)dudv\end{aligned}$$

Tenemos que $\delta_{\text{rot}}(P_{ij}) \approx \dfrac{C_{ij}}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, \Delta u \Delta v}$, que es la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de ∂S_{ij} por unidad de área. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\delta_{\text{rot}}, m, n, \mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\text{rot}}(P_{ij}) \, \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, \Delta u \Delta v \\
&\approx \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{C_{ij}}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, \Delta u \Delta v} \, \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, \Delta u \Delta v \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}.
\end{aligned}$$

La circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de ∂S_{ij} es igual a la suma de las circulaciones C_{ij}^1, C_{ij}^2, C_{ij}^3 y C_{ij}^4 de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las curvas correspondientes a los lados de $\mathcal{R}_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$. Pero como $C_{ij}^1 = -C_{(i+1)j}^3$ y $C_{ij}^2 = -C_{i(j+1)}^4$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\delta_{\text{rot}}, m, n, \mathbf{r}) &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}. \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (C_{ij}^1 + C_{ij}^2 + C_{ij}^3 + C_{ij}^4) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (C_{im}^2 + C_{i0}^4) + \sum_{j=1}^{n} (C_{nj}^1 + C_{0j}^3) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m} C_{im}^2 + \sum_{i=1}^{m} C_{i0}^4 + \sum_{j=1}^{n} C_{nj}^1 + \sum_{j=1}^{n} C_{0j}^3
\end{aligned}$$

donde $\sum_{i=1}^{m} C_{im}^1$, $\sum_{i=1}^{m} C_{i0}^2$, $\sum_{j=1}^{n} C_{nj}^3$ y $\sum_{j=1}^{n} C_{0j}^4$ son las sumas de Riemann de las circulaciones de $\mathbf{F}$ a lo largo de cada una de las curvas correspondientes a los lados de la celda $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ y que conforman el borde ∂S de la superficie S. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
\textstyle\iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} &= \text{lím}_{m,n \to 0} \, \mathcal{R}(\delta_{\text{rot}}, m, n, \mathbf{r}) \\
&= \text{lím}_{m,n \to 0} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} C_{im}^2 + \sum_{i=1}^{m} C_{i0}^4 + \sum_{j=1}^{n} C_{nj}^1 + \sum_{j=1}^{n} C_{0j}^3 \right) \\
&= \textstyle\int_{\partial S} \mathrm{F} \cdot d\mathbf{L}
\end{aligned}$$

2.3.7. Teorema de la divergencia

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial tridimensional definido en una región D del espacio parametrizada por una función vectorial

$$\mathbf{r} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(u, v, w) = \langle x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \rangle$$

donde $\mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ y $\mathbf{r}$ con derivadas parciales continuas en $(a, b) \times (c, d) \times (e, h)$.

Consideremos una partición de la región D en subregiones D_{ijk} definida por una partición de $\mathcal{P}$ en subceldas $\mathcal{P}_{ijk} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \times [w_{k-1}, w_k]$. Es decir,

$$D_{ijk} = \{(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) : (u,v,w) \in [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \times [w_{k-1}, w_k]\}.$$

Escogemos en cada subregión D_{ijk} un punto P_{ijk}. La suma de Riemann

$$\mathcal{R}(\mathrm{div}\mathbf{F}, m, n, l, \mathbf{r}) \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} \mathrm{div}\mathbf{F}(P_{ijk}) \left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w\right| \Delta u \Delta v \Delta w,$$

es una aproximación de la integral de div$\mathbf{F}$ sobre D con respecto a $\mathbf{r}$, ya que:

$$\begin{aligned} & \textstyle\iiint_D \mathrm{div}\mathbf{F}dV \\ = \;& \textstyle\lim_{m,n,l\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} \mathrm{div}\mathbf{F}(P_{ijk}) \left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w\right| \Delta u \Delta v \Delta w \\ = \;& \textstyle\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,h]} \mathrm{div}\mathbf{F}(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w\right| dudvdw \end{aligned}$$

Tenemos que $\delta_{\exp}(P_{ijk})=$ div$\mathbf{F}(P_{ijk}) \approx \dfrac{\Phi_{ijk}}{\left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w\right| \Delta u \Delta v \Delta w}$, que es flujo de $\mathbf{F}$ a través de ∂D_{ijk} por unidad de volumen. Entonces,

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}(\delta_{\exp}, m, n, l, \mathbf{r}) = \\ = \;& \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} \delta_{\exp}(P_{ijk}) \left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w\right| \Delta u \Delta v \Delta w \\ \approx \;& \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} \dfrac{\Phi_{ijk}}{\left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w\right| \Delta u \Delta v \Delta w} \left|(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\cdot \mathbf{r}_w\right| \Delta u \Delta v \Delta w \\ = \;& \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} \Phi_{ijk}. \end{aligned}$$

El flujo $\mathbf{F}$ a través de ∂D_{ijk} es igual a la suma de los flujos Φ_{ijk}^s, $s = 1, 2, \ldots 6$, de $\mathbf{F}$ a través de cada una de las superficies correspondientes a las caras de $\mathcal{P}_{ijk} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \times [w_{k-1}, w_k]$. Pero como $\Phi_{ijk}^1 = -\Phi_{(i+1)jk}^6$, $\Phi_{ijk}^2 = -\Phi_{i(j+1)k}^5$ y $\Phi_{ijk}^3 = -\Phi_{ij(k+1)}^4$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}(\delta_{\exp}, m, n, l, \mathbf{r}) \approx \\
= \;& \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{ijk} \\
= \;& \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{s=1}^{6} \Phi_{ijk}^{s}\right) \\
= \;& \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{ijl}^{3} + \Phi_{ij0}^{4}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} (\Phi_{ink}^{2} + \Phi_{i0k}^{5}) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} (\Phi_{mjk}^{1} + \Phi_{0jk}^{6}) \\
= \;& \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ijl}^{3} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij0}^{4} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{ink}^{2} \\
& \textstyle + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{i0k}^{5} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{mjk}^{1} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{0jk}^{6}
\end{aligned}
$$

donde cada uno de los seis términos en la última suma son las sumas de Riemann de los flujos de $\mathbf{F}$ a través de cada una de las superficies correspondientes a las caras de la celda $\mathcal{P}$ y que conforman la superficie ∂D de la región D. Por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
\textstyle\iiint_S \operatorname{div}\mathbf{F} dV &= \operatorname{lím}_{m,n,l\to 0} \mathcal{R}(\delta_{\exp}, m, n, l, \mathbf{r}) \\
&= \operatorname{lím}_{m,n,l\to 0} \\
& \textstyle\Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ijl}^{3} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij0}^{4} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{ink}^{2} \\
& \textstyle + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{i0k}^{5} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{mjk}^{1} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \Phi_{0jk}^{6}\Big) \\
&= \textstyle\iint_{\partial D} \mathrm{F} \cdot d\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Para terminar, consideremos el teorema de Stokes en el caso particular en el que la superficie S está contenida en el plano XY. Obsérvese que en este caso el vector normal unitario, en cada uno de los puntos de la superficie, no es otro que el vector $\mathbf{k}$. Por consiguiente, la densidad de rotación del campo $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ es $\operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = Q_x - P_y$. Por tanto, en este caso:

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA = \iint_S (Q_x - P_y)\, dA$$

y

$$\int_{\partial S} \mathrm{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\partial S} P dx + Q dy.$$

Es decir, el teorema toma la siguiente forma, que se conoce como el teorema de Green:

Teorema de Green. Suponga que $\mathbf{F}= \langle P, Q\rangle$ es un campo vectorial definido en un subconjunto cerrado y acotado S de $\mathbb{R}^2$ que se puede parametrizar mediante una función vectorial diferenciable $\mathbf{r}: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Si las componentes escalares de $\mathbf{F}$ tienen derivadas parciales continuas, entonces la rotación total del campo sobre S es igual a la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo del borde ∂S de S. Más precisamente, se tiene que:

$$\iint_S (Q_x - P_y)\, dA = \int_{\partial S} Pdx + Qdy.$$

2.4. La computación a través de los juegos discretos

Raúl Chaparro Aguilar[11]
Juan Albornoz Bueno[12]

2.4.1. Los juegos discretos

La palabra discreto proviene del latín *discretus*, que significa “separado”. En matemáticas y física, se habla de lo discreto como opuesto de lo continuo. Cuando se tiene un sistema o conjunto cuyos elementos se pueden contar, decimos que éste es discreto. Por ejemplo, podemos contar el número de personas que hay en una familia, o en un salón. Para ello se utilizan los números naturales: 0, 1, 2, 3, ... Pero si tuviéramos la necesidad de conocer de manera exacta su estatura o su peso, deberíamos utilizar algún instrumento de medición y la interpretación que hagamos del resultado siempre sería una aproximación. Entraríamos entonces en el mundo de las medidas o continuo.
Los sistemas discretos son particularmente importantes para la informática, pues el computador es una máquina de naturaleza discreta. Esto lo veremos claro más adelante cuando estudiemos la máquina de Turing. Por el momento piense que la memoria del computador, por grande que sea, tiene un número finito de posibles configuraciones, y que la ejecución de un programa no es sino una sucesión, paso a paso, de configuraciones de esa memoria.
En esta sección trataremos de precisar las nociones de discreto y continuo, mediante el análisis de dos juegos de distinta naturaleza.

El juego de las ranas y los sapos

A lo ancho del lecho de un caudaloso río se encuentran siete piedras alineadas que permiten pasar de un lado al otro. En el lado izquierdo del río hay tres ranas y en el lado derecho, tres sapos. Cada grupo necesita cruzar al otro lado. Las ranas se ubican en las tres piedras del lado izquierdo y los sapos en las tres del lado derecho, quedando una piedra libre en la mitad. Las ranas siempre van a saltar de izquierda a derecha y los sapos de derecha a izquierda, y nunca se pueden devolver. Todos pueden saltar de una piedra a la piedra vecina, o en caso de que ésta esté ocupada, a la que le sigue si está libre. Nunca pueden saltar a más de dos piedras de distancia, ni a una piedra ocupada. Por supuesto, no pueden caer al río, pues se los lleva la corriente. El objetivo es entonces llevar a las ranas a las piedras del lado derecho y a los sapos a las del lado izquierdo, dejando la piedra central libre.

[11]Profesor de la Escuela Colombiana de Ingeniería.
[12]Profesor de la Escuela Colombiana de Ingeniería.

La situación inicial se verá así:

A partir de dicha situación, en un siguiente movimiento tendríamos estas cuatro alternativas:

1. La primera rana salta a la piedra vacía. La situación resultante sería:

2. La segunda rana salta a la piedra vacía. La situación resultante sería:

3. El primer sapo salta a la piedra vacía. La situación resultante sería:

4. El segundo sapo salta a la piedra vacía. La situación resultante sería:

El objetivo del juego es llegar a la siguiente situación:

Intente solucionar este problema empleando el menor número de movimientos. Si quiere, puede utilizar monedas, piedras o cualquier elemento físico que considere adecuado para simularlo. Una vez solucionado, registre de alguna manera su solución.

Juegos de destreza manual

Considere ahora el juego nacional del tejo. Se trata de lanzar desde la distancia un objeto de hierro (el tejo) y atinarle a la bocina, e idealmente hacer explotar una mecha. Suponga que su reto es enbocinar al menos tres veces y explotar al menos una mecha en el lapso de cinco minutos.

Comparación de los dos juegos

Note que estuvo trabajando en dos juegos unipersonales, es decir, sin contrincante, y dados unos límites de tiempo, al final podríamos determinar si fue posible ganar o no. Sin embargo, los dos juegos tienen diferencias significativas. Intente responderse las siguientes preguntas tanto para el juego de ranas y sapos, como para el tejo:

- ¿El éxito del juego depende de los elementos físicos que utilizó para realizarlo? Por ejemplo, si se hubiese escogido otro material, ¿habría sido más difícil o más fácil solucionarlo?
- Si pudo ganar el juego, ¿podría darle a otra persona las instrucciones por teléfono, de modo que al seguirlas llegue exactamente a la misma solución?
- ¿La solución del juego consta de una sucesión de pasos, que si se siguen fielmente, con seguridad nos harán ganar?
- ¿Podrían darse configuraciones durante el juego en las que haya ambigüedad con respecto al resultado? Por ejemplo, una configuración donde puedan existir diferencias de interpretación, de modo que dos personas, que conozcan bien las reglas, pudieran emitir juicios diferentes sobre el resultado.

Analicemos estas preguntas. Para jugar ranas y sapos, aunque escoger un material físico para simularlo puede influir (por ejemplo, ¿qué pasaría si escogemos fichas que pesen 100 kilos?), la solución no depende esencialmente de ello. Incluso, una persona con alta capacidad retentiva y de visualización, podría resolverlo mentalmente, sin necesidad de utilizar ningún elemento físico. Una vez solucionado el juego, existe un conjunto preciso de pasos que, si se siguen correctamente, con seguridad llevan de la configuración inicial al objetivo. Estos pasos se pueden codificar, por ejemplo numerando las posiciones y diciendo de dónde a dónde se hace un movimiento. Además, para un conocedor de las reglas, no habría duda de si una solución es correcta o no.

Éste no es el caso del juego del tejo. Sin duda, habrá algunos materiales con los que es más sencillo ganar y otros con los que puede resultar prácticamente imposible. Si tenemos la "suerte" de ganar, no hay ninguna garantía de que volveremos a hacerlo más adelante. No existe forma de registrar la solución de modo tal que otra persona la pueda consultar y jugar de manera idéntica. Podemos, además, caer en situaciones en las que es difícil determinar si el tejo quedó adentro de la bocina, y resultará muy difícil determinar el puntaje correspondiente. Este juego depende, en esencia, del mundo en que nos movemos y de nuestras habilidades físicas, con sus posibilidades y condiciones.

En los ejemplos mencionados, vemos que una de las características de los juegos de naturaleza discreta es que admiten una representación simbólica y, por tanto, contamos con la posibilidad de modelarlos y escribir su solución como secuencias de pasos, con lo que las podemos guardar y recuperar.

Éste es un trabajo que hace muy bien el computador. El computador es una máquina de naturaleza discreta. Cuando soluciona un problema, lo hace mediante una sucesión de pasos predecibles, que se podrían volver a reproducir con resultados idénticos cuantas veces queramos. A veces se utiliza el computador para interactuar en tiempo real con sistemas continuos, como por ejemplo en aplicaciones de robótica y programas empotrados en diversos dispositivos y vehículos; pero aun en estos casos, el computador mantiene un modelo discreto del entorno físico, que se aproxima en la medida de lo posible al mundo real. Todas las acciones del computador se pueden modelar con sistemas discretos. Por tal razón en este libro nos proponemos estudiar muchos de los principios y estrategias de solución de problemas de informática sobre juegos discretos. En ellos encontraremos un sinfín de posibilidades para experimentar y hacer explícitos los conceptos y estrategias fundamentales utilizados en informática.

¿Qué son los juegos discretos?

Los juegos discretos tienen una naturaleza finita y formal. Finita, porque su solución se realiza mediante una sucesión finita de movimientos. Formal, porque son independientes del medio en el cual se encuentran materializados.

Es decir, el mismo juego puede materializarse en cualquier número de medios diferentes, sin ninguna diferencia esencial significativa. Tómese por ejemplo el ajedrez. Una partida podría realizarse en tableros de distintos tamaños, con fichas de diferentes materiales, o incluso mediante una representación puramente simbólica, y seguiría siendo la misma partida. Un juego discreto se compone de:

1. Un conjunto finito de elementos (fichas, tablero, etc.).
2. Una disposición inicial de dichos elementos, a la que también podemos llamar estado inicial del juego.
3. Un conjunto de reglas que definen los movimientos permitidos en cada estado del juego. Al hacer un movimiento, el juego cambia de estado.
4. Un criterio para decidir si se ha llegado al estado final, también llamado estado ganador. El objetivo del juego es llevar los elementos a este estado.

Ejercicios

1. Solucione el juego de las ranas y sapos, y escriba de la manera más concisa su solución.
2. Dé ejemplos de tres juegos continuos y tres juegos discretos.
3. Encuentre juegos discretos populares con las siguientes características:
   a) Juego de contrincantes.
   b) Juego solitario (unipersonal).
   c) Juego de azar.
   d) El jugador puede llegar a “callejones sin salida”, es decir, a estados que no son ganadores, desde los que no se puede continuar.
   e) Juegos en los que es posible caer en ciclos de movimientos eternos, sin nunca ganar.
   f) Juegos donde sea imposible caer en ciclos de movimientos eternos.
4. Encuentre un algoritmo o “receta” para solucionar el juego de las ranas y sapos, que funcione para cualquier cantidad de ranas y de sapos, separados por una piedra.
5. Encuentre una fórmula para determinar el número de pasos necesarios para solucionar el juego de ranas y sapos, dado que se cuenta con n ranas y m sapos.

2.4.2. Sistemas formales

En ciencias e ingeniería es esencial el desarrollo de modelos. Un modelo es una representación (matemática, física, gráfica, etc.), de un sistema o fenómeno, con el fin de analizarlo, explicarlo o simularlo. En informática es común el desarrollo de diverso tipo de modelos (simbólicos, gráficos o computacionales), que nos ayudan a entender los problemas, a domesticarlos, y comunicar las soluciones que encontramos. Uno de los instrumentos de modelado más frecuente son los sistemas formales.
Hemos dicho que los juegos discretos son de naturaleza formal; esto es, son independientes del medio externo donde se llevan a cabo. En consecuencia, se pueden representar y jugar mediante cadenas de símbolos, de manera completamente libre de ambigüedades. En esta sección estudiaremos un tipo particular de juego discreto, llamado sistema formal combinatorio.
Un sistema formal combinatorio consta de un alfabeto, que es simplemente el conjunto de símbolos que se va a usar; un conjunto de palabras iniciales, escritas en ese alfabeto, y un conjunto de reglas que nos dicen cómo generar nuevas palabras. La idea es empezar con alguna palabra inicial e ir generando nuevas palabras siguiendo las reglas dadas. Ilustraremos esto con un juego, que llamaremos "Sistema OM":

- Alfabeto: {O, M}

  Esto quiere decir que las únicas letras que podemos usar son la O y la M. Con estas letras podemos formar palabras que no son sino sucesiones de letras. Por ejemplo: MO, MMO, MOMO, M, O. No se contemplará en nuestro sistema ninguna palabra que tenga una letra que no esté en el alfabeto, como por ejemplo: MI o MA. Podemos convenir también en que hay una palabra que no tiene ninguna letra a la que llamaremos *palabra vacía*, que también forma parte de las palabras posibles.

- Palabra inicial: {M}

  La única palabra con que contaremos en un comienzo es M.

- Reglas:

  - R1: A partir de una palabra que termina en M, se puede generar una nueva palabra agregando una O al final. Por ejemplo, a partir de MM podemos generar MMO.
  - R2: Se puede duplicar cualquier palabra y generar una nueva palabra. Duplicar una palabra quiere decir que se escribe dos veces de manera pegada; por ejemplo, al duplicar MOM generamos MOMMOM.

- R3: Si se tiene OM dentro de una palabra, podemos generar una nueva palabra, cambiando OM por MO. Por ejemplo, a partir de MOMO podemos generar MMOM.

- Objetivo del juego: generar la palabra OM.

Empezamos entonces con la palabra M. En cada paso tomamos la última palabra generada y le aplicamos cualquier regla que se pueda aplicar. A una sucesión de palabras obtenidas con este método se le llama una derivación. Por ejemplo:

- M → MO → MOMO → MOMOMOMO es una derivación donde se aplicó primero la regla R1, y luego dos veces la regla R2.
- M→ MM → MMMM → MMMMO es una derivación donde se aplicó dos veces la regla R2 y una vez la regla R1.

Un sistema formal combinatorio consta de:

- Un alfabeto, que es un conjunto finito de símbolos.
- Un conjunto de palabras iniciales, también llamado axiomas.
- Un conjunto de reglas. Cada regla permite generar nuevas palabras a partir de alguna palabra previamente generada.

Una derivación es una secuencia de palabras, que empieza en un axioma, y cada palabra en lo sucesivo es obtenida por la aplicación de alguna regla a su palabra precedente. A la palabra final obtenida se le llama teorema.

Ejercicios

En el sistema OM, encontrar derivaciones que terminen en las siguientes palabras. Si no se puede, argumente por qué.

1. MMOMMO
2. MOMOMOMOMOMOMOMO
3. MMMMMMMM
4. MMOMMOMMO
5. MMOO
6. OM (finalmente, ¡éste es el objetivo de nuestro juego!)

Encontrando invariantes

¿Qué sabemos si es imposible generar algunas palabras? Tomemos el caso de la palabra OM. Observando un poco, notamos el siguiente hecho: *todas las palabras generadas empiezan por M.* ¿Será este un invariante de nuestro sistema? Un invariante es una propiedad que se cumple para todas las palabras en una derivación.
Es claro que si demostramos que todas las palabras del sistema empiezan por M, entonces es imposible generar OM, por más que lo intentemos; pero ¿cómo podemos demostrar este hecho? La única manera de obtener palabras es por medio de una palabra inicial, o de la aplicación de alguna regla a una palabra ya obtenida. Tenemos que enfocarnos en analizar las propiedades de la palabra inicial y de las reglas. Veamos entonces por qué se cumple el invariante "todas las palabras del sistema empiezan por M":

- La única palabra inicial principia por M, por lo que cumple esta propiedad.
- La regla R1 agrega una O al final, pero no modifica la letra inicial. Por tanto, si partimos de una palabra que comienza por M, la palabra generada seguirá empezando por M.
- La regla R2 duplica la palabra. Al duplicar, la letra inicial de la palabra origen seguirá apareciendo en el mismo lugar en la palabra generada. Es decir, que si la palabra original empezaba por M, la palabra generada continuará comenzando por M.
- La regla R3 permite remplazar OM por MO. Si tenemos una palabra que empieza por M, a la que se le pueda aplicar esta regla, la palabra generada seguirá comenzando por M, pues a la primera letra no la afecta la regla.

Como no hay otras maneras de generar palabras, podemos concluir que todas las palabras generables empezarán por M. Y como OM no comienza por M, tenemos entonces que es imposible generarla.

Ejercicios

Utilizando el sistema OM:

1. Demuestre los siguientes invariantes:

    a) Si una palabra tiene al menos una O, entonces termina en O.

    b) El número de letras M en una palabra es una potencia de dos; es decir, se puede escribir como 2^n para algún $n >= 0$.

c) El número de letras O en una palabra es una potencia de dos; es decir, se puede escribir como 2^n para algún $n >= 0$.

d) En una derivación nunca se puede utilizar la regla R1 más de una vez. Encuentre tres palabras que se puedan generar utilizando todas las reglas del sistema.

2. Caracterice completamente a todas las palabras del sistema OM. Es decir, encuentre una propiedad que sea satisfecha por todas, y sólo por todas las palabras generables en el sistema OM.

Especificando palabras y reglas con plantillas

Los lenguajes naturales con los que nos comunicamos las personas, como el español, el inglés, etc., son propensos a múltiples ambigüedades. Por ejemplo, qué pasaría si permitiéramos reglas en nuestros sistemas formales como "una palabra se puede agrandar" o "una palabra se puede invertir". Podríamos tener diferentes interpretaciones de agrandar, como por ejemplo añadirle letras, o dibujarla con letras más grandes. Igualmente habría ambigüedad al invertir una palabra: ¿se trata de leerla de derecha a izquierda, o de que una M se convierta en W?
Nos interesa eliminar este tipo de ambigüedades de nuestros sistemas formales. Para ello vamos a usar plantillas que representan conjuntos de palabras. Una plantilla es un formulario que puede tener letras del alfabeto y variables. Cada variable es una "casilla en blanco" que se puede rellenar con cualquier cantidad de letras del alfabeto. Una vez que se han llenado las variables de una plantilla, se obtiene una palabra. A manera de ejemplo presentamos las siguientes plantillas, donde el alfabeto es O, M y las variables son *x, y, z*.

- M $\boxed{x: \qquad}$ O

  Con esta plantilla se pueden obtener palabras como:

  - MMO, donde la x se ha llenado con la palabra M.
  - MOO, donde la x se ha llenado con la palabra O.
  - MOMO, donde la x se ha llenado con la palabra OM.
  - MO, donde la x se dejó en blanco. En este caso se puede hablar también de x como la *palabra vacía*.

  Es claro, además, que hay palabras que no se pueden formar con la plantilla, pues no sería posible llenar las variables de modo que al final obtengamos la palabra. Por ejemplo, es imposible encontrar una manera de llenar la variable

x, de modo que obtuviéramos las palabras MOM, OMO, OMM. Podemos ver que con esta plantilla estamos representando *todas las palabras que empiezan por M y terminan en O.*

- $\boxed{x:\qquad}$MM$\boxed{y:\qquad}$

  Con esta plantilla se pueden obtener palabras como:

  - MM, donde x y y se han dejado en blanco, es decir, son palabras vacías.
  - OMM, donde x se ha llenado con la letra O e y se ha dejado en blanco.
  - MMO, donde la x se ha dejado en blanco y la y se ha llenado con la letra O.
  - MMMO, donde hay varias maneras posibles de llenar las variables. Por ejemplo, podemos presumir que la x se ha dejado en blanco y la y se ha llenado con la palabra MO, o también que la x se ha llenado con la letra M y la y se ha llenado con la letra O. En este caso, la plantilla representa *las palabras que tienen dos M seguidas en alguna parte.*

- O$\boxed{x:\qquad}$M$\boxed{y:\qquad}$

  Con esta plantilla se pueden obtener palabras como:

  - OOM, OMM, OMMO, OM. Intente llenar las variables para obtener estas palabras. Detecte en qué casos hay más de una manera de llenar las variables. Encuentre también tres palabras que no se puedan generar con la plantuilla. Notará que esta plantilla corresponde a *las palabras que empiezan por O y después tienen al menos una M.*

- $\boxed{x:\qquad}$O$\boxed{x:\qquad}$

  Nótese que las dos casillas de la variable x se deben llenar con las mismas letras, pues se trata de la misma variable. Con esta plantilla se pueden obtener palabras como:

  - MOM: en este caso x se ha llenado con la letra M.
  - OMOOM: en este caso x se ha llenado con la palabra OM.
  - O: en este caso x se ha dejado sin llenar.

  Es imposible encontrar una correspondencia para palabras como MOO, dado que no se puede aceptar que la primera x se llene con una palabra diferente de la segunda x. Esta plantilla representa *las palabras que tienen una O en la mitad y tanto a la izquierda como a la derecha de esta O se encuentra la misma subpalabra.*

- $\boxed{x: \quad\quad}$

  Representa *cualquier posible palabra que se pueda hacer con este alfabeto*, incluyendo la palabra vacía.

En adelante, para simplificar la escritura de las plantillas, anotaremos tan sólo la secuencia de letras y variables, omitiendo pintar las casillas. Entonces, cuando aparezca una variable, podemos imaginar que allí lo que hay es una casilla en blanco por llenar.
Utilizando plantillas podemos expresar de una manera más precisa y concisa las reglas de un sistema formal mediante "Reglas de reescritura". Estas reglas tienen dos plantillas, separadas por una flecha hacia la derecha. Para poder aplicar una regla, tenemos que partir de una palabra que se pueda obtener con el lado izquierdo de la regla, y entonces generamos la nueva palabra usando la plantilla del lado derecho. Por ejemplo, las reglas de nuestro sistema OM se pueden expresar de un modo muy conciso así:

- R1: $x\mathrm{M} \rightarrow x\mathrm{MO}$
- R2: $x \rightarrow xx$
- R3: $x\mathrm{OM}y \rightarrow x\mathrm{MO}y$

Suponga que ya hemos generado la palabra MOMO y queremos ver qué se puede generar a partir de ésta. Entonces tendríamos que la primera regla no se podría utilizar, pues no hay manera de llenar la x del lado izquierdo de la regla, para obtener MOMO. La segunda regla sí se podría aplicar: si la x se llena con MOMO, entonces el lado izquierdo de la regla coincide con nuestra palabra y podemos generar lo que resulte en el lado derecho de la regla, en este caso MOMOMOMO. A partir de MOMO también podríamos haber utilizado la tercera regla: llenando la x con M y la y con O, obtenemos nuestra palabra de origen, MOMO, y con el lado derecho de la regla generaríamos la palabra MMOO.

Ejercicios

Utilizando como alfabeto: {M, A, O}

1. Encuentre para cada plantilla tres palabras distintas que se puedan obtener y tres que no. Describa luego en forma precisa qué conjunto de palabras representa la plantilla.

   a) $x\mathrm{M}y\mathrm{A}x$

b) xMAyz

c) AxMyO

d) xx

e) xyx

f) xAxMxOx

g) xy

h) AMO

2. Encuentre plantillas para los siguientes conjuntos de palabras:

   a) Las palabras que empiezan por A y terminan en O.

   b) Las palabras que se pueden partir en tres subpalabras idénticas, colocadas una a continuación de la otra. Por ejemplo: MAMAMA, MAOMAOMAO

   c) Las palabras que tienen al menos una A.

   d) Las palabras donde hay al menos una M, después de la cual en algún lugar aparezca una O.

3. Proponga normas de reescritura para especificar las siguientes reglas:

   a) A una palabra se le pueden agregar dos letras M en el extremo derecho.

   b) A una palabra se le pueden agregar dos letras M en el extremo izquierdo.

   c) Si una palabra empieza por M, entonces esta M se puede quitar y agregarla en el extremo derecho.

   d) Si en una palabra aparece la subpalabra MM, ésta se puede retirar.

   e) Si en una palabra aparece la subpalabra MA, se puede remplazar por MAMA.

   f) Una palabra se puede triplicar. Por ejemplo, si se tiene MA se puede generar MAMAMA.

4. Interprete en español cada una de las siguientes reglas de reescritura:

   a) Mx $\rightarrow$ Mxx

   b) xMyA$z$$\rightarrow$$xAyMz$

   c) $xy \rightarrow yx$

   d) xMy $\rightarrow$ xy

Modelando con sistemas formales

Uno de los usos de los sistemas formales es modelar problemas del mundo real. Por ejemplo, podemos producir un sistema formal para el juego de ranas y sapos, para lo cual debemos representar simbólicamente los elementos del juego. Por ejemplo, podemos representar las ranas con la letra R, los sapos con la letra S y las piedras vacías con el símbolo _. Es decir, nuestro alfabeto será el conjunto {S, R, _}. Como variables usaremos letras: *x*, *y*, ...
El juego, entonces, se puede modelar así:

- Palabra inicial: RRR_SSS
- R1: xRS_y → x_SRy
- R2: xRR_y → x_RRy encontrar
- R3: x_RSy → xSR_y
- R4: x_SSy → xSS_y
- Palabra ganadora: SSS_RRR

Con esta representación y estas reglas se puede describir la solución al problema de las ranas y sapos, mediante una derivación de la palabra ganadora así:
RRR_SSS→ RR_RSSS→ RRSR_SS→ RRSRS_S → RRS_SRS→
R_SRSRS → _RSRSRS → SR_RSRS → SRSR_RS → SRSRSR_ →
SRSRS_R → SRS_SRR →S_SRSRR→SS_RSRR →SSSR_RR →SSS_RRR

Actividades de juegos y sistemas formales

Problema del robot

A una línea de montaje llegan cuatro componentes en el orden ABCD:

A	B	C	D

En la etapa siguiente los componentes pueden ser necesarios en cualquier orden. Para disponerlos en el orden requerido se ha programado un robot, capaz de realizar dos operaciones básicas:

1. Intercambio de los dos primeros componentes. Por ejemplo, partiendo del orden inicial llegaríamos a la siguiente configuración:

B	A	C	D

2. Rotación cíclica, llevando el último componente a la primera posición y desplazando los demás un espacio hacia atrás. En este caso, partiendo del orden inicial llegaríamos a la siguiente configuración:

D	A	B	C

Preguntas

1. ¿De qué modo se deben combinar las dos operaciones básicas del robot para producir el orden DACB?
2. ¿Será que si el orden inicial es DBCA podemos llegar a ABCD?

Problema de negras y blancas

Se tiene un tablero lineal con dos fichas negras, dos fichas blancas y una casilla vacía, así:

N	N	B	B	

Las reglas para los movimientos válidos son:

1. Una ficha puede moverse a la posición adyacente vacía.
2. Una ficha puede saltar por encima de otra (sólo una) para colocarse en la posición vacía. Si la ficha que salta es de distinto color que la saltada, esta última cambia de color.

Preguntas

1. Modelar el anterior juego como sistema formal, definiendo claramente el alfabeto, los axiomas y las reglas.
2. Plantear el objetivo del juego como teorema y demostrarlo, exhibiendo la derivación.
3. Enunciar un invariante, no trivial, y demostrarlo (una propiedad que se cumple siempre; por ejemplo: el número de B no es mayor que 5).

Ejercicios

1. Con el alfabeto {M, O}, construya sistemas formales para cada una de las siguientes exigencias:

   a) Las palabras deben tener un número impar de letras M.

   b) Las palabras no deben tener dos letras iguales consecutivas.

   c) Las palabras deben tener una cantidad par de letras M y de letras O.

   d) Las palabras deben tener el doble de letras M que de letras O.

   e) Las palabras deben tener un múltiplo de tres de letras O.

2. La bandera de Colombia está compuesta por tres franjas horizontales de colores amarillo, azul y rojo, en este orden, donde el amarillo ocupa exactamente la mitad, y tanto el azul como el rojo una cuarta parte. Podemos representar las banderas con palabras del alfabeto {A, Z, R}, donde la A representa el color amarillo, la Z el azul y la R el rojo. Por ejemplo, las siguientes serían banderas válidas: AAZR, AAAAZZRR, AAAAAAZZZRRR, ... No serían banderas válidas si no se respetara el orden de los colores, al leer de izquierda a derecha, o si no se mantuviera la proporción. Tampoco es una bandera válida la palabra vacía. Queremos tener un sistema formal que genere banderas de Colombia.

    a) Diseñe un sistema formal cuyas palabras representen banderas válidas.

    b) Demuestre por qué su sistema sólo permite generar banderas válidas.

3. Se quiere desarrollar un sistema formal para ordenar palabras hechas con el alfabeto {A, B, C}. Es decir, si partimos de una palabra cualquiera escrita en este alfabeto, y aplicamos exhaustivamente las reglas, hasta que no haya ninguna más que se pueda aplicar, queremos que la palabra final tenga la misma cantidad de cada una de las letras, con respecto a la palabra inicial, pero en orden alfabético. Esto es, primero estén las letras A, luego las B y finalmente las C.

CAPÍTULO 3

Ponencias

3.1. Inclusión de los ambientes digitales en el aprendizaje del cálculo diferencial "razón de cambio"

Mg. Dorys Jeannette Morales Jaime[1]

Resumen
En este artículo se presenta una investigación desde el desarrollo tecnológico e inclusión social, abordando los temas referentes a la pertinencia y la complementariedad de las TIC en la educación superior, por medio de la aplicación de ambientes digitales en el desarrollo de estrategias de aprendizaje en el cálculo diferencial.

La investigación se centra en la caracterización de estrategias cognitivas y metacognitivas utilizadas en la resolución de problemas de razón de cambio en estudiantes que emplean conocimiento lingüístico, semántico y esquemático en un ambiente *e-learning*. Para la validación de la investigación se diseñó e implementó un ambiente digital (*software*) sobre plataforma Moodle, que permite evidenciar las estrategias metacognitivas como cognitivas y el tipo de conocimiento (lingüístico, semántico, esquemático) que el estudiante emplea en la resolución de problemas de razón de cambio. El *software* permite la tipificación de las estrategias frente al tipo de conocimiento y la eficacia en el aprendizaje significativo del cálculo diferencial.

Como estrategia metodológica se utilizó el análisis de protocolos por medio de informes concurrentes (protocolos automatizados y escritos), aplicada en estudiantes de

[1] Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia. Escuela de Matemáticas y Estadística. dojemoja@yahoo.com, dojemoja@hotmail.com.

primer semestre de ingeniería en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. La investigación permitió contribuir a la teoría de Mayer "basada en procesos y conocimientos específicos" (1982, 1983, 1985, 1987) y, a su vez, dar inicio al diseño de un ambiente adaptativo con redes neuronales (I.A.) que permita retroalimentar al estudiante, de acuerdo con el tipo de conocimiento que trae en la resolución de problemas y al fortalecimiento de estrategias.

Palabras claves: cognición, metacognición, estrategias, TIC, lingüístico, semántico, esquemático, resolución de problemas.

3.1.1. Descripción

La investigación empieza con un estado del arte donde se realiza un barrido documental de los antecedentes documentales de la última década de investigaciones en áreas de pedagogía y matemáticas, aproximadamente, centradas en resolución de problemas y estrategias de resolución de problemas.

Por otro lado, está el marco teórico centrado en la teoría de Mayer basada en procesos y conocimientos específicos y estrategias de resolución de problemas matemáticos.

Para el desarrollo de esta investigación se trabajó con una muestra de quince estudiantes, que interactuaron con un ambiente digital donde se encontraban problemas resueltos aplicados en razón de cambio en volúmenes y áreas. El ambiente consta de tres ventanas (A, B, C), donde la solución de los problemas se centra en estrategias de resolución de problemas con características pertenecientes a conocimiento lingüístico, semántico y esquemático, respectivamente. Las ventanas presentan la misma estructura general de estrategias de resolución de problemas, pero se diferencian en el lenguaje, acorde con las características de cada tipo de conocimiento. La navegación es libre, en un ambiente amigable que permite la interacción del estudiante en forma espontánea.

La interacción con el *software* y las estrategias empleadas en la resolución de problemas permitieron identificar y tipificar el tipo de conocimiento que el estudiante presenta cuando aborda problemas de razón de cambio mediante protocolos automatizados en la plataforma Moodle.

Para el procesamiento de los resultados arrojados se utilizó la metodología de protocolos concurrentes utilizada para procesos cognitivos registrados por medio de protocolos escritos y automatizados (Luis Facundo Maldonado Granados, 2001).

3.1.2. Contenidos

Problema
¿Qué estrategias se tipifican en estudiantes que utilizan tres tipos diferentes de representación de conocimiento (lingüístico, semántico y esquemático) en la resolución de problemas de razón de cambio?

Antecedentes
Entre los antecedentes de mayor incidencia se cuenta con las investigaciones realizadas con estrategias de resolución de problemas, cognición y metacognición, citadas en las referencias de esta investigación.

Marco teórico
Para el desarrollo de la investigación se tomó la teoría de Mayer basada en procesos y conocimientos específicos, estrategias de resolución de problemas, haciendo un recorrido por las estrategias metacognitivas y cognitivas, como la representación de los tipos de conocimiento lingüístico, semántico, esquemático, diferentes modelos teóricos de la memoria y sus implicaciones en la memoria a corto y largo plazos, para concluir con el aprendizaje significativo y la tipificación de estrategias frente al tipo de conocimiento.

3.1.3. Metodología

La metodología que se usó para esta investigación pertenece a protocolos retrospectivos concurrentes, abordados en cinco momentos de la investigación, que es de corte descriptivo. Se trabajó con una muestra de quince estudiantes de primer semestre de ingenierías industrial, mecánica y electrónica, que cursan la asignatura de cálculo diferencial en la Universidad Antonio Nariño, resuelven problemas de razón de cambio e interactúan con un ambiente digital diseñado con estrategias de resolución de tres tipos de conocimiento diferentes: lingüístico, semántico y esquemático en plataforma Moodle. La plataforma permite realizar un seguimiento automatizado para identificar las estrategias de resolución de problemas (metacognitivas y cognitivas), acorde con su tipo de conocimiento.

El desarrollo de esta investigación está compuesto de cinco momentos:

Momento uno. Los estudiantes leen el problema y fijan sus estrategias para abordar la resolución. Este momento se llama estrategia uno E1.

Momento dos. Los estudiantes aplican estrategias de resolución de problemas desde su conocimiento. Este momento se denomina estrategia de resolución uno ER1.

Momento tres. Una vez abordados E1 y ER1, se identifica el tipo de conocimiento

TC utilizado por el estudiante en la resolución del problema. Los tipos de conocimiento son lingüísticos, semánticos o esquemáticos (glosario), que en forma implícita trae el estudiante al abordar el problema. En este momento el estudiante navega y explora el *software* en plataforma.

Momento cuatro. En esta etapa, el estudiante elige un problema propuesto en las actividades del curso y describe las nuevas estrategias para abordarlo, apoyado en el wiki individual en línea.

Momento cinco. En esta última etapa, el estudiante aplica las estrategias para la resolución del problema elegido; este momento se llama estrategia de resolución dos.

Estos momentos de la investigación se evidencian en la metodología de protocolo retrospectivo y concurrente, diseñada para la solución de un problema mediante el comportamiento motor, cuyo modelo teórico para el estudio de procesos cognitivos lo desarrollaron Newell y Simon (1972).

Para la selección del modelo pedagógico se toma el de procesamientos de información, ya que su propósito es estudiar el pensamiento humano articulado con el estudio de valores, el dominio de la información y el aprendizaje de asignaturas básicas, como las matemáticas. Combinan la disciplina con la flexibilidad (crear entornos exigentes pero no asfixiantes) y la retroalimentación.

El análisis y comparación del tipo de conocimiento empleado frente a la estrategia utilizada en la resolución del problema se fundamenta en la experiencia en la solución de problemas (Polya y Pogioli), y en procesos y conocimientos específicos como esquemas de razonamiento (Mayer, 1992).

3.1.4. Conclusiones y proyecciones

- En el momento uno de la investigación, donde se describen las estrategias que se van a emplear en la resolución de problemas de razón de cambio, se observan estrategias de orden general que no permiten la identificación del tipo de conocimiento específico, quizás por falta de entrenamiento en el diseño de estrategias. En este momento se identifica una generalidad, orientada a la lectura y comprensión del problema únicamente.

- En el momento dos de la investigación, donde se registran las estrategias de resolución del problema abordado, se pueden identificar los primeros indicios de las características empleadas por los estudiantes, evidenciadas en la representación de la información en forma gráfica, en representación de datos en un lenguaje simbólico matemático y la representación de la información, inicialmente en un lenguaje familiar al problema y transcrito después a una representación simbólica matemática.

- En contraste con las estrategias empleadas en los momentos uno y dos, se observa que en el primer momento lo planeado no se ejecuta en su totalidad en el segundo momento; sin embargo, las estrategias de resolución usadas en el momento dos presentan una estructura más formal que las empleadas en el momento uno.

- En el momento tres, donde el estudiante interactúa con el ambiente computacional, se evidencia en su navegación una tendencia a trabajar con estrategias de un solo tipo de conocimiento, permitiendo así la identificación de sus características frente al tipo de conocimiento específico. El estudiante en este momento realiza toma de decisiones de estrategias frente al tipo de conocimiento.

- En el momento cuatro, donde el estudiante ha interactuado con el ambiente computacional y hace la elección del problema que se va a resolver, registra en el wiki estrategias más explícitas que en los momentos uno y dos, donde se evidencian características propias del tipo de conocimiento específico. En este momento se presenta una mejor planeación, quizás por la interacción hecha en el momento tres con las estrategias acordes con su tipo de conocimiento.

- Las estrategias empleadas en el momento cuatro, contrastadas con las del momento dos, permiten observar que las estrategias utilizadas en el momento cuatro son mejor planeadas, puesto que evidencian características comunes a los tipos de conocimiento específico, como también una estructura clara de los procesos de resolución, lo que permite inferir que la realimentación del ambiente contribuye al entrenamiento y fortalecimiento de las estrategias.

- Las estrategias usadas en el momento cinco, donde el estudiante resuelve el problema elegido, muestran una concordancia con las estrategias registradas en el momento cuatro, gracias a lo cual se puede mostrar que hay una secuencia entre la planeación y la ejecución de estrategias acordes con el tipo de conocimiento específico, quizás por realimentación del ambiente computacional.

- Efectuadas la codificación y la segmentación de los protocolos, se hace un análisis de las estrategias empleadas en los cinco momentos de la investigación frente a las semejanzas encontradas en los quince estudiantes, generando una identificación en las estrategias y el tipo de conocimiento específico que permite hallar cinco estudiantes pertenecientes al conocimiento lingüístico, cinco al conocimiento semántico y cinco al conocimiento esquemático.

- A partir de la agrupación se hace una caracterización de las estrategias registradas y empleadas en cada momento de la investigación, que arroja la siguiente estructura:

CARACTERÍSTICAS T. P. LINGÜÍSTICO	**CARACTERÍSTICAS T. C. SEMÁNTICO**	**CARACTERÍSTICAS T. C. ESQUEMÁTICO**
Representa el planteamiento del problema en un lenguaje simbólico.	Representa los datos iniciales en un lenguaje natural al problema.	Realiza una representación gráfica del problema.
Identifica el modelo matemático que se va a trabajar.	Transcribe los datos de un lenguaje natural a una representación simbólica.	Codifica los datos iniciales a representaciones simbólicas.
Aplica técnicas de derivación apropiadas al modelo matemático	Identifica el modelo matemático que se va a trabajar.	Identifica el modelo matemático que se va a trabajar.
Muestra un manejo claro del vocabulario del problema en un lenguaje matemático apropiado.	Aplica técnicas de derivación apropiadas al modelo matemático.	Aplica técnicas de derivación apropiadas al modelo matemático.

Fuente: Resultados del estudio.

- La caracterización de las estrategias frente al tipo de conocimiento específico se diferencia en el primer proceso de resolución, es decir, en la representación del análisis de la información, siendo notoria la interpretación en forma individual enmarcada en la representación del tipo de conocimiento lingüístico, semántico y esquemático expuesto por Mayer (1992).

- Realizada la caracterización de la codificación y segmentación de las estrategias, se generan estructuras según el tipo de conocimiento específico (figura 1).

- A través del desarrollo en los cinco momentos de la investigación se observa que al resolver problemas matemáticos en los estudiantes se activan estrategias de resolución con diferentes estructuras, ajustables al tipo de conocimiento lingüístico, semántico o esquemático, corroborando así la hipótesis.

- La articulación de las nuevas tecnologías y específicamente el desarrollo de ambientes digitales sobre plataforma Moodle permiten emplear herramientas como el wiki individual, donde el estudiante actúa de manera libre, y a su vez evidencian procesos metacognitivos que en el aula de clase no son fáciles de comprobar.

- El diseño y la aplicación de ambientes digitales permiten generar nuevos escenarios pedagógicos, donde el estudiante articula el conocimiento de manera más espontánea en pro del aprendizaje significativo.

Proyección

Esta tipificación permite identificar las variables de acuerdo con el tipo de conocimiento empleado frente a la estrategia utilizada en la resolución de problemas de razón de cambio para dar inicio al diseño de un ambiente adaptativo con redes neuronales (I.A.), que permita identificar las características del estudiante cuando ingresa a un ambiente digital, generando un acompañamiento pertinente a su conocimiento en pro del fortalecimiento de sus estrategias en la resolución de problemas y, a su vez, contribuyendo al aprendizaje significativo del cálculo diferencial.

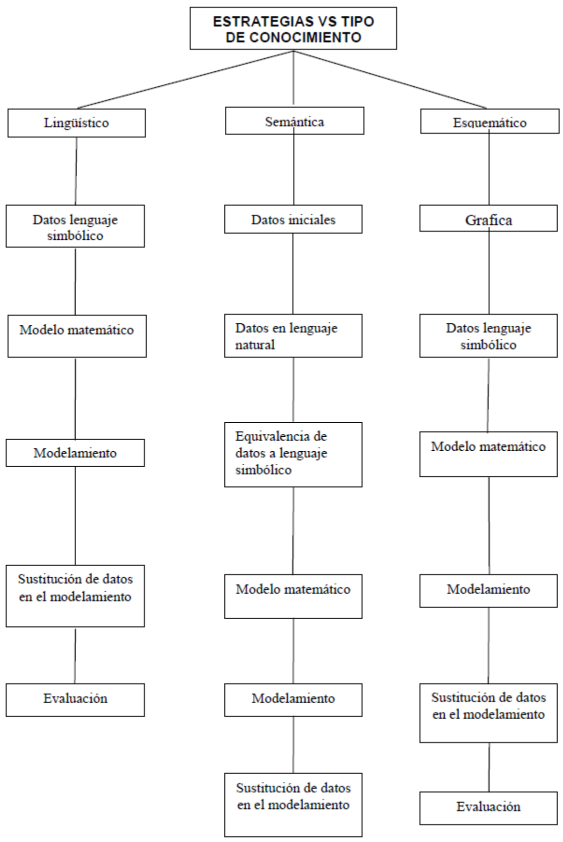


Figura 1.

Referencias

Ausubel, David P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica S.A.

Barros, Rafael et ál. (2005). *Introducción a la ingeniería.* Bogotá: Ed. Centro de Investigaciones Escuela de Administración de Negocios (EAN).

Escudero Martín, Jesús (1999). *Resolución de problemas.* En: http://platea.pntic.mec.es/∼jescuder/prob_int.htm.

Fabricius, William V. & Hodge, Milton H. (1993). Processes of scene recognition memory in young children and adults. *Cognitive*, 8, 343-360.

Larson et ál. (1998). *Cálculo*, Vol. 1, 5a. ed. McGraw Hill.

Mandler, J.M. & Ritchey, G.H. (1977). Long-term memory for picture. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 3, 386-395.

Mayer, Richard E. (1983). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica S.A.

Mayer, R.E. & Anderson, R.B. (1991). Animations need narrations: an experimental test of a dual-coding hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, 83(4), 484-490.

Paivio, A. (1990). *Mental representations: a dual coding approach.* Nueva York: Oxford University Press.

Poggioli, Lisette (2005). *Estrategias de resolución de problemas*, serie Enseñando a Aprender. En: http://www.fpolar.org.ve/poggioli/poggio1ref.htm; http://fpolar.org.ve/poggioli/poggio2ref.htm, p.1.

Polya, George (1954). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Polya, George (1957). *Mathematics and plausible reasoning*, vols. 1 y 2. Princeton: Princeton University Press.

Polya, George (1981). *Mathematical discovery. On understanding, learning and teaching problem solving.* Combined edition. Nueva York: Wiley & Sons, Inc.

Schoenfeld, Alan (1985). *Mathematical problem solving.* Nueva York: Academic Press.

Schoenfeld, Alan (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York: Macmillan.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1-22.

Sternberg, R.S. (1985). *Las capacidades humanas: un enfoque desde el procesamiento de la información.* Cap. X: Capacidad de resolución de problemas. Barcelona: Labor.

Vilanova, Silvia et ál. La educación matemática, el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Mar del Plata: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. En: http://www.campus-oei.org/revista/deloslectores/203Vilanova.PDF.

3.2. El *software* dinámico: una herramienta que propicia el desarrollo de la visualización matemática

Éder Antonio Barrios Hernández
Guillermo Luis Muñoz Rodríguez
Irving Guillermo Zetién Castillo[2]

Resumen
En el siguiente artículo se describen y analizan los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo de la visualización en estudiantes de nivel superior, cuando resuelven una actividad geométrica mediante el uso de papel y lápiz y comparan la solución con *software* dinámico. Esta investigación se ajusta a los principales referentes teóricos de la psicología cognitiva y al modelo teórico propuesto por Raymond Duval (1998).

En el trabajo se tomó en cuenta un enfoque de investigación cualitativa a dos estudiantes de primer semestre de ingeniería en el ciclo de ciencias básicas de la Universidad Tecnológica de Bolívar (Cartagena, Colombia), cuyas edades oscilan entre los 16 y 18 años; se describen, además, las estrategias utilizadas para la resolución de problemas geométricos.

Palabras claves: visualización, Cabri, resolución de problemas, geometría.

3.2.1. Introducción

En Colombia, la educación matemática ha puesto de manifiesto la necesidad de insistir en la búsqueda de mecanismos que permitan su mejoramiento. ¿Por qué son importantes las matemáticas y específicamente la geometría? Pues porque, como es de conocimiento general, constituyen un vehículo mediante el cual tiene lugar el aprendizaje humano complejo. Las matemáticas se enfocan hoy hacia el desarrollo de las competencias necesarias para crear, resolver problemas, razonar, argumentar, establecer conexiones y comunicar resultados (López, 2002).

La idea de observar los procesos de construcción de conocimiento y desarrollar habilidades de pensamiento, en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en los estudiantes que ingresan a los primeros semestres de la Universidad Tecnológica de Bolívar es de mucha relevancia, pues es posible constatar las grandes dificultades que éstos presentan, muchas de las cuales tienen su origen en los pocos desarrollos

[2]Docentes de tiempo completo, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Bolívar. ebarrios@unitecnologica.edu.co, guillelee@hotmail.com y izetien@Hotmail.com.

de procesos cognitivos en la formación básica, razón por la cual, se generan problemas que dificultan los procesos de aprendizaje durante los primeros semestres de la carrera y que, además, se convierten en obstáculos muy serios para la asimilación de conceptos científicos.

En la actualidad, diversos investigadores en el campo de la educación matemática se dirigen a concientizar la necesidad imperante de introducir una nueva dirección en la planeación, administración y evaluación del acto educativo; esto se fundamenta en que los sistemas instruccionales no cumplen satisfactoriamente su cometido, los alumnos cada día almacenan más información y la reproducen en forma mecánica, sin llegar a la adquisición de habilidades o estrategias que les permitan transferir sus conocimientos en la resolución de problemas y de situaciones en su vida diaria.

A lo largo de esta investigación se describe teórica y analíticamente "El proceso cognitivo de la visualización por estudiantes de nivel superior mediante el uso de *software* dinámico Cabri en la resolución de problemas geométricos". Se elaboró con la intención de aportar a las investigaciones que, en general, han abordado el estudio de la visualización en lo relacionado con la racionalidad instrumental cognitivista en el escenario de utilización del *software* dinámico Cabri.

3.2.2. Objetivos

Objetivo general

Establecer el desarrollo del proceso cognitivo de la visualización que presentan los estudiantes de nivel superior al resolver un problema geométrico mediante el uso de tecnología tradicional y potenciar el concepto solución con *software* dinámico Cabri.

Objetivos específicos

1. Describir los procesos cognitivos de la visualización que emplean los estudiantes de nivel superior en torno a la construcción y justificación de conjeturas en la resolución de problemas geométricos, en un escenario de tecnología tradicional y en otro con *software* dinámico Cabri.

2. Aplicar los niveles de visualización de Duval en estudiantes de nivel superior al resolver problemas de tipo geométrico con la tecnología tradicional y con *software* dinámico.

3.2.3. Desarrollo

Se escogió a dos estudiantes de primer semestre de un curso de ingeniería de la Universidad Tecnológica de Bolívar y se le aplicó un estudio de casos a cada uno. Se utilizaron las técnicas de pensar en voz alta y el cuestionario, se les proporcionaron los instrumentos para construir un rectángulo y se les dio una guía de trabajo, valorada por unos jueces expertos.

3.2.4. Momentos del proceso investigativo

- En un primer momento se manifiesta a cada alumno la intención y el propósito del estudio y su importancia dentro del proceso de aprendizaje de las matemáticas, así como su papel relevante en el estudio en mención.
- En un segundo momento, se dicta una capacitación sobre el uso del *software* dinámico Cabri.
- En el tercer momento, los jueces expertos dan su visto bueno al instrumento y adicionan algunas recomendaciones que tuvimos en cuenta en la construcción final de este último.
- En el momento cuatro se aplica el instrumento.
- En un quinto momento, el estudiante se enfrenta a la solución del mismo problema, pero esta vez utilizando el *software* dinámico Cabri.
- En un sexto momento, el estudiante se somete a una entrevista estructurada.

3.2.5. Resultados

NIVEL DE VISUALIZACIÓN	**PAPEL Y LÁPIZ**	***SOFTWARE* DINÁMICO**
Global de percepción visual	El trazado va asociado a una imagen mental y a objetos físicos del entorno.	El trazado va asociado a una imagen mental y a objetos físicos del entorno.
	Asocia la figura con objetos de la vida real.	Relaciona la figura con objetos físicos de la vida real.
	Deficiencia en el lenguaje geométrico.	
Percepción de elementos constitutivos	No se ha apropiado del concepto.	Habla con propiedad de los elementos que constituyen la figura.

	No establece relaciones entre sus elementos.	La herramienta le permite verificar sus conjeturas.
	Desconoce las características que permiten identificar la figura.	Construye la figura teniendo en cuenta las propiedades.
Operativo de percepción visual	La estaticidad de la figura no le permite visualizar ciertas relaciones entre los elementos.	El instrumento le ayuda a visualizar relaciones de proporcionalidad y variación entre los elementos.
	El instrumento no le permite hacer mayores transformaciones.	Puede visualizar las partes que varían y las invariables.

3.2.6. Conclusiones

- La tecnología capacita a los estudiantes para visualizar la geometría de manera activa, tal como ellos generan sus propias imágenes mentales.
- La naturaleza dinámica del Cabri permite desarrollar la capacidad de visualización con la figura en cualquier posición, en tanto que el vínculo dinámico entre las partes de la figura facilita la formulación y comprobación de conceptos.
- El uso del Cabri permite la articulación de las representaciones del concepto.

Por medio de esta investigación se ha podido identificar el efecto de la visualización en el aprendizaje de la geometría, en particular de dos estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad Tecnológica de Bolívar, y conocer de qué manera el uso de la herramienta tecnológica (*software* dinámico Cabri) influye en el desarrollo de ese proceso cognitivo. El análisis del estudio se hizo teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación, dentro del marco de los niveles de visualización establecidos por Raymond Duval.

El proceso de análisis de las grabaciones, videos, bitácoras y técnicas usados en los casos de este estudio arroja una información muy valiosa que puede ser útil en el proceso de enseñanza - aprendizaje que se imparte a los estudiantes en la geometría y constituye un aporte a la educación de las matemáticas, conociendo las creencias, temores, tabúes y mitos que sienten los estudiantes y que constituyen una causa fundamental en el bajo rendimiento académico y en la fobia por esta área.

Referencias

Bonilla, E. (1989). La evaluación cualitativa como fuente de información. Trabajo elaborado para el Seminario sobre Usos de Datos Cualitativos (inédito). Honduras, Tegucigalpa. Citado por Elsy Bonilla-Castro & Penélope Rodríguez (1995). En *La investigación en ciencias sociales. Más allá del dilema de los métodos.* Bogotá: Ediciones Uniandes, p. 70.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. & Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Serie Documentos. Bogotá D.C.: Ministerio de Educación Nacional.

Clemens, S (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison Wesley Iberoamérica S.A.

Duval, R, (1996). *Recursos en Didácticas de las Matemáticas*, vol. 16, No. 3, pp. 349-382.

3.3. El uso de los Tablet PC HP en la enseñanza de la función lineal y cuadrática: descripción de una experiencia de aula

Frey Rodríguez Pérez[3]
Adriana Maritza Matallana[4]

Resumen
En el año 2007, la Corporación Universitaria Minuto de Dios (Uniminuto) recibió de parte de la empresa Hewlett-Packard un conjunto de portátiles Tablet PC-HP, como herramienta básica para el desarrollo del proyecto investigativo Teach-Me (Technology, Engineering and Calculus Hewlett-Packard (HP) Mobile Environment), el cual se soportó en una propuesta didáctica que buscó innovar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de primer semestre del programa de Ingeniería Civil a través del uso de las TIC como apoyo a la presencialidad, específicamente en el tema de funciones de variable real. En este artículo se describe la experiencia, desde las ópticas didáctica, tecnológica y logística, con el fin de que, para experiencias posteriores, se tenga un referente práctico de los diversos aspectos que se deben tomar en cuenta.

Palabras claves: Tablet PC, teoría de las situaciones didácticas, aprendizaje colaborativo, representaciones.

3.3.1. Introducción

La Corporación Universitaria Minuto de Dios desarrolló el proyecto Teach-Me Precálculo, durante los años 2007-2008, ante la necesidad de modernizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje en asignaturas que causan gran dificultad para los estudiantes, como es el caso del primer curso de matemáticas de los programas de ingeniería, precálculo. Para su planteamiento se usaron teorías tales como la teoría de las situaciones (Brousseau, 1986) y la teoría del aprendizaje colaborativo (Koschman, 1996), con el fin de integrar el uso de los computadores en el aula a través de procesos didácticos y pedagógicos que permitieran el desarrollo de competencias, estructurando una propuesta que buscaba el acercamiento al estudio de la función, a partir del uso de las representaciones del objeto matemático.

[3]Uniminuto, Departamento de Ciencias Básicas. Especialista en educación matemática. frodriguez@uniminuto.edu.
[4]Uniminuto, Departamento de Ciencias Básicas. Magistra en docencia de las matemáticas. amatallana@uniminuto.edu.

3.3.2. Estructura de la propuesta

Durante tres semestres, dos docentes del Departamento de Ciencias Básicas desarrollaron e implementaron una propuesta basada en el diseño de tres tipos de situaciones, cuyo fin era utilizar los computadores Tablet PC 4400 HP como herramienta para la enseñanza de las matemáticas. A medida que se hacían prácticas, se empezó a evidenciar que en situaciones mediadas por el uso de herramientas computacionales se requerían no sólo los equipos, sino toda una organización para su empleo. En muchas ocasiones, en la literatura se encuentran experiencias exitosas, pero en muy pocas se narran todas las situaciones que deben contemplarse para este fin. Por lo anterior, en esta ocasión se busca mostrar, más que el componente matemático, los aspectos generales que hay que tener en cuenta en el momento de implementar propuestas didácticas que utilizan tales herramientas.

Aspectos tecnológicos

Como parte de los aportes que la empresa Hewlett-Packard hizo a Uniminuto, el proyecto contó con 21 HP Tablet PC 4400, con sus respectivos drives externos. Para el desarrollo de las clases se requirieron el uso de un videobeam, así como la adaptación de un *router* para configurar una red inalámbrica de internet (ya que los computadores se utilizaron en diferentes salones) y de dos aulas con mesas especiales (a cambio de los pupitres tradicionales), que permitieron usar los equipos en forma cómoda y segura para los estudiantes.

Adicionalmente se contó con varios monitores (estudiantes de último semestre de tecnología en sistemas de Uniminuto), quienes colaboraron permanentemente en la solución de inconvenientes que se presentan al usar computadores (red y equipos desconfigurados, por ejemplo). Ellos también estaban encargados del traslado de los equipos y la organización de las aulas de clase, con anticipación a su inicio. Fue fundamental que personas casi expertas y diferentes de los docentes estuvieran ayudando, ya que hay situaciones que se presentan sin previo aviso y el docente no puede interrumpir el desarrollo de la clase para dedicarse a solucionar tales situaciones. A estos monitores se añade otro grupo de estudiantes, encargados del diseño y elaboración de imágenes, gifs, diseño de páginas, distribución del curso en Moodle y, en general, del diseño gráfico y la programación requeridos. Específicamente, dos monitores hicieron sus prácticas profesionales en el proyecto.

En relación con los Tablet PC HP 4400, son computadores portátiles que se diferencian de otros equipos por un accesorio denominado lápiz óptico y por la posibilidad de girar la pantalla, lo que permite no sólo utilizarlo como una agenda sino también, gracias a su capacidad de memoria y su resistencia a golpes, en espacios exteriores al aula (figuras 1 y 2).

Figura 1. Tablet PC Hewlett Packard 4400. Fuente: http://www.hp.com/.

Figura 2. Uso de la pluma digital de los Tablet PC HP 4400, en contextos exteriores al aula de clase. Fuente: los autores.

Uno de los programas más utilizados fue Windows Journal ®, que junto con el lápiz óptico permitía a los estudiantes desarrollar diversas actividades para mostrárselas posteriormente a sus compañeros, en forma cómoda, agradable y útil, generando un entorno en el que la argumentación fue indispensable para comunicarse. Adicional al *hardware* y *software* utilizados, se tuvieron a disposición la red local y la plataforma Moodle para retroalimentar talleres, lecturas y presentaciones de las diferentes temáticas. Esta plataforma generó acceso directo a foros y chats, que apoyaron los diversos procesos comunicativos y colaborativos, tanto en el aula como en espacios fuera de clase.

3.3.3. Aspectos logísticos

Para llevar a cabo las clases, se organizaban las mesas en forma de U con el fin de que todos los estudiantes compartieran sus experiencias, observaran las imágenes proyectada en el videobeam y trabajaran en grupo (figura 3). En las clases, los equipos se conectaban por medio del *software* NetMeeting ®, con el cual se podía proyectar el material preparado para la clase y controlar las exposiciones de los estudiantes desde cualquiera de los equipos que estaban conectados. A estos elementos se suma un factor muy importante en el desarrollo de propuestas didácticas: el tiempo. En diferentes ocasiones, las actividades exigieron más tiempo del planeado, dadas las participaciones y los avances del grupo. Frente a este factor, es difícil determinar con anticipación su manejo; sin embargo, fue tarea del docente incentivar al grupo a avanzar y a resolver dudas, teniendo en cuenta el tiempo con el que se contaba. Surge sin embargo la necesidad de revisar los programas, con el propósito de proponer situaciones que permitan avanzar y, a la vez, cumplir con todos los temas programados.

Figura 3. Uso del videobeam y organización del aula de clase. Fuente: los autores.

3.3.4. Aspectos didácticos

Básicamente, la propuesta tenía como fundamento emplear situaciones problema contextualizadas en temas propios de la formación de estudiantes del programa de Ingeniería Civil. Entre los aspectos que se tomaron en cuenta para el desarrollo del proyecto estaban la importancia de las TIC en la educación superior, los modelos educativos en la formación mixta *blended learning*, la relación entre la virtualidad como apoyo a la presencialidad y los cambios en el papel de los profesores y los estudiantes, así como los beneficios del uso de la tecnología inalámbrica en la educación. La propuesta estaba conformada por tres tipos de actividades, las cuales pretendían ajustarse a las temáticas del curso de precálculo, por medio de situaciones problema.

Experiencias tipo A. Tenían por objetivo permitir que el estudiante desarrollara diferentes actividades de aplicación, de modo que profundizara en algunos aspectos de manera contextualizada. En esta ocasión, el docente podía intervenir durante la clave y después, aclarando dudas y haciendo sugerencias que permitieran al grupo llegar a una respuesta válida. Estas situaciones se diseñaron para trabajarlas con el uso del *software* Windows Journal ®, ya que éste permitía una interacción directa con el Tablet PC. Entre los contextos utilizados estuvieron un parque y la zona verde cercanos a la corporación y el Museo de Arte Contemporáneo del barrio Minuto de Dios (figuras 4 y 5).

Figura 4. Uso del Tablet PC en una situación tipo A. Fuente: los autores.

Figura 5. Uso del Tablet PC en una situación tipo A. Fuente: los autores.

Experiencias tipo B. Según Brousseau (1986), son las llamadas situaciones adidácticas, en las cuales los estudiantes, a partir de sus conocimientos, dan respuesta a situaciones problema planteadas. El docente no intervenía sino en el momento de mediar la socialización, tratando de institucionalizar los procesos validados por todos, e incentivando la discusión como herramienta para la emergencia de invariantes propios de cada objeto matemático (figura 6).

Figura 6. Uso del Tablet PC en una situación tipo A. Fuente: los autores.

Experiencias tipo C. Con estas experiencias se pretende presentar al estudiante explicaciones generales del tema, donde prima la exposición magistral. Sin embargo, la diferencia radica en que se utilizan diferentes materiales educativos digitales tomados de la red o creados por el docente, tales como presentaciones en Power Point ®, *applets* para explicaciones, etc. Además, el empleo del Tablet PC permitía al docente escribir sobre estos materiales, es decir, las clases no se limitaban a ellos, sino que el docente los podía utilizar de acuerdo con el ritmo de la clase. Este tipo de actividades surgió como una necesidad ante la premura del tiempo en el desarrollo de las temáticas de los programas. Se complementaban con actividades creadas por el docente para que las resolviera todo el grupo con su ayuda o explicación. Por lo general, uno o dos estudiantes tomaban el control del equipo y proponían soluciones que eran discutidas por el grupo. El docente se podía apoyar en el ambiente virtual de aprendizaje o en el curso en Moodle designado para el proyecto, con el objeto de que los estudiantes pudieran acceder a los materiales utilizados en clase. Además, el docente podía subir al curso virtual otros materiales que sirvieran como apoyo a los procesos presenciales. En la figura 7 se muestra al docente exponiendo el tema.

Figura 7. Uso del Tablet PC en una situación tipo C. Fuente: los autores.

Durante el planteamiento de las situaciones, se pretendía que el docente fuera autónomo, puesto que es necesario adaptar toda propuesta didáctica a las condiciones no sólo tecnológicas, sino también a las condiciones propias de los grupos de estudiantes. En todas las situaciones, el uso de las representaciones de los objetos matemáticos fue fundamental. En cuanto al estudio del objeto función de variable real, se dio mayor importancia a la elaboración de situaciones tipo C, ya que se considera que este objeto matemático es fundamental en la formación de ingenieros.

3.3.5. Papel del docente

Además de planear la clase (con todas las exigencias de una clase mediada por computador), el docente debía organizar y clasificar las elaboraciones de los estudiantes para potenciar no sólo el aprendizaje colaborativo sino también la construcción del conocimiento matemático. Esto exigió tiempo y compromiso no sólo por parte del docente sino también del Departamento de Ciencias Básicas, ya que se requiere un tiempo mayor para su preparación que en un curso normal. Además, fue indispensable la colaboración de los monitores, quienes apoyaron al docente desde el uso de la tecnología. El docente indagaba continuamente sobre MED (materiales educativos digitales) que pudieran apoyar el proceso en el aula.

3.3.6. Papel del estudiante

El estudiante debía, aparte de cumplir con las funciones tradicionales, tales como asistencia, entrega de trabajos a tiempo, participación en clase, entre otras, era necesario que se concientizara de que su proceso de aprendizaje estaba mediado por herramientas computacionales, lo cual le exigía estar dispuesto a aprender a manejar buscadores en internet, a utilizar el correo electrónico, los chats y los foros, entre otros. Esto lo llevaba a desarrollar habilidades que, en últimas, se esperaba favorecieran el desarrollo de habilidades de autoaprendizaje.

3.3.7. Conclusiones

Las experiencias de aula, diseñadas y soportadas en la teoría de las situaciones de Brousseau y el aprendizaje colaborativo, generaron un ambiente propicio para el acercamiento a la función lineal y cuadrática, ya que a partir de problemas en contexto real, la función y sus representaciones surgieron como una herramienta importante en la propuesta de soluciones.

El uso de tecnología inalámbrica permitió ampliar las posibilidades de las experiencias. Por ejemplo, la visita que se realizó a un acueducto veredal en un municipio cercano permitió que los estudiantes pudieran vivenciar la elaboración de mapas, la toma de medidas, el planteamiento de hipótesis, el reconocimiento de las partes de un acueducto y la utilización de funciones para la solución de situaciones.

Los resultados de la puesta en marcha de la propuesta permitieron evidenciar la posibilidad de reproducir en otras asignaturas el trabajo con los Tablet PC-HP, dadas sus características, innovación e impacto tanto en los estudiantes como en los docentes. Se requiere el compromiso de diferentes instancias para la consecución de estos logros.

Es fundamental generar en los estudiantes, desde primer semestre, la confianza y el autoaprendizaje, puesto que en la actualidad hay muchas fuentes de información que el estudiante no conoce o no sabe manejar. Son ellos los que más interés presentan por herramientas novedosas y creativas.

El uso de computadores en el aula de clase exige el compromiso no sólo de los docentes de matemáticas, sino de diseñadores gráficos, ingenieros de sistemas, directores de investigación, entre otros, que, desde sus conocimientos, aporten diferentes elementos que son necesarios para el desarrollo de propuestas en este tipo de ambientes.

La investigación es larga y, por tanto, se requiere compromiso tanto de tiempo como económico por parte de la institución.

Referencias

Brousseau, Guy (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Traducción hecha por Centeno, Melendo y Murillo. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, No. 2.

Apellido1, N1. & Apellido2, N2. (2007) Formato de referencias. En Memorias del Décimo Taller Internacional de Software Educativo Tise 2007, 1-3 diciembre. Santiago, Chile, pp. 20-21.

3.4. Análisis de las concepciones operacional y estructural de función real

Miryán Trujillo Cedeño
Nivia Marina Castro[5]

En este artículo se presentan los resultados de la investigación titulada "Mediación de situaciones didácticas apoyadas en el uso de la calculadora graficadora en la superación de obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función". Se siguió una metodología basada en la ingeniería didáctica, con un tipo de diseño antes-después sin grupo control, que contaba con los obstáculos cognitivos que había que superar, como variable dependiente y como variable experimental la estrategia (guía pautada), y una prueba final aplicada después de un tiempo de desarrollada la estrategia y que permitió la medición del efecto causado sobre la variable experimental.

Tales resultados están relacionados específicamente con el análisis realizado sobre las concepciones operacional y estructural de función real en estudiantes de cálculo diferencial de primer semestre de la Universidad de La Salle, que resultó de la intencionalidad de identificar y superar obstáculos cognitivos asociados al concepto de función. Los resultados obtenidos dieron respuesta a una de las preguntas de investigación formulada como sigue: ¿se puede atribuir a la presencia de obstáculos cognitivos, asociados al concepto de función, la ausencia de una concepción estructural de este concepto?

3.4.1. Elementos teóricos

Para analizar las concepciones operacional y estructural de función real, se tomó como base el indicador del nivel básico de comprensión de función (ICBF), que de acuerdo con Álvarez y Delgado (2001), está dado por un vector de seis componentes, así:

ICBF= (DP*, COGH, NEF, NEI, NECB, DSA)

Donde:
NEF= nivel de éxito al identificar funciones en los distintos contextos. Se obtuvo al dividir el número de aciertos entre el número de contextos (parejas, gráfico, algebraico y a trozos) y su máximo valor fue 1.
NEI = nivel de éxito de cada estudiante al seleccionar funciones que poseen inversa. Se obtuvo al dividir el número de aciertos entre el número de contextos (parejas,

[5]Docentes de la Universidad de La Salle. mtrujillo@unisalle.edu.co. y mcastro@unisalle.edu.co.

gráfico y algebraico), siendo la nota máxima 1. Se consideró aprobatorio cuando la nota era mayor o igual que 0,6. El NEI se obtuvo al dividir el número de aciertos entre el número de contextos y su máximo valor fue 1.
DSA = disponibilidad del sistema simbólico abstracto. Apunta a revelar en qué medida el estudiante ha construido en forma general el significado de los signos: $f(a)$, $f(x) = b$ y $h(g(a))$, analizando el nivel de éxito que obtiene al realizar tales cálculos en contextos específicos.

Se supuso que un estudiante disponía del significado abstracto de cada símbolo cuando realizaba con éxito dicho cálculo en por lo menos dos contextos diferentes entre parejas, gráfico o algebraico. En este caso se asignó el valor 1; en caso contrario, cero. El valor del DSA fue el promedio aritmético tomado sobre los tres cálculos que se presentaron con los símbolos mencionados. Para analizar el nivel mínimo de comprensión, se supuso que el DSA debía ser mayor o igual que 0,66.

NECB = nivel de éxito que tiene el estudiante para realizar los cálculos básicos en los contextos de parejas, gráfico y algebraico. Cuando son indicados en el simbolismo abstracto de funciones ($f(x)$, $d = f(x)$, $f(g(x)$) se halla del promedio de los indicadores NEC de $h(g(a))$, NEC de $f(a)$ y NEC de $f(x) = b$. Para calcular cada NEC (nivel de éxito en el cálculo), se calificó sobre 5 cada variable, en los tres contextos, así: a cada respuesta acertada en un contexto, se le asignó la nota 1,7 (5/3). Si tenía dos aciertos, se le asignaba 3,4; si tenía los tres aciertos, se le asignaba 5; si no tenía aciertos, se le asignaba cero. El NECB se consideró aprobatorio cuando su calificación era mayor o igual que 3,00.

DP= definición personal. Es la que el estudiante escribe o verbaliza, en relación con el conocimiento matemático.
ICE= imagen conceptual evocada. Es una subestructura de la IC (imagen conceptual). Se activa por la demanda cognitiva de la situación matemática planteada. Se infieren plausiblemente de los observables de las acciones del estudiante.

La DP y la ICE se identificaron con base en los prototipos de imágenes conceptuales evocadas y definiciones personales asociadas con la identificación de funciones, de acuerdo con las acciones de los estudiantes. Los códigos de los prototipos de función se tomaron de Álvarez y otros (2001).

DPE= definición personal estable. Se consideró que el estudiante tenía una DPE si al comparar los prototipos de DP con el de la pregunta ¿para usted qué es función matemática?, se observaba que el estudiante poseía un cierto número de prototipos iguales.

Los criterios fueron los siguientes: se consideró que el estudiante poseía una DPE si aparecía un prototipo en la pregunta anterior y existía al menos otro igual en las tres preguntas que calificaron la DP, o dos o más prototipos iguales en las mismas tres preguntas, aunque no hubieran respondido la pregunta ¿para usted qué es función matemática? En este caso se le asignó un valor de 1 y en el caso contrario se le asignó el valor cero.

COH= coherencia local. Es la coherencia que presentan las definiciones personales de función respecto de la acción del estudiante, referido a un contexto particular. Se le asignó el valor 1 si la imagen conceptual evocada (ICE) coincidía con la definición personal (DP), utilizada al justificar la acción realizada, al resolver la tarea correspondiente al contexto que se trabajaba y cero en caso contrario.

COHG = coherencia global. Se refiere al grado de integración entre la acción organizada por las ICE y la conciencia de cómo y por qué se hace, determinada por la DPE. La medida es un coeficiente entre cero y uno que se obtuvo al dividir el número de prototipos de ICE que se habían identificado y que coincidían o eran equivalentes con el prototipo de la DPE, entre el número de respuestas.

DP* = definición personal estable, bien adaptada matemáticamente. Estuvo determinada por la existencia de un prototipo estable al calificar la pregunta ¿para usted qué es función matemática?, que coincidía con la definición cuasiconjuntista (C). Si éste era el caso, se escribía 1; si no, cero.

Se caracterizó un nivel mínimo de comprensión de función, teniendo en cuenta los siguientes criterios:

$$\text{DP*} = 1,\ \text{COHG} \geq 0,66,\ \text{NEF} \geq 0,6,\ \text{NEI} \geq 0,6,\ \text{NECB} \geq 3,\ \text{DSA} \geq 0,66$$

Para determinar el segundo nivel de comprensión, se adoptaron los siguientes criterios: NEF y NEI mayor o igual que 0,75, NECB mayor o igual que 3,75, COHG mayor o igual que 0,825, manteniendo invariables DP* y DSA.

Otro aspecto importante que permitió estudiar la prueba diagnóstica fue el saber si un estudiante podía tener una comprensión estructural mejor establecida de función, que una comprensión operacional[6].

Se consideró que un estudiante poseía una concepción estructural de función cuando su nivel de éxito al identificar funciones que tenían función inversa (NEI) era mayor

[6]Según Sfard (1991), ver una entidad matemática como un objeto (estructural) significa ser capaz de referirse a él como si fuera una cosa real. También significa ser capaz de reconocer la idea con una mirada, manipularla como una totalidad sin entrar en detalles. Interpretar una noción como un proceso implica considerarla una entidad potencial más que como entidad actual, que viene a nuestra existencia interior en petición de una secuencia de acciones.

o igual que 0,66, su nivel de éxito al calcular composición de funciones (NEC de $h(g(a))$) era mayor o igual que 3,00 y el nivel de éxito en el reconocimiento de función como objeto era igual a 1. Tendría una concepción operacional de función si su nivel de éxito al calcular imágenes (NEC de $f(a)$) era mayor o igual que 3,00 y su nivel de éxito al calcular preimágenes (NEC de $f(x) = b$) era mayor o igual que 3,00.

Tall y Vinner introducen en varios artículos la noción de concepto imagen y señalan diferencias entre definición formal y definición personal de un concepto matemático, manifestada la problemática en torno a estos dos conceptos:

- **Definición personal (DP).** Concepto matemático tal como es apropiado por las personas.
- **Imagen conceptual (IC).** Determina la forma en que entendemos el concepto.
- **Imagen conceptual evocada (ICE).** Subestructura de la IC activada por la demanda cognitiva de la situación. Las ICE se infieren de los observables de las acciones del estudiante.
- **Definición formal o institucional (DI).** Concepto matemático tal como se expresa y concreta socialmente en la academia.

Con el fin de hacerlo operativo y entender cómo evoluciona y se transforma el *concept image*, Álvarez y Delgado (2001) hacen una redefinición del término *imagen conceptual*, introducido por Tall y Vinner, y precisan los siguientes conceptos así:

Una *definición personal* relativa a un concepto matemático es *estable* cuando la persona verbaliza una definición sobre el concepto en forma consistente y equivalente en diferentes situaciones. Una definición personal *estable* se llama *bien adaptada matemáticamente* si es equivalente a la definición institucionalizada del concepto.

La *coherencia* de la definición se refiere al grado de articulación que tiene dicha definición personal con la acción, es decir, con el concepto imagen evocado, cuando argumenta y opera con el concepto. Se dice *global* cuando está referida a distintos contextos. Será *local* cuando está referida a un solo contexto o situación. El concepto de coherencia supone el de estabilidad.

Estabilidad no implica necesariamente buena adaptación matemática. No es extraño encontrar que una persona tenga una definición estable de un concepto, mal adaptada matemáticamente. Tampoco se cumple que una definición personal estable, bien o mal adaptada, sea necesariamente coherente. Puede ocurrir que una definición personal estable mal adaptada, sea coherente.

Prototipos de imágenes conceptuales evocadas y definiciones personales asociadas con la identificación de funciones. De las categorías o prototipos de las imágenes conceptuales y las definiciones personales asociadas al concepto de función estudiada por Álvarez et ál. (2001), se tuvieron en cuenta las referidas a continuación. Éstas pueden diferir de un contexto a otro en un mismo sujeto, por lo que es necesario establecer los prototipos que se activan en ciertos contextos para analizar sus variaciones y su estabilidad.

- **C** (**C**uasiconjuntista) (Dirichlet): sean X y Y conjuntos no vacíos arbitrarios. Una función de X en Y es una asociación o correspondencia entre elementos de X y elementos de Y tal, que a cada elemento de X le corresponde un elemento y sólo uno en Y.

- **CI** (**C**uasiconjuntista **I**nyectiva): f es una "función" del conjunto X en el conjunto Y si todo elemento de X tiene una sola imagen en Y. Además, a elementos distintos de X les corresponden imágenes distintas en Y.

- **CS** (**C**uasiconjuntista **S**imétrica): f es una "función" en el sentido cuasiconjuntista, pero no discrimina dominio y codominio.

- **R** (**R**elación): f es una "función" del conjunto X en el conjunto Y si todo elemento de X tiene por lo menos una imagen en el conjunto Y.

- **RS** (**R**elación **S**obreyectiva): f es una "función" del conjunto X en el conjunto Y si todo elemento de Y es imagen de algún elemento de X.

- **RR** (**R**elación **R**estringida): f es una "función" del conjunto X en el conjunto Y si algunos elementos de X tienen una y sólo una imagen en el conjunto Y.

- **E** (**E**uleriana): f es una función si su regla de correspondencia se puede expresar mediante una expresión matemática variable única.

- **ED** (**E**uleriana **D**espejada): una ecuación en x y y define a y como una función de x, si y está expresada explícitamente en términos de x.

- **G** (**G**eométrica): f es una "función" si al trazar una recta perpendicular al eje de abscisas, ésta no corta la gráfica en más de un punto.

- **GC** (**G**ráfica **C**ontinua): f es una "función" si la gráfica de f es continua.

- **N**: **n**o contesta.

- **O**: **o**tro prototipo diferente de los anteriores.

Definición formal o institucional (DI) de función: la definición institucional de función que se usó dentro del proyecto de investigación fue la Cuasiconjuntista **C** (Dirichlet), ya que es la definición que más se aproxima a la que enuncia Stewart (2003) en el texto guía para estudiantes de primer semestre de ingeniería en la Universidad de La Salle.

Para efectos del desarrollo del proyecto se usó una metodología que permitió que el estudiante transitara por las diferentes definiciones de función real y que, en ese tránsito, se pudiera construir el concepto estructural de función.

3.4.2. Resultados

En la tabla 1 se recopilan los resultados de la preprueba y la posprueba, relacionados con la disponibilidad del sistema simbólico abstracto (DSA) y nivel de éxito en la realización de cálculos básicos (NECB).

Est.	Composición de Funciones						NEC				Determinación de Imagen										Determinación de Preimagen						NEC							
	Parejas		Gráfica		Algebra		h(g(a))		h(g(a))		Parejas		Gráfica		Algebra		NEC(f(a))		f(a)		Parejas		Gráfica		Algebra		f(x)=b		f(x)=b		DSA		NECB	
	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F
1	N	N	N	N	N	N	0	0,00	0	0	N	N	N	0	N	N	0,00	0,00	0	0	N	N	N	N	N	N	0,00	0,00	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
2	N	0	N	0	N	N	0	0,00	0	0	0	0	N	0	N	0	0,00	0,00	0	0	0	0	N	0	N	N	0,00	0,00	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
3	N	N	N	N	N	N	0	0,00	0	0	N	1	N	N	1	1	1,70	3,40	0	1	N	1	N	N	N	1	0,00	3,40	0	1	0,00	0,66	0,57	2,27
4	N	N	N	N	N	N	0	0,00	0	0	N	1	N	0	N	0	0,00	1,70	0	0	N	0	N	0	N	0	0,00	0,00	0	0	0,00	0,00	0,00	0,57
5	0	N	0	N	N	1	0	1,70	0	0	0	1	0	1	1	1	1,70	5,00	0	1	N	1	0	1	N	1	0,00	5,00	0	1	0,00	0,66	0,57	3,90
6	0	1	N	1	N	1	0	5,00	0	1	0	1	1	0	1	1	3,40	3,40	1	1	0	1	0	0	0	0	0,00	1,70	0	0	0,33	0,66	1,13	3,37
7	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0	0	0	0	0	1	1	1	1,70	3,40	0	1	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0	0	0,00	0,33	0,57	1,13
8	0	0	0	1	0	0	0	1,70	0	0	0	1	0	1	1	1	1,70	5,00	0	1	0	1	0	1	0	1	0,00	5,00	0	1	0,00	0,66	0,57	3,90
9	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0	0	0	1	0	1	0	0	0,00	3,40	0	1	0	1	0	1	0	0	0,00	3,40	0	1	0,00	0,66	0,00	2,27
10	0	1	0	1	0	1	0	5,00	0	1	1	1	1	1	1	1	5,00	5,00	1	1	1	1	1	1	1	1	5,00	5,00	1	1	0,66	1,00	3,33	5,00
11	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0	0	0	0	0	1	0	1	0,00	3,40	0	1	0	0	0	1	0	1	0,00	3,40	0	1	0,00	0,66	0,00	2,27
12	0	0	N	0	N	0	0	0,00	0	0	1	1	N	1	1	1	3,40	5,00	1	1	0	1	N	1	N	1	0,00	5,00	0	1	0,33	0,66	1,13	3,33
13	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0	0	0	1	1	1	1	1	3,40	5,00	1	1	0	1	0	1	1	1	1,70	3,40	0	1	0,33	0,66	1,70	2,80
14	0	1	0	0	0	0	0	1,70	0	0	1	1	0	1	1	1	3,40	5,00	1	1	0	1	0	1	0	1	0,00	5,00	0	1	0,33	0,66	1,13	3,90
15	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0	0	0	1	0	1	0	1	0,00	5,00	0	1	0	1	0	1	0	1	0,00	5,00	0	1	0,00	0,66	0,00	3,33
16	0	0	0	0	0	1	0	1,70	0	0	0	1	0	1	0	1	0,00	5,00	0	1	0	1	0	1	0	1	0,00	5,00	0	1	0,00	0,66	0,00	3,90

Tabla 1. Disponibilidad del sistema simbólico abstracto (DSA) y nivel de éxito que tiene el estudiante para realizar los cálculos básicos (NECB).

I= preprueba.
F= posprueba.
N= no contesta.

Los resultados de la preprueba y la posprueba, correspondientes a la definición personal estable, a la coherencia global y a la definición personal bien adaptada al concepto matemático de función, aparecen consignados en la tabla 2.

Estudiante	Pregunta	DP		ICE		COH		DPE		COHG		DP*	
		I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F
1	1	N	O	N	E	0	0						
	2	N	O	N	O	0	0	0	1	0,00	0,67	0	0
	3	N	O	N	E	0	0						
	15	O	E										
2	1	N	O	E	O	0	1						
	2	N	O	O	O	0	1	0	1	0,67	0,00	0	0
	3	N	N	O	O	0	0						
	15	O	CS										
3	1	N	CI	N	O	0	0						
	2	O	CI	N	CI	0	1	1	1	0,00	0,33	0	0
	3	N	N	ED	E	0	0						
	15	O	E										
4	1	N	O	N	E	0	0						
	2	N	R	N	R	0	1	0	1	0,00	0,00	0	0
	3	N	R	N	ED	0	0						
	15	O	O										
5	1	ED	G	E	ED	0	0						
	2	O	G	O	G	1	1	1	1	0,33	0,00	0	0
	3	N	ED	ED	ED	0	1						
	15	O	O										
6	1	O	RR	ED	C	0	0						
	2	O	G	O	C	1	1	1	1	0,33	1,00	0	1
	3	ED	RR	ED	C	1	0						
	15	O	C										
7	1	N	CS	ED	ED	0	0						
	2	N	N	N	N	0	0	0	1	0,00	0,00	0	0
	3	N	O	N	O	0	1						
	15	O	CS										
8	1	O	CS	O	C	1	1						
	2	G	G	G	C	1	1	1	1	0,67	1,00	0	1
	3	ED	CS	G	C	0	1						
	15	G	C										
9	1	ED	N	ED	ED	1	0						
	2	O	G	GC	G	0	1	1	0	0,00	0,00	0	0
	3	N	N	N	N	0	0						
	15	0	CS										

10	1	ED	G	ED	C	C	1	0					
	2	O	C	R	C	0	0	1	1	0,67	1,00	0	1
	3	ED	ED	ED	C	1	1						
	15	ED	C										
11	1	N	O	N	ED	0	0						
	2	N	G	N	GC	0	0	0	1	0,00	0,00	0	0
	3	N	N	N	ED	0	0						
	15	N	O										
12	1	N	ED	ED	ED	0	1						
	2	N	G	N	G	0	1	0	1	0,00	0,33	0	0
	3	ED	ED	ED	ED	1	1						
	15	N	G										
13	1	N	ED	ED	0	0							
	2	N	N	O	N	0	0	0	0	0,00	0,00	0	0
	3	N	N	ED	ED	0	0						
	15	G	O										
14	1	CS	CS	O	C	0	0						
	2	CS	G	CS	C	1	1	1	1	0,33	1,00	0	1
	3	CS	CS	ED	C	0	0						
	15	CS	C										
15	1	N	R	N	C	0	0						
	2	N	G	N	C	0	1	0	1	0,00	1,00	0	1
	3	N	R	N	C	0	0						
	15	N	C										
16	1	N	N	N	ED	0	0						
	2	N	G	N	O	0	0	0	0	0,00	0,33	0	0
	3	N	N	N	ED	0	0						
	15	N	O										

Tabla 2. Definición personal estable (DPE), coherente globalmente (COHG) y bien adaptada (DP*) al concepto matemático de función.

De acuerdo con los datos de la tabla, se observa que:

- El 43,8 % de la población tenía una DPE de función aceptable y después de la estrategia aumentó al 81,3 %.
- El 18,8 % de la población tenía una COHG aceptable; después de la estrategia, el porcentaje aumentó a 37,5 %.

- Antes de la estrategia, ninguno de los estudiantes tenía una DP*; después de la estrategia, el 31,3 % de la población tuvo una DP* representativa.

Con respecto al indicador vectorial de comprensión básica de función (ICBF), a continuación se muestran los resultados de la preprueba y la posprueba aplicadas a la población objetivo, que permitieron determinar el nivel mínimo de comprensión, y el segundo nivel de comprensión, del concepto de función (tabla 3).

Est.	Identificación de Funciones								NECB		DSA		Nivel mínimo de Comprensión		Segundo nivel de Comprensión	
	DP*		COHG		NEF		NEI									
	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F
1	0	0	0,00	0,67	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	NO	NO	NO	NO
2	0	0	0,67	0,00	0,75	0,75	0,00	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	NO	NO	NO	NO
3	0	0	0,00	0,33	0,25	0,50	0,00	0,00	0,57	2,27	0,00	0,66	NO	NO	NO	NO
4	0	0	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,00	0,00	0,57	0,00	0,00	NO	NO	NO	NO
5	0	0	0,33	0,00	0,25	0,75	0,33	1,00	0,57	3,90	0,00	0,66	NO	NO	NO	NO
6	0	1	0,33	1	0,25	1	0,00	1	1,13	3,37	0,33	0,66	NO	SI	NO	NO
7	0	0	0,00	0,00	0,25	0,75	0,00	0,00	0,57	1,13	0,00	0,33	NO	NO	NO	NO
8	0	1	0,67	1	0,75	1	0,33	1	0,57	3,9	0,00	0,66	NO	SI	NO	SI
9	0	0	0,00	0,00	0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	2,27	0,00	0,66	NO	NO	NO	NO
10	0	1	0,67	1	0,50	1	0,33	1	3,33	5	0,66	1,00	NO	SI	NO	SI
11	0	0	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,33	0,00	2,27	0,00	0,66	NO	NO	NO	NO
12	0	0	0,00	0,33	0,00	0,75	0,00	0,00	1,13	3,33	0,33	0,66	NO	NO	NO	NO
13	0	0	0,00	0,00	0,50	0,75	0,00	0,00	1,70	2,80	0,33	0,66	NO	NO	NO	NO
14	0	1	0,33	1	0,50	0,75	0,00	1	1,13	3,9	0,33	0,66	NO	SI	NO	SI
15	0	1	0,00	1	0,00	0,75	0,00	1	0,00	3,33	0,00	0,66	NO	SI	NO	NO
16	0	0	0,00	0,33	0,00	0,75	0,00	0,33	0,00	3,90	0,00	0,66	NO	NO	NO	NO

Tabla 3. Indicador vectorial de comprensión básica de función (ICBF).

I = preprueba.
F= posprueba.
NO= no alcanza el nivel de comprensión.
SÍ= sí alcanza el nivel de comprensión.

Los resultados contenidos en la tabla anterior reflejan que ningún estudiante en el momento de ingreso tenía el nivel mínimo de comprensión del concepto de función.

Al finalizar la estrategia, el 31,3 % de la población obtuvo el nivel mínimo de comprensión del concepto de función, mientras que el 18,7 % de la población alcanzó el segundo nivel de comprensión del concepto de función.

En lo relacionado con las concepciones estructural y operacional de función, seguidamente se muestran los resultados de la preprueba y la posprueba aplicadas a la población objetivo (tabla 4).

Est.	NEI		NEC h(g(a))		NEC(f(a))		NEC f(x)=b		Función como objeto		Concepción Estructural		Concepción Operacional	
	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F	I	F
1	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	N	NO	NO	NO	NO
2	0,00	0,33	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	N	0	NO	NO	NO	NO
3	0,00	0,00	0	0,00	1,70	3,40	0,00	3,40	0	0	NO	NO	NO	SI
4	0,00	0,00	0	0,00	0,00	1,70	0,00	0,00	N	N	NO	NO	NO	NO
5	0,33	1,00	0	1,70	1,70	5,00	0,00	5,00	0	1	NO	NO	NO	SI
6	0,00	1,00	0	5,00	3,40	3,40	0,00	1,70	0	1	NO	SI	NO	NO
7	0,00	0,00	0	0,00	1,70	3,40	0,00	0,00	0	0	NO	NO	NO	NO
8	0,33	1,00	0	1,70	1,70	5,00	0,00	5,00	0	1	NO	NO	NO	SI
9	0,00	0,00	0	0,00	0,00	3,40	0,00	3,40	0	0	NO	NO	NO	SI
10	0,33	1,00	0	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	0	1	NO	SI	SI	SI
11	0,00	0,33	0	0,00	0,00	3,40	0,00	3,40	0	0	NO	NO	NO	SI
12	0,00	0,00	0	0,00	3,40	5,00	0,00	5,00	0	0	NO	NO	NO	SI
13	0,00	0,00	0	0,00	3,40	5,00	1,70	3,40	0	1	NO	NO	NO	SI
14	0,00	1,00	0	1,70	3,40	5,00	0,00	5,00	0	0	NO	NO	NO	SI
15	0,00	1,00	0	0,00	0,00	5,00	0,00	5,00	0	0	NO	NO	NO	SI
16	0,00	0,33	0	1,70	0,00	5,00	0,00	5,00	0	0	NO	NO	NO	SI

Tabla 4. Análisis de la concepción estructural y la concepción operacional de función.

I= preprueba.
F= posprueba.
NO= no tener la concepción estructural u operacional de función.
SÍ= tener la concepción estructural u operacional de función.

Los resultados contenidos en la tabla anterior reflejan que antes de la aplicación de la estrategia el 6,3 % de los estudiantes tenía una concepción operacional de función, después el 68,8 % alcanzó tal nivel.

Antes de la aplicación de la estrategia, ningún estudiante tenía una concepción estructural de función; después sólo el 12,5 % alcanzó tal nivel.

Según el indicador vectorial de comprensión básica de función (ICBF), antes de la estrategia ningún estudiante tenía el nivel mínimo de comprensión del concepto de función. Al finalizar la estrategia, el 31,3 % de la población obtuvo el nivel mínimo de comprensión del concepto de función, mientras que el 18,7 % de la población alcanzó el segundo nivel de comprensión.

Este resultado revela que en los cursos de primer semestre de ingeniería en la Universidad de La Salle existen problemas de comprensión alrededor del concepto de función, que persisten o evolucionan muy lentamente. Se advierte que ignorar la presencia de esta problemática puede traer como consecuencia el fracaso de los estudiantes en los cursos de cálculo y, por tanto, un aumento en los niveles de deserción.

Estos resultados no difieren mucho de los obtenidos por Álvarez y Delgado (2001) en un estudio realizado en la Universidad del Valle con estudiantes de primer semestre de ingeniería y ciencias, donde encontraron que al momento del ingreso a la universidad el 17,1 % de la población mostró tener el nivel uno de comprensión básica de función y ningún estudiante alcanzó el nivel dos. Al término del semestre, 27,3 % alcanzó el nivel uno y 9,1 % el nivel dos.

3.4.3. Conclusiones

Los resultados mostraron que al parecer algunos estudiantes pueden alcanzar una concepción estructural de función, sin tener una concepción operacional, lo cual se contrapone a lo dicho por Sfard (1991), cuando afirma que "en el proceso de formación del concepto, las concepciones operacionales deben preceder a la estructural", proposición considerada básicamente verdadera en lo que concierne al desarrollo histórico o al aprendizaje individual.

Por último, se comprobó empíricamente que la superación de obstáculos cognitivos asociados al concepto de función es necesaria para la construcción de una concepción estructural del concepto en mención.

Referencias

Álvarez, J. & Delgado, C. (2001). La problemática Tall-Vinner. Reformulación operativa en el caso de función. Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Centro de Estudios Avanzados en Psicología, Cognición y Cultura, 14 pp.

Álvarez, J. et ál. (2001). Los sistemas de computación simbólica en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas básicas universitarias. Informe final, Documento

No. 3. Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Escuela Regional de Matemáticas, Cali, 106 pp.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22. Kluwer Academic Publisher, pp. 1-36. Traducción al español de César Delgado G.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 151-169.

3.5. Actitudes hacia las matemáticas y rendimiento académico; una experiencia en la Universidad Sergio Arboleda.

Luis Eduardo Pérez L.[7]

Resumen
Se presentan los avances de la investigación "Actitudes hacia las matemáticas y rendimiento académico", logrados por el grupo IMA en la línea de investigación metamatemáticas, que se ha venido desarrollando durante más de dos años. Se introduce el tema de la actitud, definición, estudios previos, importancia pedagógica de las actitudes, medición de las actitudes, construcción de escalas de actitud. Aplicación al caso de los estudiantes que ingresan al primer semestre en la Universidad Sergio Arboleda.

Palabras claves: actitudes, test, escala tipo Likert, rendimiento académico, matemáticas.

3.5.1. Introducción

Las asignaturas de álgebra, trigonometría y cálculo para la educación media, y cursos como precálculo, cálculo diferencial y álgebra lineal para quienes ingresan a la educación superior, representan, por el bajo rendimiento de los estudiantes, una gran preocupación para quienes conforman el entorno social inmediato de los estudiantes.

Directivos, profesores y padres de familia buscan alternativas que permitan superar las bajas calificaciones de los estudiantes; el cambio de profesores que imparten las asignaturas, la implementación de estrategias pedagógicas para el desarrollo de actividades en el aula y fuera de ella, y la contratación de profesores particulares que dicten clases extras, son algunas de las estrategias empleadas, sin que ninguna de ellas incremente significativamente y de manera general el rendimiento académico de los estudiantes en dichos cursos. La aprobación de tales asignaturas se convierte, en la mayoría de los casos, en un logro parcial, ya que en el siguiente curso la situación se repite, con la mismas alternativas parciales de solución y con tan sólo la esperanza de que el tiempo pase para poder, en el caso de los estudiantes de bachillerato, escoger una carrera que no tenga cursos de matemáticas, o para los alumnos universitarios, superar los cursos para no volver a saber nada que tenga

[7]Investigador IMA (Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones), docente de matemáticas, magíster en docencia e investigación universitaria con énfasis en matemáticas, especialista en matemática aplicada, matemático y licenciado en matemáticas.
luis.pereze@usa.edu.co.

que ver con éstos, dos cosas que casi en ningún caso se consiguen, ya que la reina de las ciencias y sus aplicaciones hacen presencia en la mayor parte de las áreas del saber.

La identificación específica de los causantes del mal rendimiento en estas asignaturas se convierte en una prioridad, ya que su conocimiento permitirá tomar los correctivos o implementar las políticas que lleven a superar de manera significativa el nivel académico actual. Empíricamente, los bajos resultados son atribuidos por la comunidad académica a la formación previa de los estudiantes, a las acciones de los profesores, a problemas de didáctica de la matemática y a las actitudes hacia la matemática de profesores, directivos, alumnos y demás actores que pertenecen al círculo social de los estudiantes. Al centrar la atención en el último aspecto mencionado, es decir, en la influencia de las actitudes hacia las matemáticas en los resultados académicos obtenidos en los primeros cursos por los estudiantes que ingresan por primera vez a la educación superior, y buscar establecer la existencia de una correlación positiva entre la actitud hacia la matemática y el rendimiento académico en los cursos de matemáticas de los estudiantes que ingresan por primera vez a la Universidad Sergio Arboleda, con sedes en Bogotá, se ha desarrollado, durante más de dos años, un trabajo en el interior del grupo MUSA. IMA1[8], con el que se pretende determinar las causas reales del bajo rendimiento en matemáticas de los estudiantes en la educación superior.

3.5.2. Actitudes y matemáticas

Las actitudes han sido uno de los temas más estudiados por los psicólogos sociales, que han propuesto variadas definiciones; una que recoge las ideas aquí enunciadas acerca del concepto de actitud es la dada por Bazán y Aparicio (1998), quienes manifiestan:

> La actitud es una predisposición del individuo para responder de manera favorable o desfavorable a un determinado objeto (matemática - estadística). La actitud es entonces una disposición personal, idiosincrásica, presente en todos los individuos, dirigida a objetos, eventos o personas, que se organiza en el plano de las representaciones considerando los dominios cognitivo, afectivo y conativo.

[8]MUSA.IMA1 significa Matemáticas Universidad Sergio Arboleda. Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones, grupo 1.

> La actitud determina aprendizajes a través de procedimientos productivos, emotivos y volitivos elaborados a través de información psíquica, y a su vez estos aprendizajes pueden mediar como información social futura para la estabilidad o no de esta actitud.

Como se puede observar en esta definición, el concepto enuncia y enumera algunas componentes para la actitud. Así, una actitud hacia la matemática que refleje aprecio e interés por esta ciencia hace referencia a una componente afectiva de ésta, mientras que referencias hacia el modo de empleo de las capacidades generales y hábitos de trabajo hacia esta disciplina evidencian un componente cognitivo de la actitud. Del mismo modo, la disposición a participar en actividades que involucren conocimientos matemáticos hace referencia al componente comportamental, y el reconocimiento o no de la utilidad de los conocimientos matemáticos muestra la intervención de un cuarto componente de la actitud: el valor.

3.5.3. Medición de actitudes

En 1926, el sociólogo norteamericano Emory Bogardus diseñó el primer instrumento reconocido para medir cuantitativamente las actitudes, que llamó escala de distancia social; con éste midió la disposición de la gente a mantener y aceptar una proximidad con diversos grupos sociales.

Siguiendo la naciente línea de la psicometría, Rensis Likert diseñó en 1932 una escala que permitía situar a una persona en un continuo que iba desde una actitud muy positiva hasta una actitud muy negativa hacia algo.

En la actualidad, de entre las múltiples técnicas de observación que se conocen (entrevistas, cuestionarios, test proyectivos, observaciones de la conducta, etc.), el instrumento de medida de actitudes son las escalas de actitud, porque como indica Gairín (1987), presentan como ventajas el anonimato, dan tiempo al encuestado para pensar acerca de las respuestas, se pueden administrar de manera simultánea a muchas personas, proporcionan uniformidad, los datos obtenidos son fácilmente analizados e interpretados y pueden administrarlas terceros sin pérdida de fiabilidad de los resultados.

Las investigaciones relacionadas con la evaluación de las actitudes hacia la matemática en la década de los setenta se centraron en analizar las opiniones de los estudiantes hacia las materias relacionadas con matemáticas y sus formas de enseñarlas, así como lo afirma McLeod (1992), algunos de los estudios más importantes que se han desarrollado son los siguientes: Higgins (1970), realiza una investigación en la que evalúa las actitudes de los alumnos antes y después de la actividad instruccional; Aiken (1974) diseñó dos escalas de actitud tipo Likert acerca de las matemáticas; Harvey, Plake y Wise (1988) estudiaron la relación existente entre una serie de variables afectivas y cognitivas; Garofalo y Lester (1985) evidencian la influencia de las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas a la hora de resolver un problema; Auzmendi (1992) analiza la vinculación de las actitudes con el logro y los factores que constituyen las actitudes hacia las matemáticas y la estadística; Schau et ál. (1992) describen la existencia de relación entre el grado de escolaridad de los encuestados y la actitud antes y después de realizar la instrucción; Moyra, Rufel et ál. (1998) confirman la influencia de las actitudes del profesor en sus alumnos como un factor dominante; Bazán y Sotero (1997) muestran que no hay diferencias por sexo en la actitud hacia las matemáticas, pero que sí existen discrepancias marcadas de acuerdo con la edad; Bazán y Aparicio (2004-2005) muestran la relación entre actitud y rendimiento en estadística de 87 maestros.

A nivel nacional se destacan los estudios de Gómez y Carulla, en la Universidad de los Andes de Bogotá, quienes destacan el cambio en la percepción hacia la matemática de los estudiantes que emplearon la calculadora graficadora en su primer curso de matemáticas universitarias.

La mayoría de las investigaciones mencionadas se caracterizan porque hacen uso de escalas de actitud tipo Likert como instrumento de medición, además, evidencian la necesidad de realizar investigaciones acerca de actitudes hacia las matemáticas en contextos universitarios.

3.5.4. Desarrollo de la investigación

La investigación se desarrolló en tres etapas: en la primera se hizo un estudio exploratorio con el propósito de detectar el tipo de instrumento que se va a aplicar, en la segunda se buscó aplicar un instrumento piloto fiable y en la tercera etapa se pretendió decantar el instrumento y aplicarlo a una cohorte de estudiantes que ingresan por primera vez a la Universidad Sergio Arboleda, que permitiera responder al problema planteado y verificar la hipótesis de investigación.

Primera etapa

La preocupación del grupo MUSA. IMA1 por el rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes que ingresan a la universidad llevó durante el primer semestre de 2006 a la realización de una encuesta exploratoria. Los objetivos que motivaron el diseño del mencionado instrumento fueron:

- Indagar sobre las experiencias de los encuestados con la matemática en la primaria y el bachillerato.

- Considerar la influencia de los profesores de matemáticas en el rendimiento académico de los estudiantes en primaria y bachillerato.

- Conocer el interés de los participantes por la matemática.

- Determinar las expectativas de los estudiantes hacia los cursos universitarios de matemáticas.

- Determinar cuáles son los libros de matemáticas más recordados y utilizados durante el bachillerato.

- Verificar la incidencia del gusto por las matemáticas en la escogencia de la carrera.

- Conocer experiencias positivas y negativas en el estudio de las matemáticas.

Después de una exploración en el interior en el grupo, se decidió que la encuesta contaría con 16 preguntas: siete abiertas, seis con única respuesta y tres con respuesta múltiple.

El instrumento diseñado se aplicó a 71 estudiantes que ingresaron a las carreras de Ingeniería y Administración de Empresas, de la Fundación Universitaria San Martín, universidad vinculada al comienzo del proyecto. El análisis de la información emanada permitió concluir en primera instancia los aspectos que se citan a continuación:

- De la totalidad de los estudiantes, tan sólo ocho consideran que su desempeño en los cursos de matemáticas de la universidad será excelente, cifra muy baja si se tiene en cuenta que son alumnos que de antemano saben que en su carrera enfrentarán un número significativo de cursos de matemáticas. Este resultado induce a pensar que, en efecto, la actitud hacia la matemática puede afectar el rendimiento académico en el área.

- El 52 y el 38 % de los encuestados manifiestan haber tenido una experiencia positiva con las matemáticas en primaria y bachillerato, respectivamente; la diferencia pone de manifiesto un rompimiento respecto a la actitud hacia esta ciencia en las dos etapas de formación.

- No se encontró una relación directa de la influencia de los profesores de matemáticas en el desempeño académico de los estudiantes, ya que apenas dos estudiantes en primaria y tres en secundaria la consideran negativa, y 69 estudiantes reconocen a Pitágoras como un gran matemático; por el contrario, un muy bajo número identifica a Gauss y Euler como tales. Curiosamente, 60 de los 71 estudiantes creen que Aurelio Baldor fue un matemático ilustre. Se puede inferir que los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería consideran que los cursos de matemáticas son indispensables para su formación como futuros ingenieros, pero evidencian cierta resistencia y prevención hacia éstos. En cuanto a los estudiantes de administración de empresas, se observa que toman sus cursos de matemáticas como aquellos que deben aprobar pero no manifiestan la importancia que tienen.

En cuanto a las preguntas abiertas, éstas presentaron bastantes dificultades para los alumnos, puesto que en muchos casos los estudiantes no las respondieron o contestaron con frases cortadas o incoherentes; por ejemplo, a la pregunta "Describa una experiencia positiva que lo(a) haya marcado en su estudio de las matemáticas", se obtuvieron respuestas como las que se transcriben a continuación de manera textual:

- "Trigonometría en 10º".
- "Ayuda a personas, con algunos problemas (temas)".
- "Superación en los últimos grados de bachillerato demostrando buen rendimiento".
- "Responsabilidad acerca a la persona con cosas".
- "Las matemáticas desarrollan el intelecto y eso es muy bueno".
- "Pues cuando fui el tercer mejor de esta área como en 8º".
- "Que siempre tenía las mejores notas".
- "Indiferente".
- "El autoaprendizaje".

El estudio de estas y otras respuestas similares a las preguntas abiertas evidenció la dificultad de conocer el sentir de los estudiantes hacia la matemática mediante este tipo de cuestionamientos. Por esta razón, dentro del grupo MUSA. IMA1 y con la hipótesis de investigación: "Existe una correlación positiva entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes que ingresan por primera vez a la Universidad Sergio Arboleda", se desarrolló un trabajo de investigación que permitió verificar esta hipótesis, midiendo la actitud a través de una escala de actitud tipo Likert y como resultado académico de los estudiantes las calificaciones finales del primer curso de matemáticas de la respectiva carrera.

Para la variable “actitud hacia la matemática”, después de estudiar gran cantidad de escalas tipo Likert empleadas en investigaciones similares y siguiendo la metodología de construcción de escalas de actitud de Elejabarrieta e Íñiguez [EI] (1984), se decide adaptar y complementar la escala de actitud de 31 ítems hacia las matemáticas diseñada por Bazán y Sotero [ByS] en 1997.

Segunda etapa

En esta etapa se llevaron a cabo la adaptación y la modificación de la escala mencionada a nuestro contexto y a las necesidades del estudio. Adicionalmente se construyeron siete ítems, completando así un instrumento de medición con 38 cuestionamientos tendientes a medir la actitud hacia la matemática. Esta escala fue validada por tres grupos: el primero, integrado por estudiantes de las universidades Sergio Arboleda y San Martín; el segundo, conformado por profesores con experiencia en la enseñanza de las matemáticas, quienes habían tenido a su cargo en varias ocasiones el primer curso de esta área a nivel universitario, y el tercero, compuesto por dos psicólogas con experiencia en el tema. Según la valencia de los items, es decir, si éstos reflejan una actitud positiva o negativa hacia el objeto actitudinal, esta versión de la escala tuvo 20 ítems positivos y 18 negativos. Además, de acuerdo con la componente actitudinal medida, esta versión tenía 17 ítems afectivos, 5 cognitivos, 10 comportamentales y 6 valorativos.

Aplicación a estudiantes

La aplicación de la escala versión 1 se realizó a un grupo de estudiantes, escogidos al azar, de la población que en ese momento ya estaba en el primer curso de matemáticas. Los objetivos al aplicar la escala a este grupo fueron:

- Verificar la claridad y escritura de los ítems.
- Determinar la impresión de los estudiantes sobre la escala.
- Estimar el tiempo de aplicación de la escala.
- Recoger las impresiones, comentarios y sugerencias de los estudiantes acerca del instrumento.

Adicionalmente, en esta etapa del trabajo se llevó a cabo un análisis estadístico de los datos obtenidos a través de la suma de los puntajes de los ítems en la escala para cada uno de los estudiantes. Algunos de estos puntajes aparecen a continuación (tabla 1).

ESTUDIANTE	PUNTAJE	ESTUDIANTE	PUNTAJE
1	139	20	139
2	166	21	157
3	144	22	123
4	150	23	171
5	128	24	156
6	144	25	151
7	142	26	146
8	148	27	153
9	138	28	146
10	166	29	161
11	164	30	145
12	106	31	166
13	175	32	161
14	123	33	149
15	143	34	153
16	150	35	158
17	158	36	139
18	152	37	163
19	155	38	157

Tabla 1. Puntajes totales obtenidos.

En el cuadro 1 se han resaltado los puntajes máximo y mínimo, de 175 y 106, para los estudiantes que hemos denotado como 13 y 12, respectivamente; estos valores indican que debe existir una diferencia en la actitud de los estudiantes 12 y 13. Adicionalmente, si se piensa en los objetivos al diseñar una escala de actitudes, podríamos decir que el instrumento versión 1 mostró buenas perspectivas como escala de medición y, además, que el estudiante 13 debe tener una mejor actitud hacia la matemática que la mostrada por el estudiante 12.

A continuación se transcriben literalmente los comentarios escritos por cuatro estudiantes en la aplicación del instrumento:

- **Estudiante 24:** "Las matemáticas realmente son fáciles, el problema es el mito de que son difíciles y por esta razón el estudiante no abre la mente de forma adecuada puesto que se encuentra ya con obstáculos mentales...".

- **Estudiante 31:** "Las matemáticas es una ciencia que uno practica en todo momento de su vida, por eso es tan importante".

- **Estudiante 13:** "Las matemáticas son una excelente materia. Para aprender bien, hay que practicar y hacer ejercicios. No es difícil".

- **Estudiante 14:** "En ocasiones las clases son tediosas y no se entiende".

Al leer los renglones anteriores puede inferirse que los estudiantes 24, 31 y 13 parecen tener una mejor actitud hacia la matemática que el estudiantes 14, y al verificar los puntajes de estos estudiantes en el cuadro 1, se puede ver que, en efecto, quienes se expresan positivamente hacia la matemática, los estudiantes 24, 31 y 13, obtienen un mayor puntaje que quien no lo hace, el estudiante 14, corroborando así la impresión que se mencionó anteriormente acerca del cuadro 1.

Las conclusiones obtenidas fueron:

- El número de preguntas no pareció afectar en forma alguna la contestación de la prueba.
- Algunas palabras causaron dificultad y preguntas por parte de los estudiantes.
- El número de comentarios y sugerencias puestos por los estudiantes en las pruebas son muy bajos, y ninguno hace referencia a los objetivos de la aplicación de esta primera versión.

Aplicación a profesores

Se llevó a cabo la aplicación de la escala versión 1 a un grupo de 24 profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, seleccionados por su experiencia en la enseñanza, especialmente en los primeros cursos de esta ciencia en cada una de las carreras mencionadas.

En esta aplicación se cambió la graduación para cada uno de los ítems, ya que no se pretendía medir la actitud hacia la matemática sino conocer la opinión acerca de cada ítem, es decir, si éste parecía ser pertinente para el trabajo que se iba a desarrollar con los estudiantes. Se pidió entonces a los profesores que calificaran cada pregunta como: excelente, si según su apreciación la pregunta daba indicios sobre la actitud de los estudiantes hacia la matemática y, por el contrario, calificarla como “mala” si no daba ningún indicio hacia la actitud, pasando por las posibilidades intermedias “buena” y “regular”.

Los objetivos de la aplicación de la escala a este grupo fueron:

- Verificar la claridad y escritura de los ítems.
- Determinar la pertinencia de los ítems planteados en la escala.
- Recoger las sugerencias y comentarios acerca de la escala.

Las conclusiones obtenidas de este grupo fueron las siguientes:

- Los ítems 9 y 38 presentaban muy poca diferencia. Por esta razón se determinó eliminar el ítem 38.
- Por sugerencia de los profesores se debían eliminar de todos los ítems las dobles negaciones, con el único fin de hacer más claros los enunciados y no confundir a los estudiantes al responderlos.

Aplicación a psicólogas

De manera individual dos psicólogas, con experiencia en el tema de actitudes, revisaron la escala construida para corroborar la valencia de los ítems y la componente actitudinal que cada uno de ellos media. Además sugirieron:

- Eliminar el ítem 38, ya que se correspondía con el ítem 9.
- Al igual que los docentes evaluadores, invitaron a eliminar de la redacción de los ítems las dobles negaciones.

Con el trabajo desarrollado hasta aquí, y las conclusiones descritas anteriormente para cada uno de los grupos de aplicación, se elaboró la segunda versión de la escala, a la que nos referimos a continuación.

Tercera etapa

La aplicación de la escala se realizó previa validación del instrumento con una batería de 34 ítems. La muestra considerada para este estudio estuvo conformada por 239 alumnos de las universidades Sergio Arboleda y San Martín con sede en Bogotá, de los programas de Ingeniería, Marketing y de Ciencias Económicas y Empresariales para el segundo semestre de 2007; la ejecución de la prueba piloto se realizó con similares características a la prueba prepiloto, para que cada uno de los estudiantes de la muestra seleccionada la aplicara y resolviera de manera individual.

Para el análisis de la información, procesamiento y presentación de datos, se utilizaron la hoja electrónica de Excel y el *software* SPSS, al igual que las medidas estadísticas correspondientes, tales como las pruebas de normalidad de Jarque-Bera y la de Kolmogorov-Smirnov, pruebas de hipótesis, correlación de Pearson, la fórmula de Spearman-Brown, e insumos como la distribución F de Snedecor, la distribución t de Student y el alfa de Cronbach, entre otros.

La escala piloto constó de 19 ítems positivos, es decir, aquellos proposiciones que se presentaron con una redacción tal, que indique directamente una actitud favorable hacia las matemáticas y 15 ítems negativos para aquellas proposiciones que indiquen una relación desfavorable hacia las matemáticas. La escala se aplicó en la primera clase de matemáticas por profesores no titulares de la asignatura de matemáticas, con el propósito de obtener la verdadera opinión de los estudiantes hacia las matemáticas.

3.5.5. Metodología

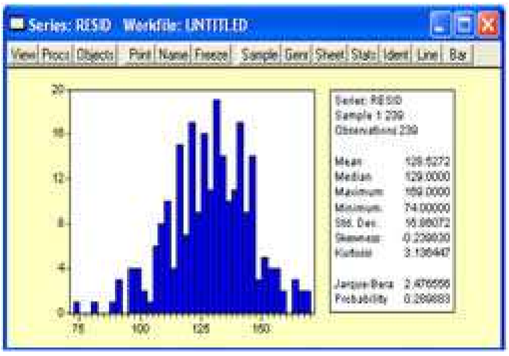
A continuación se presenta *grosso modo* la metodología seguida, que validó la hipótesis de la investigación:

> Existe una correlación positiva entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico de los estudiantes que ingresan por primera vez a la Universidad Sergio Arboleda.

En principio se buscó saber si los datos obtenidos siguen una distribución normal o no, con el propósito de establecer el camino del análisis estadístico que había que seguir; para tal efecto se realizaron los dos test de normalidad:

- Prueba de normalidad de Jarque-Bera.
- Prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov.

Éstas determinaron que los datos obtenidos por la escala siguen una distribución normal, como se puede advertir a continuación (tabla 1):



One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00001
N		239
Normal Parameters[a,b]	Mean	128,5272
	Std. Deviation	16,86072
Most Extreme Differences	Absolute	,043
	Positive	,032
	Negative	-,043
Kolmogorov-Smirnov Z		,658
Asymp. Sig. (2-tailed)		,779

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Tabla 1.

Se trabajó con un nivel de significancia del 5 % y no se encuentran elementos para rechazar la hipótesis de normalidad, es decir, de que los datos sigan una distribución normal.

Una vez obtenidos estos resultados, se procedió a ratificar que el instrumento medía lo que se pretendía medir, las actitudes hacia las matemáticas; para ello se trabajó de nuevo en la verificación de que los ítems evidentemente discriminaban, proceso que se realizó por el método de los grupos extremos y por el de correlación ítem-test, método este último que permitió además estudiar la fiabilidad de la escala.

El método de los grupos extremos consiste en asignar a cada ítem los pesos o puntuaciones correspondientes, dependiendo de si es un ítem positivo o un ítem negativo, tal como se observa en la tabla 2:

Ítems negativos				
TA	A	I	D	TD
1	2	3	4	5

Ítems positivos				
TA	A	I	D	TD
5	4	3	2	1

Tabla 2.

Hallada esta información, se calcularon las puntuaciones globales de cada estudiante. Se eligió un grupo de estudiantes con puntuaciones globales altas (25 % superior) y un grupo con puntuaciones globales bajas (25 % inferior), esto es, los estudiantes que se encuentran en los extremos. Dicho de otro modo, para formar estos grupos se tomaron los estudiantes que integran el cuartil superior Q_3 y los estudiantes del cuartil inferior Q_1. Así, 60 estudiantes con puntajes iguales o inferiores a 117 conformaron el cuartil Q_1 y 61 estudiantes con puntajes iguales o mayores que 141 conforman el cuartil Q_3.

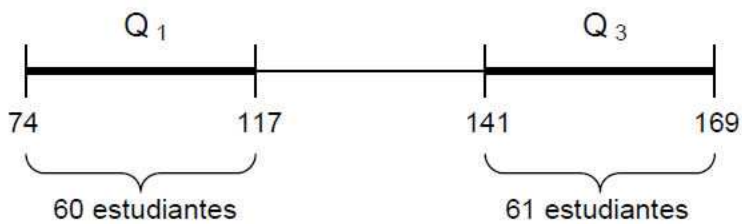


Figura 1.

Para que un ítem sea discriminativo es necesario que los estudiantes del cuartil Q3 (grupo 2) tengan puntajes más elevados en media que los individuos del cuartil Q1 (grupo 1). Se plantearon, por tanto, las siguientes hipótesis:

- Hipótesis nula. Los estudiantes del grupo 2 tienen igual media en promedio (2) que los estudiantes del grupo 1 (1), esto es:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$$

- Hipótesis alterna. Los estudiantes del grupo 2 tienen diferente media en promedio que los estudiantes del grupo 1, esto es:

$$H1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Es de anotar que esta comparación se realizó porque la distribución de los datos corresponde a una distribución normal y, por tanto, se utilizó la t de Student. Un insumo que se tuvo en cuenta fue la prueba de hipótesis para el cociente de varianzas usando la prueba F de Snedecor, con el fin de ver la homogeneidad entre las varianzas de los dos grupos. Así, mediante la F de Snedecor se verificó si se cumple la condición de igualdad de las varianzas para cada uno de los ítems y se compararon posteriormente las medias mediante la t de Student, ratificando que los 34 ítems discriminan.

El método de correlación ítem-test se aplicó con un doble propósito: por un lado, verificar si los ítems de la escala discriminan y comparar dichos resultados con los obtenidos por el método de los grupos extremos, y por otro establecer la consistencia interna de los ítems, es decir, la fiabilidad de la escala. Al igual que el método de grupos extremos, se realizó una prueba de hipótesis, a saber:

- Hipótesis nula. El ítem no discrimina si no hay correlación entre las puntuaciones de cada ítem y las puntuaciones globales de la escala, es decir:

$$H_0 : \rho = 0$$

- Hipótesis alterna. El ítem discrimina si hay correlación diferente de cero (0) entre las puntuaciones de cada ítem y las puntuaciones globales de la escala:

$$H_1 : \rho \neq 0$$

Para ello se utiliza la correlación r de Pearson. Hay varias fórmulas para calcular r de Pearson, pero la que se usó en esta investigación fue:

$$r = \frac{n \sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{\left[n \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right]\left[n \sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]}}$$

Donde x representa puntuaciones en una de las variables. Por ejemplo, de uno de los ítems y representa las puntuaciones globales y n es el número de pares de puntuaciones; cabe señalar que siempre debe haber igual número de puntuaciones de cada variable. La correlación r de Pearson es un valor que corresponde a; $|r| \leq 1$; por tanto, fue indispensable conocer a partir de qué valor un ítem discrimina, para lo cual se utilizó el contraste estadístico de la distribución t de Student.

Por este método se observó el buen comportamiento de todos los ítems de la escala, pues todos los ítems discriminan; vale la pena anotar que la escala muestra además una alta fiabilidad, pero la fiabilidad de la escala se estudió por otros dos métodos:

- Dos mitades (*split-half*).

- Alfa de Cronbach.

El método de las dos mitades o *split-half* consiste en hallar la correlación entre dos grupos de ítems; los grupos de ítems se pueden escoger de manera aleatoria para garantizar el equilibrio en la prueba. En la investigación se recurrió a la hoja electrónica Excel para hallar la generación de 34 números aleatorios con una distribución de Bernoulli y una probabilidad de 0,5; así, los ítems se dividieron en dos grupos. Una vez seleccionados estos dos grupos de ítems, A y B, se halló la suma de los puntajes de los ítems que conformaban el grupo A y los puntajes de los ítems del grupo B; además, se calculó el coeficiente de correlación r de Pearson entre los totales parciales de los dos conjuntos de valores (grupos A y B) y se obtuvo el siguiente resultado: $r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0{,}86$. Como en este cálculo sólo se utilizó la mitad de la prueba, fue necesario corregir el resultado con la fórmula de Spearman-Brown, que arrojó el siguiente resultado: ${}_2r_{xx} = \dfrac{2r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}{1 + r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}} = 0{,}93$. Este valor está bastante alejado de la correlación nula.

Dentro de la categoría de coeficientes, el alfa de Cronbach, $\alpha = \dfrac{k}{k-1}\left(1 - \dfrac{\sum S_i^2}{S^2}\right)$ es uno de los más relevantes, ya que mide la confiabilidad de la escala en función del número de ítems y la proporción de la varianza total de la prueba, donde k es el número de ítems; $\sum S_i^2$ es la suma de las varianzas de los ítems y S_2 la varianza del puntaje total. Como resultado de calcular el alfa de Cronbach se obtuvo: $\alpha = 0{,}92$. Por tanto, la escala es bastante confiable.

3.5.6. Conclusiones

Se adaptó la escala actitudinal del profesor Jorge Luis Bazán a nuestro medio educativo, la cual se validó con un grupo de expertos integrado por los profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda y por dos psicólogas. Además, se aplicó la escala piloto a un corte de estudiantes en el segundo semestre de 2007, en el que se verificaron la fiabilidad y la validez de la escala, pero sobre todo se concluyó que existe una correlación positiva entre la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y su rendimiento académico. Para probar la hipótesis de investigación que nos convocaba en este trabajo, se hizo una prueba de hipótesis:

- Hipótesis nula. No existe correlación entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico de los estudiantes que ingresan por primera vez a las universidades Sergio Arboleda y San Martín.

$$H_0 : \rho = 0$$

- Hipótesis alterna. Existe una correlación positiva entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico de los estudiantes que ingresan por primera vez a las universidades Sergio Arboleda y San Martín, es decir:

$$H_0 : \rho > 0$$

Para esta prueba de hipótesis, el cálculo se realizó en Excel y se obtuvo el estadístico de prueba teórico con $t = 1{,}65$ y el calculado de $t = 3{,}89$; para este caso, el coeficiente r de Pearson que se utilizó fue el calculado entre las puntuaciones de la escala frente a las notas obtenidas por los estudiantes al final del semestre académico, $r = 0{,}22$; de esta manera se rechazó la hipótesis nula y por tanto se validó la hipótesis alterna, $\rho > 0$, es decir, existe una correlación positiva entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico de los estudiantes que ingresan por primera vez a las universidades Sergio Arboleda y San Martín. La anterior información se resume a renglón seguido (tabla 3):

Test de la hipótesis de la investigación	
Probabilidad	$p = 0,1$
Grados de libertad	$gl = 218$
Test de prueba (t teórico)	$t = 1,65$
Test de prueba (t calculado)	$t = 3,89$
Conclusión	Hay correlación

Tabla 3.

3.5.7. Proyección de la investigación

A partir del segundo semestre de 2008, el grupo de investigación se plantea el siguiente interrogante: ¿cómo construir una metodología de intervención directa para el cambio de actitudes negativas hacia la matemática?

Para ello ha trabajado en torno de los siguientes interrogantes:

1. ¿Qué metodología es la más adecuada para seguir con los estudiantes ya clasificados mediante la escala?

2. ¿Qué perfil deben tener los docentes para cada uno de estos grupos de estudiantes?

3. ¿Qué papel desempeñan en esta labor docentes de otras áreas, administrativos, funcionarios y padres de familia?

4. ¿Qué estrategias se han de seguir para un cambio actitudinal hacia las matemáticas?

5. ¿Cómo implementar una nueva cultura matemática en la comunidad universitaria, en particular de la Universidad Sergio Arboleda?

6. ¿Cambia la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas según el sexo?

7. ¿Cambia la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas de acuerdo con su edad?

3.5.8. Construyendo una metodología de intervención

En el primer semestre de 2009, el grupo de investigación aplicó el primer día de clase de cálculo diferencial dos indicadores: una escala de actitudes hacia las matemáticas, que consta de 34 ítems, y una prueba de conocimiento de 20 preguntas a estudiantes que ingresaron a los programas de las Escuelas de Marketing & Negocios Internacionales, Ciencias Empresariales e Ingeniería. El propósito de estos indicadores en principio fue establecer una correlación entre la actitud de los estudiantes que ingresan por primera vez a la Universidad Sergio Arboleda y los conocimientos previos que ellos poseen. El estudio, que se realizó a toda la población (363 estudiantes), arrojó los siguientes resultados:

1. Se halló una correlación positiva entre las actitudes y los conocimientos con que ingresan los estudiantes al primer semestre de la Universidad Sergio Arboleda.

2. De la población estudiada, se encontró que:

   a) En cuanto a actitud:

Actitud		
	Número de estudiantes	Porcentaje
Positiva	100	27.5%
Indiferente	162	44.6%
Negativa	101	27.9%
Total	363	100%

   b) En cuanto a conocimientos:

Actitud	Prueba de conocimientos					
	Bueno		Aceptable		Deficiente	
Positiva	0	0%	22	6.1%	78	21.5%
Indiferente	1	0.3%	21	5.8%	140	38.6%
Negativa	0	0%	6	1.7%	95	26.2%
Total	1	0.3%	49	13.6%	313	86.3%

Analizados los resultados, el grupo MUSA. IMA1 decidió tomar algunas acciones para mejorar el nivel académico de los estudiantes y prevenir en lo posible un alto índice de mortalidad académica, a saber:

1. Reunión con los profesores titulares de cálculo diferencial todos los lunes de 4:00 a 6:00 p.m. para:

    a) Brindar un informe del desarrollo del curso.

    b) Revisar los temas vistos en clase con el objetivo de ir ajustando el programa.

    c) Elaborar en conjunto un taller que consta de dos partes para aplicarlo en la última sesión de clase de cada semana.

2. Con ayuda de las escuelas se organizaron los cursos de cálculo diferencial en franjas horarias, con el propósito de:

    a) Contar con un horario para reunión de profesores.

    b) Dictar charlas magistrales para los cursos.

    c) Disponer de un mejor horario para el desarrollo de los cursos.

3. Se vincularon al proyecto estudiantes del semestre anterior con un excelente nivel académico, para que sirvan de apoyo a los estudiantes el día del taller.

4. Se estableció un horario de asesorías para estudiantes con 40 horas de atención de lunes a viernes, a cargo de los profesores del Departamento de Matemáticas.

5. Con el apoyo del director del Departamento de Matemáticas se planteó y elaboró el siguiente sistema de evaluación:

    a) Primer corte: 30 %

        - 30 % parcial
        - Hasta + 0,5 décimas por asesorías, asistencia a clase y presentación de talleres y quizzes.

b) Segundo corte: 30 %

- 15 %: parcial
- 15 %: informe del monitor, tutorías, tareas, talleres, trabajos y quizzes.

c) Tercer corte: 40 %

- 30 %: examen final.
- 5 %: profesor.
- 5 %: monitor.

6. Se organizó un taller como propuesta de intervención psicológica para modificar la actitud negativa hacia las matemáticas de un grupo de 30 estudiantes de la Universidad Sergio Arboleda con edades comprendidas entre los 17 y 23 años, taller que se desarrolla en dos jornadas horarias: miércoles de 7:00 a 9:00 a.m. y de 4:00 a 6:00 p.m.

7. Se repartió una circular a los estudiantes en la que se les recordaban los recursos y apoyos que brinda el Departamento de Matemáticas, tales como:

   a) Página web http://espanol.geocities.com/usa.calculo.

   b) Aulas virtuales.

   c) Asesorías académicas.

   d) Asesorías de tipo psicológico.

   e) Monitores.

Con estas acciones, el grupo MUSA. IMA1 realizó el 14 de marzo del año en curso un balance del desempeño académico de los estudiantes, para el cual analizó los resultados alcanzados al cierre del primer corte académico.

Población 363 Estudiantes	**PC**	**Primer Parcial 30%**		
		Bueno 5.0 – 4.0	**Aceptable 3.9 – 3.0**	**Deficiente 2.9 – 0.1**
Bueno	1	1 100%		
Aceptable	49	38 77.6%	6 12.2%	5 10.5%
Deficiente	313	66 21.1%	98 31.3%	149 47.6%

Tabla 4.

Población 363 Estudiantes	PC	30%			
		Bueno 4.0 – 5.0	Aceptable 3.0 – 3.9	Deficiente	
				2.0 – 2.9	0.1 – 1.9
Bueno	1 0.3%	1 0.3%			
Aceptable	49 13.5%	39 10.5%	6 1.7%	3 0.8%	2 0.6%
Deficiente	313 86.2%	66 18.2%	98 27%	74 20.4%	75 20.7%
Balance		105 28.9%	104 28.7%	77 21.3%	77 21.3%

Tabla 2.

Como se observa en la tabla 2, de 363 estudiantes que ingresaron al primer semestre, 313 (86,2 %) obtuvieron deficiente en la prueba de conocimientos, de los cuales 164 alumnos aprobaron el primer parcial, correspondiente al primer corte académico, lo cual muestra una reducción del 52,4 % de estudiantes que presentaban bajo rendimiento académico. Es de anotar que 66 estudiantes obtuvieron notas iguales o superiores o 4,0, que corresponden a un 21,1 %.

Una vez que presentaron el primer parcial, se encuestó a todos los estudiantes (455) que toman cálculo diferencial (incluyendo los que están repitiendo la asignatura) con el propósito de evaluar el proceso realizado por el grupo de investigación; a continuación se presenta el instrumento aplicado, con sus respectivos resultados:

5: Excelente **4**: Bueno **3**: Aceptable **2**: Malo **1**: Pésimo

Pregunta	5	4	3	2	1	NC
Mi rendimiento académico en el curso de cálculo diferencial ha sido	57 12.8%	194 43.6%	131 29.4	53 11.9%	7 1.6%	3 0.7%
El desarrollo y metodología del curso de cálculo diferencial ha sido	187 42%	226 50.8%	30 6.7%	1 0.2%	1 0.2%	
El desempeño del profesor ha sido	266 59.8%	165 37.1%	11 2.5%	1 0.2%	1 0.2%	1 0.2%
El trabajo del monitor ha sido	122 27.4%	189 42.5%	92 20.7%	23 5.2%	11 2.5%	8 1.8%
El tiempo que dedico fuera de las clases a estudiar cálculo diferencial	Promedio ≈ 3.9 horas semanales de estudio.					

Mi conocimiento y la frecuencia con que utilizo los apoyos académicos que la Universidad ofrece para el desarrollo del curso de Cálculo Diferencial es:						
	Conocimiento de los apoyos		Frecuencia de Utilización			
	SI	NO	Frecuente-mente	Algunas veces	Pocas veces	Nunca
Aula Virtual	355 80%	71 16%	161 36%	129 29%	71 16%	49 11%
Página web del curso	259 58%	165 37%	76 17%	102 23%	91 20%	127 29%
Asesorías con profesores	309 69%	117 26%	47 11%	108 24%	105 24%	147 33%
Asesorías con monitores	233 52%	189 42%	32 7%	76 17%	77 17%	208 47%
Biblioteca	296 67%	123 28%	60 13%	116 26%	112 25%	125 28%

Al cierre del semestre se aplicaron de nuevo los dos instrumentos, los cuales arrojaron los siguientes resultados:

Vs.	Prueba de conocimientos		
Actitud	Bueno	Aceptable	Deficiente
Positiva	6	37	23
Indiferente	4	46	68
Negativa	6	18	38
Total	16	101	129

Tabla 5.

A continuación se muestra un cuadro comparativo entre la tabla anterior y las notas finales del semestre.

	Condición inicial.		Nota final		MORTALIDAD ACADÉMICA 02-2008
	Estudiantes	Porcentaje	Estudiantes	Porcentaje	
Bueno	1	0.3%	43	11.3%	
Aceptable	49	13.6%	144	37.9%	
Deficiente	313	86.3%	193	50.8%	65%

Tabla 6.

3.5.9. Informe taller de actividades en cálculo diferencial

Grupo de la mañana

El 29 de enero de 2009 se realizó, en el auditorio principal de la universidad, una reunión con todos los estudiantes de los cursos de cálculo diferencial, con el fin de invitarlos a participar en este taller de actividades; luego de la inscripción, se conformaron dos grupos de trabajo: uno en la mañana y el otro en la tarde.

Los talleres se iniciaron el 4 de febrero del presente año con el grupo de la mañana, integrado por estudiantes que se inscribieron de manera voluntaria para mejorar su actitud hacia las matemáticas, debido a que los resultados arrojados en las pruebas de diagnóstico que se realizaron en los diferentes cursos de cálculo diferencial no fueron satisfactorios, ya sea en la escala de actitud o en la prueba de conocimientos.

Se celebraron reuniones semanales en el auditorio principal de la universidad todos los miércoles, en el horario de 7:00 a 9:00 a.m., con la orientación de la psicóloga Liliana Castro, quien dirigía las diferentes actividades con las que se buscaba mejorar la motivación hacia las matemáticas.

A continuación se presenta un cuadro comparativo de los resultados en las pruebas iniciales de actitud y conocimiento, la prueba final del taller y la nota definitiva en el curso de cálculo diferencial de estos estudiantes.

Estudiante	F.I.	ACTITUD	NOTA FINAL	PROGRAMA	Asistencia/ 15 Sesiones
1	N D	MUY POST	3,0	Finanzas	13
2	I D	N/S	3,5	Economía	14
3	N D	MED. POST	3,0	Economía	13
4	P D	MUY POST	4,5	Economía	14
5	I D	N/S	3,7	Finanzas	10
6		MED. POST	3.0	Marketing	8
7	P D	N/S	3,1	Finanzas	8
8	N D	N/S	3.0	Marketing	8
9	N D	N/S	3.0	Marketing	7
10	P D	N/S	3,3	Finanzas	6
11	I D	N/S	3.1	Marketing	6

Tabla 7.

Grupo de la tarde

El grupo de la tarde inició trabajos el día 11 de febrero. Este grupo se reunía semanalmente en el salón E-403 de la universidad todos los miércoles, en el horario de 4:00 a 6:00 p.m., con la orientación de la psicóloga Liliana Castro, quien dirigía las diferentes actividades con las que se buscaba mejorar la motivación hacia esta ciencia; también se contó con el apoyo del grupo de investigación conformado por profesores de cálculo diferencial y dirigido por el profesor Jesús Hernando Pérez.

Estudiantes	F.I.	ACTITUD	NOTA FINAL	PROGRAMA	ASISTENCIA/ 13 SESIONES
1	I D	MUY POST	4,4	Marketing	13
2	I D		1,6	Marketing	10
3	I D	MED. POST	3,5	Marketing	11
4	I D	NEUTRA	3,0	Marketing	13
5	N D	N/S	2,0	Marketing	10
6	ND	MED POST	2,0	Marketing	10
7		MUY POST	2,2	Marketing	13
8	I D	N/S	4,2	Marketing	12
9	N D	N/S	2,0	Marketing	12
10	I D	N/S	3,5	Marketing	11
11	N D	N/S	3,7	Marketing	12
12		MED POST	3,2	Marketing	10
13	N D	MED POST	3,2	Marketing	11
14	N D	MED POST	3,5	Marketing	9
15	I D	MED POST	3,0	Marketing	9
16	PD	MUY POST	3,0	Marketing	8

Tabla 8

Al finalizar el taller con este grupo, sólo un estudiante no participó en las últimas tres sesiones. De los estudiantes que participaron en los talleres, se concluye que el 81 % de ellos aprobó el curso de cálculo diferencial. El trabajo con estos dos grupos terminó el 22 de mayo, con una última prueba de actitud, la cual se presenta en la tabla anterior.

Referencias

[*AL*] Aiken, L. (1974). Two scales of actitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 67-71.

[*AW*] Allport, G. W. (1935). *Psicología de la personalidad.* Buenos Aires: Paidós.

[*A*] Ausmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática y la estadística en las enseñanzas medias y universitarias.* Bilbao: Mensajero.

[*ByS*] Bazán, J. & H. Sotero (1998). Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM. *Anales Científicos UNALM*, 36, 60-72.

[*BD*] Bem, D.J. (1972). Self-perception theory. *Journal for Advances Experimental Social Psychology*, 6, 2-62.

[*BG*] Briones, G. (2006). *Métodos y técnicas de investigación para las ciencias sociales.* Ed. Trillas.

[*EI*] Elejabarrieta, F. J. & Íñiguez, L. (1984). *Construcción de escalas de actitud tipo Thurston y Likert.* UAB.

[*FyA*] Fishbein & Ajazan (1975). *Belief, attitude, intention and behavior.* Reading, MA: Addison-Wesley.

[*GF*] Gil Flórez, J. (1999). Actitudes hacia la estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.

[*G*] Gómez, P. & Carulla, C. (1995). *Calculadoras gráfica y precálculo. Efectos en el diseño curricular*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.

[*H*] Higgins, J. (1970). Attitude changes in a mathematics laboratory utilizing a mathematics through science approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7, 43-56.

[*HE*] Hollander, Edwin (2000). *Principios y métodos de psicología social.* Buenos Aires: Amorrortu.

[*M*] McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Macmillan y NCTM.

[*MR*] Mercedes, Rouges. *Principios de estadística univariada aplicados a la ecología del paisaje.*

[*PC*] Philippou, G. & Constantinos, C. (1998). The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers. Attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189-206.

[*PWH*] Plake, B. S., Wise, S. L. & Harvey, S. L. (1988). Test taking behavior under formula and number right scoring conditions. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 26, 316-318.

[*RM*] Ruffel, M., Mason, J. & Allen, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in mathematics*, 35, 1-18.

[*S*] Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. & Del Vecchio, A. (1992). *The development of the survey of attitudes towards statistics.* Paper presented at the American Educational Research Association Annual Meeting (San Francisco).

[*SAyBJ*] Sokal, Alain & Bricmont, Jean (1999). *Imposturas intelectuales.* Buenos Aires: Paidós.

[*TyC*] Thurstone, L. & Chávez, E. (1929). Theory of attitude measurement. *Psychological Review*, 36, 224 - 241.

3.6. Herramientas didácticas en ciencias básicas. Implementación de aulas virtuales como apoyo a la presencialidad. Aciertos y dificultades

Guillermo Antonio Manjarrés[9]
Néstor Raúl Roa Becerra[10]
Jorge Enrique Tarazona Suárez[11]
Jair Zambrano Castro[12]

3.6.1. Introducción

Durante los últimos años se ha producido un gran avance en el desarrollo tecnológico, lo cual justifica la necesidad de formar a los estudiantes en el campo de las tecnologías de la información y comunicación (TIC). Los estudiantes precisan de los conocimientos necesarios para ser agentes activos y “alfabetizados” en esta nueva “aldea global”, que de manera continua presenta innovaciones técnicas y formales en el campo de la comunicación y la información.

Estos medios, cada día más presentes en nuestra vida, obligan a los estudiantes a adquirir los conocimientos necesarios para su utilización, tanto en su cotidianidad como en su formación y educación; corresponde al profesorado realizar esfuerzos por dominarlos y adquirir la capacidad de transmitirlos de manera que se usen en forma crítica, constructiva y eficaz.

Por otro lado, la gran accesibilidad que los alumnos tienen para manejar estas nuevas tecnologías y el atractivo que sobre ellos ejercen permite que se conviertan en un útil y eficiente instrumento pedagógico, a la vez que estimulante para ellos. Por tanto, debemos ayudarles a que descubran que las TIC, además de ser una herramienta lúdico-recreativa, constituyen también un valioso instrumento para su formación y para su integración en la nueva sociedad de la comunicación.

Para una adecuada introducción de las TIC en el aula, se deben analizar todos los factores del contexto (perfil del estudiante, infraestructura de la institución, políticas sobre programas, material existente, recursos financieros, de infraestructura y humanos, que interaccionarán en las nuevas situaciones de aprendizaje), de modo que el diseño de las nuevas actividades tengan la garantía de éxito deseado.

En el caso de Uniminuto, el estudiante normal tiene un contacto limitado con las

[9]Corporación Universitaria Minuto de Dios. Ciencias Básicas.
[10]Corporación Universitaria Minuto de Dios. Ciencias Básicas.
[11]Corporación Universitaria Minuto de Dios. Ciencias Básicas.
[12]Corporación Universitaria Minuto de Dios. Ciencias Básicas.

TIC, y un nivel bajo de empleo del computador y muy centrado en el aspecto recreativo. Los profesores apreciamos la necesidad de intervenir para que el estudiante descubra los otros usos y ventajas que ofrecen estos nuevos instrumentos. Hay que constatar también el hecho de que son aún escasos los alumnos que disponen en sus hogares de equipos y conexiones adecuadas para acceder a todo el potencial que hoy ofrecen estas nuevas tecnologías.

Junto con estas necesidades, que por sí solas justificarían plenamente el desarrollo de este proyecto, cabe destacar también una necesidad muy concreta que ha venido surgiendo y es que existen actividades para las cuales el aula de clase no resulta adecuada: presentaciones multimedias interactivas y participativas, programas para realizar cálculos rápidos, eficientes y certeros, gráficos con representaciones dinámicas sobre algunos temas específicos, debido a que la actitud pasiva de ésta da pie, en muchas ocasiones, al aburrimiento y poca receptividad de los temas tratados.

3.6.2. Planteamiento del problema

Es claro que a partir de la justificación anterior surge una necesidad: utilizar las TIC como un medio para reforzar conceptos que se ven en clase presencial. Para esto se cuenta con el apoyo de la Facultad de ingeniería y del Departamento de Ciencias Básicas de Uniminuto.

Este proyecto pretende indagar, acorde con la experiencia personal del estudiante, si el uso de un aula virtual, como complemento a las clases presenciales, rinde beneficios a la hora de apropiar conceptos matemáticos específicos.

3.6.3. Objetivos generales del proyecto

- Presentar un aula virtual como apoyo a la presencialidad en un curso.
- Introducir el uso de las TIC como una herramienta de trabajo para el profesorado, de modo que favorezca el proceso de enseñanza con los estudiantes.
- Fomentar el uso de las TIC como herramienta en el proceso de aprendizaje.
- Elaborar, en lo posible, materiales didácticos propios y contextualizados.
- Facilitar el aprendizaje autónomo, individual o en grupo entre los alumnos.
- Mostrar a los estudiantes otras formas de hacer uso de las TIC.
- Desarrollar destrezas en el estudiante para el uso de la plataforma de aprendizaje Moodle.

- Presentar al estudiante información clara, oportuna, contextualizada y actualizada de algunos de los temas vistos en clase.

3.6.4. Marco teórico

Sobre éstos se tiene bastante información, pero se hace un resumen de tres de ellos que se consideran de importancia. Quesada (1994) realizó una investigación a lo largo de tres semestres con 710 alumnos de un curso de precálculo de una universidad de Estados Unidos. Se comparó el rendimiento de los estudiantes divididos en un grupo control y un grupo experimental. Los estudiantes del grupo control cursaron la materia del modo tradicional, utilizando una calculadora científica y un libro común de texto. El tratamiento del grupo experimental consistió en el empleo de la calculadora gráfica y un texto específicamente escrito para ser usado con ella. Tres instructores distintos enseñaron al grupo experimental y siete al grupo control. Los instructores del grupo experimental usaban un aparato que, junto con un proyector, les permitía mostrar el *display* de la calculadora en la pantalla. La evaluación de los estudiantes fue la misma para ambos grupos, y consistió en cuatro test, un examen comprensivo final y una o dos encuestas semanales.

Según los autores, la aproximación gráfica agregó una nueva luz al conocimiento de conceptos, y permitió que los estudiantes mantuvieran su interés en los distintos temas. La aproximación manual y la habilidad de chequear sus respuestas con la calculadora gráfica aumentaron la motivación de los estudiantes.

En un trabajo (Ruthven, 1990) hecho en Inglaterra durante 1990 y 1991, seis grupos de profesores participaron en el proyecto denominado "Graphic Calculators in Mathematics", subvencionado por el National Council for Educational Technology. En este proyecto participaron estudiantes que habían tenido acceso permanente a las calculadoras gráficas en el transcurso de los dos últimos años del secundario. Ruthven, como investigador principal, examinó el rendimiento en matemática cerca del final del primer año del proyecto, y lo comparó con el de estudiantes que seguían el mismo curso de matemática pero que no tenían acceso a las calculadoras gráficas. La muestra constaba de 87 estudiantes: 47 estaban en las clases del proyecto y 40 pertenecían al grupo de comparación. En este estudio, Ruthven prestó especial atención a los ítems simbólicos, pues estaban más influenciados por el uso de las calculadoras gráficas y porque revelaron importantes diferencias en el rendimiento de los dos grupos. En estos ítems, el estudiante primero identificaba los gráficos de funciones como correspondientes a alguna familia y luego efectuaba el refinamiento, utilizando así sus conocimientos matemáticos; el autor encontró que los estudiantes que habían usado calculadoras gráficas tuvieron mayor rendimiento en los ítems de simbolización, pero no en los de interpretación. La diferencia la atribuyó a que la utilización regular de las calculadoras gráficas habían generado en los estudiantes un mayor uso de aproximaciones gráficas en la resolución de problemas y el desarrollo de nuevas ideas matemáticas, que fortalecieron no sólo esas relaciones específicas, sino también generaron mayores relaciones entre las formas gráficas y simbólicas. Por otra parte, notó que al aumentar el éxito del estudiante se redujo su ansiedad, generando indirectamente un mayor rendimiento en aquellos estudiantes que usaron calculadoras gráficas.

Aldanondo (2002) confirma el hecho de que las personas aprenden haciendo y no escuchando. La práctica diaria en las aulas de clase nos lleva a tener presentes dos cosas: que el docente busca explicar con la mejor metodología los temas y que si el estudiante quiere mejorar lo aprendido en el aula de clase, tiene que practicar. Pero tendrá que hacerlo él, con su cerebro y su razonamiento. Y especialmente fracasando y razonando sobre los motivos de su fracaso hasta dar con la solución. No hay mejor tutor que uno mismo cuando está cautivado por una actividad que lo fascina. Para aprender, el protagonista debe ser el alumno que tiene que hacer cosas y no escuchar pasivamente cómo se las cuenta otra persona. La memoria y el aprendizaje van íntimamente ligados a las emociones.

3.6.5. Descripción de la metodología propuesta

La educación electrónica (*e-learning*) sirve de línea conductora a este proyecto, ya que por definición el *e-learning* es el suministro de programas educacionales y sistemas de aprendizaje a través de medios electrónicos. De acuerdo con Mendoza (2003), el *e-learning* se basa en el uso de un computador u otro dispositivo electrónico (por ejemplo, un teléfono móvil) para proveer a las personas de material educativo. La educación a distancia creó las bases para el desarrollo del *e-learning*, el cual viene a resolver algunas dificultades en cuanto a tiempos, sincronización de agendas, asistencia y viajes, problemas típicos de la educación tradicional. Este término abarca un amplio paquete de aplicaciones y procesos, como el aprendizaje basado en web, capacitación basada en computadores, salones de clases virtuales y colaboración digital (trabajo en grupo).

Se ha escogido la plataforma Moodle por ser ésta la que maneja la universidad. Además, es de carácter libre y posee características ideales para hacer seguimiento a los estudiantes.

Se implementarán cursos de apoyo, en los cuales se incluirán lecturas motivadoras, ejercicios resueltos y propuestos, teoría sobre algunos temas, páginas interactivas, *applets* realizados en Java, animaciones, videos y un foro. Todos los cursos tendrán estas características. No se pretende brindar apoyo a cada uno de los temas que se tratan en el curso presencial, sino más bien de respaldar las grandes temáticas que se presentan a los estudiantes en cada curso presencial. El aula virtual en ningún momento sustituirá al profesor-tutor, ni tampoco la presencia del estudiante en la clase.

Se han creado equipos de trabajo compuestos de dos profesores que estarán encargados de geometría, cálculo integrodiferencial y precálculo; a la par, un equipo de cuatro profesores trabajará con la asignatura física en tres cursos que se vienen desarrollando hace un par de semestres. Se han escogido estas asignaturas por ser las que ofrecen un nivel de dificultad relativamente alto al estudiante y además porque los profesores tienen a su cargo esas materias en este momento.

Se hará una encuesta a cada uno de los estudiantes que accedan al curso para evaluar el grado de satisfacción con éste, comparándolo con la experiencia que cada uno de ellos posee en otros cursos que no tienen tal apoyo.

La infraestructura de la universidad permite que los estudiantes puedan acceder a esta plataforma desde cualquiera de las salas de informática, aparte de que pueden hacerlo desde la casa, un café internet o desde el campus por red inalámbrica. Todo alumno que tome las asignaturas estudiadas puede matricularse en el curso, pero se seleccionarán algunos específicos con el propósito de tener cursos que no hayan recibido el beneficio del aula de apoyo y poder hacer comparaciones en un estudio futuro; a los estudiantes seleccionados se les informa, mediante una guía impresa y una visita al aula de informática, cómo pueden matricularse en un curso dado.

A los profesores involucrados se les asignará tiempo, dentro de su carga del semestre, para la realización de este proyecto, ya que éste sólo se trabajará en dichos espacios.

3.6.6. Muestra

La población meta consta de estudiantes de primer y segundo semestre de las carreras de Ingeniería Civil, Agroecológica y Tecnologías, entre 18 y 25 años que no han tenido un gran contacto con las TIC y cuyo nivel académico es bajo o regular.

3.6.7. Modelo educativo

Características de operación

- El curso se desarrolla en internet en un “entorno” al que pueden acceder aquellos estudiantes seleccionados de los cursos presenciales y a los que se les ha dado una contraseña.

- Funciona en forma asincrónica y los alumnos pueden utilizar el horario que más les convenga para acceder. Además, en la página del curso se les marcan pautas, ejercicios y lecturas, entre otras actividades. Hay profesores-tutores que hacen el seguimiento de los alumnos y marcan dichas pautas.
- El estudiante se comunica con los tutores y compañeros a través del servicio de mensajes de la plataforma y por medio de un foro de discusión dispuesto para este fin.
- Los materiales y lecturas necesarios para el curso se encuentran en internet, y si el alumno quiere, puede imprimirlos y tenerlos en formato papel.
- Por ser un curso de apoyo no se evaluará, pero se proponen ejercicios de autoevaluación que pueden resolverse y presentarse al tutor para su discusión.

3.6.8. Puesta en acción

Desarrollo de los cursos

En reunión con los profesores encargados, se acordó el uso de la plataforma Moodle. Con miras a llevar un formato, se llegó al acuerdo de utilizar el siguiente esquema:

- Trabajar en formato tipo módulo, cuatro o cinco.
- Insertar una imagen alusiva al tema que se va a tratar en cada módulo, junto con un título en color y resaltado y un texto de bienvenida.
- Presentar un texto introductorio de corte histórico sobre el tema, textos en formato PDF sobre algunos de los temas vistos en la sesión presencial y que el tutor diseñador considere que es vital que aparezca en el curso.
- Presentaciones, animaciones, *applets* en Java y demás medios multimedia que traten uno o varios de los temas que se quieren apoyar.
- Ejercicios resueltos paso a paso.
- Ejercicios propuestos para que el estudiante los realice.
- Un foro para la interacción estudiante-tutor.
- Encuesta de opinión y satisfacción.

Cada grupo hace seguimiento de las actividades realizadas y pasa un informe a coordinación.

Los cursos se han venido diseñando desde el semestre inmediatamente anterior. Se planeó presentarlos a los estudiantes en el primer semestre del 2008, pero por sugerencia de la decanatura de ingeniería se decidió realizar una prueba piloto con los cursos como están; así las cosas, a partir de octubre de 2007 se escogieron tres cursos: geometría, precálculo y cálculo integrodiferencial para realizar la prueba, que se encuentra en curso.

3.6.9. Tipo de investigación

El tipo de investigación es cuantitativo - experimental, con levantamiento de muestras, utilizando un muestreo aleatorio simple, en el que se combinan las metodologías pre-post y experimental - control.

Se optó por este tipo de investigación debido a los instrumentos evaluativos que se aplicaron para la recolección de la información. Se aplicó un primer instrumento de evaluación (pretest) al grupo experimental y al de control, con el fin de determinar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema. Al finalizar el proceso de la aplicación del aula virtual de aprendizaje (grupo experimental), y desarrollados los temas en clase (grupo de control), se aplicó una segunda evaluación (postest), donde el estudiante deberá presentar los respectivos algoritmos y demostrar sus competencias para brindar soluciones a situaciones sencillas en el campo de la ingeniería civil.

3.6.10. Evaluación del aula virtual

Al finalizar el aula virtual, se realizó una encuesta al grupo experimental, en la que se evaluó cada ítem de uno a cinco y se obtuvo la siguiente calificación promedio:

Evaluación del aula virtual

Pregunta	Descripción	Promedio
1	El número de imágenes fue suficiente y aportó a la comprensión de los contenidos.	4,6
2	Las imágenes lograron apoyar, sintetizar y complementar el texto, facilitando el aprendizaje de los contenidos.	5,0
3	Las imágenes conectadas lógicamente con el texto cumplieron un papel didáctico en mi aprendizaje.	4,8
4	Las imágenes que apoyaron el texto fueron necesarias para el aprendizaje de los contenidos.	4,6
5	Las imágenes dinámicas como estrategia visual incidieron positivamente en mi aprendizaje.	4,8

6	La forma en que se representaron los contenidos facilitó notoriamente la comprensión y el aprendizaje de los contenidos.	5,0
7	Las tareas propuestas en cada módulo me permitieron aplicar en forma significativa los conocimientos adquiridos.	4,0
8	Las imágenes y textos fueron presentados en forma gradual y lógica.	4,8
9	Su participación en cada una de las actividades propuestas en el aula.	4,0
10	El soporte del tutor en el aula.	5,0

3.6.11. Conclusiones

Ambos grupos demuestran gran cantidad de conceptos adquiridos, lo cual se evidencia en las preguntas acertadas al comparar los resultados del pretest y del postest.

Los estudiantes relacionan correctamente las matemáticas y la geometría, lo cual se evidencia en las preguntas de la tercera a la sexta.

De la séptima a la décima preguntas, los estudiantes demuestran la aplicación de los algoritmos sugeridos. Comparando los resultados del grupo experimental y del grupo de control, se puede afirmar que:

- El grupo que utilizó el ambiente de aprendizaje presenta mayor cantidad de conceptos adquiridos.
- Este grupo integra mejor los conceptos de las matemáticas y de la geometría para realizar cálculos.
- Las animaciones son de gran ayuda al exponer un tema, ya que en el salón de clases los gráficos son estáticos y su tiempo de presentación es muy limitado, mientras que al utilizar el ambiente virtual el estudiante puede retomar los gráficos y diagramas cada vez que lo considere necesario.

Los estudiantes manifiestan su interés de consulta cuando se remiten a la parte teórica, complementando los conceptos primarios presentados en forma visual y animada.

Dentro del proyecto se aprecian los siguientes aciertos:

- Actitud positiva de los profesores encargados.

- Actitud positiva de los estudiantes hacia la virtualidad.
- Construcción de instrumentos propios por parte de los docentes.
- Creación de un grupo fuerte de tutores.

Para la realización del proyecto se han presentado algunos inconvenientes, tales como:

- Falta de computadores en ciencias básicas durante los horarios asignados para el diseño y manipulación de los cursos.
- Poca capacitación en el manejo de la plataforma Moodle.
- La incorporación de material en la plataforma se ha hecho con documentos, animaciones y *applets* que se encuentran en internet, los que, con alguna regularidad, no cumplen con lo que el profesor desea mostrar.
- Falta capacitación en el manejo de programas multimedia de gran utilidad para la elaboración de instrumentos adecuados (Flash y Java, especialmente).

Referencias

Aldanondo, J. (2002). Contenidos en *e-learning*: el rey sin corona (por ahora). *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 63-78.

Mendoza, J. (2003, 10 de junio). *e-learning, el futuro de la educación a distancia.* Recuperado el 1 de septiembre de 2009, de
http://www.informaticamilenium.com.mx/Paginas/mn/articulo78.htm.

Quesada, A. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college student's performance in precalculus. *Educ. Studies in Math.*, 27, 205-215.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics*, 21(5), 431-450.

3.7. Concepciones y creencias de algunos profesores universitarios sobre la evaluación en matemáticas

Grupo Pentagogía[13]
Grupo Matemática Computacional[14]

Resumen
En este artículo se presenta un informe de avance de la investigación "Concepciones y creencias de algunos profesores universitarios sobre la evaluación en matemáticas", que están realizando los grupos Pentagogía, de la Escuela Colombiana de Ingeniería, y Matemática Computacional, de la Pontificia Universidad Javeriana. Hasta el momento se han terminado las etapas de diseño del instrumento para recolectar la información que les interese a los profesores que enseñan matemáticas en los programas de ingeniería de las dos universidades. Actualmente se está realizando el análisis de la información que permitirá identificar las concepciones y creencias de los profesores, con el fin de poder proponer acciones tendientes a mejorar las prácticas evaluativas en las dos instituciones.

Palabras claves: evaluación, concepciones y creencias sobre evaluación, matemáticas universitarias, enseñanza, aprendizaje.

3.7.1. Introducción

Como resultado de los cambios curriculares que se gestan dentro de las instituciones, la evaluación de los aprendizajes es un elemento que debe evolucionar paralelamente para dar respuesta a los procesos asociados a la enseñanza y el aprendizaje.

Niss (1993, citado por Becerra y Moya, 2008) reporta que el campo de la educación matemática ha centrado su atención en los procesos de formación y adquisición de conceptos matemáticos, dejando de lado la evaluación; "se ha considerado que la evaluación es un factor de menor importancia para la educación matemática, siendo, además, un factor externo a ella".

Actualmente, la sociedad reclama personas competitivas, calificadas, con capacidad de aprender a aprender, lo que ha llevado a plantear cambios curriculares en los que los estudiantes sean el centro del proceso, individuos activos y responsables en su formación. Dentro de este panorama cobra importancia el papel del profesor, al igual que las concepciones, creencias y actitudes que éste tenga sobre la evaluación, el aprendizaje, la enseñanza y la matemática.

[13]Bernarda Aldana, Carlos Álvarez, Sandra Gutiérrez, Guiomar Lleras y Édgard O'bonaga. Escuela Colombiana de Ingeniería.

[14]Martha Alvarado Gamboa y Patricia Hernández Romero. Pontificia Universidad Javeriana.

Uno de los objetivos a largo plazo de la comunidad científica es construir bases teóricas que permitan avanzar en el campo de estudio sobre el profesor y su desarrollo profesional (Moreno y Azcárate, 2003). En este aspecto, y dentro de las líneas de investigación en educación, uno de los focos de estudio es el pensamiento del profesor, en particular las concepciones y creencias como factores determinantes de las prácticas y de las acciones en el aula, a lo cual no es ajena la matemática, según lo demuestra el creciente número de estudios al respecto (Houston, 1990; Thompson, 1992; Llinares, 1998, Ponte, 1996; García, 1997 citados por Gil y Rico, 2003). Por esto consideramos clave identificar las concepciones y creencias que sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tienen los profesores pero por ser un tema tan amplio creemos que podríamos indagar por un elemento fundamental en este proceso, que corresponde a la evaluación en matemáticas. También es importante preguntarse qué tanto inciden las concepciones del docente en el desempeño de los estudiantes; cómo podríamos cambiar la evaluación para que esté acorde con los procesos de enseñanza - aprendizaje y permita generar aprendizajes significativos en los estudiantes.

Interesados por dar pasos encaminados a solucionar preguntas de esta índole, se considera necesario indagar por las concepciones y creencias que los profesores de matemáticas del nivel universitario tienen de la evaluación. En principio, en esta investigación se trabajará con el grupo de profesores de matemáticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería y la Pontificia Universidad Javeriana. Las respuestas a estas preguntas nos ayudarían a identificar el perfil del profesor de matemáticas en nuestras universidades y, a partir de ellas, podríamos proponer acciones que incidan en las prácticas pedagógicas de los docentes en las dos instituciones.

Se habla en general de la práctica pedagógica porque una reflexión sobre la evaluación en matemáticas debe tener en cuenta también el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pues están íntimamente relacionadas dado que la evaluación de alguna manera ayuda a regular y controlar este proceso, y a reconocer los cambios que se presentan para generar un trabajo en el aula a partir de los errores de los estudiantes y de los planes de mejoramiento, mediante los cuales dichos errores puedan superarse. Así, se comparte el criterio del documento Estándares curriculares, elaborado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), y más específicamente la sección final, Estándares para la evaluación de las matemáticas, en la que se afirma que "para desarrollar la capacidad matemática en todos los estudiantes, la evaluación debe apoyar el aprendizaje matemático continuo de cada estudiante", y además recomienda abandonar el tratamiento de la evaluación como una parte independiente del currículo o la instrucción.

3.7.2. Objetivos

Los objetivos que se proponen en la investigación son los siguientes:

Objetivo general
Determinar las concepciones y creencias que sobre la evaluación tienen los profesores de matemáticas en la Escuela Colombiana de Ingeniería y en la Pontificia Universidad Javeriana.

Objetivos específicos

- Adaptar y diseñar un instrumento para caracterizar las concepciones y creencias que sobre la evaluación tienen los profesores de matemáticas de la Escuela y de la Universidad Javeriana.
- Aplicar el instrumento de medición en las dos instituciones participantes en el proyecto.
- Proponer acciones tendientes a incidir en las prácticas evaluativas en las dos instituciones participantes en el proyecto.

3.7.3. Marco conceptual

Este proyecto se enmarca dentro de las investigaciones en educación que estudian el pensamiento del profesor y que, según Llinares (1998, citado por Gil y Rico, 2003), pretenden ofrecer una mejor comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje, de reforma y de desarrollo curricular.

En virtud de que consideramos que la evaluación es un elemento del proceso de enseñanza-aprendizaje, pretendemos explorar las concepciones y creencias que sobre ésta tienen los profesores de la Escuela Colombiana de Ingeniería y de la Pontificia Universidad Javeriana que enseñan matemáticas en las facultades de Ingeniería, Economía y Administración. De esta manera, se pueden entender y analizar sus acciones y proponer, quizás, nuevos enfoques en la forma de concebir la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y en particular la evaluación de éstas.

Por otra parte, para enseñar matemáticas no sólo es necesario conocerlas sino además cada profesor necesita saber las razones por las cuales actúa en una u otra forma. Debe conocer qué es lo que debe enseñar y cómo lo debe enseñar, a quién se dirige su acción y para qué lo hace. Debe saber también qué y cómo evaluar. Éstas serían las preguntas fundamentales que se deben plantear cuando se quiere reflexionar sobre la enseñanza de una materia. Su actuación se orientará dependiendo de las respuestas que dé a cada una.

Pensamos que cada profesor da una respuesta personal a cada pregunta y tratamos de indagar cuáles son sus concepciones y creencias con respecto a ellas y, más específicamente, con respecto a la evaluación (Gil, Moreno, Olmo, Fernández, 1997; Gil y Rico, 2002).

Una reflexión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas nos lleva a tener en cuenta la evaluación, pues ésta es la concreción de las expectativas del profesor y, por consiguiente, de la manera como los estudiantes entienden lo que su profesor espera de ellos. ¿Qué saben sus estudiantes? ¿Cómo aprenden matemáticas? ¿Qué ajustes y cambios son necesarios en el currículo?

Cuando se trata de reflexionar sobre la evaluación en general o en particular del aprendizaje de las matemáticas, surgen muchas preguntas que sobrepasan las fronteras del salón de clase y la interacción entre un grupo de estudiantes y un profesor, como las siguientes: ¿puede la evaluación constituirse en un componente del aprendizaje? ¿Qué elementos hay que tener en cuenta cuando se evalúa el desempeño en matemáticas de un estudiante? ¿Hay otras posibilidades de evaluar, además de las pruebas tradicionales escritas, bien sean de preguntas abiertas o en forma de test? Las respuestas a éstas y otras preguntas similares implican una toma de conciencia sobre el sentido de la evaluación y de alguna manera condicionan la acción pedagógica en el trabajo con los estudiantes. Se espera que como resultado de esta investigación se puedan ofrecer unas primeras respuestas a estas preguntas en el marco de las dos instituciones en las que se aplicarán los instrumentos.

Lo que es claro es que con la evaluación se pretende indagar por lo que han aprendido los estudiantes. Encontrar diferentes formas de evaluar el aprendizaje apunta a la búsqueda de que las calificaciones que se dan reflejen lo que realmente han aprendido y, aún más que eso, que lo que han aprendido lo puedan aplicar en otros contextos, es decir, que puedan efectuar la transferencia de conocimiento, que es tan importante especialmente cuando nuestros alumnos no estudian una carrera de matemáticas, sino que la aplican en programas de Ingeniería, Economía y Administración.

Por otro lado, como nuestro propósito es indagar sobre las concepciones y creencias que tienen los profesores de matemáticas acerca de la evaluación, vale la pena aclarar los significados de los términos que estamos empleando. En este sentido, revisando la literatura se encuentra una estrecha relación existente entre los términos concepción y creencia; en la presente investigación adoptaremos las definiciones de Moreno y Azcárate (2003), adaptadas de Linares (1991), Pajares (1992), Ponte (1994) y Thompson (1992).

Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan en la racionalidad, sino más bien en los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hace ser muy consistentes y duraderas para cada individuo.

A nivel universitario se percibe que el conocimiento que tienen algunos de los profesores, no sólo de matemáticas, sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como de la evaluación, son el resultado de sus experiencias como docente y estudiante, lo que hace que estén cargados de subjetividad y generalmente sin una base pedagógica, con lo cual se conforma una creencia.

Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos.

3.7.4. Antecedentes

Cuando reflexionamos acerca del proceso enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta que nuestros estudiantes parecen, cada vez más, estar interesados en la nota y no en el aprendizaje, es decir, más en el 3,0 y en aprobar la asignatura que en lo que realmente deben y pueden aprender en un curso, es factible pensar que es un problema de la modernidad o la posmodernidad, pero realmente los planteamientos sobre la evaluación y sus problemas surgen desde tiempos remotos, esto es, desde cuando el hombre tiene la necesidad de evaluar.

En las sociedades primitivas la actividad valorativa se desarrollaba por ejemplo cuando a los jóvenes que habían adquirido conocimientos sobre la vida se les hacían pruebas para convertirlos en miembros del grupo. En la sociedad esclavista empieza el nacimiento de una *teoría pedagógica* que se veía reflejada en los tratados de filósofos griegos, como Sócrates, Platón y Aristóteles. Sócrates introdujo el método socrático para enseñar y evaluar, en tanto que Aristóteles planteaba que en cualquier actividad puede haber defecto, exceso y término medio. Él estableció con esto normas para evaluar. En la época del feudalismo, la Iglesia católica tenía el monopolio de la formación intelectual. La evaluación era totalmente reproductiva. El pensamiento pedagógico comienza a desarrollarse cuando surge la lucha de clases contra la nobleza. Se destaca el pedagogo Juan Amos Comenius, quien escribe varias obras, entre las que se encuentra *Didáctica magna*.

Del siglo XVII al siglo XIX hubo un gran desarrollo social y científico que influyó mucho en las teorías de la educación. En este período se tienen pedagogos y filósofos como Rousseau, Pestalozzi, Tolstoi, etc.

Ya a finales del siglo XIX y en todo el siglo XX existen varias corrientes pedagógicas y en cada una de ellas se hacen planteamientos sobre la evaluación:

- En el *conductismo* se prefiere la evaluación que compara la actuación de una persona consigo misma.
- En el *cognoscitivismo* se nos muestra la importancia de evaluar las habilidades del pensamiento y de reforzamiento del alumno.
- El *humanismo* dice que el objetivo de la educación es promover la autorrealización. La única evaluación válida es la autoevaluación del alumno.
- Los *psicoanalistas* dan importancia a una evaluación que dé más prioridad al proceso que al resultado educativo.
- La *teoría piagetiana* (años sesenta) hace hincapié en la evaluación en el estudio de los procesos cognitivos y en la utilización del método crítico-clínico.
- La *teoría sociocultural*, desarrollada por Vigotsky, plantea que la evaluación debe apuntar a determinar y promover el nivel de desarrollo potencial para verificar el desarrollo real del estudiante.

El docente y el sistema educativo en general, inmersos en el proceso enseñanza-aprendizaje, han seguido una u otra teoría e incluso varias al mismo tiempo, y de acuerdo con sus creencias y formación el maestro se ve enfrentado a la difícil tarea de evaluar a sus alumnos. Se establecen entonces algunos enfoques que pretenden comprender y explicar el papel que desempeña la evaluación en la educación: como medición, como juicio de expertos, basada en objetivos, como toma de decisiones y como comprensión. Analizando los diferentes planteamientos se puede concluir que no hay enfoques evaluativos buenos o malos, sino enfoques adecuados para determinadas circunstancias educativas, y es el docente el que debe tener la capacidad de decidir qué enfoque utilizar en su acción evaluativa.

A pesar de todas las teorías y tendencias pedagógicas en general y sobre la evaluación en particular, la sociedad descarga en el docente la responsabilidad, no sólo de formar a los jóvenes, sino de evaluarlos. Entonces es muy importante tener en cuenta que la práctica evaluativa del docente responde a sus principios educativos, sus valores personales, su formación técnica como evaluador, la naturaleza del conocimiento en el que se desempeña y toda la normatividad tanto oficial como institucional.

Teniendo en cuenta todos los planteamientos anteriores parece claro que si deseamos impactar, reestructurar o cambiar las formas de evaluar a los estudiantes en las instituciones universitarias, el primer paso que hay que dar consiste en explorar las concepciones y creencias que sobre la evaluación tienen los profesores, y como una de las variables principales es el conocimiento experto por áreas, entonces es lógico empezar con una primera agrupación de los docentes por áreas del saber en las que se desempeñan. En nuestro proyecto en particular, se realiza con los profesores que enseñan matemáticas.

3.7.5. Metodología

La propuesta recurre a métodos con una orientación predominantemente exploratoria y descriptiva. Como instrumento de recolección de datos se utiliza una encuesta cerrada, elaborada tomando como punto de partida un cuestionario propuesto por Gil y su grupo de investigadores (Gil, 1997). La validación del instrumento se realizó con un grupo de profesores de las dos universidades, luego se hicieron los ajustes pertinentes y se obtuvo el instrumento definitivo. Es de anotar que el instrumento resultó ser muy diferente del diseñado por el grupo de Gil, debido por un lado a que nuestro medio es distinto y por otro a que ellos trabajaron en el contexto de la educación básica, mientras que esta investigación se hace en el contexto de la educación universitaria.

Una vez validado el instrumento, se aplicó a todos los profesores que imparten los cursos de matemáticas en las dos universidades y se sistematizó la información en una hoja de Excel; actualmente se está realizando el análisis que permitirá establecer las concepciones y creencias de los profesores acerca de la evaluación en matemáticas.

Instrumento de recolección de datos

Como ya se mencionó, el instrumento se diseñó tomando como punto de partida el propuesto por Gil y su grupo de investigadores (Gil, 1997). Se analizó cada una de las preguntas, teniendo en cuenta lo que se quería indagar y si era o no pertinente en nuestro medio y en el ámbito universitario. A partir de la discusión del grupo de investigación se llegó a una primera propuesta, que fue aplicada a un grupo reducido de profesores de las dos universidades; estos profesores hicieron los comentarios y sugerencias que consideraron pertinentes, conociendo de antemano el objetivo del cuestionario, y después de otras discusiones acerca de los comentarios y sugerencias se concretó la encuesta definitiva, que se presenta a continuación:

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA DE BOGOTÁ

Estimado profesor, los grupos de investigación *Pentagogía (ECI) y Matemática computacional (PUJ)* estamos realizando de manera conjunta el proyecto de investigación *Concepciones y creencias de algunos profesores universitarios sobre la evaluación en matemáticas*. De manera atenta solicitamos su colaboración para diligenciar la presente encuesta. Agradecemos su valiosa y oportuna información, la cual tendrá un manejo confidencial.

Institución en la que labora: ECI ______ PUJ ______
Título(s) profesional(es): ______
Número de años de experiencia en la enseñanza de la matemática universitaria: ______
Asignaturas que tiene a su cargo ______

En cada ítem asigne un valor de 1 a 5 teniendo en cuenta que 1 corresponde al menos importante y 5 al más importante según su criterio.

1. Lo que debe ser objeto de evaluación en los cursos de matemáticas es:	**PRIORIDAD**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
El conocimiento adquirido por los estudiantes.					
El trabajo realizado por los estudiantes.					
La actitud y el interés del estudiante.					
La labor del profesor.					
Los contenidos con énfasis en lo conceptual.					
Los contenidos con énfasis en las aplicaciones.					
Los logros alcanzados respecto de los objetivos.					
Otros:					

2. En los cursos de matemáticas se evalúa para:	**PRIORIDAD**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Obtener información sobre el aprendizaje de los estudiantes.					
Tomar decisiones sobre la promoción de los estudiantes a cursos posteriores.					
Confrontar el proceso de enseñanza-aprendizaje y el resultado del mismo.					
Replantear el proceso enseñanza-aprendizaje.					
Cumplir con el reglamento de la universidad.					
Otros:					

3. El estudiante debe ser evaluado por:	**PRIORIDAD**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
El profesor de la asignatura.					
El departamento que ofrece la asignatura.					
Los profesores de la misma asignatura.					
Los compañeros del curso.					
Él mismo.					
Equipo evaluador independiente de los profesores de la asignatura.					
Otros:					

4. La promoción de un estudiante en sus cursos de matemáticas depende de:	**PRIORIDAD**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
El examen final.					
El promedio de las notas parciales.					
Su participación e interés en clase.					
Su cumplimiento y responsabilidad en los trabajos asignados.					
Condiciones especiales de los estudiantes (becarios, situación académica, situación económica, enfermedades, etc.).					
Otros:					

5. Las formas que usted utiliza para evaluar a los estudiantes de matemáticas son:	**PRIORIDAD**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Parciales.					
Examen final.					
Talleres.					
Interrogatorios orales o usando el tablero.					
Evaluaciones en línea.					
Trabajos en grupo.					
Quizes.					
Tareas.					
Autoevaluación.					
Exposiciones.					
Exámenes con libro abierto.					
Evaluaciones en grupo.					
Exámenes utilizando calculadora graficadora o computador.					
Otros:					

6. Las preguntas que usted utiliza para una evaluación de matemáticas incluyen:	**PRIORIDAD**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Solamente ejercicios propuestos anteriormente.					
Preguntas teóricas.					
Demostraciones.					
Ejemplos resueltos en el texto.					
Problemas típicos del texto guía.					
Ejercicios que no están en el texto guía.					
Ejercicios que impliquen una elaboración adicional a la vista en clase.					
Otros:					

7. Usted cree que la deserción y mortalidad académica en los cursos de matemáticas se deben a:	**PRIORIDAD**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
La madurez del estudiante.					
Las dificultades del aprendizaje.					
La insuficiente cantidad de evaluaciones.					
La falta de conocimiento disciplinar de los profesores.					
La falta de conocimiento pedagógico de los profesores.					
El bajo nivel académico de los estudiantes.					
La insuficiente explicación del profesor.					
La poca dedicación del estudiante.					
La actitud del profesor con sus estudiantes.					
Otros:					

Continúa al respaldo.

8. Usted considera que la razón por la cual un estudiante cursa asignaturas de matemáticas en su carrera es:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
El carácter formativo (orden, disciplina, lógica, etc.).					
Que están en los planes de estudio.					
El desarrollo de competencias cognitivas (abstracción, análisis, síntesis).					
Su importancia como fundamentación de la parte profesional.					
El ser una buena herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana y profesional.					
Otros:					

9. Para usted las principales dificultades en la enseñanza de las matemáticas se deben a:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
La mala preparación de los estudiantes.					
La dificultad de la materia.					
La falta de preparación pedagógica de los docentes.					
El horario de clases.					
La falta de disciplina de estudio de los alumnos.					
La dificultad que tienen los estudiantes para leer.					
Los estudiantes no tienen disciplina.					
Otros:					

10. Para usted los contenidos matemáticos más importantes en las asignaturas son:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
Aquellos que potencian la abstracción, la síntesis u otras competencias matemáticas.					
Los que tienen aplicaciones en la vida real.					
Los que tienen implicaciones curriculares posteriores.					
Los conceptuales.					
Los procedimentales.					
Las demostraciones.					
La modelación y solución de problemas.					
Otros:					

11. Para usted un buen estudiante en un curso de matemáticas es el que:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
Tiene buenas capacidades intelectuales.					
Se esfuerza y trabaja.					
Está motivado por la matemática.					
Es responsable, solidario, participativo...					
Obtiene buenas notas en los exámenes.					
Es ordenado.					
Es analítico y crítico.					
Otros:					

12. El objetivo de la socialización de los resultados de la evaluación con los estudiantes es:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
Dar a conocer las notas a los estudiantes.					
Analizar los errores cometidos por los estudiantes.					
Reevaluar la planeación del curso.					
Diseñar actividades de mejoramiento.					
Replantear la metodología.					
Otros:					

13. Para usted lo más adecuado en la enseñanza de las matemáticas es:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
Fomentar el trabajo intelectual de los alumnos.					
Establecer la conexión de los conceptos con situaciones reales.					
Realizar ejercicios en clase.					
Lograr la motivación y el interés del estudiante.					
Explicar y dar ejemplos.					
Proponer talleres en clase.					
Proponer trabajos extra clase.					
Propiciar el trabajo en equipo de los estudiantes.					
Fomentar el estudio previo a la clase.					
Otros:					

14. Al preparar una evaluación de matemáticas usted tiene en cuenta:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
Los objetivos del curso.					
El rendimiento académico evidenciado en las clases.					
La opinión de sus colegas.					
Las indicaciones dadas por la institución.					
Las evaluaciones propuestas en los textos.					
Que pase la mayor cantidad de estudiantes.					
Los niveles de dificultad.					
Las competencias (interpretativa, argumentativa, propositiva).					
El trabajo desarrollado por usted en clase.					
Otros:					

15. Los hechos que le hacen sentir que ha realizado un buen trabajo enseñando matemáticas son:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
Observar interés y participación de los estudiantes en el aula.					
Los buenos resultados obtenidos por los estudiantes en los exámenes.					
El avance en el aprendizaje de los alumnos (interpretar, argumentar, proponer).					
Lograr un buen nivel de atención en los estudiantes.					
La motivación que puede lograr en los estudiantes.					
Lograr autonomía del estudiante en su aprendizaje.					
Las evaluaciones que hacen los estudiantes de usted.					
Otros:					

16. Usted considera que las matemáticas se aprenden:	PRIORIDAD				
	1	2	3	4	5
Memorizando procedimientos y definiciones.					
Mediante explicaciones y ejemplos del profesor.					
Por predisposición natural del estudiante.					
Mediante el incremento de algún tipo de conocimiento o capacidad.					
Estimulando procesos cognitivos y fomentando ciertas actividades, como abstracción, análisis y síntesis.					
Por motivación.					
Trabajando en equipo con los compañeros.					
Haciendo muchos ejercicios.					
Otros:					

3.7.6. Análisis de la información

A continuación se presenta un avance de la manera en que se está analizando la información.

Al investigar sobre las concepciones de los profesores de matemáticas acerca de la evaluación en la universidad, el instrumento diseñado indaga sobre los siguientes factores:

1. **La evaluación:** preguntas 1, 5, 6 y 14.
2. **Razón de ser de la evaluación:** preguntas 2, 3 y 12.
3. **Importancia de la formación matemática en las carreras:** preguntas 8, 10, 13 y 16.
4. **Perfil del estudiante:** preguntas 4, 7 y 11.
5. **Características del profesor:** preguntas 9 y 15.

Las variables de cada uno de esos factores son cualitativas, con posibles valores definidos por los investigadores, de acuerdo con el cuestionario diseñado por Gil et ál. en las universidades de Almería y Granada. También se asignó un puntaje para cada respuesta, desde menor importancia (1) hasta mayor importancia (5).

Se consideraron dos grupos de estudio compuestos por los profesores de matemáticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería y la Pontificia Universidad Javeriana, sede Bogotá, adscritos a los departamentos de Matemáticas de cada una de ellas. La muestra estuvo conformada por 77 personas: 38 profesores de la Escuela Colombiana de Ingeniería y 39 profesores de la Pontificia Universidad Javeriana, sede Bogotá.

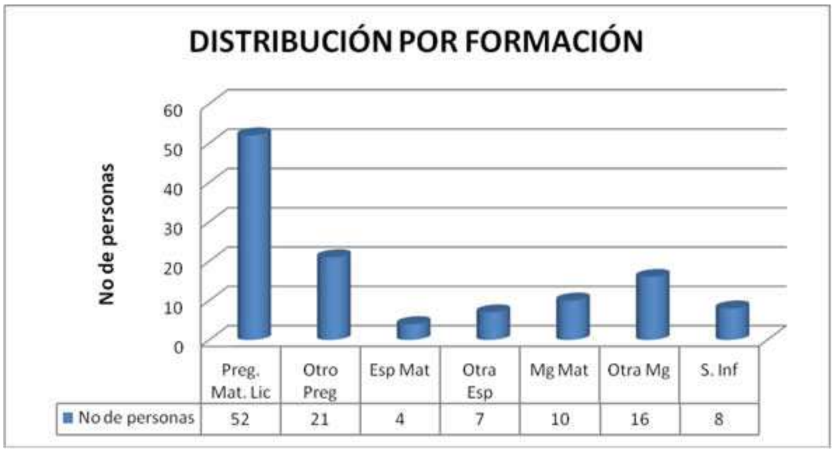
Presentación descriptiva de la información

Para la presentación descriptiva de la información se usarán las tablas, medidas y gráficas que aplican para este caso.

En la información básica se tienen los siguientes resultados:

Títulos profesionales. La mediana de los años de experiencia de los docentes encuestados fue de 20; esto significa que el 50 % de las personas encuestadas tienen una experiencia de 20 años o más como docentes universitarios.

La distribución por formación básica de los profesores se muestra en el siguiente diagrama.



3.7.7. Análisis de las variables

El análisis contempla varios aspectos: el resultado de cada pregunta en el conjunto total de individuos, el resultado de cada pregunta en cada grupo de estudio y la comparación de los dos grupos. Además, a los investigadores les interesa determinar el grado de asociación de algunos grupos de preguntas mediante el análisis de correlación, ya que esto evidenciará la coherencia en las respuestas de los profesores.

Ejemplo del análisis de una de las preguntas.

Resultados de la pregunta 1 en el grupo total de profesores

Pregunta 1: *Lo que debe ser objeto de evaluación en los cursos de matemáticas es*:

a) El conocimiento adquirido por los estudiantes.

b) El trabajo realizado por los estudiantes.

c) La actitud y el interés del estudiante.

d) La labor del profesor.

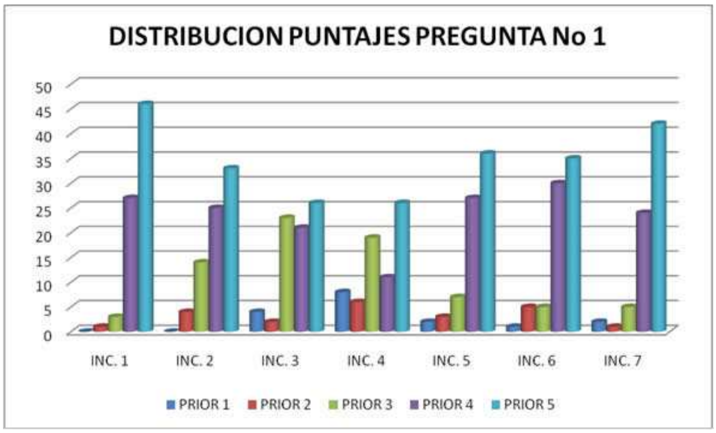
e) Los contenidos con énfasis en lo conceptual.

f) Los contenidos con énfasis en las aplicaciones.

g) Los logros alcanzados respecto de los objetivos.

h) Otros.

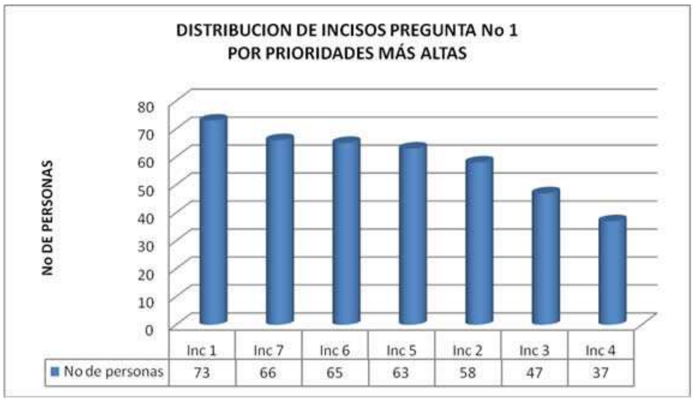
	INC.1	INC.2	INC.3	INC.4	INC.5	INC.6	INC.7
PRIORIDAD 1	1	1	5	14	6	1	6
PRIORIDAD 2	1	4	1	6	3	6	1
PRIORIDAD 3	3	14	24	19	7	6	5
PRIORIDAD 4	27	25	21	13	27	30	22
PRIORIDAD 5	45	33	26	25	34	34	43
TOTAL	77	77	77	77	77	77	77



La categorización de la prioridad dada a cada aspecto fue la siguiente:

- Prioridad alta a los puntajes 4 y 5.
- Prioridad media al puntaje 3.
- Prioridad baja a los puntajes 1 y 2.

Si se enfoca la atención en el número de personas que respondieron las opciones 4 y 5, es decir, que asignaron prioridad alta a cada uno de los incisos de la pregunta 1, se encuentra la distribución de respuestas que se muestra en la siguiente gráfica:



Se decidió entonces explorar esta distribución en una forma más profunda y para ello se decidió hacer una prueba de proporciones múltiples.

Prueba de proporciones múltiples para la pregunta 1

Aquí se realiza la siguiente prueba de hipótesis:

Ho: La forma de escogencia de las prioridades más altas por inciso en la pregunta 1 es la misma en todos los profesores.

H1: Hay diferencias significativas en la escogencia de las prioridades más altas por inciso en la pregunta 1.

Se realiza la prueba chi cuadrado de proporciones múltiples y se halla un valor calculado de 15,80, lo cual nos permite concluir que hay diferencias significativas en la escogencia de las prioridades más altas ($p < 0{,}05$).

Al examinar la estructura de la pregunta se llega a la conclusión de que los incisos 1, 7, 6 y 5 son considerados prioritarios en la pregunta 1 por parte de los profesores.

Por tanto, en la pregunta 1 los profesores consideran que los aspectos más importantes que deben ser objeto de evaluación son, en su orden:

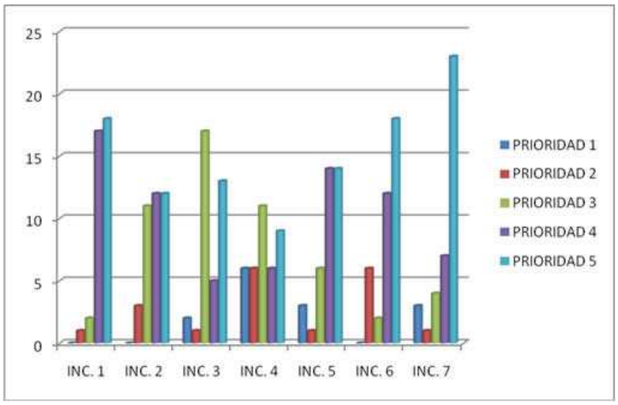
1. El conocimiento adquirido por los estudiantes (94,8 %).
2. Los logros alcanzados respecto de los objetivos (85,7 %).
3. Los contenidos con énfasis en las aplicaciones (84,4 %).
4. Los contenidos con énfasis en lo conceptual (81,8 %).
5. El trabajo realizado por los estudiantes (75,3 %).
6. La actitud y el interés del estudiante (61 %).
7. La labor del profesor (48 %).

Análisis de las diferencias de opinión entre los dos grupos que conforman la muestra

Con el objeto de determinar si hay homogeneidad en las opiniones expresadas por los profesores de ambas universidades o si éstas difieren significativamente, se analizaron los dos grupos por separado, encontrándose lo siguiente:

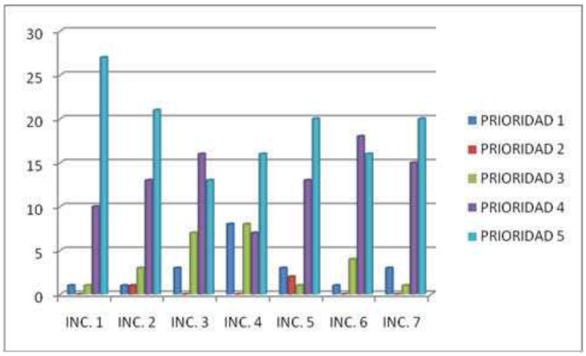
Escuela Colombiana de Ingeniería

	INC.1	INC.2	INC.3	INC.4	INC.5	INC.6	INC.7
PRIORIDAD 1	0	0	2	6	3	0	3
PRIORIDAD 2	1	3	1	6	1	6	1
PRIORIDAD 3	2	11	17	11	6	2	4
PRIORIDAD 4	17	12	5	6	14	12	7
PRIORIDAD 5	18	12	13	9	14	18	23
TOTAL	38	38	38	38	38	38	38



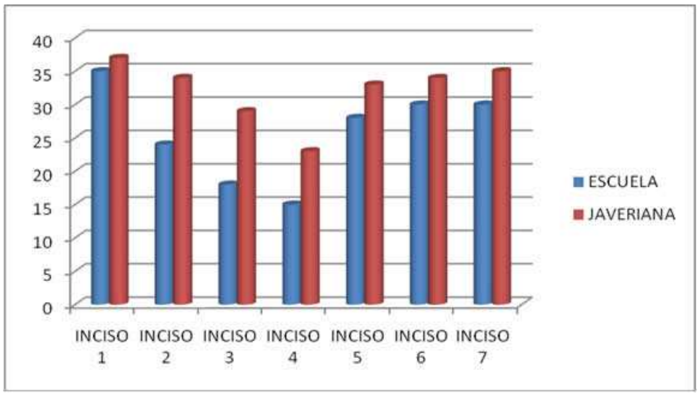
Pontificia Universidad Javeriana

	INC.1	INC.2	INC.3	INC.4	INC.5	INC.6	INC.7
PRIORIDAD 1	1	1	3	8	3	1	3
PRIORIDAD 2	0	1	0	0	2	0	0
PRIORIDAD 3	1	3	7	8	1	4	1
PRIORIDAD 4	10	13	16	7	13	18	15
PRIORIDAD 5	27	21	13	16	20	16	20
TOTAL	39	39	39	39	39	39	39



Al enfocar el interés en la asignación de prioridad alta (puntaje 4 y 5) a cada inciso de la pregunta 1 por universidad, se encontró lo siguiente:

	ECI	PUJ
INCISO 1	35	37
INCISO 2	24	34
INCISO 3	18	29
INCISO 4	15	23
INCISO 5	28	33
INCISO 6	30	34
INCISO 7	30	35



Los profesores de las dos universidades coinciden, con ligeras variaciones, en que el objeto de la evaluación debe considerar que los aspectos fundamentales son el conocimiento adquirido por los estudiantes, los logros alcanzados respecto de los objetivos, el trabajo de los estudiantes, los contenidos con énfasis en las aplicaciones y los contenidos con énfasis en lo conceptual.

Cada una de las preguntas del cuestionario tiene un análisis igual al del ejemplo mencionado.

En este momento se está terminando el análisis de cada pregunta, que dará como resultado las concepciones que los profesores tienen en relación con la evaluación, identificando así los aspectos que consideran prioritarios a la hora de evaluar los grupos de asignaturas a su cargo.

Posteriormente se realizará un consolidado por cada factor, definido al comienzo, y esto determinará los aspectos prioritarios por factor.

3.7.8. Conclusiones generales

Se sacarán después del análisis de los resultados. Por lo pronto queremos destacar la gran acogida de la encuesta, el interés que ha despertado su análisis y las expectativas que se tienen con respecto a hacer alguna propuesta que permita incidir en las prácticas de la evaluación en matemáticas en las dos instituciones, la Escuela Colombiana de Ingeniería y la Pontificia Universidad Javeriana, que formaron parte de este proyecto de investigación.

Referencias

Correa Uribe, Santiago, Puerta Zapata, Antonio & Restrepo Gómez, Bernardo (1996). *Investigación evaluativa.* Bogotá: Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (Icfes).

Gil Cuadra, Francisco, Moreno Carretero, Francisca, Del Olmo Romero, M. Ángeles & Fernández Cano, Antonio (1997). Elaboración de cuestionarios para determinar creencias de los profesores. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 11. Barcelona, España.

Gil, F. & Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista de Enseñanza de las Ciencias*, 21(1). España.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas.* Madrid: Síntesis.

Moreno, M. & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista de Enseñanza de las Ciencias*, 21(2). España.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: Saen Thales.

Niss, M. (1993). *Investigations into assessment in mathematics educations. An Icmi*

Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Fernández F., Gil, F., Moreno, F., Olmo, A. & Segovia, I. (1993). *Bibliografía de investigación sobre evaluación en matemáticas.* Base de datos Biem. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Fernández, F., Gil, F., Moreno, F., Olmo A. & Segovia, I. (1995). *Conocimientos y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación.* Granada: Universidad de Granada.

Romberg, T. (1992). *Mathematics assessment and evaluation.* Nueva York: Sunny Press.

Romberg, T. (1995). *Reform in school mathematics and authentic assessment.* Nueva York: Sunny Press.

Tortosa, A., Morcilo, N., Fernández, F. et ál. (1995). *La evaluación en el aula de matemáticas.* Granada: Universidad de Granada.

3.8. Registros semióticos presentes en los significados personales declarados por estudiantes de décimo grado que son observables desde la probabilidad frecuencial

Diana Isabel Torres Rojas[15]
Pedro Rocha Salamanca[16]

Resumen
El mundo está inmerso en situaciones que en ocasiones no logramos comprender, algunas llenas de incertidumbre o regidas por el azar. Cuando esta clase de situaciones se llevan al aula, carecen de sentido para el estudiante al no ser contextualizadas y lo involucran en un mundo determinista y ligado a la aplicación de reglas de cálculo, perdiéndose del proceso de construcción del significado de probabilidad. Por eso, con el presente escrito se busca dar respuesta a una pregunta de investigación emergente a lo largo de mi ejercicio docente: ¿cuáles son los registros semióticos presentes en los significados personales declarados por estudiantes de décimo grado del Colegio Colombo Internacional Acoinprev que son observables desde la probabilidad frecuencial? Se dan a conocer la problemática presente dentro del currículo de matemáticas, los hechos de aula y la construcción de un pensamiento determinista frente al significado de probabilidad en los estudiantes de la educación media, al igual que la necesidad de identificar los elementos de significado de un objeto y la importancia del uso de las representaciones, en particular de los registros semióticos. Finalmente, se plantea la metodología de investigación utilizada y se presentan algunos instrumentos que permitieron recolectar información con el propósito de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Palabras claves: elementos de significado, registro semiótico, significados personales declarados, aleatoriedad y probabilidad frecuencial.

3.8.1. Introducción

En los procesos de formación escolar para el desarrollo del pensamiento estadístico y aleatorio los sistemas de datos se han introducido con el fin de considerar, tratar, interpretar y comprender aquellas situaciones que, por presentar múltiples variables y resultados impredecibles, se consideran regidas por el azar. Según Batanero (2001, p. 117), Borba y Skovsmose (1997, p. 10) y MEN (1998, p. 47), en la formación

[15]Profesora del Colegio Colombo Internacional Acoinprev. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias y Educación. Proyecto Lebem. Bogotá, Colombia. isabellatoras@hotmail.com.

[16]Director de Investigación. Pedro Rocha Salamanca. Profesor Universidad Francisco José de Caldas. Grupo Crisálida. Bogotá, Colombia. pgrocha@udistrital.edu.co.

estocástica escolar tradicionalmente se ha hecho énfasis en la construcción del pensamiento determinista, en el que priman la apropiación de métodos deductivos, el tratamiento y la búsqueda de solución a problemas con una y sólo una respuesta correcta, limitando a los estudiantes en la posibilidad de enfrentar, analizar y tratar la realidad compleja del mundo, influyendo así de manera directa o indirecta en su capacidad frente a la toma de decisiones en situaciones afectadas por la incertidumbre, tan habituales en nuestra sociedad; esto los lleva a dejar de lado la comprensión y el significado de los objetos estocásticos y limitarse meramente a la aplicación de una regla de cálculo.

Cuando se habla del significado de un objeto matemático o estocástico, Wittgenstein (citado por Godino, 2003, p. 35) comenta que "El verdadero significado de una palabra ha de encontrarse observando lo que un hombre hace con ella, no lo que dice de ella". Es en este uso donde los estudiantes ponen en juego sus elaboraciones y en el cual es posible reestructurar sus conocimientos; sin embargo, como lo plantea Behar (2004), en las investigaciones realizadas al analizar los libros de texto las situaciones planteadas a los estudiantes no los llevan hacia una contextualización de las situaciones aleatorias, sino que, por el contrario, los centran en la operatividad y aplicación de una regla de cálculo. Para este autor, el significado de una palabra radica en su uso, comenta que el mundo se nos revela sólo en la descripción lingüística y es a través de esta percepción e interpretación del mundo como es posible construir un significado del objeto puesto en juego. La enseñanza ha dejado de lado el carácter metacognitivo del lenguaje y se ha centrado en la operatividad, olvidando la función que tienen la representación y el lenguaje en la construcción de un objeto estocástico, en este caso en particular.

De esta manera se convirtió en algo necesario e importante investigar sobre los registros semióticos ligados al significado de probabilidad frecuencial, ya que como lo comenta Azcárate (1996), "Existen muy pocos datos sobre los diferentes aspectos relacionados con el conocimiento matemático y prácticamente inexistentes los estudios de concepciones de profesores sobre el conocimiento estocástico", razón por la cual se hizo primordial reconocer las funciones de las representaciones y los registros semióticos en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

Además, los registros semióticos son una de las dos características que distinguen la actividad cognitiva; éstos permiten efectuar operaciones de diferente naturaleza, van desde lo verbal hasta lo formal, llevando al estudiante no sólo a determinar y utilizar diferentes tipos de registro, sino a establecer una relación entre éstos y así construir un significado de probabilidad que le permita interpretar su mundo (Duval, 1999, p. 24). Por ejemplo, al enfrentarse a situaciones de tipo aleatorio desde el enfoque frecuencial de probabilidad, le permitirá al estudiante verse en la necesidad de realizar varias veces el experimento, recoger datos, analizarlos, identificar regularidades, definir conceptos, modificar estructuras, establecer patrones de variación, y en medio de este proceso los registros serán una herramienta y en ocasiones instrumentos que le permitan comprender lo que sucede, establecer hipótesis, validarlas o refutarlas y, finalmente, establecer o hacer una estimación frente a la probabilidad de que el evento ocurra.

Análisis del significado de probabilidad y el uso de los registros semióticos desde el enfoque ontosemiótico

Para enfrentar el problema de la significación y representación nos enfocaremos en el EOS (enfoque ontosemiótico). Godino, Font y D'Amore (2007) consideran el objeto matemático como "cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo". En este caso en particular, el sistema de prácticas declarado por los estudiantes permite evidenciar el significado del objeto, probabilidad que está presente en las actuaciones o expresiones (verbal, gráfica) que realizan al resolver problemas, comunicar soluciones o generalizar en otros contextos (Batanero y Godino, 1998). Dichos objetos matemáticos, al surgir en el interior de las prácticas o intervenir en éstas, se desenvuelven en un determinado lenguaje y pueden considerarse ostensivos y no ostensivos. Dentro del EOS las representaciones pueden dividirse en diferentes facetas o dualidades, una de las cuales es la faceta ostensiva, en el interior de la cual las representaciones generan configuraciones de tipo epistémico (relacionado con el saber).

Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente, se hace necesario:

A. Identificar y describir en las prácticas observables los significados personales declarados por los estudiantes frente al concepto de probabilidad frecuencial. Los significados personales desde el punto de vista de Godino se entienden como el conjunto de "sistemas de prácticas operativas y discursivas que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de un cierto tipo de probabilidad" (Godino, 2002), es decir, comprender el proceso que llevan los estudiantes en la construcción del significado de probabilidad y todos los elementos que este proceso implica (acciones, estrategias, hipótesis, *representaciones y registros semióticos*, etc.).

   Los significados personales están divididos en tres: el significado global, el logrado y el declarado; este último da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas y evidencia las estrategias, las hipótesis, la propiedad, los conceptos, los registros (lenguajes, términos, expresiones simbólicas) utilizados por los estudiantes al momento de formular y validar sus acciones dentro de la solución a la situación planteada.

B. Identificar y describir los registros semióticos emergentes en los significados personales declarados por los estudiantes (oral y escrito) al resolver problemas relacionados con probabilidad frecuencial.

Para la exploración de los significados personales se tomaron en cuenta los registros semióticos o, como lo cita Godino, el lenguaje, simbolizado en las representaciones ostensivas y las configuraciones de tipo epistémico. Estos elementos del EOS permiten una mirada mucho más amplia del significado del objeto puesto en juego, ya que como comenta Duval (1992, cap. 2), las representaciones y las relaciones establecidas entre éstas permiten la comprensión y construcción del significado de un objeto matemático y sin ellos la comprensión quedaría de lado. "No hay comprensión del significado de un objeto si no se logra establecer una relación entre el objeto representado y su representante y viceversa, en un contexto determinado" (Duval, 1999, p. 13).

¿Cuál es el significado de probabilidad frecuencial emergente en los registros semióticos declarados por los estudiantes de décimo grado?

¿Cuáles son los registros semióticos empleados por los estudiantes al momento de solucionar una situación cotidiana relacionada con la aleatoriedad?

Antecedentes
Algunas investigaciones relacionadas con este tema son:

a) Tesis doctoral. Luis Serrano (1996). "Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad".

b) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Carmen Batanero (2002). "Un reporte iberoamericano. Significados de la probabilidad en la educación secundaria".

3.8.2. Metodología

"La comprensión del lenguaje y su uso por el niño depende de su implicación en las situaciones en que se utiliza; por ello se considera esencial que el estudiante y el maestro analicen los diversos significados e interpretaciones de las expresiones lingüísticas (registros semióticos), de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro quiere decir al usar determinadas formas lingüísticas" (Dickson et ál., 1991).

A continuación se describirá la metodología que guió esta investigación, teniendo en cuenta los elementos que hacen de ésta una investigación de tipo cualitativo.

Fase I. Se realizó una revisión bibliográfica del objeto estocástico probabilidad, los registros semióticos que le son propios y su relación con lo propuesto en los marcos legales. Posteriormente se hizo un estudio de la teoría de las funciones semióticas formulada por Godino, ya que a partir de este estudio fue posible considerar los elementos de significados que hay que tener en cuenta para la caracterización del significado de probabilidad frecuencial y los registros involucrados en ésta, con el fin de delimitar la investigación y construir así el marco teórico y conceptual.

Fase II. Se diseñó e implementó una situación en torno al significado de probabilidad y aleatoriedad, la cual se desarrolló en el aula a partir de la teoría de las situaciones didácticas propuesta por Guy Brouseau, teniendo como prioridad sus tres primeras etapas (acción, formulación y validación).

Fase III. Establecimiento de categorías desde los registros semióticos, análisis de resultados y conclusiones.

3.8.3. Elementos para el análisis de resultados

Al analizar los registros semióticos declarados por los estudiantes es necesario reconocer la relación existente entre las representaciones semióticas y los registros semióticos. Recordemos que entenderemos registro semiótico como el conjunto de reglas entre signos, reglas que se pueden aplicar en el interior de un registro (tratamiento) o de un registro a otro (conversión); en este caso en particular, nos centraremos en analizar los registros utilizados y el tratamiento que se da dentro de un mismo registro.

Para el análisis de resultados en los registros semióticos y en las nociones de probabilidad presentes en los significados personales declarados por los estudiantes, se tendrán presentes:

a) Las representaciones y los registros semióticos trabajados desde la teoría de Godino, particularmente los escritos y orales.

b) El sistema de categorías propuesto por Azcárate en su libro *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad* (1996). Estas categorías son pertinentes y contribuyen a la orientación y análisis de los significados personales declarados por los estudiantes.

CÓDIGOS	DESCRIPCIÓN
CATEGORÍA 1	No hay respuesta o justificación, explicación.

CATEGORÍA 2	Los argumentos presentados son confusos y no están claros los criterios utilizados en la explicación.
CATEGORÍA 3	No se reconoce el suceso como aleatorio, se analiza como suceso determinista.
CATEGORÍA 4	Se utilizan valoraciones cualitativas de tipo personal, sin criterios objetivos de justificación.

3.8.4. Análisis de resultados

Al analizar los registros semióticos (representaciones ostensivas) declarados por los estudiantes desde EOS, identificamos el sistema de prácticas como el conjunto de situaciones, acciones, lenguaje, conceptos y argumentos relacionados frente a una práctica matemática. La relación de estos objetos genera una configuración, en este caso de tipo epistémico.

A continuación se presentan las respuestas dadas por los estudiantes, los registros declarados al momento de enfrentarse a la siguiente pregunta: plantee una situación de su vida diaria que considere aleatoria y justifique su respuesta. Estas respuestas se han categorizado a partir de los niveles planteados por Azcárate y algunas categorías que se establecen como emergentes y que están íntimamente ligadas a diferentes significados de la aleatoriedad.

Grupo de estudiantes	**Situación relatada**	**Justificación (escrita)**
1	La vida es aleatoria.	No es constante, suceden cada día diferentes cosas, siempre cambiamos de ropa. Diferentes resultados.
2	Invitación a fumar. Hacer el bien o el mal.	Cuando me invitaron a fumar marihuana, tenía un dilema: hacerlo o no.
3	Al momento de comer.	No hay un orden establecido, no hay un horario. No existe un patrón de comportamiento en la información.

4	Un partido de fútbol.	Puede ir ganando, y luego empatar, es aleatorio, no se sabe cuál puede ser el resultado. La aleatoriedad como ignorancia sobre resultado del experimento.
5	La amistad "es como un barco que sube y baja"	Puede hundirse o flotar.
6	Las emociones en un partido.	Alegría, preocupación, tristeza.
7	Diferentes momentos de la vida en la que el diablo nos ataca en nuestra debilidad.	Es algo no repetitivo que transcurre en varios procesos. No existe un patrón de comportamiento en la información.
8	El cuidado del cabello. El estado de ánimo.	Cada persona tiene diferentes facetas (estados de ánimo). Diferentes resultados.
9	Las etapas de la vida.	No responde.

Los estudiantes consideran que una situación aleatoria es aquella que varía, no es estable, depende de las circunstancias y cambia constantemente. Teniendo en cuenta los significados personales que declaran los estudiantes, es posible ubicarlos en las categorías 2 y 4, debido a que los argumentos presentados en sus declaraciones son confusos, no son claros los criterios utilizados en su explicación, además de que sus valoraciones son de tipo personal y carecen de justificación.

Ningún grupo puede ubicarse en la categoría número 1, ya que todos asocian una situación de su vida a la aleatoriedad y logran explicarlo a partir de ejemplos; además, se apoyan en sus representaciones escritas (lenguaje natural, gráfico, tablas) y orales.

Después de analizar las declaraciones escritas de los estudiantes, es posible establecer otras categorías que subyacen en la noción que éstos tienen sobre aleatoriedad.

GRUPO	CATEGORÍA	REGISTRO ESCRITO DECLARADO
3, 7	**No existe un patrón de comportamiento en la información.**	Al momento de comer: **No hay un orden establecido, no hay un horario.** Diferentes momentos de la vida en la que el diablo nos ataca en nuestra debilidad: **Es algo no repetitivo que transcurre en varios procesos.**
4	**La aleatoriedad como ignorancia sobre resultado del experimento.**	Un partido de fútbol: Puede ir ganando y luego empatar, es aleatorio, no se sabe cuál puede ser el resultado.
1, 8	Diferentes resultados, posibilidad de cambio.	La vida es aleatoria: **No es constante, suceden cada día diferentes cosas, siempre cambiamos de ropa.** El cuidado del cabello. El estado de ánimo: cada persona tiene diferentes facetas (estados de ánimo).
2, 5, 6, 9	**Incertidumbre, otros (equiposibilidad)**	**Invitación a fumar. Hacer el bien o el mal. La amistad "es como un barco que sube y baja"** (puede hundirse o flotar) **Las emociones en un partido** (alegría, preocupación, tristeza). **Las etapas de la vida.**

Al analizar las declaraciones de los estudiantes fue posible identificar similitudes y diferencias entre ellas. Por ejemplo, los grupos 3 y 7 **no reconocen un patrón de comportamiento en la información** y la noción que declaran de aleatoriedad gira en torno a un suceso sin orden y no repetitivo. Caso contrario ocurre con el grupo 4, cuyos integrantes consideran que **no es posible estimar** sobre la información debido a que hay una variación en los datos; de esta manera, el significado de aleatoriedad surge como **ignorancia sobre el resultado del experimento.**

Los grupos 1 y 8 reconocen el significado de **aleatoriedad ligado a la diferencia**

de resultados, ya que algo aleatorio es algo que cambia. Pero en el caso de los grupos 2, 5, 6 y 9 sus declaraciones relacionan el significado de aleatoriedad con la incertidumbre, o con la posibilidad de que suceda una cosa o la otra.

El instrumento se aplicó a 30 estudiantes de grado décimo del Colegio Colombo Internacional Acoinprev (ver anexos). A partir de las respuestas obtenidas se establecieron las categorías, cada una relacionada con el uso de las representaciones y registros semióticos que emplean los estudiantes en sus declaraciones (justificaciones, procedimientos, etc.) al momento de enfrentarse a una situación relacionada con probabilidad y aleatoriedad.

3.8.5. Conclusiones

Los estudiantes de décimo grado del Colegio Colombo Internacional Acoinprev utilizan diferentes registros semióticos como herramientas para justificar sus procedimientos, concepciones o nociones intuitivas frente al significado de aleatoriedad y probabilidad.

El uso de representaciones y registros semióticos permite evidenciar las nociones, creencias y concepciones que tienen los estudiantes frente al significado de aleatoriedad y probabilidad. Ellos consideran que una situación aleatoria es aquella que varía, no es estable, depende de las circunstancias y cambia constantemente.

Los argumentos presentados en sus declaraciones son confusos, no son claros los criterios utilizados en su explicación, fuera de que sus valoraciones son de tipo personal y carecen de justificación.

A partir del análisis de las declaraciones de los estudiantes se establecieron cuatro categorías emergentes sobre el significado de aleatoriedad: No existe un patrón de comportamiento en la información; La aleatoriedad como ignorancia sobre resultado del experimento; Diferentes resultados, posibilidad de cambio; Incertidumbre, otros (equiposibilidad).

Los registros semióticos presentes en los significados personales declarados por los estudiantes más utilizados son gráfico y verbal (oral-escrito). Dentro del registro gráfico los estudiantes recurren con mayor constancia a uso de tablas, pictogramas o diagramas de árbol.

Los estudiantes dieron cuenta de sus nociones sin necesidad de recurrir a una regla de cálculo o algún algoritmo matemático; utilizaron las representaciones para justificar o refutar sus hipótesis o planteamientos.

Finalmente, esta investigación permite corroborar que el análisis hacia el uso de las representaciones y los registros semióticos permite evidenciar las diferentes interpretaciones o concepciones que los estudiantes tienen sobre el significado de la probabilidad y, a su vez, ver la oportunidad que ofrece el manejo de los registros en el aula cuando el docente reconoce su necesidad y lleva al estudiante, por medio de preguntas orientadoras, a realizar el tratamiento y, si es posible, el tránsito entre los registros semióticos, llegando así a una construcción del significado de probabilidad lejana del pensamiento determinista.

Referencias

Azcárate, Pilar (1996). El conocimiento profesional relativo al tratamiento del conocimiento probabilístico en la educación primaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Borba, M. & Skovsmose, O. (1997). La ideología de la certeza en la educación matemática. *For Learning of Mathematics*, 17, 3. Colombia: MEN. Lineamientos curriculares de matemáticas (1998).

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2): 33-115.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Godino, J.D. (2003). *Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

3.9. Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite de una función

William Jiménez Gómez[17]
Sandra Milena Rojas T.[18]
Camilo Ramírez Sánchez[19]

Resumen
Se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite de una función en grado once de la educación media colombiana, compuesta de dos actividades en las que subyacen tres tipos de representaciones y una noción del límite de una función. La propuesta contiene un alto componente lúdico, lo que permite que el trabajo en el aula de matemáticas sea placentero; dicha propuesta didáctica fue aplicada, evaluada y finalmente reformulada utilizando herramientas tecnológicas, atendiendo a las necesidades actuales de la educación colombiana. La definición de límite de una función que se trabajó es la propuesta por Blázquez, Gatica, Benegas y Ortega (2006), que enlaza las concepciones de D'Alembert y Cauchy, lo que hace que sea más sencilla y más adecuada de utilizar en la secundaria.

3.9.1. Presentación

El concepto de límite de una función es uno de los conceptos matemáticos sobre los cuales se han realizado múltiples investigaciones didácticas, pero pocas tienen que ver con su enseñanza, contrario a lo que ocurre con las relacionadas con el aprendizaje de este concepto, de las cuales se encuentra una extensa bibliografía (Azcárate, 1996). En las investigaciones referentes al aprendizaje de este concepto se han estudiado y analizado, entre otros aspectos, los obstáculos epistemológicos, los errores y las dificultades que los estudiantes presentan al abordar su estudio. A manera de ejemplo, Cornu (1983), al igual que Sierpinska (1985), considera que una de las dificultades que presenta la definición de límite de una función es la ruptura que hay entre el significado de la palabra "límite" en el lenguaje coloquial y su definición matemática. Con estos antecedentes de investigación y reconociendo la trascendencia del concepto de límite de una función en el contexto del cálculo, se diseñó una propuesta que atienda a la solución de las dificultades relacionadas

[17]Estudiante de la maestría en docencia de las matemáticas. Grupo de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional. Profesor del Instituto Pedagógico Nacional. Williamajg@hotmail.com.

[18]Estudiante de la maestría en docencia de las matemáticas. Grupo de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional. Profesora del Instituto Pedagógico Nacional. rojastolosa@yahoo.com.ar.

[19]Estudiante de la maestría en matemática aplicada, Universidad Nacional de Colombia. Profesor del Instituto Pedagógico Nacional. kamandramsan@gmail.com.

con este concepto por medio de la utilización de material concreto y del juego como estrategia didáctica y motivadora.

3.9.2. Referentes teóricos

Historia del concepto de límite

Son diversas las investigaciones (Sánchez y Contreras de la Fuente, 1998; Cornu, 1983; Deledicq, 1994; Sierpinska, 1985; Blázquez y Ortega, 2001) que se han dedicado a estudiar aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del límite de una función como la historia, concepciones, dificultades, obstáculos epistemológicos, representaciones, entre otros; en este marco, la historia de las matemáticas permite identificar aspectos relativos a la evolución de los conceptos, las ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones, las dificultades que involucraban, los problemas que dichos conceptos resolvían, entre otros aspectos. Adicionalmente, la historia de las matemáticas se considera un recurso didáctico que mejora la calidad de la transmisión del conocimiento matemático (González, 2004). Por tales razones, en principio se presentará una breve reseña histórica del concepto de límite, identificando los aspectos históricos más relevantes de su evolución.

Aunque se podría fijar la fecha del nacimiento del límite en 1850, los antecedentes de este concepto aparecen en una época anterior, claro que con fisonomía diferente, pues como se puede notar en análisis matemáticos, este concepto está ligado con otros dos: el infinitesimal y el infinito, que aparecen desde la época griega. Un ejemplo de esto se hace evidente en el trabajo de Arquímedes (287-212 a. de C.), *El método*, estudiado por J. L. Heiberg en 1906. En éste se aprecia cómo el autor, para calcular el volumen de algunos sólidos, hacía infinitas divisiones de ellos que mantuvieran un espesor infinitesimal (Stewart, 2005), lo que muestra claramente dos límites: uno tendiendo a infinito y el otro tendiendo a 0. Sin embargo, aunque Arquímedes consideraba este método de gran importancia, carecía de rigurosidad y no se mostraba cuando se hacían públicos los descubrimientos. De la misma manera son renombrados los matemáticos griegos que usaban sistemas muy parecidos, entre ellos Demócrito (470-370 a. de C.) con su método para hallar el volumen de un cono, Eudoxo de Crudo (350 a. de C.) con su método exhaustivo y Nicolás de Cusa, que lo usaba para encontrar el área del círculo.

Pero ¿por qué si el concepto se conocía desde la época griega, no tuvo un desarrollo matemático en ésta? La respuesta a este cuestionamiento tiene muchas razones, pero dos de las más destacadas son: por el rigor que requería el concepto y por conflictos filosóficos. Un ejemplo de este último es el filósofo Zenón (450 a. de C.), de la escuela eleática, que propuso cuatro paradojas referidas al espacio y al tiempo; en dos de ellas atacaba la idea de que son discretos y en las otras dos, que son continuos, basándose en ideas que pueden sostenerse desde el infinitesimal e infinito. Estos problemas significaron para las matemáticas griegas avances referidos a la geometría, pero a pesar de ser amplios, dicha falta de equilibrio ocasionó una grave distorsión en el desarrollo de las matemáticas. Sus repercusiones aún se dejaban sentir dos mil años más tarde, cuando Isaac Newton y Gottfried Leibniz se propusieron inventar el cálculo (Stewart, 2005).

Lo interesante es que debido a que los griegos estuvieron en los brazos de la geometría, surgieron varios problemas. Uno de ellos, estudiado desde la época de Apolonio (250 a. de C.), fue el punto de partida para la ratificación del concepto de límite; el problema consistía en dibujar una recta tangente a una curva dada. Aunque Apolonio lo resolvió para las cónicas, en especial para la parábola, la solución general apareció alrededor del año 1734, gracias a dos matemáticos; claro está que esta construcción es un edificio en el que importantes matemáticos colaboraron con uno o más aportes. La siguiente es una lista de los más destacados junto con sus aportes, aunque tan sólo se mencionan los posteriores al año 1637, una época en que la matemática contaba con un álgebra literal, heredada de la escuela italiana y de Vieta, una notación algebraica fijada, el cálculo logarítmico, el método de los indivisibles de Cavalieri (1548-1647) (Collette, 2000), y además fue allí donde se marcó el desarrollo de la geometría analítica como una importante columna de la edificación.

- René Descartes (1596-1650). Este matemático, debido a su relación con Fermat, manifestó interés en el tema de las tangentes; aunque no utiliza el concepto de límite o infinitesimal, usa un procedimiento equivalente a definir la tangente como límite de una secante.

- Pierre Fermat (1601-1665). Desarrollando su geometría analítica en 1629 hizo dos descubrimientos, el más importante de los cuales fue un método para distinguir los máximos y los mínimos de una función algebraica (curva), escrito en *Méthodus ad disquirendam maximam et minimam* en 1637. El método consiste en remplazar en una función f de variable a por $a+x$ y hacer $f(a+x) \approx f(a)$, lo que después de un procedimiento algorítmico resulta ser equivalente a calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}$. "Aunque Fermat no poseía el concepto de límite, el cambio de a a $a+x$ es la esencia del análisis infinitesimal" (Collette, 2000, p. 29). El resultado del límite anterior también se puede obtener analizando el método que Fermat usa para resolver el problema de las tangentes.

- Evangelista Torricelli (1608-1647). Este alumno de Galileo, preocupado por la falta de rigor y las dificultades lógicas que implicaba el método de los indivisibles, elaboró pruebas a la manera griega usando el método exhaustivo, haciendo 21 demostraciones sobre la cuadratura de la parábola con el método de los antiguos y once utilizando los indivisibles.

- Gregorie Saint-Vincent (1584-1667). Basado en el método de los antiguos griegos (exhaustivo), pero con algunas modificaciones, publicó en el tratado *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum coni*, un nuevo método utilizando rectángulos infinitamente delgados en un número infinito, de aquí que Saint-Vincent no se conformó con una aproximación arquimediana. Este procedimiento equivale a definir una curva por el polígono inscrito cuando se duplica infinitamente el número de los lados.

- James Gregory (1638-1675). En trabajos como *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, utilizaba la idea de convergencia doble, haciendo gran uso de los infinitesimales, inscribiendo y circunscribiendo polígonos para encontrar convergencia de series dobles; las ideas de Gregory se inspiraron en trabajos de Saint-Vincent y sus demostraciones en el método exhaustivo modificado, como se puede evidenciar en *Geometriae parts universalis*, donde determina arcos, tangentes, volúmenes y superficies.

Antes de continuar el listado es conveniente mencionar que los dos siguientes matemáticos parten la historia del límite, pues son ellos quienes, según autores como Cornu (1983, citado en Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006), nos llevan a "la supremacía del cálculo". Aunque los historiadores no atribuyen la invención del cálculo a un matemático por la controversia generada entre Newton y Leibniz, lo interesante es que esta rama de las matemáticas nace en el problema de las tangentes, usando una geometría semejante a la de Apolonio pero mirando el problema de una manera general.

Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) desarrollaron un método práctico y nuevo para resolver gran cantidad de problemas de física y geometría, y superaron los obstáculos que impidieron a numerosos matemáticos encontrar un método general para la obtención de tangentes, máximos y mínimos, y el cálculo de las cuadraturas. Para lograr esto, los padres del cálculo basaron su trabajo en tres pilares:

1. Elaboraron su trabajo en el análisis infinitesimal.

2. Comprendieron la reciprocidad entre el problema de las tangentes y el de las cuadraturas.

3. Gracias a la geometría de Fermat y Descartes trataron los problemas con un método general, aplicable a todas las curvas de una clase.

Adicionalmente, el desarrollo del cálculo diferencial e integral se sometió a la asimilación de métodos geométricos de Cavalieri, Barrow, Descartes, Fermat y Wallis.

Newton hizo diversos trabajos que aportaron a las matemáticas y a la física, como el teorema del binomio y numerosos textos, pero sin duda el que más aportó al cálculo fue el método de las fluxiones en su obra *Methodus fluxionum et serieum infiniturum* (1671), en la que define dos términos: fluente y fluxión:

> Llamaré fluentes a cantidades aumentadas gradual e indefinidamente, representadas por v, x, y y z, y las letras con un punto arriba serán las velocidades con las que éstas aumentan por el movimiento que las produce y por consiguiente las llamaré fluxiones.

De aquí se deduce que las fluentes son las variables y la fluxión, la tangente de la función. Para observar la forma en que Newton abordó el problema de las tangentes, se muestra a continuación una interpretación del matemático Ian Stewart (2005) de las líneas de razonamiento de Newton para las tangentes de la parábola, cuya ecuación es $y = x^2$:

1. Se incrementa el valor de x a $x + o$, como consecuencia x^2 pasa a ser $(x + o)^2$.
2. Las razones de los incrementos son, por consiguiente, las diferencias de los cuadrados sobre la diferencia de los valores de x; dicho en otra forma:
$$\frac{(x+o)^2 - x^2}{x+o-x} = \frac{x^2 + 2ox + o^2 - x^2}{o} = 2x + o$$
3. Se hace que o tienda a 0, obteniendo la pendiente $2x$, o como Newton la llamó, la fluxión de la fluente.

Leibniz desarrolló un razonamiento similar pero no utilizó o sino dx (una pequeña porción de x), que es la notación actual. Sin embargo, no fue aquí donde se definió verdaderamente el límite, pues surgieron grandes opositores de este razonamiento, entre ellos George Berkeley, que insistía en pensar como un algebrista, en cuyo caso o debería ser una constante definida. Berkeley objetó que o no es exactamente cero, en cuyo caso las condiciones no son válidas, pero si o es cero, no puede usarse como divisor. Según este matemático, el método funcionaba debido a errores que se compensan entre sí; aunque el opositor tenía razón en cuanto a lógica, el método tuvo gran resonancia, pues funcionaba perfectamente.

Pero ¿por qué no se formalizó el límite en esta época? Existen muchas razones para dar respuesta a este hecho, pero la más importante puede ser la insistente controversia sobre la invención del cálculo entre los matemáticos ingleses, que apoyaban a Newton, y los matemáticos del resto de Europa, en especial los Bernoulli, que apoyaban a Leibniz; adicionalmente, los argumentos del caballero inglés estaban sustentados en la física y, por tanto, en el movimiento. Claro está que fueron bastantes los matemáticos que trataron de definir el límite a partir del infinitesimal. Leibniz: "Hay que especificar que dx y dy se toman de tal modo que sean infinitamente pequeñas, de tal forma que cuando se busca su cociente, no puedan ser consideradas como cero, pero que se puedan desechar siempre" (Stewart, 2005, p. 85); es decir, lo que es válido para cualquier valor distinto de cero es válido para o=0. Johann Bernoulli (1667-1784): "Una cantidad que se reduce o incrementa mediante una cantidad infinitamente pequeña, no se incrementa ni se reduce" (Stewart, 2005, p. 85) y trató de definir el infinitesimal como $\frac{1}{\infty}$.

Aunque ninguna definición acierta por completo, aparecen dos grandes matemáticos, Euler y Cauchy, que hacen grandes aportes:

Leonard Euler (1707-1883) integró el cálculo de Leibniz y la teoría de las fluxiones, dando lugar al "análisis" como área de la matemática que estudia los procesos infinitos, basándose en el concepto de función: "Cualquier expresión analítica finita o infinita formada por una cantidad de variables y números o cantidades constantes" (Boyer, 1996, p. 58). Este adelanto, junto a la complicación de los números complejos, hizo necesario que Agustin-Louis Cauchy (1789-1857) definiera como principal arma del análisis el límite de la siguiente manera:

Cuando los valores atribuidos sucesivamente a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, para llegar finalmente a diferir de este valor una cantidad tan pequeña como se desee; dicho valor fijo recibe el nombre límite (Stewart, 2005, p. 86).

Lastimosamente, Cauchy seguía utilizando procesos infinitos para definir el límite, pero 29 años más tarde se puso fin a este problema, convirtiendo la variable, que cambia de una forma activa en un símbolo estático. Karl Theodor Weierstrass (1815-1897) definió:

"Una función $f(x)$ tiende a un límite L cuando x tiende a un valor a si, dado cualquier número ϵ la diferencia $f(x) - L$ es menor que ϵ, cuando $x - a$ es menor que cierto número δ dependiente de ϵ" (Stewart, 2005, p. 86), haciendo todo como un juego: "Si tú me dices qué tan cerca quieres que esté $f(x)$ de L, entonces yo te digo cómo de cerca tiene que estar x de a" (Stewart, 2005, p. 86).

Esta definición liberó al cálculo de consideraciones metafísicas y así nació el análisis moderno, pero también trajo consigo maravillosos avances, entre los cuales se puede contar el análisis no convencional entre 1920 y 1950.

Por último, avances nuevamente relativos a la geometría, como la geometría no euclidea y el programa de Erlangen en 1872, sugerido por Felix Klein (1849-1925), dieron origen a la topología, y fue allí donde la matemática consiguió un pilar desde donde se podían generar innumerables logros gracias a Gauss (1777-1855), Johann Listin (1808-1882), Mobius (1790-1868), entre otros, que consiguieron generalizar la idea de transformación, entregándonos la definición más amplia de límite en la que las anteriores son casos particulares:

Si $f : A \to Y$ es una aplicación de un subconjunto A de un espacio topológico X en un espacio topológico Y y x_0 es un punto de adherencia de A, entonces se dice que y en Y es límite de f en x_0 si para toda vecindad V de y en Y existe una vecindad U de x_0 tal que

$$f\left(A \cap C_{x_0}^{U}\right) \subset V$$

Marco didáctico

Según El Bouazzaoui (1998), Cornu (1983), Deledicq (1994) y Sánchez y Contreras (1995), se distinguen cuatro concepciones históricas relacionadas con el concepto de límite de una función (Sánchez y Contreras, 1998):

1. *Concepción geométrica (CG).* Está relacionada con situaciones ligadas al contexto geométrico, procesos geométricos infinitos que surgen de las paradojas de Zenón. Algunas situaciones que se pueden plantear desde este punto de vista pueden ser la aproximación de las áreas de polígonos inscritos en un círculo, según se aumenta el número de lados.

2. *Concepción numérica (CN).* Está ligada a la utilización de sucesiones de valores de la variable independiente y las correspondientes de la variable dependiente.

3. *Concepción analítica o métrica (CAM).* Está relacionada con la introducción de las variables lógicas.

4. *Concepción topológica (CT).* Es la definición más general y en la que se utiliza el concepto de punto de acumulación.

Dependiendo de la concepción de límite que se pretenda enseñar, se pueden identificar algunas dificultades; Sánchez y Contreras (1998) realizaron una investigación en la cual analizan el tratamiento didáctico, dado el concepto de límite de una función en algunos manuales, identificando las definiciones que emplean y las concepciones que se toman sobre este concepto, además de las dificultades que presenta su enseñanza.

Una manera de introducir el concepto de límite de una función es:

- A través de una tabla de valores y la gráfica de una función, haciendo referencia al término de aproximación, la dificultad que puede presentar esta forma de introducir este concepto es que no se establezca la relación entre la gráfica y la tabla de valores con las aproximaciones numéricas, haciendo que el estudiante no pueda solucionar un problema de límite si no dispone de una representación gráfica. Esta forma de introducir el concepto de límite se enmarca en las concepciones CN y CAM.

Otra forma es la siguiente:

- Por medio de la definición: si x se aproxima hacia x_0, los valores correspondientes de f se aproximan hacia un número real L, diremos que L es el límite de f cuando x se aproxima al número x_0; si no se aclara el término de aproximación, el estudiante puede no distinguir entre aproximación y distancia, y además puede suceder que el alumno crea que una función que sólo tiene un límite lateral, tiene límite en el punto.

- A través de la definición métrica, empleando las variables lógicas ϵ y δ. Si no se hace una explicación previa o posterior y la utilización de una excesiva formalización teórica, se obliga al estudiante a realizar un esfuerzo de comprensión muy superior, creando dificultades de aprendizaje.

- Mediante la gráfica de una función abstracta para la interpretación geométrica del concepto de límite de una función, lo que conduce al estudiante a reconocer el límite de una función sólo cuando dispone de la gráfica.

De las diferentes formas de abordar el concepto de límite aludidas, las que se emplean en general para su enseñanza son las que tratan el concepto de límite de una función a partir del análisis de gráficas con la ayuda de tablas de aproximación, y en algunas ocasiones se emplea la definición métrica. Posteriormente se trabaja la algebrización del límite, basándose en las operaciones algebraicas.

La definición que se trabaja en este documento es la propuesta por Blázquez, Gatica, Benegas y Ortega (2006). Según estos autores, las conceptualizaciones del concepto de límite han sido el resultado del desarrollo de la matemática y no desde la didáctica, pues van orientadas al rigor matemático. En este sentido, la definición que proponen es la conceptualización de límite funcional como aproximación óptima, que enlaza las concepciones de D'Alembert y Cauchy, lo que hace que sea más sencilla y más adecuada de utilizar en la secundaria.

Definición de límite de una función

"El límite de la función f en $x - a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$ existe un entorno reducido de a, tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a L que K.

Si se emplea la significación de tendencias, el límite de la función f en $x - a$ es L si cuando x tiende a a sus imágenes $f(x)$ tienden a L" (Blázquez y Ortega, 2002, citado en Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006, p. 195).

3.9.3. Secuencia de actividades

Se diseñaron tres actividades, en las cuales se proponen situaciones novedosas, con sentido para los estudiantes que incorporan elementos que se asemejan a los problemas y situaciones que dieron origen al concepto; teniendo en cuenta que la comprensión del concepto de límite en su dimensión "aprendizaje con significado" está caracterizada por el dominio de sus sistemas de representación y por los distintos tipos de actividad asociadas a éstos (Medina, 2001), supuesto que comparten otros autores (Blázquez y Ortega, 2001; Javier, 1987; Sfard, 1991; Hiebert y Carpenter, 1992; Duval, 1991), cada una de las actividades está enfocada en un sistema de representación del concepto de límite.

Actividad 1

En esta actividad se trabaja el límite en el contexto geométrico con ayuda de material concreto: el geoplano. Aquí el límite es una aproximación de procesos geométricos infinitos.

A cada estudiante se le entregan un geoplano, un caucho y un pitillo; el geoplano se usa por la parte donde se encuentra el esbozo de una circunferencia (figura 1). Se acuerda con los estudiantes como unidad de medida la longitud del arco comprendida entre dos puntos consecutivos del geoplano. Se debe tener en cuenta que el geoplano con el que se trabajará tiene 24 taches, los cuales representarán puntos que se enumerarán en el sentido de las manecillas del reloj (figura 1).

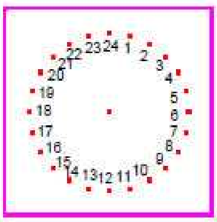


Figura 1

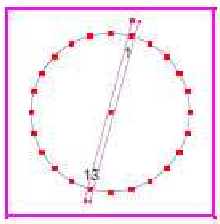


Figura 2

Paso seguido, el profesor propondrá a los estudiantes representar la circunferencia con el caucho, poniéndolo alrededor de los puntos del geoplano, y se plantearán los siguientes cuestionamientos: estando de acuerdo con que el perímetro de la circunferencia es 24 unidades, aproximadamente, ¿cuál es el valor aproximado del área comprendida por la circunferencia, representada por el caucho puesto alrededor de los puntos del geoplano?

Después de entregado el material, y dadas las instrucciones anteriores, el maestro propondrá el siguiente ejercicio:

1. Ubique el pitillo en la circunferencia de tal manera que la longitud de la cuerda sea la mayor posible; ¿sobre cuáles puntos ubicó el pitillo?
2. Ubique el pitillo en la circunferencia de tal manera que la longitud de la cuerda sea la menor posible; ¿sobre cuáles puntos ubicó el pitillo?

Extremos de la cuerda	**Longitud aproximada de la cuerda**	**Valor aproximado del área de la región comprendida por la semicircunferencia y la cuerda**
1,13	8 unidades	24 unidades
1,12		
1,10		
1,3		
1,2		
$1,\frac{1}{2}$		
$1,\frac{1}{6}$		
$1,\frac{1}{n}$		

Actividad 2

En esta actividad se plantea un juego de estrategia, en el que se trabajan los sistemas de representación analíticos del límite de una función, haciendo uso de la aproximación con el fin de construir, junto con los estudiantes, la definición de límite.

En la figura 3 se presenta un mapa con tres países A, B y C, comunicados entre sí por dos caminos, y cada país desea invadir a los otros dos. En la figura 4 se muestra una representación de esta situación en un plano cartesiano. Los países A, B y C están representados por los puntos de coordenadas $(1,1)$, $(0,0)$ y $(-1,-1)$, respectivamente; los caminos se representan con la gráfica de las siguientes funciones:

- $f(x) = x$ Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\mathbb{R}$
- $f(x) = x^3$ Dominio: $\mathbb{R}$; Rango: $\mathbb{R}$

El juego consiste en situar las tropas en todos los caminos de los países que se pretenden invadir, tan cerca como sea posible. Esto con el objetivo de desarrollar una noción básica del límite como aproximación óptima.

Se entregarán dos dados. Uno de ellos tendrá las funciones que representan los caminos ($f(x) = x$ y $g(x) = x^3$), y cada función se encuentra en tres caras del dado; el otro tendrá los números de uno al seis. Este dado decide la cantidad de números del dominio que cada jugador puede escoger en su turno.

Cada jugador lanza los dados y escoge los números del dominio que, a su juicio, lo acerquen más a los países que desea invadir (teniendo en cuenta las limitaciones que le impongan los dados); el propósito del juego es situar tropas tan cerca como sea posible en todas las rutas de acceso a los territorios enemigos. Con estas reglas el juego no tiene fin, dada la densidad de los números reales, así que se conjetura que los estudiantes, después de un rato de juego, noten este detalle, y a que al preguntarles por posibles estrategias para terminar el juego den un paso de aproximación al concepto de límite de una función.

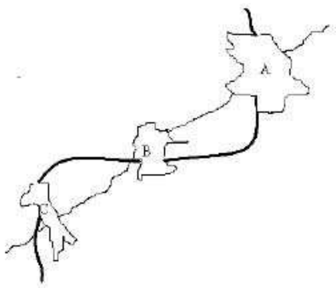


Figura 3

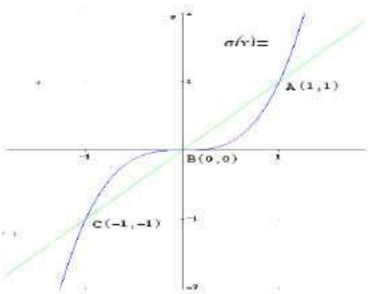


Figura 4

Conclusiones de la aplicación

Las actividades se realizaron con 30 estudiantes de grado once, con énfasis en sociales del Instituto Pedagógico Nacional, durante dos sesiones de 90 minutos cada una. El análisis de la aplicación de la propuesta se hizo con base en el análisis de dos categorías referidas a aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje. La primera hace referencia al modelo de enseñanza, la secuencia de actividades, la pertinencia de los materiales y la motivación generada en los estudiantes; en la segunda se analizan aspectos relacionados con el aprendizaje logrado por los estudiantes, como la actividad generada, obstáculos evidenciados y superados, dificultades, entre otros.

Los instrumentos utilizados para recolectar esta información fueron las grabaciones en audio y video, una encuesta a los estudiantes y la entrevista a la profesora titular del curso, todas evaluadas en las categorías que mostramos a continuación.

Las categorías fueron:

1. Existencia y coherencia de un modelo de enseñanza (por descubrimiento) en la propuesta didáctica y generación de motivación de los estudiantes.

2. Aprendizaje promovido por la propuesta didáctica.

3. A partir de la manipulación y visualización de los materiales empleados (geoplano, cauchos y pitillo), los estudiantes construyeron una sucesión de aproximaciones que les permitieron conjeturar sobre el trabajo realizado; las características del material hacen que el estudiante se abstraiga después de un número de pasos. Sin embargo, las características del pitillo hacen que este paso se dé demasiado rápido.

4. Proponer actividades matemáticas a través de situaciones variadas y cercanas al estudiante que involucran diversas representaciones del concepto de límite de una función con sentido, y que incorporan elementos que se asemejan a los problemas y contextos que en la historia dieron origen al concepto, permitió que los estudiantes construyeran una definición del concepto a partir de su propia actividad y establecieran relaciones entre las diferentes representaciones.

5. Trabajar con la definición del límite de una función como aproximación óptima sugerida por Blázquez y Ortega (2002, citado en Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006) generó un aprendizaje con comprensión del concepto y evita caer en los obstáculos epistemológicos referidos a la simbología de la definición métrica.

6. El uso de material didáctico y del juego como estrategias estimulantes hace de la clase de matemáticas un espacio placentero para los adolescentes. El alto componente lúdico promueve la interacción entre los estudiantes y el maestro, y posibilita que el conocimiento se construya colectivamente.

Herramientas tecnológicas

"La matemática es un campo del conocimiento en el cual el reto de dirigir el aprendizaje hacia la búsqueda de estructuras cognitivas preparadas para la indagación genuina es fundamental. Para ello ha resultado de la mayor importancia la mediación de las nuevas tecnologías" (Ministerio de Educación Nacional, 2001). En el desarrollo de las actividades planteadas anteriormente, se tenía la dificultad para modelar y presentar los resultados parciales, dificultando el acercamiento a la definición de límite; por tal razón se propone utilizar el computador como agente mediador entre la actividad propuesta y el estudiante.

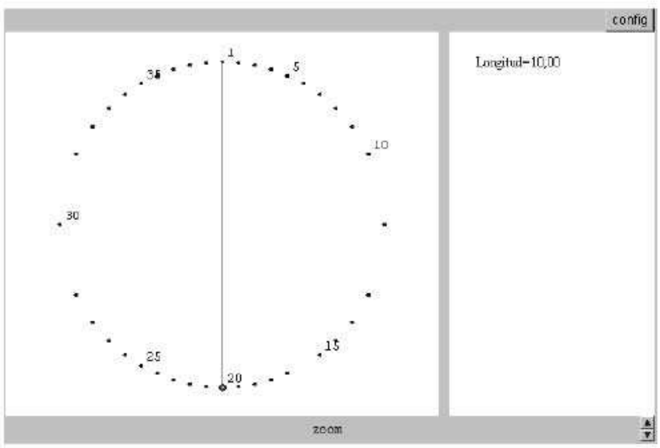
Para esto se propone utilizar Descartes, el cual es un *applet configurable*; que sea un *applet* significa que puede insertarse en páginas web y que sea *configurable* significa que cada aplicación o configuración puede tener un *aspecto diferente.* Las aplicaciones de Descartes son escenas educativas con *gráficas y números* y en las que el estudiante puede *modificar parámetros* manipulando controles y *observando* el efecto que esas modificaciones tienen sobre las *gráficas y números.*

Descartes no es un programa y su licencia es gratuita, para su utilización es necesario contar con un explorador web y tener instalado la máquina virtual de Java. Estos requisitos facilitan enormemente la utilización de Descartes, pues en la actualidad la mayoría de los computadores los cumplen.

A continuación se combina el uso de Descartes con las dos actividades propuestas para facilitar la modelación, esperando que la comprensión del concepto de límite sea más eficaz que al hacer la modelación con geoplanos, lápiz y papel.

Actividad 1.01

En esta actividad se trabaja el límite en el contexto geométrico con ayuda del *applet* Descartes; aquí el límite es una aproximación de procesos geométricos infinitos. Los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador, el cual tendrá abierto el explorador web con la siguiente pantalla.



Se indica a los estudiantes que el radio de la circunferencia son cinco unidades.

Acto seguido se plantearán estos cuestionamientos: estando de acuerdo en que el perímetro de la circunferencia es de unas 30 unidades, ¿cuál es el valor aproximado del área comprendida por la circunferencia?

Después de entregado el material y dadas las instrucciones anteriores, el maestro propondrá el siguiente ejercicio:

1. Ubique la cuerda en la circunferencia de tal manera que su longitud sea la mayor posible; ¿sobre cuáles puntos la ubicó?
2. Ubique la cuerda en la circunferencia de tal manera que la longitud de la cuerda sea la menor posible; ¿sobre cuáles puntos la ubicó?

Complete la siguiente tabla.

Extremos de la cuerda	**Longitud aproximada de la cuerda**	**Valor aproximado del área de la región comprendida por la semicircunferencia y la cuerda**
1,20	10 unidades	36 unidades
1,18		
1,15		
1,12		
1,10		
1,8		
1,5		
1,2		
$1,\frac{1}{2}$		
$1,\frac{1}{6}$		
$1,\frac{1}{n}$		

Actividad 2.1

En esta actividad se plantea un juego de estrategia para dos o tres jugadores, en el que se trabajan los sistemas de representación analíticos del límite de una función, haciendo uso de la aproximación con el fin de construir junto con los estudiantes la definición de límite.

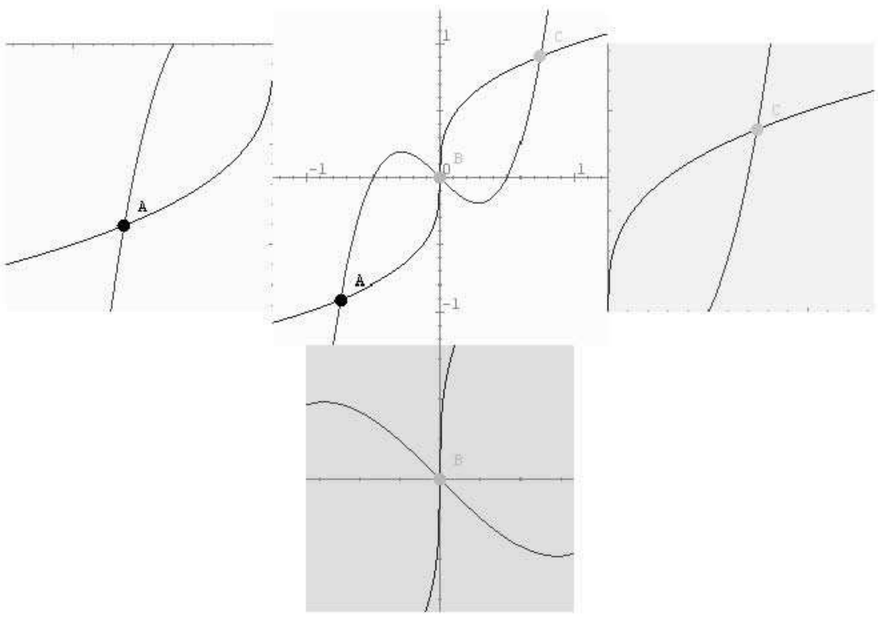
En la figura se presenta un mapa con tres países A, B y C, comunicados entre sí por dos caminos; cada país desea invadir a los otros dos. El plano de la mitad muestra una representación de esta situación en un plano cartesiano. Los países A, B y C están representados por los puntos de coordenadas

$$(-0{,}744, -0{,}9) \quad (0, 0) \quad (0{,}744, 0{,}9)$$

respectivamente, los caminos se representan con la gráfica de las siguientes funciones:

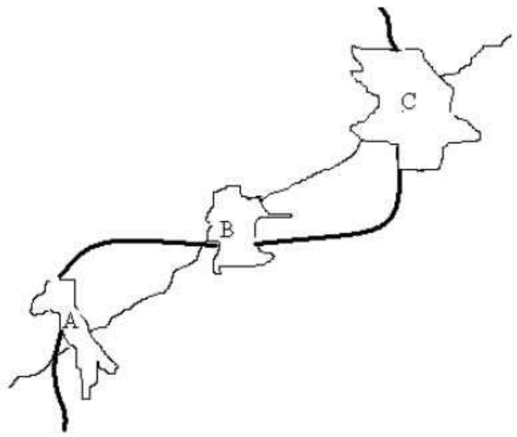
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ Dom: $\mathbb{R}$; Rang: $\mathbb{R}$ $\qquad$ $g(x) = 4x^3 - x$ Dom: $\mathbb{R}$; Rang: $\mathbb{R}$

El juego consiste en situar las tropas en todos los caminos de los países que se pretenden invadir, tan cerca como sea posible, con el objetivo de desarrollar una noción básica del límite como aproximación óptima.



Se entregarán dos dados: uno de ellos tendrá las funciones que representan los caminos ($f(x) = \sqrt[3]{x}$ $g(x) = 4x^3 - x$). Cada función se encuentra en tres caras del dado, el otro tendrá los números de uno al tres; este dado decida la cantidad de números del dominio que cada jugador puede escoger en su turno.

Cada jugador lanza los dados y escoge los números del dominio que a su consideración lo acerque más a los países que desea invadir (teniendo en cuenta las limitaciones que le impongan los dados); el propósito del juego es situar tropas tan cerca como sea posible en todas las rutas de acceso de los territorios enemigos. Con estas reglas el juego no tiene fin, dada la densidad de los números reales, así que se conjetura que los estudiantes después de un rato de juego noten este detalle y a que al preguntarles por posibles estrategias para terminar el juego den un paso de aproximación al concepto de límite de una función. El *applet* utilizado permite hacer tanto zoom como se quiera y a medida que el jugador escoge las tropas, éste las acomoda en la función.



3.9.4. Conclusiones

Al poder dinamizar las actividades, los estudiantes se enfocan mejor en lo que el maestro quiere mostrar, esto es, la aproximación al concepto de límite. Como el computador realiza las diferentes operaciones requeridas en cada actividad de manera automática, esto agiliza el tiempo de ejecución y fomenta la formulación de hipótesis y sus posibles demostraciones.

Así mismo, el maestro en el momento de la puesta en común y generalización del concepto puede utilizar las actividades dinámicas en una presentación frente al curso, para mostrar visualmente el concepto de límite trabajado en las dos actividades.

Así como se formularon y ejecutaron estas dos actividades, se pueden crear muchas más que al poder dinamizar facilitan la aprehensión del concepto. Se extiende la invitación para que el docente interesado formule sus propias actividades, las dinamice con este o cualquier programa y saque sus propias conclusiones.

Referencias

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3).

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2).

Chamoso J., Durán, J., García J., Lalanda, J. & Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, 47, pp. 47-58.

Contreras de la Fuente, A. (2002). *La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión.* [Sitio en internet]. Disponible en http://www.urg.es/local/seiem/IV_Simposio.htm. Acceso el 30 de enero.

Medina, A. (2001). Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios. Tesis de maestría.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (2001). *Memorias Seminario Nacional. Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Matemáticas. Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: MEN.

Sánchez, G. & Contreras de la Fuente, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), 73-83.

Sierra, M., González, A. & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de bachillerato y curso de orientación universitaria. *Enseñanza de las ciencias*, 17(3).

Stewart, I. (2004). *De aquí al infinito*, 17(3). España: Crítica.

3.10. Análisis didáctico de la igualdad en los números reales

Édgar Alberto Barón Poveda[20]
Hugo Edver Zamora Coronado[21]

Palabras claves: análisis didáctico, actividad de aprendizaje, noción de igualdad, construcción de conocimiento matemático escolar.

3.10.1. Resumen

Desde nuestro trabajo investigativo en educación matemática, junto con la experiencia universitaria directa de orientar cursos de matemáticas a estudiantes que ingresan a primer semestre, hemos avanzado en la caracterización de situaciones del aula de clase que obstaculizan el aprendizaje comprensivo de la noción de igualdad.

El escaso nivel de reflexión que se propone acerca de nociones como equilibrio, desequilibrio, semejanzas, diferencias o tantas otras de la cotidianidad vinculadas a la noción de igualdad, genera que las actividades planteadas alrededor de las ecuaciones no superen el aspecto procedimental de la solución y más bien incentiven el uso de saberes informalmente construidos, que posibiliten tales soluciones sin alcanzar comprensión sobre el conocimiento matemático que apoya dichos procedimientos.

Por consiguiente, los supuestos y las exigencias que la escolaridad superior plantea a los estudiantes que ingresan a sus programas no siempre concuerdan con los conocimientos y estado de desarrollo intelectual de la mayoría de ellos. Es así como los propósitos que se desean alcanzar en los primeros semestres de la formación profesional de un estudiante, en cuanto a que el desarrollo de su pensamiento avance, mediante la integración que logre entre el conocimiento matemático, su cotidianidad y su entorno disciplinar, no siempre se consiguen.

La aproximación a la propuesta que fundamenta la investigación en didáctica de las matemáticas, orientada en la perspectiva del aprendizaje y que se desarrolla en AprendEs, encaminó la reflexión sobre la escolarización del conocimiento matemático en nuestros entornos de desempeño profesional hacia el diseño de un proyecto de investigación que hemos venido desarrollando en el Politécnico Grancolombiano.

Presentamos los avances de este proyecto de investigación que intenta dar respuesta al siguiente interrogante: ¿existe un posible camino de elaboración comprensiva de las nociones y conceptos asociados a la igualdad, que tenga como punto de partida

[20]Politécnico Grancolombiano. eabaronp@poligran.edu.co.
[21]Politécnico Grancolombiano. hzamora@poligran.edu.co.

los conocimientos aritméticos, el cual le permita al estudiante conocer, comprender, modelar y resolver situaciones y problemas cotidianos, a la vez que desarrollar su pensamiento y avanzar en los procesos de generalización, abstracción y simbolización?

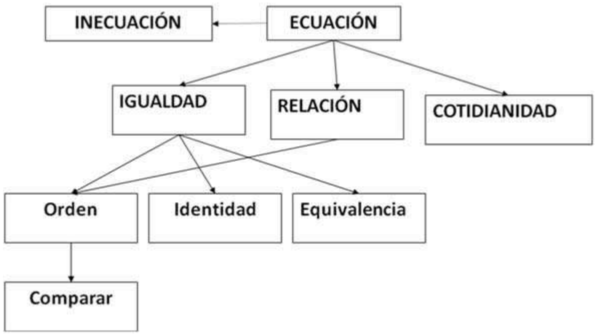
Dar respuesta a la pregunta formulada implica la tarea de identificar los conocimientos matemáticos y no matemáticos que posibilitan la comprensión de las nociones y conceptos especificados, desde la aritmética y a través del avance en el estudio de los sistemas numéricos. También está explorar con estudiantes de asignaturas de matemáticas en los primeros semestres de la universidad, actividades que posibiliten aprender comprensivamente esos conocimientos mediante procesos de construcción.

Las actividades que se van a proponer a los estudiantes se diseñaron en concordancia con algunos lineamientos que sustentan el trabajo de aula en forma de taller. Inicialmente, presentamos de manera sintética los dos elementos con los que miramos el problema de investigación que nos ocupa. Cabe anotar que estos dos elementos son parte fundamental del programa de investigación centrado en el aprendizaje en el que estamos avanzando.

1. *Didáctica de las matemáticas.* Aquí exploramos lo que sería posible y necesario de aprender y cómo desarrollar y orientar procesos de aprendizaje. Para ello estudiamos la historia de las matemáticas desde una mirada más allá de lo anecdótico. Nos adentramos en reflexionar el desarrollo de nociones y conceptos en el contexto donde éstas aparecen; por otra parte, soportamos este trabajo desde el conocimiento de lo disciplinar y también desde la epistemología.

2. *Epistemiología genética en términos escolares.* Partimos del hecho de que una actividad significativa es fuente de conocimiento. Revisamos el conocimiento anterior, la cotidianidad, el entorno y la experiencia. Es importante hacer notar que la reflexión sobre el objeto de conocimiento debe hacerse de manera individual y colectiva. Es el maestro responsable de proponer, diseñar y orientar actividades de aprendizaje.

El trabajo de investigación llevado a cabo nos ha permitido construir una primera red didáctica acerca de la ecuación y la igualdad, la cual aparece en la siguiente figura:



En los seminarios que hemos realizado, la reflexión se centró en las palabras asociadas a la idea de igualdad que aparecen en la red. Es así como hicimos una primera aproximación a:

- La noción de relación (desde la cotidianidad)
    - Funcionamiento y uso de las cosas. Correspondencias.
    - Relaciones interpersonales.
    - Relaciones sociales.
- La palabra igualdad (uso corriente)
    - Palabras relacionadas: semejante, parecido, equivalente, idéntico, ser lo mismo, tantos como.
    - Por contraste: diferentes, tantos más, más grande que.
    - Referido a la misma cualidad o característica de objetos.

Aparece también el tránsito de la cotidianidad a la aritmética, donde se busca reflexionar acerca de:

- La cantidad como elemento de comparación de características de los objetos.
- El signo igual ($=$) como símbolo de la igualdad.
- La igualdad como identidad

$$6 = 6 \qquad 3x = 3x$$

- La igualdad como indicador de resultado de operación

$$2 + 4 = 6 \qquad 2a + 5 = 17$$

- La igualdad como equivalencia

$$4 + 2 = 5 + 1 \qquad 3x = x + x + x$$

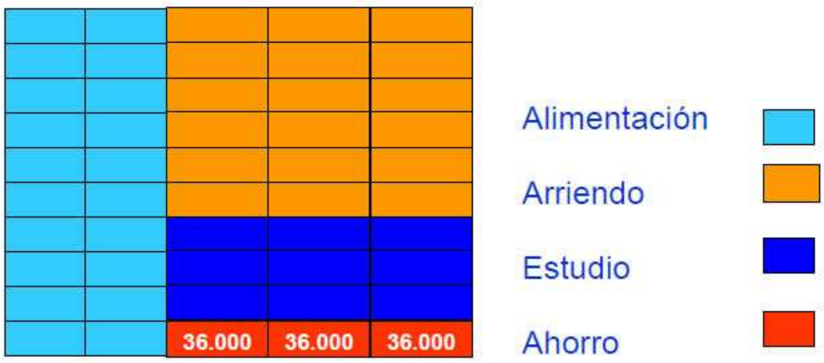
$$3x2 = 5 + 1 \qquad 3x = 4x - x$$

Finalmente, presentamos un par de resultados obtenidos en un taller que consistió en resolver el siguiente problema:

El señor Pérez distribuye su sueldo mensual así: 2/5 lo destina para alimentación; de lo que queda destina el 60 % para arriendo. Del nuevo saldo asigna 3/4 para pago de estudio y el resto lo ahorra. Si el ahorro es de \$108.000, ¿cuál es el sueldo del señor Pérez?

Las ideas de trabajo para resolver este problema pasaron por las siguientes posibilidades:

Un trabajo gráfico



Un trabajo aritmético, donde se completa la unidad:

En cuanto a la reflexión docente, es importante considerar los siguientes aspectos, que son vitales al momento de proponer una actividad significativa a nuestros estudiantes y que involucra directamente al docente:

¿Cómo resuelve el docente ejercicios asociados a la igualdad? Aquí debe reflexionarse acerca de cómo plantea la justificación y reconstrucción de procedimientos seguidos.

¿Cómo resuelven los estudiantes el ejercicio? ¿Cómo lo resolverían? Se intenta describir la manera como los estudiantes buscan la solución.

Una actividad de taller incluye el diálogo entre los estudiantes y el maestro. Necesariamente aparecen estas preguntas: ¿cómo orientar el aprendizaje de conocimientos matemáticos involucrados en la solución del problema? ¿Cómo podrían ser las posibles secuencias de aprendizaje, de tal manera que los estudiantes utilicen sus conocimientos anteriores?

En síntesis, ¿cómo orientar una reelaboración de conocimientos asociados a la igualdad e involucrados en un problema?

Estas preguntas proponen al maestro la necesidad de reflexionar al momento de proponer una actividad que en verdad resulte significativa para sus estudiantes. Exigen que el maestro avizore nuevas maneras de resolver problemas y abandone la comodidad que le ofrece un solo procedimiento para resolver un determinado problema asociado con la igualdad.

Terminamos citando a la doctora Myriam Ortiz, cuando se refiere al taller como actividad de reelaboración de conocimientos: "Forma de trabajo a establecer dentro del aula, en la que lo fundamental es el hacer significativo, individual y colectivo del estudiante y la confrontación de sus elaboraciones. Hacer orientado por el maestro con el propósito de que a partir de él, los estudiantes construyan o reelaboren conocimientos matemáticos, socialmente aceptados y exigidos".

3.11. Construcción de conocimiento matemático: el caso de la transformación lineal

Solange Roa Fuentes[22]
Asuman Oktaç[23]

Resumen
En este trabajo se muestra un análisis cognitivo sobre cómo un estudiante universitario puede construir el concepto de transformación lineal, mediante la descripción de las construcciones y mecanismos mentales que puede realizar al abordar dicho concepto. Las evidencias empíricas muestran cómo los conceptos de función y espacio vectorial son fundamentales en la construcción de la transformación lineal y las dificultades que los estudiantes enfrentan al no tenerlos como elementos preliminares. Además, se evidencia la necesidad de motivar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes abordando los conceptos del álgebra lineal desde su propia naturaleza: la abstracción.

3.11.1. Introducción

Durante los últimos 20 años, investigadores de diferentes países como Canadá, Estados Unidos, Francia y México, entre otros, han centrado sus trabajos en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. En estos países, al igual que en Colombia, los programas universitarios de ingeniería y ciencias incluyen en sus dos primeros años de estudio los requisitos básicos de matemáticas en cursos de álgebra y cálculo. Pero la experiencia de los alumnos al intentar comprender los conceptos propios del álgebra lineal ha causado sensaciones de frustración en los estudiantes y la necesidad, por parte de los profesores, de crear cursos donde los conceptos sean tratados con un mayor o menor grado de formalidad, dependiendo de las características de los programas que incluyen esta materia. Por tal razón, es fácil encontrar en una misma escuela o departamento cursos de álgebra lineal con el mismo contenido pero con un énfasis distinto en su desarrollo en el aula; basta con comparar el desarrollo de una clase para matemáticos con una para ingenieros.

Estudios realizados en Francia (Dorier, 2002) muestran que algunos estudiantes, al enfrentarse con el primer tema de álgebra lineal (teoría de los espacios vectoriales),

[22]M. en C. Solange Roa-Fuentes. roafuentes@gmail.com. Grupo Educación Matemática Edumat de la Universidad Industrial de Santander (UIS), Colombia. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav, México.
[23]Dra. Asuman Oktaç. oktac@cinvestav.mx. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav, México.

experimenten la sensación de aterrizar sobre un nuevo planeta donde no logran ubicarse. Los contenidos del álgebra lineal no tienen relación con las matemáticas que ellos conocían; éstas están más relacionadas con los conceptos de cálculo. Ante tal panorama, decidimos reflexionar sobre la importancia de incluir el curso de álgebra lineal en los programas universitarios. Consideramos que un elemento fundamental, como lo menciona Dubinsky (2001), es que su estudio es el camino hacia el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, ya que su aplicación cumple un papel fundamental dentro de la misma matemática en áreas como el cálculo multivariado, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y análisis funcional. Este comienzo hacia el desarrollo del pensamiento matemático avanzado está determinado, desde nuestra perspectiva, por la esencia abstracta del álgebra lineal. Aunque según Dubinsky (2001), los elementos del álgebra lineal pueden clasificarse en dos grupos: los abstractos (como transformaciones lineales) y los concretos (como matrices y vectores), consideramos que establecer qué es concreto para un individuo es una situación compleja, determinada por su propia experiencia y por la naturaleza de los conceptos. Por ejemplo, podríamos señalar que un vector es concreto para un estudiante si lo considera una pareja ordenada o una flecha. Pero éstas son sólo representaciones de un objeto matemático mucho más complejo y abstracto que fundamenta el estudio del álgebra lineal. Desde nuestra opinión, un vector debe construirse como un elemento de un espacio vectorial; esta idea no es concreta e incluso es imperceptible para muchos estudiantes que han aprobado un curso de álgebra lineal.

Entonces, ¿qué hace un concepto más concreto que otro? Desde nuestro punto de vista, esto está ligado con la idea que tengamos del concepto y determinado por el tipo de situaciones que hayamos experimentado. Dubinsky (1997) se refiere a este hecho realizando un análisis a la propuesta de LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group), que presenta una lista de recomendaciones para la enseñanza de un curso básico de álgebra lineal en Estados Unidos. En términos generales, LACSG propone que un curso basado en las aplicaciones y operaciones con matrices disminuiría las dificultades que tienen los estudiantes en esta área. Dicha propuesta hace énfasis en el trabajo con matrices, dando menos importancia a los conceptos abstractos y tratando las transformaciones lineales como matrices y los vectores como énuplas. Con base en nuestra experiencia, podemos decir que un énfasis desmedido en el uso de matrices y vectores desvirtúa la esencia del álgebra lineal y sólo logra ejercitar a los estudiantes en la imitación y memorización de procedimientos, algoritmos y resultados mecánicos, sin que se logre la construcción de conceptos. Este velo sobre los conceptos básicos del álgebra lineal genera un aprendizaje superficial, generando sentimientos de inconformidad y frustración en aquellos estudiantes que creen comprender determinados conceptos, pero que al enfrentarse con situaciones que requieren algo más que la aplicación de acciones específicas no encuentran las estrategias adecuadas para abordarlos.

Con este trabajo buscamos aportar, desde nuestra perspectiva, un análisis cognitivo de uno de los conceptos básicos del álgebra lineal: el concepto de transformación lineal. En particular, buscamos dar cuenta de las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación y asimilación) mentales que un estudiante universitario puede realizar sobre dicho concepto. Para esto presentaremos un análisis cognitivo denominado descomposición genética por la teoría Apoe, donde de manera específica señalamos un camino mediante el cual es posible construir dicho concepto (Roa y Oktaç, 2009). En esta presentación específicamente, nos centraremos en el análisis de las evidencias de dicho análisis con base en los datos empíricos presentados en Roa (2008).

Esperamos contribuir con esta presentación en la reflexión sobre la importancia de la construcción del conocimiento matemático, en particular sobre la importancia del álgebra lineal como motor de procesos de abstracción, fundamentales en el desarrollo de conceptos matemáticos avanzados.

3.11.2. Fundamentos teóricos

La teoría ApoeOE se fundamenta en la relación entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo. Por tanto, las explicaciones dadas por esta teoría son de orden epistemológico y psicológico (Dubinsky et ál., 2005). En este sentido, la teoría Apoe es una herramienta que se puede usar para explicar las dificultades de los estudiantes con un concepto y plantear caminos de construcción para su aprendizaje. Este análisis dado por la teoría arroja resultados concretos respecto a las estrategias pedagógicas pertinentes para motivar la construcción de un concepto en particular. El principal interés que compartimos con este marco de referencia es que permite describir la manera como se construye el conocimiento matemático, y una de las principales herramientas para este fin es la descomposición genética, ya que en ella se describen los aspectos constructivos de una porción de conocimiento matemático que a su vez, se espera, determinen aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de los conceptos matemáticos. Así, se espera comprender cómo los estudiantes construyen conceptos o adquieren habilidades para abordar y resolver problemas matemáticos (Asiala et ál., 1996).

A continuación se describe el proceso dinámico mediante el cual un estudiante construye los conceptos matemáticos desde el punto de vista de dicha teoría. Las acciones y procesos son transformaciones sobre objetos que el estudiante posee previamente; un estudiante que posee una concepción acción de un concepto depende de los estímulos externos para realizar tales acciones y es controlado por dichos estímulos.

Pero una vez que logra interiorizar estas acciones, se dice que el estudiante tiene una concepción proceso del concepto, ya que toma el control sobre dicha acción y puede pensar en ella sin necesidad de realizar cálculos explícitamente (figura 1).

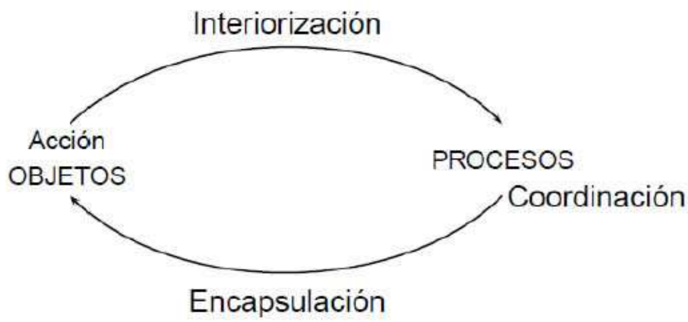


Figura 1. Construcciones y Mecanismos (Dubinsky, 1991).

Otro mecanismo importante es la encapsulación. Cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, tiene conciencia de dicho proceso como una totalidad y da cuenta de las transformaciones que puede realizar sobre él, se considera que lo ha encapsulado en un objeto. Finalmente, una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, y las relaciones entre ellos, todos relacionados con el concepto, se denomina esquema; la coherencia es una herramienta mental que le permite al estudiante determinar si una situación se puede manipular con dicho esquema. A continuación presentamos una descripción detallada de cada una de estas construcciones, tomando como ejemplo el concepto de función definido por Breidenbach et ál. (1992):

Acción. Diremos que un estudiante posee una concepción acción de un concepto determinado si su entendimiento está limitado por la realización de acciones específicas motivadas por estímulos externos. Por ejemplo, un estudiante con una concepción acción de función relaciona el concepto con la acción de remplazar ciertos valores dados en una expresión o fórmula para obtener otros valores, por ejemplo en la expresión $f(x) = x^2 + 1$. Esta concepción de función limita el entendimiento de conceptos relacionados con ella y los contextos en que este concepto se puede abordar.

Proceso. Cuando el estudiante puede pensar en un determinado concepto sin actuar de manera directa sobre él, diremos que el estudiante ha interiorizado tal concepto en un proceso. En contraste con las acciones, los procesos se perciben como algo interno, donde el individuo tiene el control y está en capacidad de describir el concepto sin actuar de manera directa sobre él. Por ejemplo, en el caso de las funciones, un estudiante con una concepción proceso de función puede determinar la composición de funciones sin estar limitado por su representación. Determinando sin dificultad, por ejemplo, la función $f \circ g$ para las funciones

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, tiene conciencia de dicho proceso en su conjunto y puede identificar las transformaciones (acciones o procesos) que puede aplicar sobre él, diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto, y por tanto el individuo posee una concepción objeto del concepto. En esta concepción, el mecanismo de desencapsular es tan importante como el de encapsular; mediante este mecanismo, un individuo puede regresar al proceso por el cual generó un determinado concepto. Por ejemplo, en una concepción objeto de función un estudiante puede determinar la derivada de una función f cualquiera, sin depender de la forma como esté dada y puede pensar en f' como función. Es importante mencionar que la naturaleza del objeto depende del proceso por el cual fue encapsulado. En muchos casos es muy difícil cambiar la concepción que un estudiante posee sobre un concepto en particular; esto puede deberse a que dicho concepto ha sido encapsulado mediante un proceso no adecuado, y por tanto es necesario cambiar este proceso y encapsularlo en un nuevo objeto.

Esta descripción de las construcciones y mecanismos involucrados en la formación de un concepto matemático se reporta finalmente en una descomposición genética de dicho concepto.

Una descomposición genética es el resultado del análisis teórico, primera componente del paradigma de investigación de Apoe, donde se describen las actividades mentales que un individuo debe realizar para construir su conocimiento. En este reporte, presentaremos una descomposición genética del concepto transformación lineal que muestra dos posibles caminos de construcción del concepto determinados por el objeto transformación.

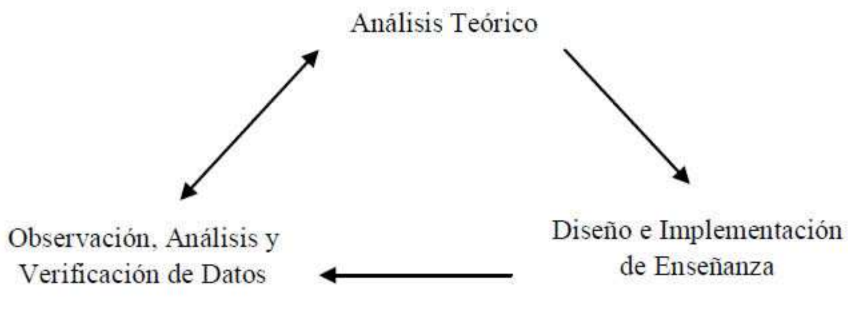


Figura 2. Paradigma de investigación (Dubinsky, 1991).

Siguiendo con las componentes de nuestro paradigma de investigación (figura 2), presentaremos el diseño de la prueba diagnóstica y la entrevista, además de algunos de los resultados obtenidos al aplicar dichos instrumentos a dos grupos de estudiantes de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), matriculados en los programas de Matemáticas y Estadística del Instituto de Matemáticas de dicha universidad. Estos datos empíricos permitirán enriquecer la descomposición genética preliminar y presentar una más cercana a la realidad, que ofrezca a los docentes un camino viable para ayudar a sus estudiantes a levantar las estructuras apropiadas para la construcción del concepto transformación lineal. Esperamos que esta presentación enriquezca nuestro trabajo y contribuya a la reflexión de los asistentes sobre la importancia de ayudar a los estudiantes a construir en forma adecuada los objetos matemáticos. De esta manera, todo estudiante que construya adecuadamente las estructuras mentales apropiadas para aprender un concepto particular estará en capacidad de construir su esquema y propiciar la continua evolución de sus estructuras mentales.

3.11.3. Descomposición genética

Teniendo en cuenta la intención de nuestro trabajo y la descripción del marco de referencia, empezaremos con la descripción de nuestra descomposición genética, resultado de la aplicación del ciclo de investigación. Consideramos conceptos previos esenciales en la construcción del concepto transformación lineal, el de función y de espacio vectorial. Los resultados que a continuación presentamos partirán de la asimilación del objeto espacio vectorial por el esquema de función.

La construcción del concepto parte de la construcción de las dos propiedades de linealidad por separado. Mediante la asimilación del espacio vectorial como objeto por el esquema de función, un estudiante puede determinar la existencia de funciones definidas entre espacios vectoriales. Cuando estas acciones se interiorizan por el uso del cuantificador, se construyen las propiedades como procesos por separado. Esto permite que los individuos reflexionen sobre el concepto más allá de la memorización. La coordinación entre los dos procesos es posible cuando se tiene conciencia de que el cumplimiento de las dos propiedades es equivalente a la preservación de combinaciones lineales. Un estudiante con esta concepción puede determinar antes de la realización de acciones sobre la función dada si ésta es o no una transformación lineal y elegir el tipo de argumento que utilizará para validar sus razonamientos. Una vez que el estudiante tenga una concepción proceso, puede encapsularlo en un objeto. Cuando necesita aplicar determinadas transformaciones (acciones o procesos), no es posible si no se han encapsulado en un objeto. En este camino consideramos que esta construcción está determinada por las transformaciones particulares que un estudiante puede considerar en un curso de álgebra lineal básico. Por ejemplo, mediante el álgebra de transformaciones lineales, donde ya sea por la suma, el producto escalar o la composición se definen nuevas transformaciones lineales como resultado de una transformación sobre dos o más transformaciones lineales dadas (para más detalle sobre este análisis, consultar Roa y Oktaç, 2009).

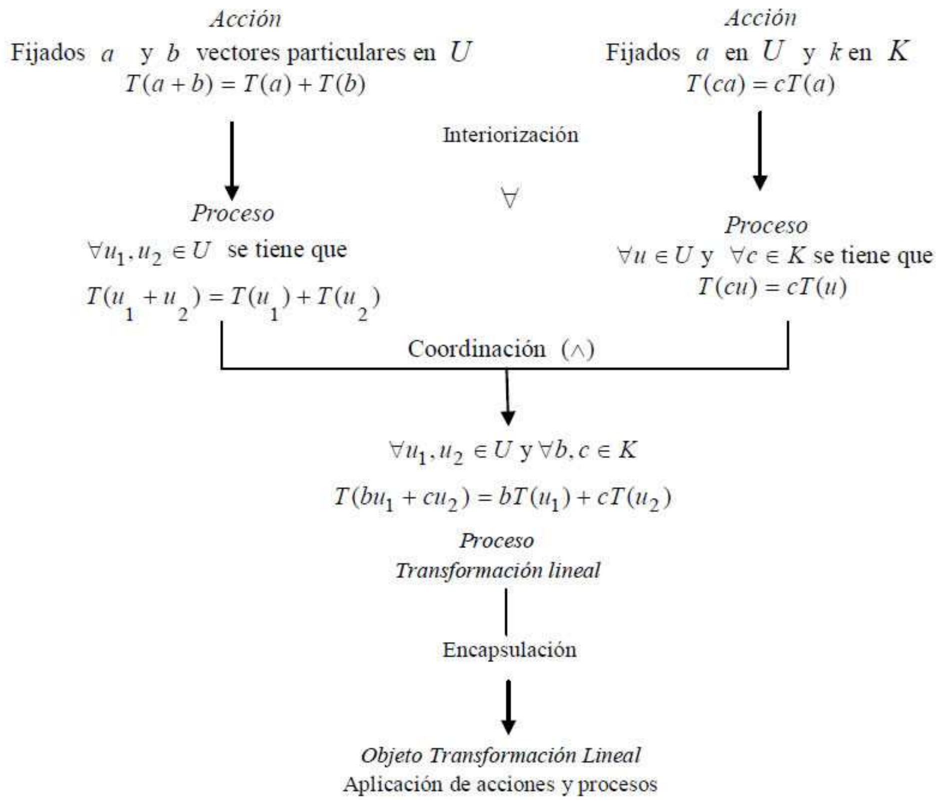


Figura 3. Descomposición genética refinada (Roa y Oktaç, 2009)

Durante el análisis de los resultados fue evidente la necesidad de construir este concepto de manera paralela con otros, como por ejemplo establecer principalmente fuertes conexiones con el concepto de base, ya que éste cumple un papel fundamental en la construcción y evolución del esquema. A continuación presentaremos las principales construcciones realizadas por los estudiantes.

3.11.4. Evidencias de los estudiantes

Una vez determinada la descomposición genética, como resultado del análisis teórico, realizamos el diseño de instrumentos para validar dicho análisis. En esta investigación decidimos diseñar un diagnóstico donde participaron 17 estudiantes (ocho de licenciatura en matemáticas, ocho de estadística y uno de ingeniería) y una entrevista donde participaron seis estudiantes, todos del programa de licenciatura en matemáticas. Estos últimos estaban tomando un curso de álgebra lineal II y los demás un curso de álgebra lineal I; en el momento de tomar los datos, este último grupo acababa de abordar el concepto de transformación lineal. Es pertinente aclarar que en la realización de esta investigación no hicimos ningún tipo de intervención en el proceso de enseñanza del concepto. Nosotros intervenimos una vez, ya que se consideraba que los estudiantes habían abordado los conceptos de interés. El diseño y la aplicación de un modelo de clase con base en nuestro análisis teórico es un trabajo del que pensamos hablar más adelante.

Dadas las características de los grupos, consideramos que el diagnóstico nos permitía encontrar aquellos estudiantes que dieran algún tipo de evidencias sobre la construcción del concepto transformación lineal, y la entrevista nos dejaba indagar en estos estudiantes acerca de aquellas construcciones tal vez más complejas sobre el concepto que no podían evidenciarse en los resultados del diagnóstico. Una característica muy importante de las entrevistas es que fueron de tipo didáctico. Es decir, las situaciones planteadas allí no son de respuestas inmediatas, pues lo que buscamos era motivar en el estudiante estados de desequilibrio que nos permitan ver cómo al abordar un problema su propia comprensión de un concepto podía hacerse evidente incluso para él mismo (Roa, 2008). La prueba diagnóstica estaba compuesta por siete problemas, y los estudiantes debían contestarla de manera individual y por escrito. La entrevista se grabó en video y se realizó de manera individual; cada entrevista duró un tiempo aproximado de dos horas. Los resultados del diagnóstico y de la entrevista se transcribieron, para hacer un análisis más detallado de ellas (para más detalle, consultar Roa, 2008).

Los resultados del diagnóstico nos demostraron la importancia de las construcciones que consideramos indispensables en la construcción del nuevo concepto. Encontramos que particularmente los conceptos de función, espacio vectorial y vector cumplen un papel fundamental; esto es consistente con el principio de aprendizaje que plantea la teoría Apoe, que hace referencia a la capacidad de todo individuo de construir conceptos matemáticos, siempre y cuando cuente con las estructuras matemáticas apropiadas. Esto fue muy evidente en los estudiantes del curso de álgebra lineal I, ya que presentaron graves problemas con los conceptos de función y vector.

Sin duda, la entrevista fue el instrumento que nos dio mayor información sobre las construcciones que los estudiantes habían realizado sobre el concepto que nos interesa. En la aplicación de este instrumento encontramos evidencias de las siguientes concepciones en los estudiantes: *Concepción acción del producto escalar, Concepción proceso de transformación lineal, Concepción objeto de transformación lineal* (Roa, 2008).

En general, el análisis de los datos obtenidos en las entrevistas nos muestra la importancia de relacionar la preservación de las propiedades de linealidad como un único proceso para encapsularlo en un objeto. Considerar siempre las propiedades de manera independiente impide que un estudiante logre ver el concepto transformación lineal como un objeto y realizar transformaciones sobre él.

Vale la pena mencionar que determinar ejemplos particulares de transformaciones lineales no es una condición suficiente para garantizar que un estudiante tiene una concepción objeto de este concepto. Este es el caso, como ya mencionamos, del estudiante 4, que puede dar ejemplos de transformaciones lineales a pesar de su concepción del concepto, centrada sólo en la preservación del producto escalar para vectores particulares de un espacio vectorial determinado. Contrario a esto, el estudiante 6 (Roa, 2008), durante el desarrollo de la pregunta 5, donde se preguntaba si existía una transformación lineal con ciertas características sobre su núcleo e imagen, pudo caracterizar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, pedida mediante un análisis mental de la información presentada en el problema, determinando que la transformación T está definida por $T(x, y) = (x-y, x-y, x-y)$. Este estudiante mostró evidencias de su capacidad para pensar en la transformación lineal y caracterizarla a partir de condiciones dadas sobre su imagen y núcleo. Además, reflexionó sobre la unicidad de su ejemplo, y empezó a considerar otras transformaciones lineales que de la misma manera cumplen con las características, llegando a una generalización sobre el conjunto de transformaciones lineales de la forma $(\alpha(x-y), \alpha(x-y), \alpha(x-y))$. Este estudiante pudo generar nuevas transformaciones a partir de una transformación determinada.

Los procedimientos de los estudiantes revelan diferentes formas de abordar los problemas, fijadas por las relaciones que logran establecer con otros conceptos. Esto, desde nuestra mirada, hace referencia a los niveles de evolución de los esquemas determinados por la coherencia que pueden establecer a la hora de abordar una situación matemática.

El estudiante 5, en el desarrollo de la pregunta 3, donde se plantea una generalización sobre transformaciones lineales (Roa, 2008), presenta un tipo de razonamiento que da muestra de su capacidad para realizar acciones sobre objetos específicos al determinar que dadas dos transformaciones lineales $T_1 : U \rightarrow V$ y $T_2 : U \rightarrow W$ es posible determinar una nueva transformación lineal $T : U \rightarrow V \times W$ de la forma $T(u) = (T_1(u), T_2(u))$ para todo u en U. Este estudiante, sin ninguna dificultad, puede establecer dos casos particulares de transformaciones lineales y mediante la aplicación de acciones (determinando cada componente como la aplicación de T_1 y T_2) sobre ellas puede establecer una nueva transformación lineal. Incluso es posible percibir que puede desencapsular el objeto y volver sobre el proceso que lo determinó, la conservación de combinaciones lineales. De esta manera muestra que la función definida es una transformación lineal. Aunque casi todos los estudiantes realizan un procedimiento similar en este problema, este alumno después de contestar la pregunta, expresa la necesidad de verificar la estructura de $W \times V$. Al parecer, no había considerado que el producto cruz entre dos espacios vectoriales es un espacio vectorial. Para esto define las operaciones para el producto cruz, y reflexionando sobre ellas determina que $W \times V$es un espacio vectorial y por tanto sus razonamientos anteriores están completos. Consideramos que este tipo de razonamientos señala el pensamiento global que un estudiante puede desarrollar al poseer una concepción objeto de transformación lineal. Puede considerar los elementos que forman parte del concepto e integrarlos a su pensamiento, sabe que una transformación lineal debe estar definida entre espacios vectoriales; esto es parte de sus estructuras mentales y por tanto es consciente de ello.

3.11.5. Conclusiones

Podemos afirmar que las estructuras de función y espacio vectorial como esquemas son indispensables para la construcción del concepto transformación lineal. Además, las dificultades de algunos estudiantes durante el diagnóstico nos indican la necesidad de realizar acciones sobre vectores particulares, que después nos permitan generalizar el cumplimiento de las propiedades para cualquier vector.

La construcción intermedia que habíamos considerado entre la acción y el proceso determinado por el uso de los cuantificadores no se presentó en nuestro análisis. Pensábamos que en algunos casos los estudiantes podrían hacer uso de vectores en su forma general, sin pensar en el cumplimiento de las propiedades para todos los elementos del espacio vectorial; con todo, el análisis de los datos no mostró evidencias de este tipo de construcciones. Los estudiantes consideran el cumplimiento de las propiedades para todos los elementos del espacio vectorial cuando escriben los vectores de manera general. Aunque no escriban específicamente los cuantificadores, sus construcciones evidencian que tienen en cuenta el cumplimiento de las propiedades para todos los vectores del dominio de las funciones presentadas en los instrumentos.

Los datos también nos muestran la importancia de considerar la construcción de las propiedades como lo mostramos en nuestro análisis (figura 3). Hacer la construcción de las propiedades como procesos independientes ayuda a los estudiantes a evidenciar la existencia de los espacios vectoriales y el campo, así como la importancia de los cuantificadores. Esta construcción y la coordinación de ellas forman un papel fundamental en la construcción del concepto de transformación lineal. La concepción proceso de este concepto como resultado de la coordinación de dos procesos es, desde nuestra perspectiva, un camino muy viable para la construcción del concepto. Mediante este camino es posible considerar su encapsulación como un objeto y motivar la evolución de su esquema. Si los estudiantes perciben la construcción de manera aislada, será imposible que éstas evolucionen, ya que su consideración de las transformaciones lineales estará limitada por la percepción de dos procesos independientes.

Un estudiante con una concepción proceso de transformación lineal puede determinar, previamente a la realización de acciones sobre una función dada, si ésta es o no una transformación lineal y elegir el tipo de argumentos que utilizará para validar sus razonamientos. Es decir, podrá demostrar, mediante la preservación de operaciones o la preservación de combinaciones lineales, si la función es una transformación lineal; en caso contrario, presentará un contraejemplo para un caso particular donde no preserve alguna de las operaciones.

Una vez que un estudiante logra tener una concepción proceso de este concepto, está en capacidad de encapsularlo en un objeto. Cuando un estudiante necesita aplicar determinadas transformaciones (acciones o procesos) sobre un concepto, no es posible si éste no se ha encapsulado en un objeto. En este camino consideramos que dicha construcción está determinada por las transformaciones particulares que un estudiante puede considerar en un curso de álgebra lineal básico. De la misma manera, creer que una transformación lineal es un elemento de un espacio vectorial nos permite pensar que el estudiante ha logrado ver el proceso en su conjunto y puede actuar de manera consciente sobre él. Como se pudo percibir durante el análisis de los datos empíricos, las construcciones descritas en esta descomposición genética no pueden verse de manera aislada. No es suficiente observar en un estudiante su capacidad para describir determinadas transformaciones lineales y determinar otras a partir de cierto procedimiento, para asegurar que tiene una concepción objeto del concepto; en este asunto cumple un rol fundamental el mecanismo de desencapsulación. Un estudiante que logra una concepción objeto del concepto debe mostrar evidencias de su capacidad para regresar sobre el proceso mediante el cual logró encapsular dicho objeto; en este caso, su concepción proceso debe estar fundamentada sobre la preservación de combinaciones lineales.

Un modelo de enseñanza que se base en nuestro análisis puede considerar la construcción de funciones que cumplen con una u otra propiedad. Esto implica un análisis más específico acerca de la naturaleza del campo sobre el cual estén definidos los espacios vectoriales. Por ejemplo, consideremos la función $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $T(z) = \overline{z}$, esta función es una transformación lineal si el espacio vectorial $\mathbb{C}$ (conjunto de los números complejos) se define sobre $\mathbb{R}$ (conjunto de los números reales). Pero si se define sobre el campo de los números complejos no lo es, ya que la suma vectorial se preserva pero no el producto escalar (basta tomar $z = 1 - i$ y $c = 1 + i$, es fácil ver que $T(cz) = 2$ y $cT(z) = 2i$). Este tipo de ejemplos promueve un tipo de pensamiento distinto, que desde nuestra opinión puede generar el desarrollo de razonamientos abstractos, donde el estudiante siente la necesidad de reflexionar sobre los contenidos más allá de desarrollar habilidades para repetirlos, por concebirlos como algo acabado.

De la misma manera, cuando se están construyendo por separado la preservación de la suma vectorial y el producto escalar, es posible determinar relaciones entre estas propiedades.

Hay que considerar si las condiciones son independientes la una de la otra, o analizar por ejemplo que para cualquier función definida entre espacios vectoriales sobre el campo de los racionales, el cumplimiento de la suma vectorial implica el producto escalar (Maher, 1987); esto genera en los estudiantes la reflexión más allá de la mecanización. En este camino consideramos que los materiales propuestos por Weller et ál. (2002), donde el trabajo con transformaciones lineales se inicia con acciones sobre vectores específicos de espacios vectoriales de dimensión finita como $\mathbb{Z}_3$, permite la reflexión sobre las características de los vectores y las operaciones definidas entre ellos.

Con este tipo de opciones buscamos que los maestros motiven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes por medio de una reflexión profunda de los conceptos. Indudablemente, el camino que describimos en nuestra descomposición genética puede ser la base que motive esta reflexión, que ofrece mucho más que la presentada en los textos. Tal vez ésta puede convertirse en una alternativa que motive el razonamiento sobre éste y otros conceptos del álgebra lineal, sin evadir su carácter abstracto, que es en definitiva una de las características por las cuales nos interesa incluir esta materia en los programas de formación profesional.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education.

Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247-285.

Dorier, J.L. (2002). Teaching linear algebra at university. *Icmi*, vol. III, 1-3, pp. 875-884.

Dubinsky, E. & McDonald, M.A. (2001). Apos: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En Derek Holton et ál. (eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An Icmi Study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra on the college level. En D. Carlson, C. Johnson, D. Porter, A. Watkins & W. Watkins (eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra*, pp. 107-126.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123. Dordrecht: Kluwer.

Maher, P. J. (1987). What makes an operator linear? *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 18 (2), 177-179.

Roa, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN. México.

Roa, S. & Oktaç, A. Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (por publicar).

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). Learning linear algebra with ISETL. Disponible en: http://homepages.ohiodominican.edu/∼cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.