



## Betonkonstruktioner

*materialer, sikkerhedsbestemmelser, beregninger i brud- og anvendelsesgrænsetilstanden*

Heshe, Gert; Jensen, Aa. P.; Jacobsen, P. Kring; Christensen, R.

*Publication date:*  
2001

*Document Version*  
Accepteret manuscript, peer-review version

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Heshe, G., Jensen, A. P., Jacobsen, P. K., & Christensen, R. (2001). *Betonkonstruktioner: materialer, sikkerhedsbestemmelser, beregninger i brud- og anvendelsesgrænsetilstanden*. (3. udgave udg.) Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Bind U0101

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Betonkonstruktioner:  
Materialer  
Sikkerhedsbestemmelser  
Beregninger i brud- og  
anvendelsesgrænsetil-  
standen  
3. udgave

*Gert Heshe, Aage Peter Jensen,  
Poul Kring Jakobsen, René Christensen*

## Forord til 2. udgave.

Det har endnu ikke været muligt at færdiggøre de manglende kapitler i nærværende lærebog. I lærebogens 2. udgave er der derfor kun foretaget en række mindre ændringer samt redaktionelle ændringer i form af fundne trykfejl m.m.

Aalborg Universitet, august 1999.

## Forord til 3. udgave.

I forhold til 2. udgave er 3. udgave udvidet med kapitel 4.4 *Centralt og excentrisk belastede søjler og vægge*. Desuden er der foretaget redaktionelle ændringer, idet trykfejl m.m. er ændret.

Aalborg Universitet, januar 2001

Nedenfor angives bogens kapitler med forfatternavne

### *Kapitel*

1. Indledning
2. Materialer
3. Sikkerhedsbestemmelser for betonkonstruktioner
4. Beregning af armerede betonkonstruktioner i brudgrænsetilstanden
  - 4.1 Bøjningsbæreevnen
  - 4.2 Forskydningsbæreevnen
  - 4.4 Centralt og excentrisk belastede søjler og vægge
  - 4.6 Forankring og stødning af armeringsstænger
  - 4.7 Bestemmelse af bjælkens og enkeltspændte pladers bøjningsbæreevne
5. Beregning af armerede betonkonstruktioner i anvendelsesgrænsetilstanden
6. Konstruktionsudformning

### *Fofatter*

Aage Peter Jensen  
Aage Peter Jensen  
Aage Peter Jensen  
  
Gert Heshe  
Gert Heshe  
Gert Heshe  
Poul Kring Jacobsen  
  
Poul Kring Jacobsen  
  
Gert Heshe  
René Christensen

**Rettelsesliste**  
**til**  
**Betonkonstruktioner**  
**Materialer, Sikkerhedsbestemmelser, Beregninger i brud og anvendelsesgrænsetilstanden**  
**3. udgave**

De nedfor angivne rettelser er angivet ved sidetal og linienummer talt fra oven eller neden.

4.1-2 6 fo betyder, at rettelsen forekommer på side 4.1-2 linie 6 talt fra oven

4.1-2 15 fn betyder, at rettelsen forekommer på side 4.1-2 linie 15 talt fra neden

**side nr.**    **linie nr.**

**Kapitel 1**

1-3    1 fo    “forrige århundrede” rettes til “1800 tallet”

1-5    3 fn    “Salomonsen” rettes til “Salmonsens”.

**Kapitel 2**

2-39    12 fn    Normalt benyttes betegnelsen “0,2 %-spændingen” i stedet for “0,2 pct.-spændingen”. Følgende tekst tilføjes : “0,2 %-spændingen er den spænding, der giver armeringen en blivende tøjning efter aflastning på 0,2 %”. Symbolet “0,2 pct.-spændingen” er benyttet flere steder i dette kapitel.

2-39    1 fn    symbolet  $f_{0,2,k}$  er ikke defineret. Det er symbolet for den karakteristiske værdi af 0,2 %-spændingen.  
 Vedr.  $f_{0,2,k}$  henvises til figur 2.2-4, men i denne figur benyttes symbolet  $f_y$  i stedet for  $f_{0,2,k}$ .

2-44    4 o    N/mm<sup>2</sup>    rettes til    Mpa    ( 3 steder)

**Afsnit 4.1**

4.1-2    6 fo    forklarende tekst til d rettes til : er tværsnittets effektive højde, som er afstanden målt fra resultanten af kræfterne i trækarmingen til tværsnittets kant med den største tryktøjning

4.1-6    15 fn    sætningen :” Tøjningen må ikke regnes større end armeringens træktøjning  $\epsilon_s$ ” fjernes, da dette ikke mere er et krav i DS 411.

4.1-7    3 fo    i figurteksten : “idealistiske” ændres til “idealiserede”

4.1-9 9 fn “.” efter % fjernes.

4.1-16 3 fn tilføjelse: “... $\varepsilon_s \geq \varepsilon_y$ , eller  $\Phi \leq \Phi_{bal}$ , se (4.1-27).”

4.1-17 1 fo tilføj efter første lighedstegn :  $\varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x} =$

#### Afsnit 4.2

4.2-2 fig.4.2-1 a) opstalt z-akse skal indtegnes i figur. Rettes i første omgang “med blyant”, men bør ændres permanent i originalfigur.

4.2-31 fig.4.2-17 målet  $s_1 = 420$  rettes til  $s_1 = 320$ .

#### Afsnit 4.4

4.4-27 4 fn “slankhedstal” ændres til “slankhedsforhold”

4.4-43 6 fn  $h \leq 120$  mm rettes til  $h < 120$  mm

#### Afsnit 4.6

4.6-2 5 fo tilføjelse: “...bestemt mængde tværarmring, se formel (4.6-5).”

4.6-11 fig.4.5-6 I figuren rettes  $\sigma$  til  $\sigma_c$

#### Afsnit 5

5-33 12 fo  $E_{c0}$  rettes til  $E_{0c}$  2 steder.

5-44 9 fo  $(1-\alpha)$  rettes til  $(\alpha-1)$

5-49 3 fn “ $0,5\phi \cdot \Delta L$ ” ændres til “ $0,5 t \Delta L$ ”

#### Afsnit 6

6-4 19 fo “er” slettes, så teksten bliver “... tværsnit, som tillige er....”

6-10 14 fo I nederste række i tabellen rettes “30+tolerancetillæg” til “10+tolerancetillæg”

6-22 2 fn teksten ændres til “...kræver, at omkredsen af armeringsnettets masker....”, dvs. “omkredsen af” tilføjes.

- 6-23 7 fn "Bøjningsarmering" i overskriften samt samme ord i linien nedenunder ændres til "Længdearmering"
- 6-24 3 fo Sætningen "Til denne udstrækning skal tillægges en forankringslængde ved anvendelse af lige stænger og netarmering" slettes. Det er ikke nødvendigt med denne ekstra længde
- 6-24 3 fn Linien ændres til : "I [3] foreslås  $\cot \theta = 1,5$  svarende til  $\theta = 34^\circ$ ."

### Symbollisten

- side 2 i linierne 1, 2, 3, 4, 6 og 7 talt fra neden rettes "0.2-spændingen" til "0,2 %-spændingen"
- side 5 5 fo linien ændres til "tværsnittets nulliniedybde"

10.01.2003

Aalborg Universitet

Gert Heshe

## Symbolliste til *Betonkonstruktioner: Materialer, Sikkerhedsbestemmelser, Beregninger i brud- og anvendelsesgrænsetilstanden*

A	betonareal hvorover et koncentreret tryk fordeles (ved koncentreret tryk på lejeflader)
$A_1$	betonareal hvorpå et koncentreret tryk angriber (ved koncentreret tryk på lejeflader)
$A_c$	: den del af betontværsnittet, der er urevnet : areal af betontværsnit ( i 4.2-15)
$A_{c,eff}$	effektivt trækareal ved revneviddebestemmelse
$A_{ct}$	det totale tværsnitsareal i trykzonen
$A_{r,tr}$	det transformerede revnede tværsnitsareal
$A_{ur,tr}$	det transformerede urevnede tværsnitsareal
$A_s$	trækarmringens tværsnitsareal
$A_{sc}$	trykarmeringens tværsnitsareal
$A_{si}$	areal af trækarmring i det i'te armeringslag
$A_{scj}$	areal af trykarmering i det j'te armeringslag
$A_{s\Sigma}$	$= \sum (A_{si} + A_{scj})$ , tværsnittets totale armeringsareal
$A_{sl}$	længdearmringens tværsnitsareal
$A_{sn}$	tværsnitsareal af armeringen i det n'te armeringslag
$A_{st}$	$= \sum A_{sn}$ , tværsnittets totale armeringsareal
$A_{sw}$	det samlede tværsnitsareal af stænger, der indgår i et bøjlelag
$A_t$	det totale tværsnitsareal, d.v.s. det areal der begrænses af tværsnittets konturer
$A_{s,min}$	minimumsarmering
a	: forskydningsspændvidden : adhæsion mellem beton og armering : tykkelse af betontryklamel (i figur 4.6-5) : fri vandret afstand mellem armeringsstænger
b	: bredde : tværsnittets bredde : fri lodret afstand mellem armeringsstænger
$b_w$	: bjælkebredde : bredde af kroppen i en T-bjælke : mindste bjælkebredde i forskydningszonen
$b_{eff}$	: effektiv bredde
c	: dæklag : kohæsion : faktor, der afhænger af mængden af tværarmering
$c_{akt}$	faktoren c ved en aktuel forankringslængde
$c_g$	afstand fra trækarmringens tyngdepunkt til bjælkebunden
$c_1$	effektivitetsfaktor til bestemmelse af den effektive betontrykstyrke ved lokalt brud ved tryk på lejeflader
DIAM	Diagonaltrykmetoden
DTU-	Afdelingen for Bærende Konstruktioner (nu BKM Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer), Danmarks Tekniske Universitet, Bygning 118, 2800 Lyngby
ABK	
D	bukkediameter

d	: tværsnittets effektive højde : armeringsstangs diameter
$d_{eq}$	ækvivalent armeringsdiameter
$d_g$	maksimal stenstørrelse
$d_{sc}$	trykarmeringens afstand til tværsnittets sideflade med den største tryktøjning
$d_t$	bøjlediameter
$E_c$	elasticitetskoefficient for beton
$E_{c,eff}$	effektiv elasticitetskoefficient for beton
$E_{ct}$	langtidselasticitetskoefficient for beton
$E_{crd}$	betonens spændingsafhængige elasticitetsmodul ved beregning af bjælkesøjlers bæreevne
$E_{0c}$	begyndelseselasticitetskoefficient for beton
$E_{0ck}$	den karakteristiske værdi for begyndelseselasticitetskoefficienten for beton
$E_{0crd}$	regningsmæssige værdi af tangenthældningen i betontrykarbejdsliniens begyndelsespunkt
$E_{0s}$	begyndelseselasticitetskoefficient for armeringen
$E_s$	elasticitetskoefficient for armeringen
$E_{ocrd}$	regningsmæssig værdi af betonens spændingsafhængige elasticitetskoefficient svarende til spændingen $\sigma_{cd} = \sigma_{crd}$
$e_1$	excentricitet, der tager hensyn til udførelsesunøjagtigheder
$e_2$	resulterende søjleudbøjning (inclusiv 2. ordens bidrag)
$F_c$	resultanten af trykspændingerne i betontværsnittet
$F_{sc}$	resultanten af trykspændingerne i konstruktionselementets længdearmring
$F_s$	resultanten af trækspændingerne i konstruktionselementets længdearmring
$F_{CW}$	trykkraft i beton
$\Delta F$	kraft overført ved forskydning mellem armering og beton
$f_c$	værdi af betonens énaksede trykstyrke svarende til spændingen ved arbejdsliniens toppunkt
$f_{cd}$	værdi af betonens regningsmæssige énaksede trykstyrke
$f_{ck}$	værdi af betonens karakteristiske énaksede trykstyrke
$f_{ct}$	værdi af betonens énaksede trækstyrke
$f_{ctd}$	værdi af betonens regningsmæssige énaksede trækstyrke
$f_{ctk}$	værdi af betonens karakteristiske énaksede trækstyrke
$f_{ct,ef}$	= 0,5 $f_{ctk}$ betonens effektive trækstyrke
$f_{ct,fl}$	værdi af betonens bøjningstrækstyrke
$f_{ct,flk}$	værdi af betonens karakteristisk bøjningstrækstyrke
$f_t$	værdi af armeringens trækstyrke svarende til spændingen ved arbejdsliniens toppunkt
$f_y$	værdi af armeringens trækflydespænding eller 0.2- spænding
$f_{yd}$	værdi af armeringens regningsmæssige trækflydespænding eller 0.2- spænding
$f_{yc}$	værdi af armeringens trykflydespænding
$f_{yk}$	værdi af armeringens karakteristiske trækflydespænding eller 0.2-spænding
$f_{yw}$	værdi af forskydningsarmeringens trækflydespænding eller 0.2-spænding
$f_{ywd}$	værdi af forskydningsarmeringens regningsmæssige flydespænding eller 0.2-spænding
$f_{ywk}$	værdi af forskydningsarmeringens karakteristiske flydespænding eller 0.2-spænding

$dH$	forskydende kraft parallel med bjælkeaksen på strækningen $dx$
$h$	: tværsnittets totale højde : vægtykkelse : afstand fra bjælkeunderside til midten af U-bøjle (i figur 4.6-7)
$h_f$	flangetykkelse i T-bjælker
$h_2$	højde af betonlamel målt vinkelret på retningen af det énaksede betontryk i lamellen
$i$	tværsnittets inertiradius
$I_c$	et søjletværsnits inertimoment om tværsnittets tyngdepunktsakse vinkelret på udbøjningsaksen
$I_z$	tværsnittets inertimoment med hensyn til z-aksen
$I_{zc}$	inertimomentet om z-aksen for den del af tværsnittet der udgøres af urevnet beton
$I_{zs}$	inertimoment om z-aksen for armeringsarealet
$I_{zt}$	inertimoment om z-aksen for det totale tværsnitsareal
$I_{zr,tr}$	inertimoment om z-aksen for det transformerede revnede tværsnit
$I_{zur,tr}$	inertimoment om z-aksen for det transformerede urevnedede tværsnit
$\Delta L$	dellængde af væg eller skive
$L$	konstruktionselementets spændvidde
$L_{eff}$	konstruktionselementets effektive spændvidde
$l$	: spændvidde : længde
$l_{akt}$	aktuel forankringslængde
$l_b$	: armeringens forankringslængde : armeringens basisforankringslængde
$l_{b,e}$	armeringens forøgede forankringslængde fx anvendt i stød- og forankringszoner
$l_{b,net}$	nødvendig forankringslængde
$l_{nød}$	nødvendig forankringslængde
$l_s$	fri søjlelængde
$l_v$	den vandrette afstand fra vederlagskant til enden af længdearmeringen (se fig. 4.6-5)
$M$	bøjningsmoment i snit i bjælke
$M_0$	fri bøjningsmoment
$M_{0sd}$	regningsmæssigt initialmoment i et snit
$M_i$	indspændingsmoment
$M_{sd}$	regningsmæssigt snitmoment, der påvirker det betragtede snit
$M_{s,f}$	momentværdier målt på den forskudte bøjningsmomentkurve
$M_y$	tværsnittets flydemoment (brudmoment)
$M_u$	tværsnittets brudmoment
$M_u'$	tværsnittets negative brudmoment (indspændingsmoment over understøtninger)
$M_{u,bal}$	tværsnittets balancerede brudmoment
$M_{u,N}$	tværsnittets brudmoment svarende til en given normalkraft $N$
$M_z$	moment om z-aksen
$m$	bøjningsmoment per længdeenhed
$N$	normalkraft, regnet positiv som træk
$N_{Rcrd}$	kritisk normalkraft for en søjle
$N_{sd}$	regningsmæssig normalkraft hidrørende fra last eller forspænding. Bemærk $N_{sd}$ regnes

	positiv som tryk
$n$	antal armeringsstænger
$n_w$	bøjleantal
$P$	: trækraft : enkeltkraft
$Q$	enkeltlast, punktlast
$Q_u$	brudværdi for enkeltlast eller punktlast
$q$	: kontinuert linie- og fladelast på henholdsvis bjælke eller plade : jævnt fordelt last
$R$	reaktion
$R_{AL}$	lodret understøtningsreaktion ved A
$R_{XL}$	lodret reaktion ved punkt X
$R_{XV}$	vandret reaktion ved punkt X
$r$	krumningsradius for konstruktionselementets systemlinie
$S_{zc}$	statisk moment om z-aksen for den del af tværsnittet, der udgøres af beton
$S_{zs}$	statisk moment om z-aksen for armeringsarealet
$S_{zt}$	statisk moment om z-aksen for det totale tværsnitsareal
$S_{zr,tr}$	statisk moment om z-aksen for det transformerede revnede tværsnit
$S_{zur,tr}$	statisk moment om z-aksen for det transformerede urevnede tværsnit
$S_{\omega z}$	Statisk moment om tyngdepunktsaksen z for deltværsnittet $\omega$
$s$	: afstand mellemforskydningsarmering målt langs bjælkeaksen : afstand mellem tværarmering
$s_{55}$	afstand mellem tværarmering i henhold til "55-reglen"
$s_r$	revneafstand
$s_{rm}$	middelrevneafstand
$s_{r,max}$	maksimal revneafstand
$T$	trækraft
$V$	forskydningskraft i snit i bjælken
$V_a$	den del af forskydningskraften der via tilslag m.m. overføres tangentielt i en revne
$V_c$	den del af forskydningskraften der overføres gennem betontværsnittets trykkede del
$V_d$	den del af forskydningskraften der overføres af længdearmeringen ved dyvelvirkning
$V_s$	den del af forskydningskraften der overføres af forskydningsarmeringen
$V_{Sd}$	den regningsmæssige forskydningskraft i et snit
$V_{Rd}$	den regningsmæssige forskydningsbæreevne i et snit
$V_{Rd1}$	den regningsmæssige forskydningsbæreevne i en konstruktionsdel uden forskydningsarmering
$V_{Rd2}$	den største regningsmæssige forskydningskraft der kan optages af en bjælke, når det er trykbrud i de "skrå betonlameller", der er dimensionsgivende
$V_{rd3}$	den største regningsmæssige forskydningskraft der kan optages af en bjælke, når det er brud i forskydningsarmeringen, der er dimensionsgivende
VTAM	Variable Truss Angle Inclination Method

$w_k$	revnevidde
$w_{km}$	middelrevnevidde
$w_{km\emptyset}$	øvre grænse for middelrevnevidden
$w_y$	flytning i y-aksens retning
$x$	: tværsnittets trykzonehøjde : længdeparameter målt langs bjælkeaksen
$y$	afstanden fra arealelementet $dA$ 's tyngdepunkt til en vilkårlig z-akse eller til tyngdepunktsaksen $z$ for det transformerede tværsnit
$y_{si}$	afstanden fra den $i$ 'te armeringsstangs centrum til en vilkårlig z-akse eller til tyngdepunktsaksen $z$ for det transformerede tværsnit
$y_{1ct,g}$	afstand fra tyngdepunktet for betontværsnitsarealet beliggende i trykzonen til $z_1$ -aksen
$y_{1t,G}$	afstanden fra det totale tværsnits tyngdepunkt til $z_1$ -aksen
$y_{1si}$	afstanden fra det $i$ 'te armeringslags tyngdepunkt til $z_1$ -aksen
$y_{1cj}$	afstanden fra det $j$ 'te trykarmeringslags tyngdepunkt til $z_1$ -aksen
$y_{sn}$	afstanden fra det $n$ 'te armeringslags tyngdepunkt til $z$ -aksen
$y_{1sn}$	afstanden fra det $n$ 'te armeringslags tyngdepunkt til $z_1$ -aksen
$z$	tværsnittets indre momentarm
$\alpha$	: $= E_s / E_c$ , forholdet mellem armeringens og betonens elasticitetskoefficienter : vinklen mellem bjælkeaksen og forskydningsarmeringen
$\beta$	: $= x / d$ , forholdet mellem trykzonehøjden og tværsnittets effektive højde : vinklen mellem 1. hovedspænding og x-aksen målt fra 1. hovedspændings retning positivt mod uret : faktor der indregner buevirkningens indflydelse på forskydningsbæreevnen
$\gamma$	: $= (1 - \beta) / \beta$ : $= E_s \epsilon_{cu} / f_y$
$\gamma_c$	partialkoefficient for beton
$\gamma_s$	partialkoefficient for armering
$\epsilon_c$	tøjningen i betonen
$\epsilon_{c1}$	tryktøjningen i betonen svarende til tøjningen ved arbejdsliniens toppunkt
$\epsilon_{c,min}$	mindste tøjning i betonen (den numerisk største tryktøjning i betonen)
$\epsilon_{crd}$	betontøjningen svarende til betonspændingen $\sigma^{crd}$
$\epsilon_{cu}$	den numeriske værdi af tøjningen ved trykbrud i betonen
$\epsilon_{ctu}$	tøjning ved trækbrud i betonen
$\epsilon_s$	tøjning i trækarmingen
$\epsilon_{sc}$	tøjning i trykarmeringen
$\epsilon_u$	trækbrudtøjning i armeringen svarende til spændingen ved arbejdsliniens toppunkt
$\epsilon_{o,2}$	tøjning i armeringen svarende til en blivende tøjning på 0,2 %
$\epsilon_{0x}$	tøjningen i bjælkeaksens retning i koordinataksesystemets origo
$\epsilon_x$	tøjningen i bjælkeaksens retning i et vilkårligt punkt i tværsnittet
$\epsilon_y$	tøjning ved begyndende trækflydning i armeringen eller tøjningen svarende til en bli-

$\varepsilon_{yc}$	vende tøjning på 0,2 % den numeriske værdi af tøjningen ved begyndende trykflydning i armeringen
$\zeta$	forankringsfaktor
$\eta_G$	afstand fra det transformerede tværsnits tyngdepunkt til $z_1$ -aksen
$\theta$	det skrå betontryks vinkel med bjælkeaksen
$\theta'$	vinklen mellem trykkraften $F_{CW}$ og bjælkeaksen
$\theta_0$	den værdi for $\theta$ , der giver samtidig fuld udnyttelse af bøjlearmeringen og det skrå betontryk
$\varkappa$	$= 1/r \sim -d^2w_y/dx^2$ , bjælkesystemliniens krumning
$\varkappa_u$	bjælkesystemliniens krumning svarende til overtrækning af armeringen
$\lambda$	søjlels slankhedsforhold
$\mu$	: friktionskoefficient : forankringsfaktor
$\mu_i$	indre friktionskoefficient
$\nu$	effektivitetsfaktor til bestemmelse af den effektive betontrykstyrke
$\varrho$	$= A_{sc} / (A_c)$ , armeringsforholdet i søjleberegninger
$\varrho_l$	$= A_{sl} / (b_w d)$ , længdearmeringsforholdet
$\varrho_b$	$= \beta (3 - \beta)/6$
$\sigma$	normalspænding
$\sigma_c$	: trykspænding i betonen : énakset betontrykspænding
$\sigma_{ci}$	betonspændingen i samme afstand fra tyngdepunktsaksen som det i'te armeringslag
$\sigma_{c,min}$	største betontrykspænding. $ \sigma_{c,min} $ er værdien af den numerisk største spænding, der optræder i tværsnittets trykzone
$\sigma_{cn}$	betonspændingen i samme afstand fra tyngdepunktsaksen som det n'te armeringslag
$\sigma_{cnd}$	$= N_{sd}/A_c$ , betonspænding hidrørende fra $N_{sd}$ virkende centralt
$\sigma_{crd}$	den regningsmæssige værdi af søjlels kritiske betontrykspænding
$\sigma_{ct}$	trækspænding i betonen
$\sigma_{cu}$	trykspænding svarende til betonens trykbrudtøjning
$\sigma_s$	spænding i trækarmingen
$\sigma_{sd}$	regningsmæssig trækspænding i armeringen
$\sigma_{sc}$	spænding i trykarmeringen
$\sigma_{scd}$	regningsmæssig trykspænding i armeringen
$\sigma_{scj}$	armeringsspændingen i det j'te trykarmeringslag
$\sigma_{si}$	armeringsspændingen i det i'te trækarmingslag
$\sigma_v$	trykspænding ved bjælkevederlag
$\sigma_x, \sigma_y$	normalspænding i henholdsvis bjælkeaksens retning og vinkelret herpå
$\sigma_1, \sigma_2$	hovedspændinger

$\tau$	$= V_s / (b_w z)$ , formel forskydningsspænding
$\tau_{cs}$	forskydningsspænding mellem beton og armeringsstang
$\tau_{csu}$	brudværdi for forskydningsspændingen mellem beton og armeringsstang
$\tau_{cu}$	forskydningsbrudstyrke langs en cylinderflade umiddelbart udenfor kontaktfladen mellem armering og beton
$\tau_{sd}$	den regningsmæssige forskydningsspænding
$\tau_{Rd}$	den regningsmæssige basisforskydningsstyrke
$\tau_u$	forskydningsstyrke
$\tau_{xy}$	forskydningsspænding i zy- og zx-planet
$\Phi$	$= A_s f_y / (b d f_c)$ , den mekaniske armeringsgrad
$\Phi_{bal}$	den mekaniske armeringsgrad svarende til det balancerede brudmoment
$\phi$	: armeringsdiameter
	: krybetal
$\phi_s$	længdearmeringens nominelle diameter
$\phi_t$	tværarmeringens diameter
$\phi_{sw}$	forskydningsarmeringens diameter
$\Psi_w$	$= (A_{sw} f_{ywd}) / (b_w s f_{cd})$ , den regningsmæssige mekaniske bøjlearmeringsgrad

## Indholdsfortegnelse

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	
1.1	Historisk baggrund	1-1
<b>2</b>	<b>Materialer</b>	
<b>2.1</b>	<b>Beton</b>	2-1
2.1.1	Betonens arbejdslinie ved énakset spændingstilstand	2-2
2.1.2	Flerakset spændingstilstand	2-10
2.1.3	Densitet	2-17
2.1.4	Sætninger og svind	2-18
2.1.5	Krybning	2-22
2.1.6	Temperaturpåvirkninger	2-28
<b>2.2</b>	<b>Armering</b>	2-33
2.2.1	Armeringens funktion	2-33
2.2.2	Armeringens egenskaber	2-36
2.2.3	Armeringens arbejdslinie	2-38
2.2.4	Armeringens temperaturafhængighed	2-41
2.2.5	Armeringens klassifikation, handelsformer og mærkning	2-43
<b>3</b>	<b>Sikkerhedsbestemmelse for betonkonstruktioner</b>	
3.1	Generelt	3-1
3.2	Grænsetilstande	3-5
3.3	Laster	3-6
3.4	Materialer	3-9
3.5	Geometriske parametre	3-10
3.6	Sikkerhedsmetoder	3-10
3.7	Partialkoefficientmetoden	3-11
3.8	Regningsmæssig last	3-12
3.9	Regningsmæssige materialeparametre	3-16
3.10	Regningsmæssige geometriske parametre	3-17
3.11	Regningsmæssig modstandsevne	3-17
3.18	Beregningsmodeller	3-18
<b>4</b>	<b>Beregning af armerede betonkonstruktioner i brudgrænsetilstanden</b>	
<b>4.1</b>	<b>Bøjningsbæreevne</b>	
4.1.1	Indledning	4.1-1
4.1.2	Bjælketværsnits bøjningsarbejdslinie	4.1-1
4.1.3	Bestemmelse af bøjningsbæreevnen $M_u$ for et armeret tværsnit påvirket til bøjning med normalkraft	4.1-6
4.1.4	Bestemmelse af bøjningsbæreevnen for tværsnit med konstant trykzonebredde	4.1-13
	Ren bøjning uden trykarmering, tværsnit med konstant trykzonebredde	4.1-13
	Normaltarmeret og balanceret tværsnit	4.1-13

	Bestemmelse af størrelsesordenen af armeringsarealet for et normaltarmere- ret betontværsnit påvirket til ren bøjning . . . . .	4.1-16
	Overarmeret brudtilstand . . . . .	4.1-18
	Armeringstrækbrud . . . . .	4.1-19
	Brudmoment for bjælker med vilkårligt tværsnit . . . . .	4.1-21
	Brudbetingelse for bøjning med normalkraft . . . . .	4.1-25
	Minimumsarmering ved ren bøjning . . . . .	4.1-29
<b>4.2</b>	<b>Forskydningsbæreevne</b>	
4.2.1	Indledning . . . . .	4.2-1
4.2.2	Normal- og forskydningsspændinger samt hovedspændinger i bøjnings- og forskydningspåvirket bjælke . . . . .	4.2-1
4.2.3	Indledende betragtninger vedr. forskydningskraftpåvirkede armerede betonbjælker . . . . .	4.2-3
	Udledning af formel for den formelle forskydningsspænding . . . . .	4.2-7
4.2.4	Bjælker uden forskydningsarmering . . . . .	4.2-8
4.2.5	Bjælker med forskydningsarmering - Diagonaltrykmetoden . . . . .	4.2-12
	Nedreværdiløsning - Diagonaltrykmetoden . . . . .	4.2-13
	Skrårevneeffekten . . . . .	4.2-17
	Forskydningsarmering udført som bøjler vinkelret på bjælkeaksen . . . . .	4.2-18
	Fremgangsmåde ved beregning af forskydningsbæreevnen for bjælker med forskydningsarmering vinkelret på bjælkeaksen . . . . .	4.2-21
	Forskydning mellem krop og flange i T-bjælker . . . . .	4.2-25
	Udledning af de i DS 411 og EC 2 angivne formler til bestemmelse af forskydningsbæreevnen for forskydningsarmerede betonkonstruktioner . . . .	4.2-32
<b>4.3</b>	<b>Vridningsbæreevne</b>	
<b>4.4</b>	<b>Centralt og excentrisk belastede søjler og vægge</b>	
4.4.1	Indledning . . . . .	4.4-1
4.4.2	Centralt belastede søjler . . . . .	4.4-2
	Uarmerede søjler . . . . .	4.4-2
	Armerede søjler . . . . .	4.4-7
	Alternativ beregning af armerede søjler . . . . .	4.4-17
	Hensyntagen til excentriciteter . . . . .	4.4-19
	Minimumslængdearmering for armerede søjler . . . . .	4.4-20
	Bøjlearmering . . . . .	4.4-20
4.4.3	Excentrisk belastede søjler . . . . .	4.4-22
	Beregningsmetode I for uarmerede og armerede søjler . . . . .	4.4-28
	Beregningsmetode Ia for søjler med tryk over hele tværsnittet . . . . .	4.4-32
	Beregningsmetode II for revnede, armerede bjælkesøjler . . . . .	4.4-34
	Beregningsmetode III for uarmerede excentrisk belastede søjler . . . . .	4.4-35
4.4.4	Bærende Betonvægge . . . . .	4.4-43
<b>4.5</b>	<b>Koncentreret last</b>	

<b>4.6</b>	<b>Forankring og stødning af armeringsstænger</b>	
4.6.1	Forankrings- og stødlængder	4.6-1
4.6.2	Forankringsstyrke	4.6-3
4.6.3	Forankringsfaktorer	4.6-5
4.6.4	Bestemmelse af forankringslængder i henhold til DS411	4.6-5
4.6.5	Bestemmelse af nødvendig forankringslængde og tværarmring	4.6-8
4.6.6	Forankring af armering ved endeunderstøtninger for bjælker	4.6-11
<b>4.7</b>	<b>Bjælkens og enkeltspændte pladers bøjningsbæreevne</b>	
4.7.1	Bøjningsbæreevne	4.7-1
4.7.2	Bestemmelse af flydemomenterne i en bjælke	4.7-2
4.7.3	Krav til flydemomenternes størrelse	4.7-4
4.7.4	Nedreværdiløsninger for bøjningsbæreevnen	4.7-5
4.7.5	Momentfordeling i statisk bestemte bjælker	4.7-6
4.7.6	Momentfordeling i statisk ubestemte bjælker bestemt ved plastisk beregning	4.7-6
4.7.7	Forudsætninger for plastisk beregning i henhold til DS411 og EC2	4.7-9
4.7.8	Beregningsmetoder i henhold til EC2	4.7-11
4.7.9	Plastisk beregning af en statisk ubestemt bjælke påvirket til ren bøjning	4.7-11
<b>4.8</b>	<b>Plader (dobbeltpændte)</b>	
<b>4.9</b>	<b>Fundamenter</b>	
<b>5</b>	<b>Beregning af armerede betonkonstruktioner i anvendelsesgrænsetilstanden</b>	
<b>5.1</b>	<b>Indledning</b>	5-1
<b>5.2</b>	<b>Spændingsbestemmelse</b>	5.2
5.2.1	Indledning	5-2
5.2.2	Spændingsbestemmelse ved anvendelse af princippet transformeret tværsnit	5-3
	Urevnet tværsnit	5-3
	Beregning af det transformerede urevnedes tværsnits tværsnitskonstanter	5-9
	Revnet tværsnit	5-14
	Beregning af det transformerede revnedes tværsnits tværsnitskonstanter	5-16
5.2.3	Spændingsbestemmelse ved anvendelse af ækvivalensbetingelser	5-24
5.2.4	Spændingsbestemmelse ved anvendelse af $\alpha_Q$ -metoden	5-27
<b>5.3</b>	<b>Bestemmelse af flytninger</b>	5-32
5.3.1	Indledning	5-32
5.3.2	Bestemmelse af den maksimale nedbøjning for en simpelt understøttet armeret betonbjælke	5-33
5.3.3	Bestemmelser vedr. nedbøjninger i EC2	5-40
<b>5.4</b>	<b>Revner i armerede betonkonstruktioner</b>	5-41
5.4.1	Indledning	5-41
5.4.2	Revnedannelse og -udvikling i en trækraftpåvirket armeret betonstang	5-42

	Bestemmelse af $A_{c,eff}$ for konstruktionselementer påvirket af normalkraft og bøjende moment	5-48
	Bestemmelse af $A_{c,eff}$ for konstruktionselementer påvirket af en træknormalkraft	5-49
5.4.3	Revneviddebestemmelse i henhold til EC2	5-50
	Styring af revnevidder uden direkte statisk beregning af revnevidder	5-50
	Bestemmelse af revnevidder ved beregning i henhold til EC2	5-51

## 6 Konstruktionsudformning

6.1	Indledning	6-1
6.2	Bjælker	6-4
6.2.1	Betontværsnit	6-4
6.2.2	Bjælkearmering	6-8
	Længdearmering i bjælker	6-9
	Armeringens placering og udformning	6-9
	Minimumsarmering ved bøjning	6-11
	Minimumsarmering ved forskydning	6-11
	Armeringens afkortning	6-13
	Armeringens forankring ved understøtninger	6-13
	Forskydningsarmering, placering og udformning	6-18
	Vridningsarmering	6-19
6.3	Plader	6-20
6.3.1	Betontværsnit	6-20
6.3.2	Pladearmering	6-22
	Længdearmering i plader	6-22
	Armeringens placering	6-22
	Minimumsarmering	6-23
	Bøjningsarmering	6-23
	Armeringsarrangement ved vederlag og pladehjørner	6-24
	Armeringsarrangement ved frie pladerande	6-26
	Forskydningsarmering i plader	6-27

# 1. Indledning

## 1. Indledning.

De i Danmark mest anvendte byggematerialer er træ, stål, murværk og armeret beton, mens letvægtsmaterialer som aluminium og plast endnu ikke anvendes i større udstrækning. Til trods for, at beton har fundet anvendelse indenfor stort set alle afskygninger af byggeriet, er dets mekaniske egenskaber langt fra ideelle. Således er betonens mest markante styrkeegenskab, trykstyrken, af samme størrelse som den trækstyrke, man finder hos flere træsorter, mens betonens trækstyrke stort set er negligibel - en størrelsesorden mindre end dens trykstyrke. Den ringe trækstyrke bevirker, at uarmeret beton ikke kan anvendes som konstruktionsmateriale i forbindelse med de fleste af de almindelige byggelementer. Heller ikke betonens stivhed er imponerende for til trods for, at betonens elasticitetsmodul er ganske højt for en korttidslast vil betonens svind og krybning ved en langtidslast bevirke, at den reelle stivhed af materialet kun er omkring en trediedel af begyndelsesstivheden.

Når beton alligevel anvendes i stor udstrækning, skyldes det hovedsageligt, at beton er prismæssig konkurrencedygtigt og at materialet er let at forme. Betonens ringe trækstyrke kompenseres man for ved at armere betonen med stålstænger, hvorved trækkræfterne kan optages på en effektiv måde. Samtidig sikrer armeringen, at de revner, som altid vil opstå i de områder, hvori der forekommer trækspændinger, ikke udvikler sig alarmerende. Behovet for armering er normalt relativt beskedent i forhold til konstruktionselementernes volumen, så derfor er armeret beton et meget konkurrencedygtigt materiale til trods for, at bukning og placering af armeringen er en arbejdskrævende operation.

Armeret beton anvendes i alle typer af byggeri, men i denne bog skal kun de grundlæggende principper og deres anvendelse på enkle konstruktionselementer udsat for aksialkræfter, forskydende kræfter og momenter gennemgås. Principperne er dog af en så generel karakter, at de vil kunne overføres til betonkonstruktioner i almindelighed.

### 1.1 Historisk baggrund.

Store, uarmerede betonkonstruktioner har været udført i mere end to tusinde år, da man siden oldtiden har kendt til at fremstille et hydraulisk bindemiddel af brændt kalk tilsat vulkansk aske. Denne viden gik imidlertid tabt, eller blot mere eller mindre glemt samtidig med, at romerriget gik i opløsning. Først med industrialiseringen i 1700- og 1800-tallet og på baggrund af de mange teknologiske fremskridt, der blev gjort i denne periode, blev det muligt at bringe udviklingen af betonkonstruktioner videre med indførelsen af *armerede betonkonstruktioner*.

Armerede betonkonstruktioner, sådan som de kendes i dag, er resultatet af omkring 150 års udvikling, der omfatter såvel teknologiske landvindinger og praktiske fremskridt som større teoretisk forståelse og et forbedret beregningsgrundlag. Perioden kan i grove træk inddeles i tre lige lange underperioder hver af 50 års varighed, og med hver deres særpræg.

Perioden fra ca. 1850 til 1900 blev indledt, da forudsætningen for en industriel produktion af

portlandcement blev skabt i 1844, hvor *I.C.Johnson* opdagede, at det var muligt at fremstille en cement med betydeligt forbedrede styrkeegenskaber ved at brænde en slam af kalk og ler så hårdt (1400-1500 °C), at den sintrede. Fremstillingsprocessen viste sig desuden velegnet for en industriel produktion, så da industrialiseringen af stålproduktionen og udviklingen af valseværkerne var påbegyndt endnu tidligere, var hele det industrielle grundlag for fremstilling af armerede betonkonstruktioner fuldt etableret ved århundredets midte.

De industrielle fremskridt medførte, at armerede betonkonstruktioner efterfølgende blev et realistisk alternativ til de altdominerende træ-, sten/murværks og stålkonstruktioner; men starten blev nu alligevel ganske beskedne. Således fremstillede franskmændene *Lambot* i 1855 armerede betonplader i forbindelse med et bådebyggeri, mens hans landsmand *J. Monier*, der var gartner, nogle år senere påbegyndte en produktion af blomsterkummer i beton med ståltrådsindlæg. Idéen, at armere beton med stålindlæg, synes at opstå flere steder på næsten samme tid, og kan meget vel være den umiddelbare fortsættelse af en forsøgsrække med armeret murværk, som *M. I. Brunel* gennemførte i perioden 1830-50, specielt da han udstillede en armeret bjælke i murværk i 1851. Lige fra starten gav idéen anledning til, at entreprenører udtog patenter på stålindlæggets udformning. Således stammer det første patent fra 1854, hvor en englænder, *Wilkinson* patenterede en armering bestående af fladjern og stålwire.

Til trods for at *Monier* ikke var den første, der armerede betonkonstruktioner, betragtes han alligevel som ophavsmand til denne konstruktionstype, da han som den første lancerede princippet i en større offentlighed. Således udstillede han på verdensudstillingen i Paris, 1867, vandbeholdere i armeret beton. I sit patent fra samme år omtaler han i øvrigt flere anvendelsesmuligheder for armeret beton, og hans navn bliver efterfølgende synonymt med konstruktionsprincippet, idet armerede betonkonstruktioner benævnes *Monierkonstruktioner*.

Det lykkes dog ikke *Monier* at få idéen til at slå igennem, da han næppe helt forstod idéens rækkevidde og ej heller var istand til at give den en rationel udførelse. Den relative hurtige udvikling af armerede betonkonstruktioner må derimod tilskrives den tyske ingeniør *Wayss* og noget senere den franske entreprenør *Hennebique*. *Wayss* overtog *Moniers* patent for Tyskland, og stiftede i 1880 firmaet "Actiengesellschaft für Monierbeton" i Berlin og Wien. Sammen med *Bauschinger* studerede han de følgende år betonkonstruktionens virkemåde, og nåede herigennem til en korrekt forståelse af armeringens placering. Sammen med *Koenen*, der som den først opstillede en brugelig beregningsmodel, udførte *Wayss* en række bygningskonstruktioner som etageadskillelser, vægge, tagkonstruktioner, broer, beholdere mv., hvorved materialets anvendelighed og dets konstruktive og økonomiske fordele blev åbenbare.

*Hennebique* har dog måske mere overordnet end *Wayss* bidraget til, at armeret beton som konstruktionsmateriale slog igennem, idet han som den første introducerede flere grundlæggende konstruktionsprincipper ved materialets anvendelse. Tidligt tog han patent på at udføre plader i armeret beton, og i 1892 patenterede han udførelsen af kontinuerede bjælker med armering i oversiden over mellemunderstøtninger. Endvidere introducerede han bøjlearmering, opbøjning af længdearmeringen ved bjælkeenderne samt en konsekvent anvendelsen af armeret beton overalt i et bygværk (fundamenter, søjler, bjælker m.v.). Han var således den første, der konsekvent indså og udnyttede mulighederne for at sammenbinde de enkelte bygningskomponenter i en monolitisk konstruktion.

Armerede betonkonstruktioner blev også udført i Danmark i slutningen af forrige århundrede. Det mest markante eksempel er den elegante Gefionsbro ved Langelinie, der er projekteret af professor A. *Ostenfeld* i 1894. Broen er en fodgængerbro med 19 m spændvidde, hvilket dengang var en ganske betydelig spændvidde. Den bærende hovedkonstruktion er en skæv, indspændt armeret betonbue med lille pilhøjde (ca. 9% af spændvidden) og lille buetykkelse ved toppen (ca. 1% af spændvidden). Broen er fortsat i god stand og har i hele sin funktionsperiode kun krævet en meget begrænset vedligeholdelse.

I USA forløb udviklingen af armeret beton i denne første periode helt parallelt med udviklingen i Europa. Således blev dette nye konstruktionsmateriale heller ikke her introduceret af en ingeniør, men derimod af en advokat, *T. Hyatt*. Så tidligt som i 1850'erne udførte Hyatt flere forsøg med armerede betonbjælker, der var helt korrekt armeret. Således omfattede armeringen stålstænger placeret i trækzonen, opbøjet over understøtningerne og forankret i trykzonen samt en vertikal bøjlearmering nær understøtningerne. Hans forsøgsresultater forblev imidlertid ukendte indtil 1877, hvor de først blev publiceret. Samme afklarede armeringsføring synes ikke at være anvendt af hans landsmand *E.L. Ransome*, der fra 1870'erne opførte flere armerede betonkonstruktioner. Han var dog den første til at anvende og patentere (1884) deformede, vredne stålstænger med henblik på at forbedre samvirkningen mellem stål og beton. Mod århundredets slutning blev anvendelsen af armeret beton i USA stadig mere udbredt med Ransome som en af foregangsmændene.

Igennem hele den indledende periode 1850-1900 blev der publiceret meget lidt om armeret betons egenskaber og anvendelse, da de ingeniører, der arbejdede indenfor området, opfattede deres viden som forretningshemmeligheder. Hele området var følgelig karakteriseret ved en diffus og uafklaret holdning til materialets anvendelse og ved et væld af byggesystemer og metoder uden ensartede konstruktionsprincipper. Først i 1899 udgav franskmændene *Considère* - som den første - en lærebog, der i nogen udstrækning forsøgte at skabe et overblik over beregningsmetoder og konstruktionsprincipper indenfor området.

I den anden og følgende 50-års periode fra 1900 til 1950 fortsatte byggeriet af armerede betonkonstruktioner indenfor stort set alle områder af byggesektoren, og overalt syntes armeret beton at finde anvendelse. I USA og Vesteuropa blev betonkonstruktioner i denne periode næsten så godt som altid støbt på stedet i en interimistisk opstillet træforskalling, mens markedet endnu ikke syntes at være modent til at anvende industrielt fremstillede, præfabrikerede betonelementer i større udstrækning. I Sovjetunionen derimod vandt de præfabrikerede elementer stor udbredelse i denne periodes sidste halvdel, da Sovjetunionen havde et enormt, politisk bestemt behov for at øge byggeproduktionen indenfor alle områder i samfundet.

Afgørende for udviklingen og anvendelsen af armerede betonkonstruktioner i det 20. århundredes første halvdel var indførelsen af forspændte betonkonstruktioner, hvor den ubelastede konstruktion påføres en egenspændingstilstand med tryk i betonen og træk i armeringen. Den grundlæggende idé var allerede patenteret af den tyske ingeniør *Doehring* i 1888, men idéen fik først gennemslagskraft med de opspændingssystemer, som tyskeren *F. Dischinger* og franskmændene *E. Freyssinet* patenterede i henholdsvis 1929 og 1936.

Parallelt med de teknologiske nyskabelser og ændringer indenfor området skete der i det 20. århundredes første halvdel en markant afklaring af konstruktionsprincipperne og beregningsmetoderne. Denne afklaring må i høj grad tilskrives det imponerende forsøgsarbejde, der fra århundredets begyndelse blev iværksat i flere lande, specielt i Tyskland og USA. Omfattende forsøgsprogrammer til fastlæggelse af bjælkers virkemåde, og til bestemmelse af betonens styrkeegenskaber og elasticitetsmodul blev gennemført af *A.N. Talbot* og *F.E. Turneure* i USA, af *Bach* i Tyskland, *Cosidère* i Frankrig og *A.A. Gwosdew* i Sovjet m.fl. Fra omkring 1915 og i de følgende 20 år fokuserede forskningen på fastlæggelsen af centralt belastede søjlers bæreevne og på krybningens indflydelse. For senere i den sidste halvdel af 50-års perioden at fokusere på ekscentrisk belastede søjlers og fundamenters bæreevne samt bjælkers ultimale bæreevne. Tolkningen af forsøgsresultaterne i relation til praksis blev foretaget ud fra den tekniske elasticitetsteori og ud fra tilladelige spændinger, men fra midten af 30'erne introduceredes i Sovjetunionen en plasticitetsteoretisk synsvinkel, og begrebet grænsetilstand blev indført. De mange nye forsøgsresultater, som er kendetegnende for perioden, og som på afgørende vis bidrog til en større forståelse af betonkonstruktionernes virkemåde og sikrere fastsættelse af deres kapacitet medførte, at mange bøger og tidsskrifter blev udgivet allerede i de første årtier af det nye århundrede. Blandt de tidligste bøger kan nævnes *Handbuch für Eisenbetonbau* udgivet af *F. v. Emperger*, 1907-09.

Af helt afgørende betydning for udviklingen af armerede betonkonstruktioner var nedsættelsen af udvalg og komiteer, der forestod reguleringen af det nye materiales anvendelse i forhold til samfundet gennem indsamling af viden og udgivelse af forskrifter og normer. De første forskrifter blev udgivet i Schweiz i 1903, hvorefter en række lande meget hurtigt fulgte efter. Således udkom preussiske normer i 1904, franske i 1907, danske i 1908, engelske i 1911 og amerikanske i 1916. Disse meget tidlige normer havde kun en kort gyldighedsperiode i starten, da ny viden hele tiden nødvendiggjorde en revision. Således også i Danmark, hvor *Normen for Jernbetonkonstruktioner*, som blev udgivet af Dansk Ingeniørforening, måtte revideres i både 1913, 1921, 1930, 1943 og 1949. Siden er *Norm for betonkonstruktioner* blevet revideret i 1973, 1984 og 1999.

I den sidste periode af den armerede betons foreløbige historie (1950 - 2000) forløber udviklingen på mange måder som en fortsættelse af det mønster, der blev etableret i den foregående periode, men en række markante nyskabelser er dog også kommet til. Således udføres armerede betonkonstruktioner stadig i et betydeligt omfang som pladssøbte i en række lande, men andre lande som f.eks. Danmark har udviklet et industrialiseret byggeri, hvor langt den overvejende del af boligbyggeriet udføres som præfabrikeret montagebyggeri. Øget industrialisering har iøvrigt kendetegnet alle aspekter af betonkonstruktionernes opførelse som fx. anvendelsen af færdigblandet beton, færdigsvejste net og bjælkearmering m.v. Karakteristisk for perioden er desuden en udbredt anvendelse af forspændte konstruktioner, enten støbt på stedet eller udført som forspændte elementer.

De første elementbyggerier i Danmark opførtes i begyndelsen af halvtredserne, og takket være en udbygning af produktionsapparatet og udvikling af montageteknikken lykkedes det at flerdoble den danske byggesektors produktion over en tyveårig periode. Især indenfor boligbyggeriet slog betonelementbyggeriet igennem, da nye byggesystemer og industrialiseret fremstillingsteknik både hævdede boligstandarden og gjorde betonelementbyggeriet

konkurrencedygtigt. Erhvervsbyggeriet fulgte dog hurtigt efter med elementsystemer til haller og kontorbyggerier.

I den sidst nævnte periode har beton som materiale tillige gennemgået en bemærkelsesværdig udvikling, hvor bl.a. betonens trykstyrke er øget. Styrkeforøgelsen skyldes dels indførelsen af plastificeringsmidler, hvorved vand/cement-forholdet kan reduceres, og dels en bedre gradering af fillerandelen gennem iblanding af microsilica og flyveaske. Tillige anvendes nu en række tilsætningsstoffer, der har til formål at forbedre egenskaberne hos den friske og/eller hærdede beton. Endelig må det nævnes, at nye, kunstigt fremstillede armeringsmaterialer som glas, plast- og kul fibre er kommet på markedet. Disse kan med tiden blive et alternativ til stål, da de i modsætning til stål er korrosionsstabile, har et stort E-modul og er stedse mere prismæssigt konkurrencedygtige.

## Litteraturfortegnelse

- Betonbogen. Cementfabrikkernes tekniske Oplysningskontor, 1979. Redigeret af A. D. Herholdt, Chr. Justesen, P. Nepper-Christensen og A. Nielsen.
- Salomonsens Konversationsleksikon, 1925. Jernbetonkonstruktioner, A. Ostenfeld.
- Gefionsbroen. A. Ostenfeld. Bygningsstatistiske Meddelelser, vol. 37, nr. 2, 1966.
- Betonelementbyggeri i Danmark.

## **2. Materialer**

### **2.1 Beton**

## 2. Materialer

### 2.1 Beton

Beton er i hærdet tilstand en slags kunststen, der har mange lighedspunkter med naturligt forekommende bjergarter. Som konstruktionsmateriale er beton karakteriseret ved en stor trykstyrke, en ringe trækstyrke, og en acceptabel stivhed.

Betonens anvendelse og udbredelse hænger nøje sammen med cementproduktionens industrialisering og med udviklingen af armeret beton. Forskellige former for beton har været kendt og anvendt i årtusinder, men efter en periode på mere end ét tusinde år, hvor kendskabet til materialet gik i glemmebogen, blev det "genopdaget" i første halvdel af det 19-århundrede. I 1844 opdagede I.C.Johnson, at når kalk-ler-slam blev brændt ved en så høj temperatur, at det sintrede, fik man en cement med en betydelig større styrke, end man hidtil havde kendt, og dermed var grundlaget for en moderne portlandcement-produktion skabt.

Beton fremstilles af tilslagsmaterialerne sand, sten og grus, der sammenkittes af et bindemiddel bestående af portlandcement og vand. Volumenforholdet mellem de enkelte bestanddele, tilslag, cement og vand - har afgørende indflydelse på det færdige produkts egenskaber, og forholdet må derfor fastlægges ud fra kendskabet til de påvirkninger, det færdige og afhærdede produkt senere vil blive udsat for. De ydre påvirkninger som vejrlig, fugtforhold, kemikalier, last og brandfare modsvarer af krav til fx. betonens tæthed, dens brandmodstand, frostbestandighed og styrke, der nøje må vurderes og fastlægges i hvert enkelt tilfælde. Kravene er i en vis udstrækning indbygget og rubriceret i eksisterende normer, men dette fritager ikke den projekterende ingeniør for i hvert enkelt tilfælde at foretage en selvstændig vurdering.

Medens det er forholdsvis enkelt at kontrollere, at den plastiske, våde beton har de ønskede egenskaber, når den transporteres frem til udstøbningsstedet, er det vanskeligere at sikre sig, at udstøbningen foregår under tilsvarende kontrollerede forhold. Denne vanskelighed afslører sig ved, at senere opståede skader på betonkonstruktioner ofte kan føres tilbage til fejl eller mangler i forbindelse med udførelsesfasen.

I den færdige konstruktion vil betonen uundgåeligt være udsat for en forvitningsproces, der kan føre til, at betonen skades på forskellig vis. Under normale forhold vil skaderne sædvanligvis kunne afhjælpes ved begrænsede efterreparationer, mens det i mere ekstreme tilfælde kan blive nødvendigt at nedrive konstruktionen før tiden. Under alle forhold er det bekosteligt at skulle reparere eller udskifte en betonkonstruktion i utide, så derfor er det af afgørende betydning, at kontrolfunktionen under såvel produktions- som byggeprocessen har en høj prioritering.

Betonproportioneringen og andre materialeteknologiske spørgsmål behandles i materialelæren, så derfor vil den side af betonkonstruktioner, ikke blive behandlet i denne fremstilling, der alene tilstræber at give en grundlæggende indføring i betonkonstruktionernes dimensionering, almene funktionskrav samt forhold, der knytter sig hertil.

Betonens ringe trækstyrke, der kun udgør 5% -10% af betonens trykstyrke, medfører, at det

normalt er nødvendigt at indlægge en armering i de områder, hvor trækspændingerne overstiger betonens trækstyrke. Normalt anvendes en armering af stålstænger, -liner eller -net, men andre materialer som glas, plast eller kulstof kan også komme på tale. I visse tilfælde kan det være hensigtsmæssigt at anvende en armering bestående af tynde fibre i stedet for eller sammen med stangarmeringen.

Afhængig af om der i betonen er indlagt en armering eller ej taler man om *armeret* eller *uarmeret beton*.

*-uarmeret beton* anvendes hovedsagelig til fundamenter, blokke og vægge med beskedne eller ingen trækspændinger, mens

*-armeret beton* anvendes i forbindelse med træk-, tryk- eller bøjningspåvirkede konstruktionselementer som bjælker, plader og søjler. Undertiden kan man med fordel *forspænde* armeringen, og man taler da om *spændbeton*.

### 2.1.1 Betonens arbejdslinie ved enakset spændingstilstand.

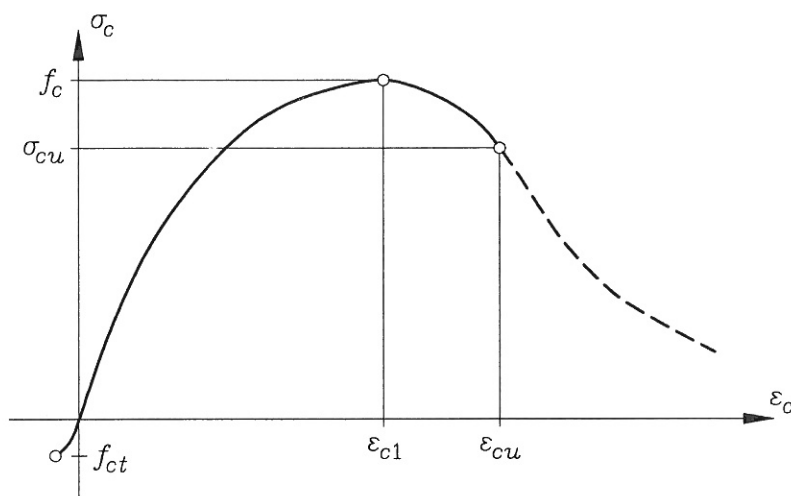
Påføres et legeme af hærdet beton en spændingstilstand, vil der i legemet fremkomme deformationer. Sammenhængen mellem spændingerne  $\sigma$  og de af deformationerne afledte tøjninger kan analytisk udtrykkes gennem en *konstitutiv ligning*, der principielt gør det muligt at beregne deformationerne svarende til en given spændingstilstand. Sammenhængen kan specielt i det tilfælde, hvor en betoncylinder belastes af en aksial kraft  $P$ , og hvor cylinderens tilhørende deformation er  $u$ , gives en meget overskuelig, grafisk fremstilling ved den såkaldte *arbejdslinie*. Navnet arbejdslinie refererer til, at arealet under kurven  $P=P(u)$  angiver det indre deformationsarbejde. Ofte anvendes dog en afbildning, der viser sammenhængen mellem den enaksede spænding  $\sigma$  og den tilhørende tøjning  $\varepsilon$ . Denne kurve  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  benævnes *materialets arbejdslinie*, og arealet under kurven angiver det indre deformationsarbejde pr. volumenenhed. Se figur 2.1-1.

Det er vigtigt at gøre sig klart, at begrebet arbejdslinie ikke er et entydigt begreb, der alene afhænger af materialeegenskaberne. Mens træk-, tryk- og forskydningsarbejdslinier kun afhænger af materialeegenskaberne, afhænger bøjnings- og vridningsarbejdslinier tillige af prøvelegemets/konstruktionselementets tværsnitsdata.

*Trykarbejdslinien* for beton er den arbejdslinie, man normalt først søger at bestemme, da beton specielt velegnet til optagelse af tryk. Prøveemnet, der anvendes til bestemmelse heraf, er ofte formet som en ret, cirkulær cylinder med en diameteren på 100/150mm, og en højde på 200/300 mm. Cylinderen belastes udelukkende over de plane endeflader, og deformationerne måles ofte mellem disse flader. Lader man belastningen vokse jævnt i tiden, vil arbejdslinien få et udseende som vist i figur 2.1-1. Det skal dog bemærkes, at arbejdsliniens form afhænger af forsøgsbetingelserne, herunder bla. af belastningshastigheden (tøjningshastigheden), hvorfor det har været nødvendigt at standardisere fremgangsmåden ved trykarbejdsliniens bestemmelse. Dette er sket i DS 423.23, mens proceduren ved cylindrenes fremstilling og lagring, der også har indflydelse på prøveresultatet, er standardiseret i DS 423.21.

Prøvningen skal normalt foretages efter 28 døgn lagring, men andre prøvningstidspunkter kan

anvendes - se fx. DS 423.26 - såfremt relationen til standardbetingelserne kan dokumenteres. Med samme forbehold tillader DS 411, at man anvender prøvelegemer med andre former og dimensioner samt andre lagringsbetingelser end de specificerede.



Figur 2.1-1 Betons træk- og trykarbejdslinie.

En arbejdslinie svarende til en given tøjningshastighed  $d\varepsilon/dt$  har visse typiske karakteristika. Det observeres således umiddelbart, at arbejdslinien end ikke i begyndelsen har et retlinet forløb men, at den er krum overalt. Årsagen hertil er sandsynligvis, at betonen selv i ubelastet tilstand indeholder mikrorevner umiddelbart omkring tilslagsmaterialet og, at disse revner vokser, så snart belastningen påføres. Revneudviklingen må sikkert tilskrives de betydelige spændingskoncentrationer, som de relativt stive tilslagspartikler giver anledning til, så snart belastningen påføres.

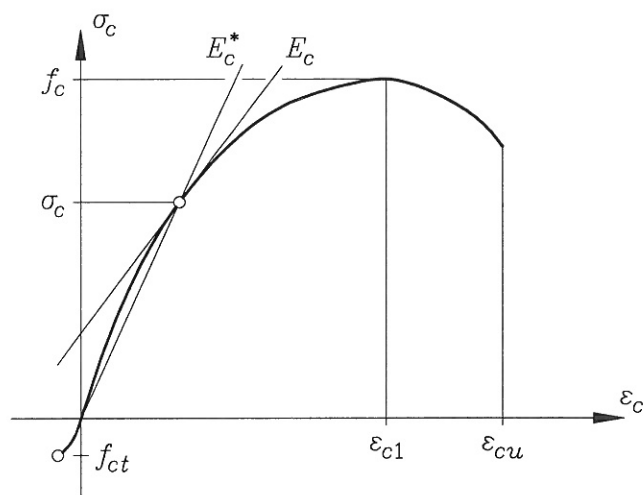
Det observeres videre, at arbejdsliniens tangenthældning har sin maksimale værdi  $E_c$  i begyndelsespunktet, hvorefter hældningen falder til værdien nul for tøjningen  $\varepsilon_{c1}$ . For denne tøjning  $\varepsilon_{c1} \approx 0.2\%$ , der udelukkende synes at afhænge af tøjningshastigheden, opnår spændingen følgelig sin maksimale værdi  $f_c$ . Den maksimale værdi af spændingen  $f_c$ , benævnes *betonens trykstyrke*. I henhold til Norm for betonkonstruktioner, DS 411 defineres trykarbejdslinien at have sin maksimale spænding  $f_c$  ved tøjningen  $0.2\%$  uafhængig af størrelsen af trykstyrken  $f_c$ .

For  $\varepsilon \geq \varepsilon_{c1}$  udviser materialet *tøjningssvækkelse*, idet arbejdslinien falder asymptotisk ned mod tøjningsaksen. Forløbet af den sidste del af arbejdslinien er dog stærkt afhængig af prøvemaskinens stivhed, hvilket viser sig ved, at længden af den faldende gren vokser med prøvemaskinens stivhed. Da den faldende gren ydermere afhænger af målelængden, hvorover tøjningen bestemmes, er det ikke overraskende, at den maksimale værdi af tøjningen  $\varepsilon_{cu}$ , der benævnes *brudtøjningen*, udviser stor spredning. Der kan derfor med nogen ret rejses tvivl om værdien af denne størrelse, da standardtests ikke stiller krav til prøvemaskinens stivhed. Ifølge den danske Norm for betonkonstruktioner, DS 411 må brudtøjningen ved bæreevnebestemmelse ikke regnes højere end  $0.35\%$ .

Aflastes betoncylinderen fra et bestemt trykniveau til nul, vil aflastningsgrenen (med god tilnærmelse) være en ret linie med næsten samme hældning som arbejdsliniens begyndelsehældning. Linien skærer tøjningsaksen for  $\varepsilon > 0$  svarende til, at cylinderen efter en total aflastning - dvs. gennem en total belastningscyklus - har fået en blivende forkortelse. Belastes betonen atter til samme spændingsniveau, der dog ikke må være for højt, øges den blivende deformation noget ved endnu en aflastning, men forøgelsen bliver mindre og mindre for hver belastningscyklus. Efter tilstrækkelige mange belastningscykler opfører betonen sig som et fuldstændigt elastisk materiale til og med det pågældende spændingsniveau. Øges spændingsniveauet efterfølgende, vokser såvel de blivende deformationer som antallet af genbelastninger indtil en elastisk tilstand etableres. Vokser spændingsniveauet ud over en vis grænse, vil en stabil tilstand dog ikke længere kunne opnås.

Begrebet *elasticitetskoefficienten*  $E$  er oprindeligt indført gennem Hooke's lov som proportionalitetsfaktoren i ligningen  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , men begrebet kan ikke direkte overføres til betonens arbejdslinie, da denne er krum, og da betonens deformationer er tidsafhængige (se nedenfor). Af praktiske grunde har man valgt at definere elasticitetskoefficienten enten som *tangenthældningen*  $E_c = d\sigma/d\varepsilon$  eller som *sekanthældningen*  $E_c^* = \sigma/\varepsilon$ . Begge værdier anvendes, men til forskellige formål, og det vil altid gælde, at  $E_c^* \geq E_c$ . I figur 2.1-2 er begge typer af elasticitetskoefficienter indtegnet.

Optegningen af arbejdsliniens første del vil ofte være behæftet med nogen usikkerhed, så derfor vil det være tilrådeligt at angive sekanthældningen fremfor tangenthældningen på denne strækning. Ofte anvendes som mål for elasticitetskoefficienten en sekanthældning svarende til 0.3 - 0.4 gange brudspændingen, dvs. en spænding, som ikke er meget forskellig fra den forekommende brugsspænding. I EC2 angives middelværdien af *sekantmodulet*  $E_{cm}$  svarende til spændingen  $0.4 f_c$ .

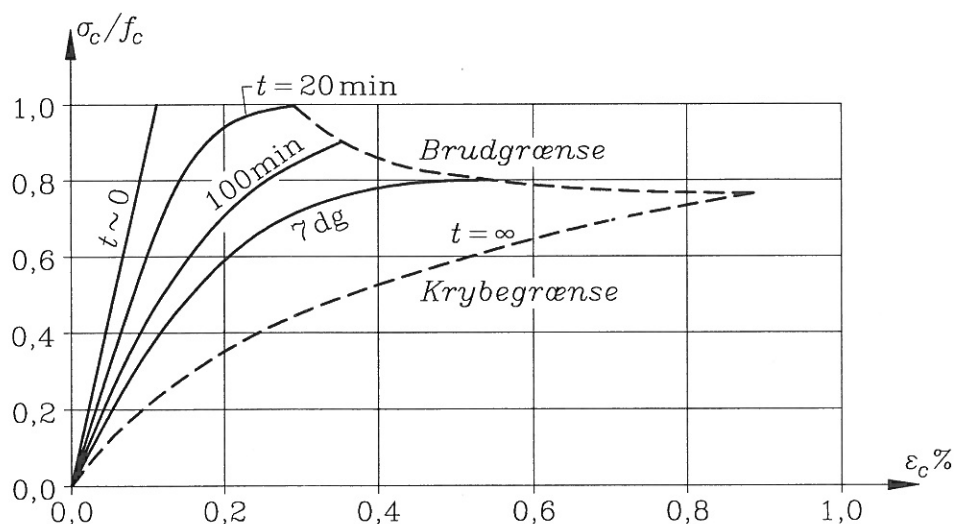


Figur 2.1-2 Tangent- og sekanthældningen,  $E_c$  og  $E_c^*$ .

Iht. DS 423.25 bestemmes en gennemsnitsarbejdslinie ud fra mindst 5 forsøg med cylindre støbt af samme beton, idet gennemsnitsspændingen for forskellige værdier af tøjningen beregnes og optegnes i et  $\sigma - \epsilon$  - diagram. Den *karakteristiske arbejdslinie* defineres ud fra gennemsnitsarbejdslinien, idet den fastlægges ud fra gennemsnitsarbejdslinien ved en affinitet i spændingsaksens retning i forholdet den karakteristiske trykstyrke til gennemsnitstrykstyrken.

Ved den *karakteristiske betontrykstyrke*  $f_{ck}$  forstås iht. DS 411 (og EC2) 5 pct.-fraktilen, dvs. den værdi under hvilken 5 pct. af måleresultaterne vil befinde sig ved uendelige mange målinger. Den karakteristiske værdi af betonens trykstyrke  $f_{ck}$  skal iht. DS 411 foreskrives som 4-8-12-16-20 MPa efterfulgt af værdier som et multiplum af 5 MPa op til den højst tilladelige styrke 60 MPa for armeret beton. For uarmeret beton er den højst tilladelige karakteristiske trykstyrke 25 MPa. Iht. EC2 foreskrives et lignende antal styrkeklasser, idet styrkeklasserne 4, 8 og 60 dog ikke medtages.

Belastningshastigheden har betydning for arbejdsliniens form, hvilket skyldes, at der selv i et ubelastet betonlegeme findes *mikrorevner*, som efterfølgende vil udvikle sig afhængig af belastningens størrelse. Man kan få et indtryk af mikrorevnernes tidsafhængige udvikling ved i en række ens betoncylindre at måle sammenhørende værdier af spændingen  $\sigma_c$  og tøjningen  $\epsilon_c$  over bestemte tidsperioder. Belastes prøvecylindrene således ved en fast, normeret belastningshastighed til bestemte spændingsniveauer, vil den tilhørende *momentane deformation* hovedsagelig være reversibel, dvs. elastisk. Fastholdes lasten derefter over tiden, vil deformationen vokse, og man får efter bestemte tidsintervaller tilhørende tøjningstilvækster, der under ét benævnes *krybningen*. Det viser sig, at under et vist kritisk spændingsniveau på ca. 80% af betonstyrken  $f_c$ , vil tøjningen vokse mod en bestemt *sluttøjning*, mens der ved spændinger over dette kritiske spændingsniveau vil forekomme krybning, indtil brud indtræffer.



Figur 2.1-3 Isokrone spændings-tøjningskurver.

Afbildes sammenhørende værdier af spændingen  $\sigma_c$  og tøjningen  $\epsilon_c$  for samme belastningstid regnet fra lastens påførsel fås de såkaldte *isokrone spændings - tøjningskurver*. Forsøgsteknisk

fremkommer disse kurver ved, at en række identiske prøvecylindre belastes med konstant belastningshastighed til hvert sit spændingsniveau, som fastholdes i tiden. Efterfølgende måles de totale deformationer i samtlige prøver på samme tid, og kurverne kan optegnes.

Et eksempel er vist i figur 2.1-3 for en beton med  $f_c = 35$  MPa efter 56 døgns lagring. Specielt benævnes den kurve, der svarer til, at  $t \rightarrow \infty$ , for *krybegrænsen*, mens den kurve, der forbinder alle brudpunkter, benævnes *brudgrænsen*. Det skal understreges, at en isokron spændings-tøjnings- kurve ikke er en arbejdslinie, da arealet under kurven ikke angiver det arbejde, som udføres under forsøget.

Ved meget hurtige belastninger som stød og ved svingninger kan krybedeformationerne ikke nå at udvikle sig, så derfor vil arbejdslinien i sådanne tilfælde ligge over den, der svarer til et normeret korttidsforsøg (0,4 - 1 N/mm<sup>2</sup> pr.sek). Betonens *dynamiske elasticitetskoefficienter* vil derfor altid være større end de tilsvarende statiske elasticitetskoefficienter.

Det ses af figur 2.1-3 at med en rimelig tilnærmelse kan de isokrone spændings-tøjningskurver antages at være retlinede op til ca. 50% af brudstyrken. For spændinger op til denne grænse kan man derfor betragte beton som et *lineært viskoelastisk materiale*, og følgelig anvende *Boltzmanns superpositionsprincip*, der er omtalt nedenfor.

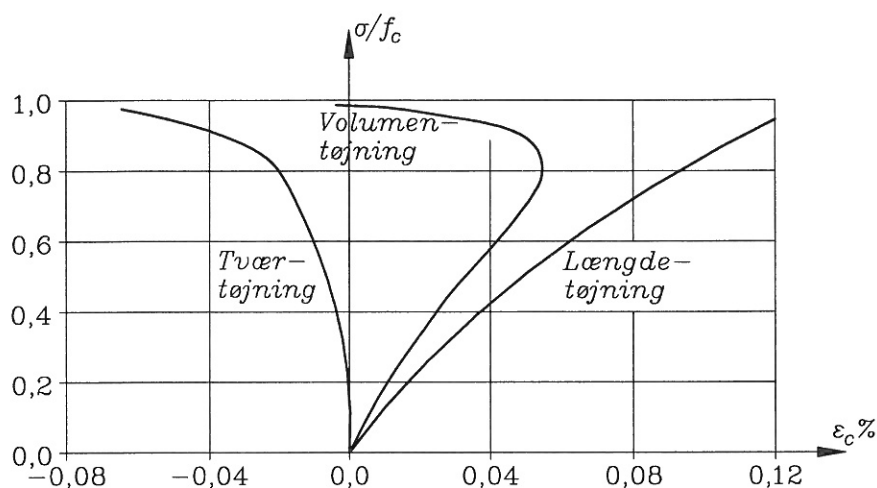
En betoncylinder, der belastes til enakset tryk, vil blive kortere i længderetningen samtidig med, at den vil få en tværudvidelse. Forholdet mellem tværtøjningerne og længdetøjningerne kaldes *Poissons forhold*  $\nu$ . Poissons forhold for beton varierer med spændingen, idet  $\nu \cong 0,1$  ved små spændinger, mens  $\nu \cong 0,25$  ved spændinger svarende til brud. I anvendelsesstadiet har man  $0,15 < \nu < 0,20$ , hvor  $\nu = 0,20$  anvendes iht. EC2. Hvis der tillades revner i trækpåvirket beton, kan  $\nu$  sættes til nul.

Ved sammentrykningen sker der en reduktion  $\Delta V$  af betoncylinderens volumen  $V$ . *Volumentøjningen*  $\Delta V/V$  kan udtrykkes ved

$$\Delta V/V = (1 - \varepsilon)(1 + \nu\varepsilon)^2 - 1 \cong -(1 - 2\nu)\varepsilon \quad (2.1-1)$$

idet der ses bort fra led af anden og tredje orden. Med  $\nu = 0,20$  findes en volumentøjning på 0,60 gange længdetøjningen, mens den er nul for  $\nu = 0,50$ .

Længde- tvær- og volumentøjningernes variation som funktion af det relative trykspændingsniveau er angivet i figur 2.1-4, idet forkortelser regnes positive. Volumentøjningen har et overraskende forløb, idet den for voksende trykspændinger er positiv op til ca. 80% af brudspændingen svarende til en volumenformindskelse. For større trykspændinger bliver volumentøjningen dog atter mindre svarende til en relativ volumenforøgelse. Dette noget usædvanlige forløb skyldes, at de mikrorevner, der eksisterer i betonen, og som i mindre omfang udvikler sig under den første del af belastningen, udvider sig betydeligt under den senere del af belastningsfasen.



Figur 2.1-4. Længde-, tvær - og volumentøjninger ved enakset trykspænding.

Ved normale projekteringsopgaver har *trækarbejdslinien* ikke interesse, da betonens trækstyrke iht. DS 411 ikke tages i regning. Principielt kan trækarbejdslinien dog bestemmes ved at underkaste et cylindrisk trækprøveemne en enakset spændingstilstand, men opgaven er forsøgsteknisk både vanskelig og usikker, da betonen er et sprødt materiale overfor træk. Foretager man imidlertid en bestemmelse af trækarbejdslinien, viser det sig, at denne er krum og har samme begyndeshældning som trykarbejdslinien. Trækarbejdslinien er iøvrigt meget kort med en trækbrudtøjning på 0,01 - 0,02% afhængig af betonens udtørningsgrad. Trækstyrken bestemt på denne måde benævnes den *aksiale trækstyrke*  $f_{ct,ax}$ .

I praksis bestemmes *trækstyrken* iht. DS 423.24 ved spaltning af en betoncylinder, der belastes langs to modstående frembringere. Ved denne belastning vil der opstå trækspændinger på tværs af (det meste af) det plan, der udspændes af de to belastede frembringere, og man observerer, at bruddet er et adskillelsesbrud. Den værdi af trækstyrken, man med reference til diametralsnittet herved fastlægger, benævnes *spaltestyrken*,  $f_{ct,sp}$ . Spaltestyrken er en formél styrke, der er større end betonens aksiale trækstyrke  $f_{ct,ax}$ , og man angiver iht. Beton-Bogen forholdet mellem styrkerne til

$$f_{ct,ax} = 0,6 \cdot f_{ct,sp} \quad (2.1-2)$$

hvor

$$f_{ct,sp} = 2/\pi \cdot \text{brudkraft/areal af diametralsnit} \quad (2.1-3)$$

Iht. EC2 kan forholdet mellem trækbrudstyrken og spaltestyrken ansættes til 0,9, og ikke 0,6 som i (2.1-2).

En trækstyrke kan også bestemmes ved bøjning af en uarmeret betonbjælke med rektangulært tværsnit. Den herved bestemte *bøjningstrækstyrke*  $f_{ct,fl}$  fastsættes som den nominelle, maksimale trækspænding iht. Naviers formel. Bøjningstrækstyrken er stærkt afhængig af prøvelegemets dimensioner, og den kan iht. DS411 kobles til betonens *trækstyrke*  $f_{ct}$  gennem udtrykket

$$f_{ct,ax} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1,6 f_{ct} \left( \frac{100}{h} \right)^{0,25} \\ 1,6 f_{ct} \end{array} \right. \quad (2.1-4)$$

hvor  $h$  er tværsnitshøjden i mm. Iht. EC2 kan man med en rimelig tilnærmelse ansætte bøjningstrækstyrken til det dobbelte af den aksiale trækstyrke, dvs.  $f_{ct,fl} \approx 2 \cdot f_{ct,ax}$ . Hvis betonens trækstyrke ikke bestemmes ved forsøg, sættes den karakteristiske trækstyrke iht. DS 411 til

$$f_{ctk} = (0,1 \cdot f_{ck})^{1/2} \quad (2.1-5)$$

Ifølge EC2 fastlægges middelværdien af trækbrudstyrken  $f_{ctm}$  ved udtrykket

$$f_{ctm} = 0,30 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (2.1-6)$$

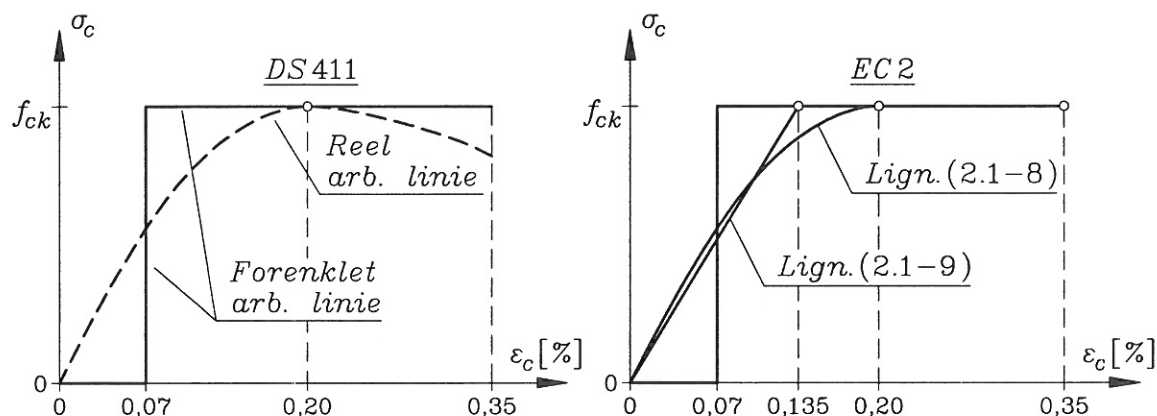
der fører til noget større værdier for trækbrudstyrken end det tilsvarende udtryk fra DS 411.

Ved *beregning i praksis* kan det være besværligt at tage udgangspunkt i betonens virkelige, karakteristiske arbejdslinie, så for at lette beregningsgangen tillader DS411, at man ved bestemmelsen af brudmomentet i et tværsnit i stedet anvender en forenklet, karakteristisk arbejdslinie. Denne arbejdslinie, der består af tre rette liniestykker, er defineret ved

$$\sigma_c = 0 \quad \text{for } 0,000 \leq \varepsilon_c < 0,0007 \quad (2.1-7)$$

$$\sigma_c = f_{ck} \quad \text{for } 0,0007 \leq \varepsilon_c \leq 0,0035$$

I figur 2.1-5 er såvel den reelle som den forenklede arbejdslinie vist. Arealet under disse to arbejdslinier har omtrent samme størrelse og samme tyngdepunkt, hvilket betyder, at man vil finde omtrent samme værdi for brudmomentet uanset hvilken af de to arbejdslinier, man benytter.



Figur 2.1-5. Karakteristiske arbejdslinier ved tværsnitsberegninger.

Anvender man istedet EC2 som beregningsgrundlag, må man ifølge denne norm skelne mellem arbejdslinier til konstruktionsberegninger og arbejdslinier til tværsnitsberegninger. Ved tværsnitsberegninger som ovenfor tillader EC2, at man benytter en af de følgende tre idealiserede, karakteristiske arbejdslinier.

Den første karakteristiske arbejdslinie har en opadgående, parabolisk gren efterfulgt af et vandret liniestykke svarende til udtrykket

$$\sigma_c = \varepsilon_c(1 - 250\varepsilon_c)f_{ck} \cdot 10^3 \quad \text{for } 0,000 \leq \varepsilon_c \leq 0,002 \quad (2.1-8)$$

$$\sigma_c = f_{ck} \quad \text{for } 0,002 \leq \varepsilon_c \leq 0,0035$$

Den anden karakteristiske arbejdslinie i EC2 er identisk med arbejdslinien (2.1-7), der som nævnt også benyttes i den danske betonnorm DS411, mens den tredje er en bilinear arbejdslinie

$$\sigma_c = 0,00135^{-1} \cdot f_{ck} \cdot \varepsilon_c \quad \text{for } 0,000 \leq \varepsilon_c \leq 0,00135 \quad (2.1.9)$$

$$\sigma_c = f_{ck} \quad \text{for } 0,00135 \leq \varepsilon_c \leq 0,0035$$

Uanset hvilken af de i figur 2.1-5 viste arbejdslinier for beton man benytter til bestemmelse af et tværsnits brud - eller flydemoment, vil man opnå meget nær samme resultat.

Det bemærkes iøvrigt, at da der regnes med plan tøjningsfordeling over tværsnittet, medfører dette, at i brudtilstanden  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$  er spændingsfordeling over den trykkede del af betonen ligedannet med betonens arbejdslinie.

Ved *praktiske konstruktionsberegninger* kan man iht. EC2 også anvende idealiserede arbejdslinier, der imidlertid er forskellige fra de arbejdslinier, der benyttes ved tværsnitsberegninger.

Anvendes ikke-lineære teorier eller plasticitetsteori til beregning af snitkraftfordelingen, benyttes arbejdslinier for korttidslast. En korttidslastarbejdslinie er skematisk vist i figur 2.1-6, hvor den er karakteriseret ved elasticitetsmodulet  $E_{c,nom}$ , trykstyrken  $f_c$  og den tilhørende tøjning  $\varepsilon_{c1}$ .

Den karakteristiske værdi for elasticitetsmodulet  $E_{c,nom}$  er iht. EC2

$$E_{c,nom} = E_{cm} \text{ [MPa]} \quad (2.1-10)$$

hvor  $E_{cm}$  er middelsekanthældningen for  $\sigma_c = 0,4 f_c$ . Trykstyrken  $f_c$  er bestemt ved udtrykket

$$f_c = f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [Mpa]} \quad (2.1-11)$$

Ligningen for arbejdslinien vist i figur 2.1-6 kan udtrykkes ved formlen

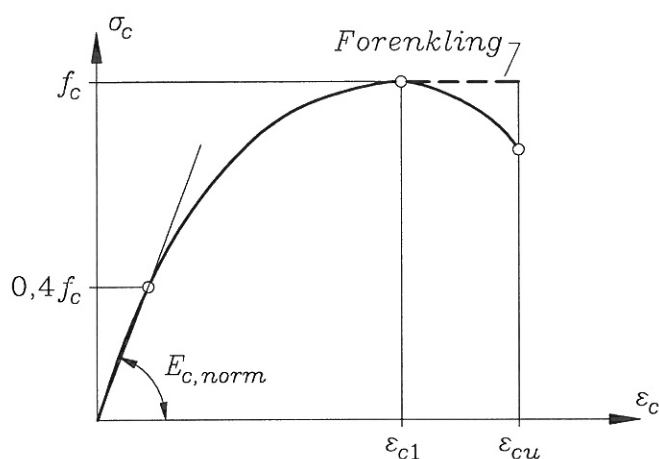
$$\sigma_c / f_c = (k\eta - \eta^2) / (1 + (k - 2)\eta) \quad (2.1-12)$$

hvor

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

$$\varepsilon_{cl} = 0,0022$$

$$k = 1,1 \cdot E_{c,nom} \cdot \varepsilon_{cl} / f_c$$



Figur 2.1-6. Skematisk korttids-arbejdslinie ved konstruktionsberegninger.

## 2.1.2 Flerakset spændingstilstand.

Arbejdslinien giver ikke i sig selv tilstrækkelige informationer om materialets brudforhold, når spændingstilstanden er flerakset, så derfor er det nødvendigt at udføre forsøg ved forskellige spændingskombinationer og på baggrund heraf, at opstille en tilstrækkelig dækkende og simpel brudhypotese.. For betons vedkommende er det specielt arbejder af Coulomb, Rankin og Mohr, der danner grundlaget for betons brudhypotese.

I 1776 fremsatte Coulomb sin *friktionshypotese*, der er baseret på den observation, at et materialebrud ofte forekommer som en glidning langs planer orienteret efter bestemte retninger. Materialets indre modstand (mod bruddets indtræden) blev tolket som en kombination af materialets *kohæsion* og en *indre friktion*, hvis størrelse afhænger af normalspændingen over brudfladen.

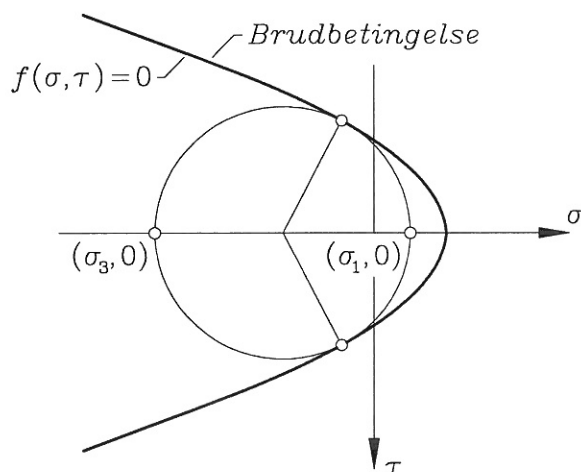
Andre observationer stred imidlertid imod den opfattelse, at bruddet sker ved glidning, så derfor foreslog Rankin omkring midten af forrige århundrede en anden brudhypotese - *hovedspændingshypotesen* - der er baseret på den opfattelse, at bruddet indtræffer, når den største hovedspænding antager en bestemt værdi, der er en materialekonstant. Brudformen er karakteriseret ved, at der sker en separation langs brudfladen, hvorved der opstår et *adskillelsesbrud*.

Endelig fremsatte Mohr i 1882 den hypotese, at bruddet indtræffer, når normalspændingen  $\sigma$  og forskydningsspændingen  $\tau$  over et snit antager sådanne værdier, at udtrykket

$$f(\sigma, \tau) = 0 \quad (2.1-13)$$

er tilgodeset. Funktionen  $f(\sigma, \tau)$  antages at være karakteristisk for hvert enkelt materiale.

Funktionen  $f(\sigma, \tau)$  afbilder i et  $\sigma\tau$ -koordinatsystem en kurve, der kaldes for *Mohr's brudbetingelse*, se figur 2.1-7. Brud indtræffer i et punkt i materialet, når spændingerne  $(\sigma, \tau)$  over et snit gennem punktet tilfredsstillers funktionsudtrykket, mens brud ikke indtræffer for spændingstilstande, der er beliggende mellem brudbetingelsen og den spændingsløse tilstand givet ved punktet  $(0,0)$ . Spændingstilstande, der afbildes udenfor brudbetingelsen, er ikke mulige, da brud allerede er indtrådt ved passage af brudbetingelsen.



Figur 2.1-7. Mohr's Brudhypotese og en Mohr's cirkel svarende til brud.

Indtegnes Mohr's cirkel for spændingstilstanden i et punkt tillige med Mohr's brudbetingelse ses det af figur 2.1-7, at bruddet indtræffer, når spændingscirklen netop berører brudbetingelsen. Det observeres tillige, at det kun er største og mindste hovedspænding, der har betydning for bruddets opståen, mens den mellemste hovedspænding ingen indflydelse har. Dette forhold, som er karakteristisk for Mohr's brudhypotese, er en tilnærmelse og forenkling, og det gælder bestemt ikke for alle materialer.

Først i midten af dette århundrede blev den idé fremført, at brudbetingelsen for beton med god tilnærmelse kunne opstilles ved en kombination af Coulomb's friktionshypotese og Rankine's hovedspændingshypotese indenfor rammerne af Mohr's brudbetingelse.

Et glidningsbrud i betonen antages derfor nu at indtræffe i overensstemmelse med Coulomb's friktionshypotese, dvs. når forskydningsspændingen  $|\tau|$  i brudsnittet netop overskrider den indre *glidningsmodstand*. Denne modstand består af en sum af cohæsionen  $c$  og den normalspændingsafhængige indre friktion  $\mu\sigma$ , som øges, når normalspændingen  $\sigma$  er en trykspænding, mens den formindskes ved en trækspænding. Betingelsen for et glidningsbrud kan

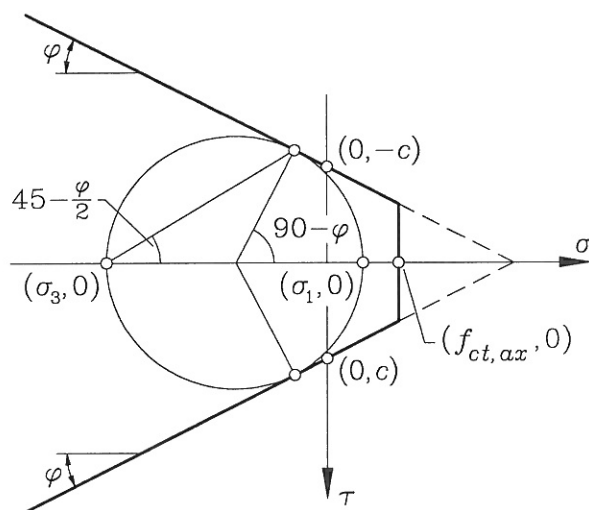
derfor udtrykkes ved ligningen

$$|\tau| = c - \mu\sigma \quad (2.1-14)$$

hvor  $c$  og  $\mu$  er positive konstanter, mens  $\sigma$  som sædvanlig regnes positiv som en trækspænding.

Et adskillelsesbrud indtræffer derimod i betonen, når trækspændingen  $\sigma$  over et snit overskrider *adskillelsesmodstanden*, der sættes lig med betonens trækstyrke, dvs. når

$$\sigma = f_{ct,ax} \quad (2.1-15)$$



Figur 2.1-8. Coulombs brudbetingelsen for beton.

Materialer, hvis brudbetingelse bedst beskrives ved en kombination som vist ovenfor, benævnes et *modificeret Coulomb materiale*, hvor de tre parametre  $\mu$ ,  $c$  og  $f_{ct,ax}$  er størrelser, der kan bestemmes ved forsøg.

Brudbetingelsen for beton er vist i figur 2.1-8., og det fremgår heraf, at brudbetingelsen for et glidningsbrud er repræsenteret ved to rette linier, der skærer hinanden på den positive  $\sigma$ -akse, mens betingelsen for et adskillelsesbrud er en ret linie parallel med  $\tau$ -aksen gennem punktet  $(f_{ct,ax}, 0)$ . Vinklen  $\phi$ , der benævnes *frikionsvinklen*, er bestemt ved

$$\tan \phi = \mu \quad (2.1-16)$$

hvor *friktionskoefficienten*  $\mu \cong 3/4$  svarende til, at  $\phi \cong 37^\circ$  for beton.

Som nævnt ovenfor indtræffer der glidningsbrud i betonen, når Mohr's spændingscirkel berører de to rette linier. Projiceres på radiusvektor gennem berøringspunktet, kan længden af radius udtrykkes ved hovedspændingerne  $\sigma_1$  og  $\sigma_3$ , idet

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = c \cos\phi - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin\phi \quad (2.1-17)$$

Indføres heri  $\mu = \tan\phi$  samt de to geometriske identiteter

$$\sin\phi = \tan\phi (1 + \tan^2\phi)^{-1/2} \quad (2.1-18)$$

$$\cos\phi = (1 + \tan^2\phi)^{-1/2} \quad (2.1-19)$$

finder man, at

$$(\mu + (1 + \mu^2)^{1/2})^2 \cdot \sigma_1 - \sigma_3 = 2c(\mu + (1 + \mu^2)^{1/2}) \quad (2.1-20)$$

Dette udtryk kan forenkles betydeligt ved at indføre betegnelsen

$$k = (\mu + (1 + \mu^2)^{1/2})^2 \quad (2.1-21)$$

og man finder sluttelig, at betingelsen for, at et *glidningsbrud indtræder*, kan udtrykkes på følgende enkle form

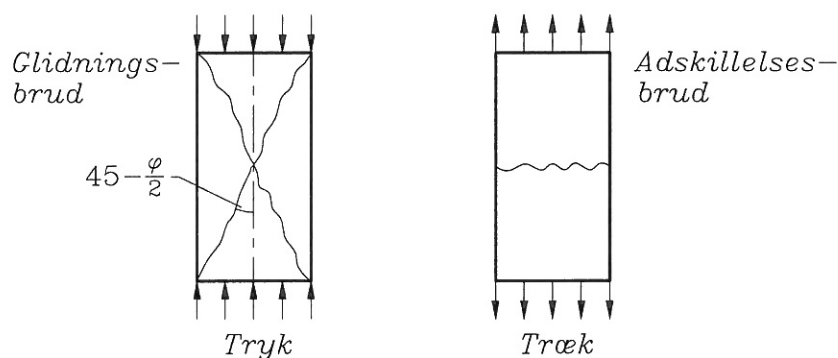
$$k\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cdot k^{1/2} \quad (2.1-22)$$

Betonens trykstyrke  $f_c$  bestemmes ud fra en spændingstilstand, hvor  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  og  $\sigma_3 = -f_c$ . Indføres denne spændingstilstand i den sidste ligning, finder man, at  $f_c = 2c \cdot k^{1/2}$ , og brudbetingelsen for et glidningsbrud kan derfor skrives på følgende praktiske form

$$k\sigma_1 - \sigma_3 = f_c \quad (\text{Glidningsbrud}) \quad (2.1-23)$$

mens *betingelsen for et adskillelsesbrud* er

$$\sigma_1 = f_{ct,ax} \quad (\text{Adskillelsesbrud}) \quad (2.1-24)$$



Figur 2.1-9. Brudsnit i betonlegemer ved enakset tryk - og trækpåvirkning.

Ved betragtning af figur 2.1-8. fremgår det, at ved enakset trykforsøg vil vinklen mellem de snit,

hvori bruddet optræder, og 1. hovedsnit være  $\frac{1}{2}(90 - \phi) = 45 - \phi/2$  og, at brudformen altid vil være et glidningsbrud. De to brudsnit er vist i figur 2.1-9. Grundet betoncylinders rotationssymmetri vil brudfladerne ved et glidningsbrud kunne afsnøre en betonkegle med topvinklen  $90 - \phi$  på den ene del af prøvelegemet. Brudformen bekræftes jævnligt i laboratoriet Ved enakset trækforsøg, hvor spændingstilstanden er givet ved  $\sigma_1 = f_{ct,ax}$  og  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , vil der være mulighed for såvel et glidningsbrud som et adskillelsesbrud. Glidningsbruddet vil indtræffe for  $\sigma_1 \leq f_{ct,ax}$  svarende til, at

$$k \sigma_1 = f_c \leq k f_{ct,ax} \quad (2.1-25)$$

eller

$$f_{ct,ax} \geq f_c / k \quad (\text{Glidningsbrud}) \quad (2.1-26)$$

medens adskillelsesbruddet indtræffer for

$$f_{ct,ax} \leq f_c / k \quad (\text{Adskillelsesbrud}) \quad (2.1-27)$$

For beton finder man af udtrykket (2.1-15), at med  $\mu = 3/4$  er  $k = 4$ . Følgelig er trækkbruddet i beton altid et adskillelsesbrud, da  $f_{ct,ax} \sim f_c / 10$ . Svarende hertil vil *brudbetingelsen for beton på hovedspændingsform* derfor antage den enkle og praktiske form

$$4\sigma_1 - \sigma_3 = f_c \quad (\text{Glidningsbrud}) \quad (2.1-28)$$

og

$$\sigma_1 = f_{ct,ax} \quad (\text{Adskillelsesbrud}) \quad (2.1-29)$$

Benævnes hovedspændingerne for  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  og  $\sigma_{III}$  uden at angive et relativt størrelsesforhold, ses det, at adskillelsesbruddet i rummet afbildes som tre planer, idet  $\sigma_1$  kan antage værdier svarende til en af de tre hovedspændinger. Man har fks.

$$\sigma_I = f_{ct,ax} \quad (2.1-30)$$

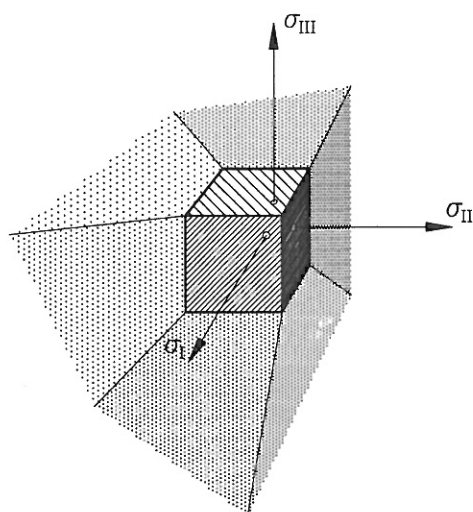
der afbilder et plan med  $\sigma_I$ -aksen som normal.

Adskillelsesbruddet afbildes tilsvarende som seks planer, idet spændingerne  $\sigma_1$  og  $\sigma_3$  uafhængigt af hinanden kan antage en af de tre hovedspændingsværdier. Fx. har man

$$4\sigma_I - \sigma_{II} = f_c \quad (2.1-31)$$

der er ligningen for et plan med normalen  $(4, -1, 0)$  i et  $\sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}$ -koordinatsystem.

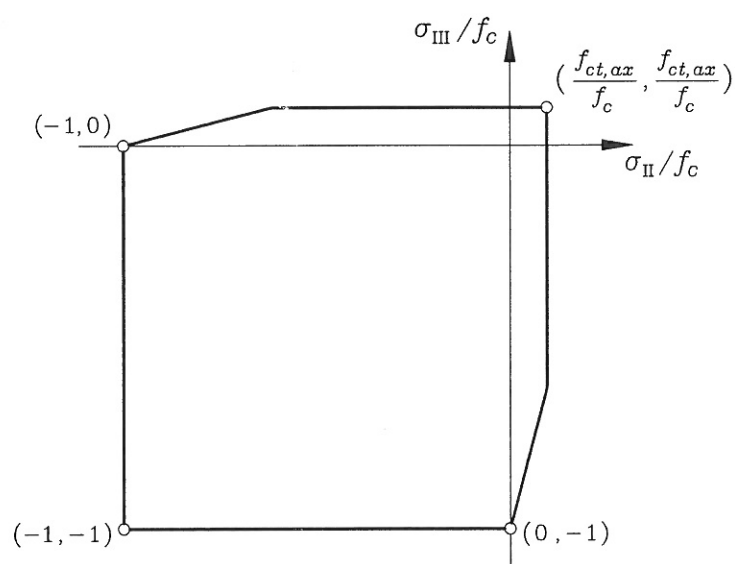
Det indses heraf, at brudbetingelsen i rummet er en sekskantet, kegleformet flade, der omkring toppunktet begrænses af tre på hinanden ortogonale planer. Fladen ses endvidere at være åben bort fra toppunktet. Se figur 2.1-10.



Figur 2.1-10. Culombs brudbetingelse for beton ved rumlig spændingstilstand.

Skæres brudbetingelsen med en af koordinatplanerne, fks.  $\sigma_I = 0$ , får man *brudbetingelsen ved plan spændingstilstand*. Adskillesbruddet vil da afbildes som to akse-parallelle linier gennem punktet  $(f_{ct,ac}, f_{ct,ac})$  mens glidningsbruddet repræsenteres ved to akseparallelle linier gennem punktet  $(-f_c, -f_c)$  samt to skrå linier. Se figur 2.1-11, hvor akserne er gjort dimensionsløse ved division med trykstyrken  $f_c$ .

Opstilling af brudbetingelsen for beton er grundlæggende et spørgsmål om at tolke det til enhver tid eksisterende forsøgsmateriale på en sådan måde, at de væsentlige observationer bliver forståelige i sammenhæng og således, at der er en rimelig overensstemmelse mellem model og forsøgsresultater. For betons vedkommende har det været en langvarig proces, der endnu ikke er afsluttet, da forsøgsresultaterne ikke altid støtter hinanden, og da ønsket om en mere raffineret model til stadighed fremsættes.



Figur 2.1-11. Betons brudbetingelse ved plan spændingstilstand.

Forsøgsteknisk er det ikke muligt, at etablere en vilkårlig, homogen spændingstilstand i et betonprøvelegeme, så man er i praksis henvist til at udføre forsøg med én af følgende to typer prøveemne. De to typer er karakteriseret ved, at i

- *type 1* udsættes en betoncylinder for et hydrostatisk tryk, der overlejres med et aksialt tryk.

- *type 2* udsættes et betonrør for vridning, der overlejres med en aksial træk- eller trykkraft.

Ud fra de opnåede forsøgsresultater kan materialeparametrene  $f_{ct,ax}$ ,  $c$  og  $\mu$  estimeres. Dette gøres bedst ved først at omskrive brudbetingelsen fra hovedspændingsformen (2.1-28) og (2.1-29) til en middelspændingsform, hvor middelspændingerne indføres ved flg. udtryk

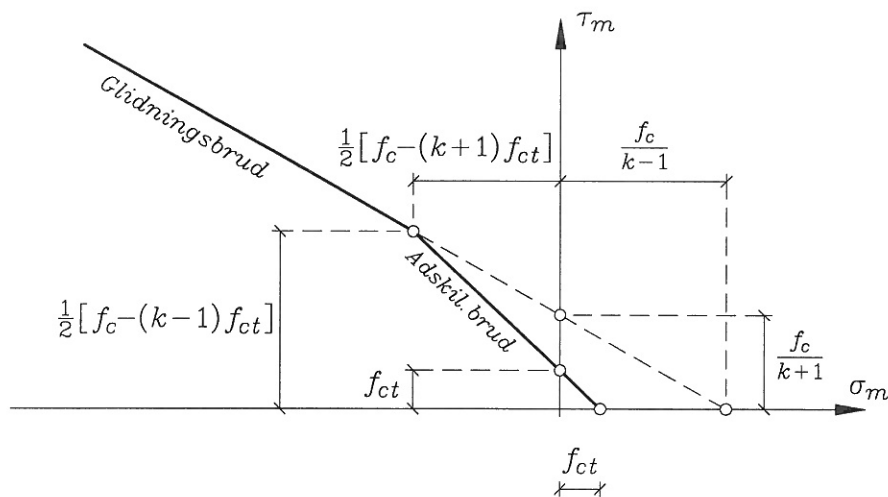
$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.1-32)$$

$$\tau_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2.1-33)$$

Løses ovenstående ligninger mht.  $\sigma_1$  og  $\sigma_3$ , og indsættes efterfølgende i brudbetingelsen på hovedspændingsformen, kan denne udtrykkes ved

$$(k - 1) \sigma_m + (k + 1) \tau_m = f_c \quad \text{glidningsbrud} \quad (2.1-34)$$

$$\sigma_m + \tau_m = f_{ct,ax} \quad \text{adskillelsesbrud} \quad (2.1-35)$$



Figur 2.1.12. Betons brudbetingelse på middelspændingsform

Geometrisk afbildes denne brudbetingelse i de to rette linier vist i figur 2.1-12. Det ses, at trækstyrken  $f_{ct,ax}$  aflæses som det stykke brudbetingelsen afskærer på akserne, medens værdien af  $k$  estimeres ud fra hældningen  $\alpha$  af den rette linie svarende til glidningsbrud. Ved betragtning af figur 2.1-12 indses det, at hældningen kan udtrykkes som forholdet  $\alpha = (k-1)/(k+1)$ , hvoraf man finder

$$k = (1 - \alpha) \cdot (1 + \alpha)^{-1} \quad (2.1-36)$$

Efterfølgende findes  $\mu$  ved løsning af ligning (2.1-21), medens  $c$  findes af (2.1-22) og (2.1-23).

Man finder

$$\mu = \frac{1}{2} (k^{1/2} - k^{-1/2}) \quad (2.1-37)$$

og

$$c = \frac{1}{2} f_c \cdot k^{-1/2} \quad (2.1-38)$$

Analyse af et stort antal forsøg udført i perioden 1931-58 fører til, at  $k = 4$  og  $f_{ct} = 0,08f_c$  svarende til, at  $\mu = \frac{3}{4}$  og  $c = \frac{1}{4} f_c$ .

### 2.1.3 Densitet

Den hærdede betons tørdensitet  $\rho$  kan variere inden for meget vide grænser, idet  $600 < \rho < 6000 \text{ kg/m}^3$ . Afhængig af densitetens størrelse, taler man om en letbeton eller en tung beton, hvor afgrænsningen iht. Beton-Bogen er givet ved intervallerne

- *letbeton*            hvor  $600 < \rho < 2000 \text{ kg/m}^3$
- *tung beton*        hvor  $2500 < \rho < 6000 \text{ kg/m}^3$ .

Følgelig må *normal beton* have en tørdensitet, der er beliggende i det mellemliggende interval. Den nedre grænse, dvs.  $\rho > 2000 \text{ kg/m}^3$  er identisk med afgrænsningen af det gyldighedsområde, der er gældende for Norm for betonkonstruktioner, DS 411.

Letbeton anvendes gerne i byggerier, hvor en mindre egenvægt eller hvor de varmeisolerende egenskaber har betydning. Tung beton anvendes derimod fx .ved støbning af kontravægte og ved opførelse af afskærmning af røntgenrum eller atomreaktorer, hvor den store densitet er afgørende.

Densiteten bestemmes af tilslagets densitet, blandingsforholdet, komprimeringsgraden og hydratiseringsgraden, og den kan derfor i vid udstrækning planlægges og styres. Tilslaget har den mest markante indflydelse på densiteten, da det er den enkeltkomponent, som både udgør den største andel af betonen, og som har de største variationsmuligheder. Således vil et tilslag af porøse sten som ekspanderede lerklinker eller sintret flyveaske medføre, at densiteten falder til omkring  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Omvendt vil et tilslag af tunge bjergarter, fx. magnetit, eller stål resultere i en tung beton.

For beton med normal densitet kan man antage, at  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$  for uarmeret beton, mens man kan sætte  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  for armeret eller forspændt beton med normal armeringsgrad.

### 2.1.4 Sætninger og svind

I den friske beton vil der under tyngdekraftens indflydelse forekomme *sætninger*, idet cement, sand og tilslag som de tungeste bestanddele søger nedad. Samtidig hermed presses vandet i betonen opad evt. med vandudskillelse på betonoverfladen til følge. Denne vandudskillelse, der benævnes *bleeding*, kan medføre, at et tyndt slamlag dannes på betonens overflade. Slamlaget vil let krakelere og bør derfor fjernes, hvis overfladen ligger i støbeskel eller mod slidlag.

Sætninger er ikke i sig selv et problem, da de blot er udtryk for, at der sker en yderligere komprimering af betonen, men sætninger bliver problematiske, såfremt de er ujævnt fordelte, og der bliver tale om *differenssætninger*. Sådanne differenssætninger kan fx forekomme, hvor lagtykkelsen af den udstøbte beton pludselig springer fra en tykkelse til en anden samtidig med, at betonens overfladeniveau holdes konstant. Eksempelvis vil der ved støbning af T-bjælker kunne opstå *sætningrevner* mellem krop og plade, såfremt dette ikke modarbejdes ved at lade betonen i bjælkekroppen sætte sig en times tid, inden betonen i dækpladen udstøbes. Helt den samme problemstilling har man fx ved udstøbning af dørhuller i en væg, hvor betonhøjden er betydelig større ved siden af døren end over den, og der derfor er en risiko for revnedannelser ved dørhullets øverste hjørner. Sætningsrener vil også kunne opstå hvor en fikseret armering eller en u hensigtsmæssig gradering af tilslaget forhindrer de øverste dele af betonen i at bevæge sig nedad i støbeformen. I sådanne tilfælde kan der opstå sætningsrevner omkring armeringstængerne, men revnerne kan modarbejdes ved at være opmærksom på udstøbningens lagtykkelse og på armeringens placering og herudfra tilrettelægge et hensigtsmæssigt *støbeprogram*. Risikoen for sætningsrevner kan endvidere reduceres ved at anvende et velgraderet grusmateriale, tilstrækkelige mængder af filler og cement og mindst muligt støbevand.

I perioden fra en beton er udstøbt, og indtil den er afhærdet og kommet i fugtligevægt med omgivelserne, vil der i betonen forekomme volumenændringer, idet betonen afgiver vand til omgivelserne. Dette *fugtafhængige svind* opdeles - afhængig af årsagen - i

- et *plastisk svind* og
- et *udtørringssvind*

*Plastiske svind* er en rumfangsformindskelse, der kan forekomme i nystøbt beton, mens betonen endnu er plastisk, dvs. inden cementen er bundet af. Svindet opstår ved kraftig fordampning idet, der opstår undertryk i vandet under de menisker, som dannes i cementgelens porer under udtørringen. Hvis svindtøjningerne bliver så kraftige, at de overstiger den tidsafhængige brudtøjning, vil der opstå revner. Brudtøjningen i den plastiske beton falder til et minimum på ca. 0,005% efter en modenhedsalder på 7 - 10 timer for derefter at vokse asymptotisk til ca. det dobbelte.

Den revnedannelsen, der har baggrund i det plastiske svind, vil i armerede konstruktioner ofte følge armeringen, da denne på grund af sin stivhed vil fungerer som revneanvisere. I uarmerede konstruktionselementer vil revnerne i overfladen derimod danne et tilfældigt netrevnemønster med sekskantede masker. Dette mønster kan forklares ved, at spændingstilstanden i overfladen med god tilnærmelse er en plan, hydrostatisk spændingstilstand. Endelig kan der opstå diagonale revner under ca. 45° med kanterne, og med en afstand på 0,5 - 2 m.

Det plastiske svind er i nogen grad afhængigt af betonens sammensætning, idet et øget vandindhold, et større indhold af cement, flyveaske, mikrosilica og retarder vil resultere i et øget plastiske svind, mens luftindholdet ikke synes at øge risikoen. Det er dog især faktorer som

- lufttemperatur
- luftfugtighed
- vindhastighed
- betonmassens temperatur
- forskallingsarten

der styrer udtørningsintensiteten, og dermed det plastiske svind.

Risikoen for plastisk svind kan vurderes ud fra flg. empiriske formel

$$w = 80 \cdot 10^{-6} (p_0 - p_a) (1 + 0,85v) \quad (2.1-39)$$

hvor

- w er fordampningshastigheden, målt i kg vand pr. m<sup>2</sup> pr. time.
- p<sub>0</sub> er mættede vanddampes tryk ved den temperatur, der måles umiddelbart over betonoverfladen, målt i Pascal (Pa)
- p<sub>a</sub> er den omgivende lufts vanddamptryk målt i Pascal (Pa)
- v er vindhastigheden umiddelbart op til betonoverfladen, målt i m/sec

Under givne forhold kan fordampningshastigheden beregnes ud fra ovenstående formel, og det antages, at for normale betoner vil der næppe være risiko for plastisk svind, såfremt  $w < 1 \text{ kg/m}^2$  pr. time. Ved fordampningshastigheder større end  $1 \text{ kg/m}^2$  pr. time bør man derimod tage forholdsregler, så fordampningen nedsættes. Dette kan ske ved at afskærme for kraftig blæst og solpåvirkning og ved umiddelbart efter udstøbningen at tildække betonen med plastic. I stedet for at tildække betonen med plastic kan man i visse tilfælde sprøjte overfladen med et curingsmiddel, så der dannes en forseglende membran. Membranen er dog ikke helt tæt, og den skal i visse tilfælde atter fjernes inden overfladen yderligere behandles. Tildækning eller forsegling af betonoverfladen er helt nødvendig, når betingelserne for plastisk svind og ledsagende revnedannelse er tilstede.

*Udtørningssvindet* forekommer i den hærdnede beton. Udtørningssvindets størrelse afhænger primært af den omgivende lufts relative fugtindhold og cementpastaens overskudsvand. Når det frie vand i betonens kapillarporer fjernes, er svindet meget beskedent, mens det vil vokse, når udtørringen fortsætter, og det absorberede vand også fjernes. Beton, der til stadighed er under vand, vil ikke svinde.

Cementpastaen er den svindende komponent i betonen, og svindet øges derfor ved et voksende cementindhold, men det øges tillige ved et voksende v/c - forhold. Svindet synes derfor rent fænomologisk kun at afhænge af vandindholdet og at vokse med dette. Følgelig vil en tilsætning af vandreducerende tilsætningsstoffer medføre, at vandindholdet og dermed også udtørningssvindet blive mindre.

Da det alene er cementpastaen, der svinder ved udtørringen, vil udtørringssvindet følgelig reduceres med en voksende volumenprocent af tilslag. Det relative udtørringssvind, målt i forhold til ren cementpasta, vil falde næsten proportionalt med tilslaget volumenprocent, hvorimod tilslagsmaterialernes fraktionsstørrelse og fordeling ikke synes at have nogen betydning for svindet. Tilslagsmaterialernes elasticitetskoefficient såvel som visse tilslags fugtbetingede volumenændringer kan imidlertid have betydning for svindets størrelse. Især de fugtbetingede volumenændringer kan medføre revnedannelser i betonen.

Størrelsen af en betons totale svind udtrykt ved svindtøjningen  $\varepsilon_{cs}$  kan beregnes, når man har kendskab til betonemnets geometriske dimensioner og til omgivelsernes relative fugtighed. Svindet ønsker man generelt at begrænse, hvilket man opnår ved at anvende vandreducerende tilsætningsstoffer og et stort indhold af tilslag, fortrinsvis glatte, kubiske sten, der reducerer vandbehovet. Desuden må man sikre, at betonen ikke udsættes for udtørring, før den har en passende hærdningsgrad.

Overstiger svindet betonens trækbrudtøjning  $\varepsilon_{cti}$ , der normalt ligger i intervallet 0,01-0,02%, vil betonen revne, dersom omgivelserne hindrer den i at trække sig sammen. I uarmeret beton vil revnerne blive ret grove, men deres antal vil være begrænset. I armeret beton kunne man modsætningsvis tro, at armeringen ville hindre eller hæmme revnedannelsen, men armeringen vil tværtimod fungere som revneanvisere, og dermed fremme revnedannelsen. Ved en hensigtsmæssig *svindarmering* kan man imidlertid fremme tilbøjeligheden til, at antallet af revner vokser samtidig med, at revnevidden tilsvarende falder.

Svindarmering i overfladen har ikke den helt store effekt, for dels virker armeringen først, når revnerne er opstået, og dels kan armeringen - grundet dæklaget - ikke placeres lige under overfladen, hvor dens virkning er størst. Svindarmeringen har imidlertid betydning for revneafstanden og revnevidderne. Størrelsen af acceptable revnevidder afhænger af det miljø, som betonoverfladen udsættes for, men svindrevnernes størrelse bør i middel ikke overstige 0,1 mm.

Det er muligt ved beregning at danne sig et rimeligt sikkert skøn over størrelsen af det totale svind  $\varepsilon_{cs}$  som funktion af tiden. Specielt vil svindet - efter i princippet uendelig lang tid - asymptotisk nærme sig værdien  $\varepsilon_{cs\infty}$ , der benævnes *slutsvindet*.

Iht. EC 2 fastsættes slutsvindet for en beton med normal densitet og med plastisk konsistens til de værdier, der er angivet i nedenstående tabel 2.1-1, når større nøjagtighed ikke er påkrævet. For en beton med stiv konsistens multipliceres tabellens værdier med faktoren 0,7, mens tabellens værdier multipliceres med faktoren 1,2 ved en blød konsistens.

Slutsvindet afhænger foruden af den relative luftfugtighed og betonens konsistens også af den *ækvivalente radius*  $h_o$ , der defineres ved

$$h_o = 2 \cdot A_c / u \quad (2.1-40)$$

hvor

-  $A_c$  er betonelementets tværsnitsareal i  $\text{mm}^2$

-  $u$  er omkredsen af betonelementet i mm

Konstruktionens Placering	Relativ luftfugtighed RH (%)	$h_o \leq 150\text{mm}$	$h_o = 600\text{ mm}$
Indendørs	50	0.60	0.50
Udendørs	80	0.33	0.28

Tabel 2.1-1 Slutsvindet  $\varepsilon_{cs\infty}$  i o/oo for en beton med normal densitet.

Lineær interpolation mellem de anførte værdier er tilladt.

Er der brug for et mere nøjagtigt skøn over svindtøjningens udvikling med tiden, må man benytte følgende sæt empiriske formler til bestemmelse af svindtøjningens middelværdi.

$$\varepsilon_{ts}(t,t_0) = \varepsilon_{cs0} \cdot \beta_s(t,t_0) \quad (2.1-41)$$

hvor

- $\varepsilon_{cs0}$  er et basissvind
- $\beta_s(t,t_0)$  er en tidsafhængig svindkoefficient

Basissvindet  $\varepsilon_{cs0}$  bestemmes ud fra følgende formel

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s \cdot \beta_{RH} \quad (2.1-42)$$

hvor størrelsen

$\varepsilon_s$  afspejler effekten af betonens middelstyrke  $f_{cm}$  målt i [MPa]

medens størrelsen

$\beta_{RH}$  afspejler effekten af omgivelsernes relative fugtighed RH målt i %

Disse størrelser antager værdier i overensstemmelse med følgende formeludtryk

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = (160 + \beta_{sc} \cdot (90 - f_{cm})) \cdot 10^{-6} \quad (2.1-43)$$

og

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1.55 \cdot \beta_{sRH} & \text{for } 40\% \leq RH \leq 99\% \\ +0.25 & \text{for } RH \geq 99\% \end{cases} \quad (2.1.44)$$

Disse udtryk afhænger videre af størrelsen  $\beta_{sc}$ , som afspejler cementtypens indflydelse, idet

$$\beta_{sc} = \begin{cases} 4 & \text{for en langsomt hærdende cement; S} \\ 5 & \text{for en normal/hurtigt hærdende cement; N,R} \\ 8 & \text{for en hurtigt hærdende højstyrke cement; RS} \end{cases} \quad (2.1-45)$$

samt af koefficienten

$$\beta_{sRH} = 1 - (RH/100)^3 \quad (2.1-46)$$

Endelig er den tidsafhængige svindkoefficient  $\beta_s$  bestemt ved formlen

$$\beta_s = (0,035 \cdot h_0^2 / (t-t_0) + 1)^{-1/2} \quad (2.1-47)$$

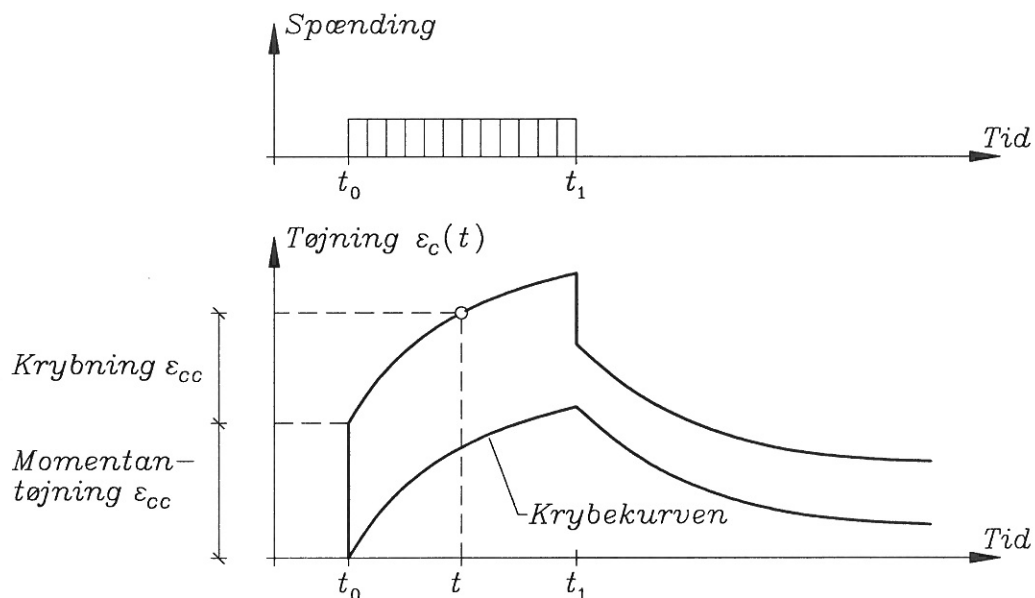
hvor

$h_0$  bestemmes af ligning (2.1-34) ovenfor, mens

$t-t_0$  er eksponeringstiden målt i døgn fra svindet satte ind til tiden  $t_0$

## 2.1.5 Krybning

*Krybning* er den spændingsafhængige tøjningstilvækst, der med tiden opstår i betonen, når denne påføres en spænding. Spændingen er ikke nødvendigvis konstant i tiden.



Figur 2.1-13. Lastafhængige tøjninger

I figur 2.1-13 er det principielle forløb af tøjningen vist, når en konstant spænding påføres til tiden  $t_0$ , og når spændingen igen fjernes til et senere tidspunkt  $t_1$ . Det ses, at når spændingen påtrykkes, forekommer der en momentan, elastisk tøjning, der overlejes af en i tiden voksende

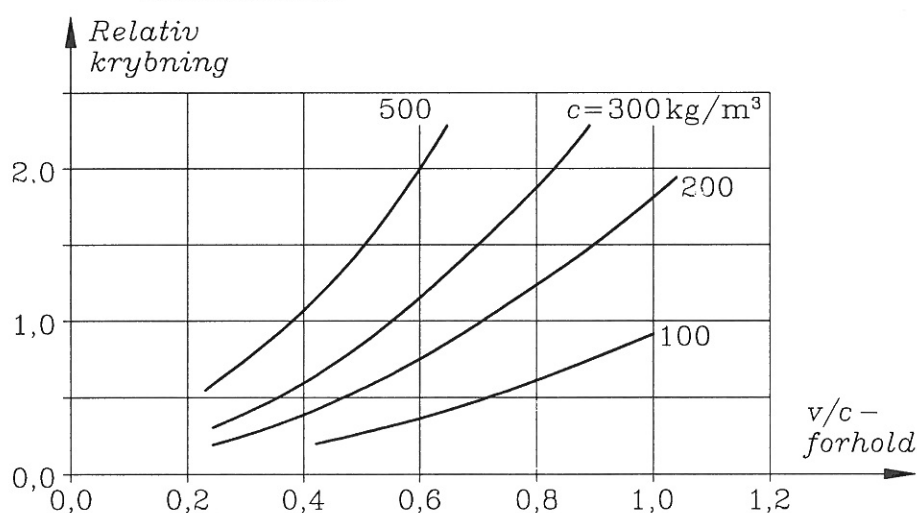
krybetøjning. Ved en efterfølgende aflastning, optræder der igen en momentan og modsat rettet elastisk tøjning, samt en tidsafhængig tilbagekrybning, der dog aldrig vil føre betonen tilbage til udgangssituationen, men efterlade betonen med en permanent tøjning. Årsagen hertil er, at betonens hærdningsgrad vokser med tiden, hvorfor enhver senere tøjning vil være mindre end de foregående under iøvrigt samme forhold. Kurven, der beskriver den tidsafhængige deformations forløb, benævnes *krybekurven*.

Krybning under konstante fugtforhold benævnes *grundkrybning*, mens krybningen benævnes *sorptionskrybning*, når materialet udveksler fugt med omgivelserne, hvilket der i praksis vil være tale om. Betons sorptionskrybning kan bestemmes som differencen mellem den totale, tidsafhængige tøjning målt i et belastet prøvelegeme og svindtøjningen målt i et ubelastet prøvelegeme under iøvrigt identiske forhold.

Det er gelstrukturen i betonens cementenpasta, der giver anledning til krybning, mens tilslaget sædvanligvis ikke udviser krybning. Krybningen stiger med voksende cementindhold  $c$  og med stigende  $v/c$ -forhold, se figur 2.1-14. Den fælles virkning af cementindholdet og vand-cement-tallet har iøvrigt vist sig at svare til produktet  $c \cdot v/c$ , så derfor vil krybningen rent fænomenologisk kun afhænge af vandindholdet  $v$ . Alt andet lige fører et øget vandindhold således til en større krybning, så ønsker man derfor at begrænse krybningen, kan dette ske ved at anvende vandreducerende tilsætningsstoffer.

Når betonen er udstøbt og afbundet, vil krybningen i det væsentlige styres af flg. faktorer:

- modenhed
- fugtindhold
- lastens størrelse



Figur 2.1.14. Krybning som funktion af cementindhold og  $v/c$  - tallet.

Med betonens modenhed stiger gelstrukturens styrke, så derfor vil en sen afforskalling og sen lastpåføring i praksis bidrage til at reducere krybningen.

Betonens fugtindhold afhænger af omgivelsernes relative fugtighed RH. Når den relative luftfugtighed falder, vil fugtindholdet i betonens porer også falde, hvorved den indre, relative lastfordeling mellem de vandfyldte porer og cementpastapartiklerne forrykkes over imod en større andel på cementpastaen. Krybningen vil følgelig vokse med faldende relative luftfugtighed. I forhold til grundkrybningen ved 100% RH, vil krybningen ved fx. 40-50% RH kunne blive 3-4 gange så stor, så luftfugtigheden har en markant indflydelse.

Lastens størrelse har også en afgørende indflydelse på krybningen, da cementpastapartiklerne, som nævnt ovenfor, bærer en betragtelig del af lasten. Krybningen vil derfor vokse med lastens størrelse, og krybningen kan iøvrigt med rimelig tilnærmelse regnes at være ligefrem proportional med lasten, så længe denne ikke overstiger ca. halvdelen af brudlasten. I betonkonstruktioner overstiger betontrykspændingerne i anvendelsesgrænsetilstanden sjældent 60% af betonens karakteristiske trykstyrke, svarende til ca. 50% af materialets middeltrykstyrke. De største spændinger forekommer endda kun kortvarigt og som kantspændinger i begrænsede områder. Det er derfor rimeligt at betragte beton som et *lineær-viskoelastisk materiale*, hvis deformationer under énakset trykpåvirkning kan beskrives ved en krybningsfunktion  $J(t, t_0)$ , der defineres på følgende måde:

*Krybningsfunktionen  $J(t, t_0)$  er den tøjning  $\varepsilon_c$ , der til tiden  $t$  forekommer, når spændingen  $\sigma_c = 1$  er påført til tiden  $t_0$  og derefter holdt konstant.*

Udover de nævnte faktorer har betonens temperatur, betonens dimensioner, cementtype og tilslagsmaterialer også indflydelse på krybningen.

Krybningen har en betydelig indflydelse på snitkraft- og spændingsfordelingen i betonkonstruktioner, idet krybningen medfører markante spændingsomlejring. Således vil krybningen i statisk bestemte, armerede betonbjælker føre til en reduktion af de maksimale betonspændingerne og en forøgelse af nedbøjningerne. I statisk ubestemte, armerede betonkonstruktioner vil krybningen endvidere føre til en omlejring af momenterne. Eksempelvis vil der i kontinuerte, armerede betonbjælker over flere fag ske en reduktion af momenterne over mellemunderstøtningerne og dermed en forøgelse af momenterne ude i fagene. Krybningen vil i armerede betonsøjler føre til, at der sker en gradvis og betydelig lastoverførsel fra beton til armering, som i ekstreme tilfælde kan blive så kraftig, at armeringen begynder at flyde. I excentrisk belastede søjler vil krybningen resultere i voksende udbøjninger, der alt andet lige vil reducere søjlens bæreevne.

Uanset konstruktionstypen er det nødvendigt, at man er opmærksom på følgerne af krybningen, og tager den i regning, hvor det er påkrævet. Med reference til EC2 vil det i det følgende blive demonstreret, hvorledes en sådan beregning kan gennemføres.

Belastes et betonlegeme til tiden  $t_0$  med den énaksede trykspændingen  $\sigma$ , kan tøjningen  $\varepsilon_c(t)$  til ethvert senere tidspunkt - iht. figur 2.1-13 - skrives som summen af momentantøjningen  $\varepsilon_{cm}(t_0)$  og krybetøjningen  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ , dvs.

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{cm}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) \quad (2.1-48)$$

Momentantøjningen  $\varepsilon_{cm}(t_0)$  kan udtrykkes ved spændingen  $\sigma$  og elasticitetsmodulet  $E_c(t_0)$  til tiden  $t_0$  idet

$$\varepsilon_{cm}(t_0) = \sigma / E_c(t_0) \quad (2.1-49)$$

Tilsvarende kan krybetøjningen  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$  sættes i relation til elasticitetsmodulet  $E_{c28}$  ved 28 døgn, gennem ligningen

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \sigma \cdot \phi(t, t_0) / E_{c28} \quad (2.1-50)$$

hvor *krybetallet*  $\phi(t, t_0)$  er en empirisk bestemt funktion, der beskriver krybetøjningens relative udvikling i tiden  $t$ , for spændingen  $\sigma_c = 1$ , og når belastningen påføres til tiden  $t_0$ .

Indsættes udtrykkene (2.1-49) og (2.1-50) i (2.1-48) kan den totale lastafhængige tøjning  $\varepsilon_c(t)$  efterfølgende udtrykkes som

$$\varepsilon_c(t) = ( 1 / E_c(t_0) + \phi(t, t_0) / E_{c28} ) \sigma = J(t, t_0) \cdot \sigma \quad (2.1-51)$$

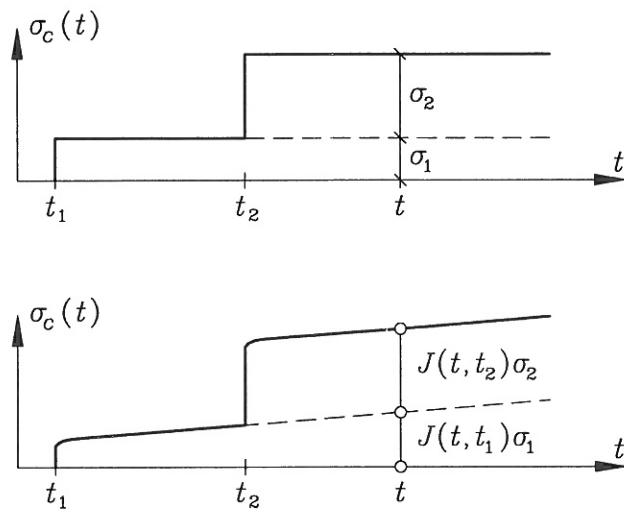
hvor  $J(t, t_0)$  benævnes *krybningsfunktionen*. Denne funktion udtrykker som tidligere nævnt den *totale* lastafhængige tøjning til tiden  $t$ , når spændingen  $\sigma_c = 1$  påføres til tiden  $t_0$ . Krybetallet  $\phi(t, t_0)$  er derimod alene knyttet til krybetøjningen  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ .

Med en for praksis tilstrækkelig nøjagtighed kan den lastafhængige tøjning i en betonkonstruktion herefter beregnes ved anvendelse af det såkaldte *Boltzmann's superpositionsprincip*, så længe betonspændingerne ikke overstiger 45% af betonens trykstyrke. Under normale omstændigheder vil denne begrænsning ikke have betydning, da betonspændinger i praksis ligger på et lavere niveau. Boltzmann's superpositionsprincip, der er navnet på den superpositionslov, der knytter sig til lineær-viskoelastiske materialer omfatter flg. to sætninger:

- *proportionalitetssætningen* fastslår, at krybetøjningen er proportional med trykspændingen, når lasten påføres ved samme hærdningsgrad, og under iøvrigt identiske forhold (betonsammensætning, dimensioner og fugtforhold).
- *additionsætningen* fastslår, at summen af krybtøjningerne hidrørende fra to forskellige laster, er lig med krybningen svarende til den samlede last. De to bidrag er således uafhængige og ikke kobledede.

Boltzmann's princip er illustreret i figur 2.1-15, hvor et konstruktionselement først tænkes belastet til tiden  $t = t_1$  med spændingen  $\sigma_1$ . Til tiden  $t > t_1$  er den totale tøjning da iht. (2.1-51)

$$\varepsilon_c(t) = J(t, t_1) \sigma_1 \quad \text{for } t > t_1 \quad (2.1-52)$$



Figur 2.1-15. Boltzmann's princip, hvor beton belastes til tiderne  $t_1$  og  $t_2$ .

Belastes konstruktionselementet istedet med spændingen  $\sigma_2$  til tiden  $t_2 > t_1$ , havde den totale tøjning tilsvarende været

$$\varepsilon_c(t) = J(t, t_2) \sigma_2 \quad \text{for } t > t_2 > t_1 \quad (2.1-53)$$

I henhold til additionssætningen kan man efterfølgende slutte, at påføres konstruktionselementet først spændingen  $\sigma_1$  til tiden  $t_1$  og dernæst yderligere spændingen  $\sigma_2$  til tiden  $t_2$  således, at spændingssummen er  $\sigma_1 + \sigma_2$  for tiden  $t > t_2 > t_1$ , da er den totale tøjning

$$\varepsilon_c(t) = J(t, t_1) \sigma_1 + J(t, t_2) \sigma_2 \quad \text{for } t > t_2 \quad (2.1-54)$$

	Ækvivalent radius $h_0 = 2A_c / u$ [mm]					
	50	150	600	50	150	600
Alder ved lastpåførelse $t_0$ [døgn]	Tør luft (indendørs) RH = 50%			Fugtig luft (udendørs) RH = 80%		
1	5.5	4.6	3.7	3.6	3.2	2.9
7	3.9	3.1	2.6	2.6	2.3	2.0
28	3.0	2.5	2.0	1.9	1.7	1.5
90	2.4	2.0	1.6	1.5	1.4	1.2
365	1.8	1.5	1.2	1.1	1.0	1.0

Tabel 2.1-2. Slutkrybetallet  $\phi(\infty, t_0)$  for beton med normal densitet.

Da krybetallet  $\phi(t, t_0)$  iht. EC2 er en stadig voksende, men begrænset funktion, vil krybetøjningerne ikke overstige de værdier, der bestemmes ved et *slutkrybetal*  $\phi(\infty, t_0)$ . I de tilfælde hvor en større nøjagtighed ikke er påkrævet, kan det derfor i praksis være tilstrækkeligt blot at kende slutkrybetallet, da man herved sikrer sig, at tøjningerne ikke bliver uacceptable store. Sådanne værdier for slutkrybetallet er angivet i omstående tabel 2.1-2 for en beton med normal densitet. Tabelværdierne forudsætter, at gennemsnitstemperaturen i betonen ligger i intervallet 10-20<sup>0</sup> C, og svarende til en sæsonvariation i temperaturen på mellem -20<sup>0</sup>C og +40<sup>0</sup>C. Tilsvarende er sæsonvariationer i den relative luftfugtighed i intervallet 20% til 100% acceptable, når blot gennemsnitsværdierne er som forudsat i tabellen.

Lineær interpolation mellem værdierne i tabellen er tilladt. Værdierne gælder for beton med plastisk konsistens i klasserne S2 og S3 (se afsnit 7.2.1 i ENV 206) i frisk tilstand. For beton af anden konsistens skal værdierne ganges med 0.70 (stiv konsistens, S1) eller 1.20 (blød konsistens, S4).

Kræves et nøjere kendskab til krybetøjningens udvikling i tiden, kan denne estimeres ved at beregne krybetallet ud fra flg. formel

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (2.1-55)$$

hvor

- $\phi_0$  er *grundkrybetallet*; se ligning (2.1-56)
- $\beta_c(t, t_0)$  beskriver krybningsudviklingen i tiden efter belastning; se ligning (2.1-60)
- $t$  er betonens alder i døgn på det betragtede tidspunkt
- $t_0$  er betonens alder i døgn ved belastningens påførsel

Grundkrybetallet  $\phi_0$  bestemmes ud fra formlen

$$\phi_0 = \phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (2.1-56)$$

hvor

$$\phi_{RH} = 1 + (1 - RH / 100) / (0.1 \cdot h_0^{1/3}) \quad (2.1-57)$$

afspejler fugtudvekslingen med omgivelserne, mens

$$\beta(f_{cm}) = 16.8 \cdot (f_{cm})^{-1/2} \quad (2.1-58)$$

afspejler betonstyrkens indflydelse og

$$\beta(t_0) = (0.1 + t_0^{0.20})^{-1.0} \quad (2.1-59)$$

afspejler indflydelsen af betonens hærdningsgrad.

Koefficienten  $\beta_c(t, t_0)$  i ligning (2.1-55) estimeres ud fra formlen

$$\beta_c(t, t_0) = ((t - t_0) / (\beta_H + t - t_0))^{0.3} \quad (2.1-60)$$

hvor koefficienten  $\beta_H$  afhænger af den relative luftfugtighed (RH i %) og af elementets ækvivalente radius  $h_0$ .

Endelig er  $\beta_H$  fastlagt ved udtrykket

$$\beta_H = 1.5 \cdot (1 + (0,012 \text{ RH})^{18}) \cdot h_0 + 250 \leq 1500 \quad (2.1-55)$$

## 2.1.6 Temperaturpåvirkninger

Beton vil i lighed med en række andre materialer udvide sig ved opvarmning. Udvidelsen pr. længdeenhed  $\varepsilon_T$  er proportional med temperaturen  $T$ , når denne ligger indenfor det normale anvendelsesområde, dvs.  $20^\circ\text{C} \pm 50^\circ\text{C}$ . Proportionalitetsfaktoren er den såkaldte *varmeudvidelseskoefficient*  $\beta [^\circ\text{C}^{-1}]$  således, at

$$\varepsilon_T = \beta T \quad (2.1-56)$$

Varmeudvidelseskoefficientens størrelse afhænger først og fremmest af cementpastaen, men er også afhængig af tilslaget, betonens blandingsforhold og hærdningsgraden. I almindelighed sættes  $\beta = 10^{-5} \text{ C}^{-1}$  for en afhærdet normalbeton, men afvigelser på op til 50 % af denne værdi kan forekomme.

Under projekteringen af betonkonstruktioner er det nødvendigt at tage hensyn til den temperaturbelastning, der kan forekomme i konstruktionens levetid og sikre, at konstruktionen kan optage de temperaturafhængige deformationer uden at lide skade.

I den færdige konstruktion vil temperaturens døgnvariation sjældent give anledning til problemer takket være betonens store varmekapacitet på ca.  $1 \text{ kJ/kg } ^\circ\text{C}$  og dens relative dårlige varmeledningsevne, der ligger i intervallet  $1.6 - 2.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ . Temperaturens årsvariation kan derimod føre til betydelige deformationer, som må tages i regning, og som må modvirkes ved at indlægge dilatationsfuger, der er tilstrækkelige brede til at kunne optage differencedeformationerne mellem de enkelte bygningsdele og bygningsafsnit.

Under udstøbningen af specielt store og massive betonkonstruktioner kan der forekomme en betydelig indre varmeudvikling som følge af *betonens hydratisering*. Det er nødvendigt at styre og kontrollere denne varmeudvikling for at minimere temperaturgradienterne og den heraf følgende revnedannelse. Styringen foretages ved at udarbejde og følge et hensigtsmæssigt støbeprogram og/eller ved at indstøbe kølerør i betonen.

*Brand* er en ekstrem varmpåvirkning, som man må forholde sig til specielt, da betonens egenskaber og materialeparametre ændrer sig markant med temperaturen. Generelt vil beton i sammenligning med andre byggematerialer forekomme at være et forholdsvis brandstabilt materiale takket være dens ringe varmeledningsevne og store varmekapacitet, men ved længerevarende brande vil betonen uundgåeligt tage betydelig skade.

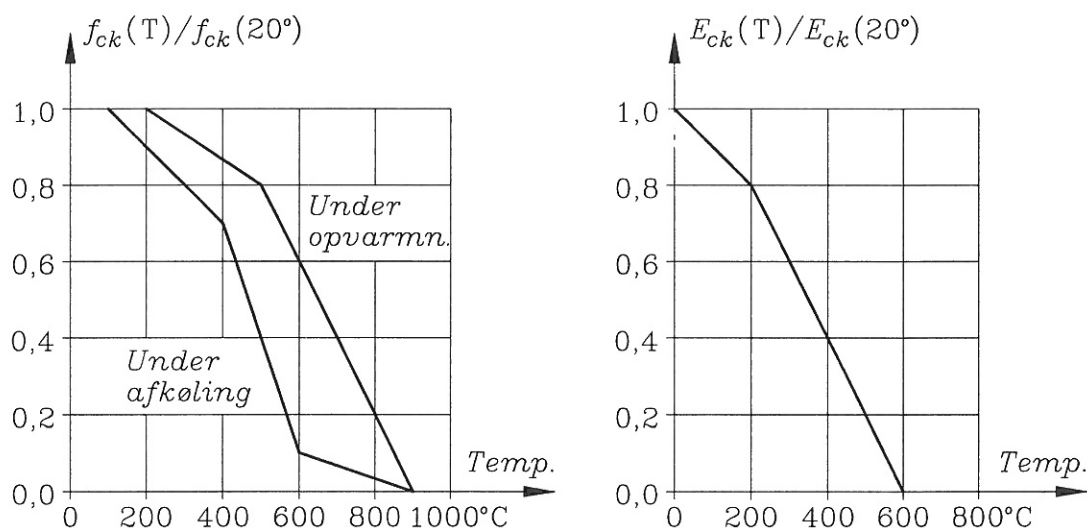
Under en brand vil en normalbeton indledningsvis afgive hovedparten af det fordampelige vand, inden temperaturen i betonen er nået  $100^{\circ}\text{C}$ , hvorefter det kemisk bundne vand vil blive afgivet i takt med, at temperaturen stiger. Afhængig af opvarmingshastigheden, betonens dimensioner og dens tæthed kan der forekomme afskalninger eller afsprængninger, da damptrykket inde i betonen vokser. Ved meget tætte højstyrkebetoner bliver afsprængningerne så voldsomme, at de får karakter af eksplosioner.

Ved temperaturer på ca.  $250^{\circ}\text{C}$  kan man iagttage en begyndende revnedannelse, der skyldes forskellen i udvidelse af tilslag og cementpasta. Revnerne vokser i størrelse og antal med stigende temperatur, og revnedannelsen bliver meget markant og ødelæggende for betonens indre sammenhæng, når temperaturen er omkring  $500 - 600^{\circ}\text{C}$ .

Betonens mekaniske egenskaber falder generelt i værdi med voksende temperatur, omend der kan forekomme en moderat forøgelse ved temperaturer op til  $100-200^{\circ}\text{C}$ . Forøgelsen skyldes en temperaturafhængig efterhydratisering med en deraf følgende tættere struktur.

De mekaniske egenskaber afhænger ikke blot af temperaturens maksimale niveau, men også af den efterfølgende afkøling. Betonens trykstyrke er således mindre efter afkøling i luft, end den er under selve varmpåvirkningen, hvorfor trykstyrken først bør bestemmes efter flere døgns afkøling. Forskellen mellem den varme og den afkølede betons trykstyrke kan også iagttages på en brandtomt, idet det kan ske, at brandskadede betonbjælker pludselig falder ned flere dage efter, at branden er blevet slukket. Dette forhold fremgår klart af figur 2.1-16, hvor en normalbetons relative trykstyrke iht. DS 411 er angivet som funktion af den maksimale temperatur, der optræder under brandforløbet.

I samme figur 2.1-16 er en normalbetons relative E-modul efter afkøling optegnet ligeledes som funktion af den maksimale temperatur under brandforløbet.



Figur 2.1-16. Middel-materialeparametre for beton som funktion af temperaturen.

Forsøg synes at godtgøre, at det for højstyrkebetoner er på den sikre side at anvende de reducerede værdier, der gælder for normalbetoner.

Efter en brand vil man ofte kunne iagttage, at betonen har ændret farve fra normal beton-grå til rosafarvet, grå-grøn, brun eller gul afhængig af, hvor kraftig opvarmningen har været det pågældende sted. Det er dog ikke altid, at en farvetoning optræder, selvom betonen har været opvarmet, så derfor kan en manglende farvning ikke nødvendigvis tages som udtryk for, at betonen ikke har været varmepåvirket. I tabel 2.1-3. er farveændringerne i beton sammenholdt med de maksimale temperaturer, ved hvilke farveændringerne indtræder. Endvidere er tykkelsen af overgangs-grænselaget mellem to farvetoninger angivet.

Farvningen af beton, der skyldes kemiske reaktioner i og mellem betonens bestanddele, er en meget praktisk og anvendelig indikation af hvilken temperatur, betonen har været opvarmet til. Således vil rosafarvningen klart anvise de dele af en brandskadet beton, som man bør overveje at borthugge ved en reparation, da rødfarvningen netop indtræder i det temperatur-interval, hvor de første alvorlige svækkelser af betonens mekaniske egenskaber sætter ind. I de områder, der er farvet grå-grønne, er betonen blevet skadet så alvorligt, at den udenfor al tvivl skal borthugges.

Farve	Maksimal temperatur i grænselaget [°C]	Grænselagets tykkelse [mm]
Normal betongrå	300	3 – 6
Rosafarvning	600	6 – 10
Grå – grøn	950	3 - 6
Brun	1200	2
Gul		

Tabel 2.1-3. Farvetoninger med tilhørende omslagstemperaturer.

I det omfang, der stilles krav om en konstruktions brandmodstandsevne, skal der iht. DS 410 Last på konstruktioner foretages en brandteknisk dimensionering. Beregningen skal eftervise, at bæreevnen af konstruktionen er tilstrækkelig til at modstå lastkombination 4, når der tages hensyn til den termiske brandlast, som er angivet i DS 410, og til de temperaturafhængige materialeparametre. Ud fra den termiske brandlast kan temperaturfordelingen i dimensionsgivende snit beregnes. På grundlag af disse beregninger, kan bæreevnen derefter estimeres ud fra de temperaturafhængige materialeparametre, idet der også tages hensyn til deformationer, eksempelvis excentriciteter i søjler. Iøvrigt skal der anvendes de samme karakteristiske laster som inden branden samt de laster og deformationer, som hidrører fra de af branden forårsagede temperaturer i konstruktionen.

Den termiske brandlast bestemmes enten ud fra en *standardbrandkurve*, der angiver temperaturforløbet i tiden, og en krævet brandmodstand i minutter eller ud fra en *energibalancemetode*. I den sidste metode udtrykkes det, at der til ethvert tidspunkt er ligevægt mellem den ved forbrændingen producerede varmeenergi og den forbrugte varmeenergi.

## **2.2 Armering**

## 2.2 Armering

### 2.2.1 Armeringens funktion

På grund af betonens meget ringe trækstyrke er det nødvendigt at indlægge *armering* i betonen i de områder, hvor trækspændingerne er så store, at betonen ikke selv kan optage dem. Armeringen, der i sådanne områder overtager betonens kraftoverførende funktion, må kunne samvirke med betonen, så kræfter i betonen kan overføres til armeringen gennem materialernes kontaktflade. Endvidere må armeringen selv kunne optage betydelige trækkræfter.

Armeringens principielle funktion og dens betydning for kraftforløbet i en betonkonstruktion får man på enkel måde belyst ved at betragte en trækstang, der består af et armeringsjern omstøbt med beton. En sådan trækstang er vist i figur 2.2-1. Forudsættes det, at armeringen er fast forankret i betonen og, at materialerne er lineærelastiske, vil den samlede trækraft  $F$  i stangen kunne udtrykkes ved

$$F = A_c \cdot \sigma_c + A_s \cdot \sigma_s = (A_c E_c + A_s E_s) \cdot \varepsilon \quad \text{for } \varepsilon < \varepsilon_{ctu} \quad (2.2-1)$$

hvor

$A_c$  er betonarealet

$A_s$  er armeringsarealet

$E_c$  er betonens elasticitetsmodul

$E_s$  er armeringens elasticitetsmodul

$\varepsilon_{ctu}$  er betonens trækbrudtøjning

$\varepsilon$  er middeltøjningen over hele stangen

Når tøjningen  $\varepsilon$  bliver lig med betonens trækbrudtøjning  $\varepsilon_{ctu}$ , vil betonen revne, og betonspændingen  $\sigma_c$  vil samtidig falde til værdien nul. Under denne spændingsomlejring for konstant trækraft  $F_{st}$  vil stangens tøjning  $\varepsilon$  vokse indtil  $\varepsilon = \varepsilon_{st}$ , idet hele trækraften  $F_{st}$  optages af armeringen, dvs.

$$F_{st} = A_s \cdot \sigma_s = A_s E_s \cdot \varepsilon_{st} < F_y \quad (2.2-2)$$

Armeringen svarende til denne trækraft, hvor betonen netop revner, bør altid udgøre en mindsteværdi for armeringsarealet - *minimumsarmeringen* - da man herved sikrer, at det endelige brud foregår ved flydning i armeringen og bruddet bliver et sejt brud.

Øges kraften  $F$  udover værdien  $F_{st}$ , vil tøjningen  $\varepsilon$  være bestemt af ligningen

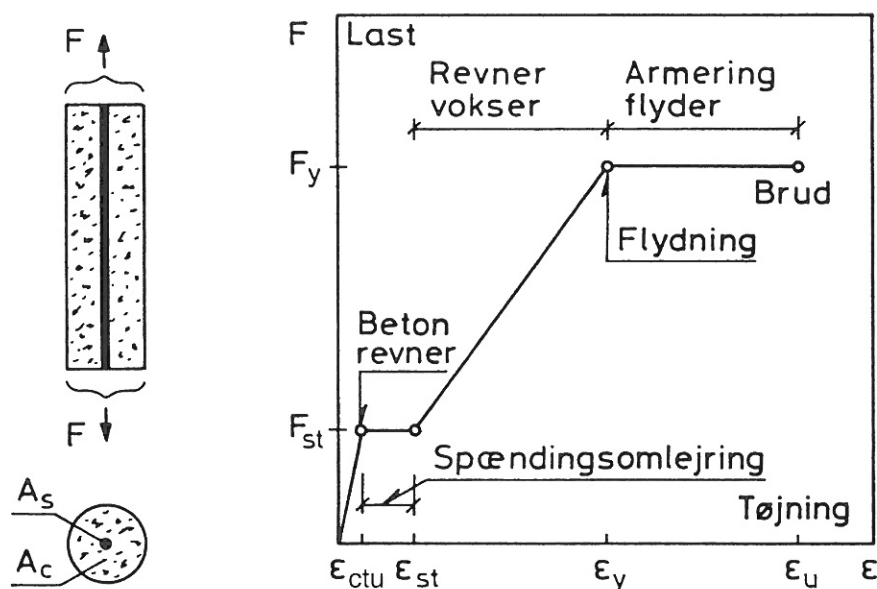
$$F = A_s E_s \cdot \varepsilon \quad \text{for } \varepsilon_{st} < \varepsilon < \varepsilon_y \quad (2.2-3)$$

indtil armeringen flyder for den konstante trækraft  $F_y$ .

En grafisk fremstilling af det ovenfor beskrevne, ideale last-tøjningforløb er vist i figur 2.2-1, hvor de tre første, rette liniestykker svarer til ligningerne (2.2-1), (2.2-2) og (2.2-3).

Det bemærkes, at så længe betonen er urevnet, opfører stangen sig lineærelastisk. Efter betonen er revnet, og spændingsomlejringen har fundet sted, vil stangen fortsat opføre sig lineærelastisk, men have en mindre stivhed end svarende til det urevnete stadie, da kraften nu kun bæres af armeringen. I en reel trækstang vil antallet af revner vokse med voksende last, hvorfor last-tøjnings-forløbet i virkeligheden ikke vil være stykkevis lineært som angivet, men det vil snarere være svagt ulineært.

Det bemærkes endvidere, at for at armeringen skal blive effektiv, er det nødvendigt, at betonen revner. Hvis betonen ikke måtte revne, skulle tøjningen i såvel armeringen som betonen være mindre end betonens trækbrudtøjning  $\epsilon_{ctu} \sim 0,00015$ . Følgelig ville spændingen i armeringen derfor blot være  $\sigma_s = E_s \epsilon_s = 200000 \cdot 0,00015 = 30 \text{ MPa}$ , der er en uacceptabel lille maksimalspænding i forhold til armeringens flydespænding på 550 MPa (for armeringsstål B 550). Revner i beton er derfor uundgåelige, men de er uheldige af såvel æstetiske som funktionsmæssige årsager, idet revnerne fremmer det omgivende miljøes nedbrydning af såvel beton som armering. Nedbrydningshastigheden afhænger imidlertid i det væsentlige af revnernes størrelse dvs. af *revnevidderne*, hvorfor man ved en hensigtsmæssig armering bør tilstræbe, at revnernes antal er stort, men deres revnevidde lille. Er revnevidden mindre end 0,2 mm, 0,3 mm og 0,4 mm for henholdsvis ekstra aggressiv, aggressiv og moderat miljøklasse, vil betonens basiske miljø bevirke, at armeringen ikke vil korrodere.



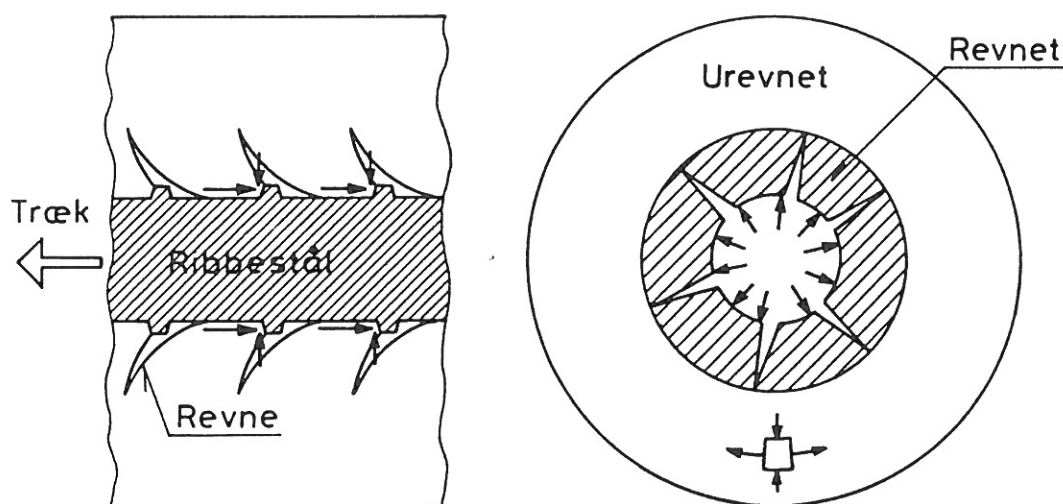
Figur 2.2-1. Principielt last-tøjningsforløb i en armeret beton-trækstang.

Helt det samme principielle last-tøjningsforløb, som er beskrevet ovenfor, vil man kunne genfinde ved andre betonkonstruktioner som fx plader og bjælker, såfremt armeringsarealet er større end svarende til minimumsarmeringen, og såfremt armeringsmaterialet kan antages at

være lineærelastisk-idealplastisk og have en tilstrækkelig brudforlængelse.

For at last-tøjningsforløbet kan udvikle sig som beskrevet, er det en forudsætning, at vedhæftningen mellem beton og armering er tilstrækkelig, så den nødvendige kraftoverførsel kan finde sted. Da kraftoverførslen i praksis altid vil ske ved "friktion" mellem beton og armering, er det vigtigt, at denne friktion er passende stor. Dette opnås ved at udforme armeringen hensigtsmæssig, enten ved at give armeringen en "ru" overflade i form af ribber eller lignende, hvorved størsteparten af kraftoverføringen mellem armeringsstang og beton i virkeligheden foregår som tryk mellem betonen og ribbernes sideflader eller ved at "bugte" armeringen, som det sker ved fibre.

En armeringsstang med ribber vil samvirke med den omgivende beton som skitseret i figur 2.2-2, idet kraftoverføringen mellem beton og stål er en skrå trykkraft, hvis aksiale og radiære komponenter er indtegnet. Trækkraften i armeringen afbalanceres af den aksiale komponent af de skrå trykkræfter. Ribberne vil som revneanvisere introducere revner i betonen vinkelret på armeringsretningen, idet trækspændingerne i armeringen vil medføre træktøjninger i armeringen og dermed også lokalt i betonen. Den radiære komponent af de skrå trykkræfter mellem armering og beton vil på samme tid føre til betydelige ringspændinger i betonen. Lokalt omkring armeringen vil ringspændingerne overstige betonens trækstyrke og derved fremkalde lokale, radiære revner, hvorfor den nødvendige ringspænding, der afbalancerer de radiære trykspændinger, må etableres længere ude i betonen - udenfor den lokale revnezone. Dette fordrer, at der omkring armeringen er et tilstrækkeligt tykt betonlag med plads til såvel revnezonen som den urevnede ringspændingszone.



Figur 2.2-2. Princip for kraftoverføring mellem beton og armering samt revnemønster.

I praksis kan ringspændingen dog ofte blive erstattet af udefra kommende "aktive" trykspændinger, der er rettet ind mod armeringen. Sådanne aktive trykspændinger kan fx.

forekomme ved en bjælkeunderstøtning eller ved en søjle-bjælkesamling, hvor reaktionen hhv. søjlekraften er den aktive kraft, der klemmer sammen om armeringen. En tilsvarende, men mindre og "passiv" effekt vil også kunne forekomme ved krydsende armeringsstænger, ved bøjler i en bjælke eller ved anden tværarmering.

Det lokale system af revner - som beskrevet ovenfor - giver ikke i sig selv anledning til, at forbindelsen mellem beton og armering brydes, men dette kan selvfølgelig ske, såfremt lasten øges eller andre brudformer indtræder. Specielt ved store armeringsstænger og lille indstøbningslængde kan det forekomme, at betonens trykbrudspænding overskrides. Omvendt kan det for små armeringsdimensioner ske, at armeringen flyder uden, at betonen når sin brudspænding.

## 2.2.2 Armeringens egenskaber

Flere materialer vil kunne opfylde de ovenfor formulerede krav til et armeringsmateriale, men af bl.a. prismæssige årsager har stål indtil videre været det foretrukne armeringsmateriale. Andre materialer som glas, plast og kul vil dog sikkert i fremtiden blive betragtet som et muligt alternativ, da de efterhånden vil blive prismæssigt konkurrencedygtige samt have andre fordele som fx korrosionsbestandighed. Det er dog stål, der fortsat er enerådende som armeringsmateriale i normalt forekommende betonkonstruktioner, så derfor vil kun dette armeringsmateriale blive omtalt i dette afsnit.

Udover at være prismæssigt konkurrencedygtig har stålet en række attraktive egenskaber, der gør det særdeles velegnet som armeringsmateriale. Blandt disse bør nævnes:

- stor trækstyrke
- stor stivhed
- stor sejhed
- god vedhæftning til beton
- god holdbarhed

Almindeligt "blødt" stål, S235 består af jern med maksimalt 0,2% kulstof. Det har en brudstyrke på 360 - 470 MPa og en flydespænding på 215 - 235 MPa. Ved *tillægning* af kul, mangan, silicium, chrom og kobber i meget små mængder kan stålets styrkeegenskaber imidlertid øges betydeligt. Eksempelvis er ribbeståls styrke øget ved tillægning af mangan. Effekten af en sådan tillægning kan endvidere forøges gennem en *varmebehandling* efter valsningen.

Stålets styrkeegenskaber kan også forbedres gennem en *kolddeformation*, men virkningen heraf forsvinder dog atter ved en opvarmning til glødning. Ved normal brug vil kolddeformerede stål være udsat for *ældning*, der medfører, at styrken øges marginalt samtidig med, at stålet bliver mere sprødt. Ny tentor fra stålvalseværket i Frederiksværk fremstilles nu ved anvendelse af *bratkøling*, dvs. påsprøjtning af koldt vand i stedet for ved en kolddeformation.

Kombineres legering med en varmebehandling og en efterfølgende kolddeformation, får man forskellige typer *spændstål*, der anvendes som forspændingsarmering. Sådanne stål er karakteristiske ved at have en meget høj brudstyrke og en relativ lille brudforlængelse.

I figur 2.2-3 er *trækarbejdslinien* for en række stål gengivet, og det fremgår heraf, at stål har et elasticitetsmodul, der er uafhængigt af stålets styrke. Iht. såvel DS 411 og EC2 kan man ansætte stålets karakteristiske E-modul til  $2,0 \times 10^5$  MPa.

Armeringsståls trækstyrke angives ved de karakteristiske værdier af den øvre trækflydespænding  $f_{yk}$  eller 0,2 pct.-spændingen og trækbrudstyrken  $f_{tk}$ .

Trykflydespændingen kan iht. DS 411 sættes i relation til stålets karakteristiske trækflydespænding  $f_{yk}$ , idet man sætter den karakteristiske trykflydespænding  $f_{yck} = f_{yk}$  for armering, der ikke er kolddeformeret under fremstillingen, mens man sætter  $f_{yck} = 0,8f_{yk}$  for armering, der er kolddeformeret.

For at sikre, at stålet har tilstrækkelig flydeegenskaber og tilstrækkelig sejhed eller duktilitet, kræves det for slap armering, at

$$- (f_t / f_y)_k \geq 1,08$$

og, at

- $A_{jk} \geq 3\%$  for duktilitetsklasse A
- $A_{jk} \geq 8\%$  for duktilitetsklasse B

hvor  $A_{jk}$  er den jævnt fordelte, blivende forlængelse efter brud målt iht DS 13080.  $A_{jk}$  benævnes den jævnt fordelte forlængelse, men reelt er det en tøjning og ikke en forlængelse, der angives.

Alternativt kan den karakteristiske værdi  $A_{gk}$  af den ikke-elastiske del af prøveemnets tøjning målt ved en last svarende til peak-værdien på armeringsstangens arbejdslinie benyttes i stedet for  $A_{jk}$ .

Disse duktilitetskrav til armeringsstålet udgør en af de grundlæggende forudsætninger for betonnormens plasticitetsteoretiske beregningsmodeller, idet disse modeller er baseret på antagelsen om, at bruddet iht. DS 409 er et sejt brud uden bæreevnereserve. Kravene eftervises ved trækprøvning.

Udover de ovenfor nævnte fundamentale krav til armeringsstålets trækstyrke og sejhed, stiller DS 13080 yderligere krav om en række egenskaber, der ligeledes dokumenteres ved prøvning. Sådanne prøver omfatter:

- Bøjeprøvning
- Udmattelsesprøvning
- Prøvning af forankringsevne
- Bestemmelse af metervægt

Ved *bøjeprøven* bøjes et prøvestykke  $180^\circ$  om en dorn, hvis diameter D afhænger af armeringsstålets nominelle diameter d. Dorn diameteren er iht. DS 13080  $2 \times d$  for  $d \leq 12\text{mm}$  og  $4 \times d$  for  $d \geq 12\text{mm}$ . Prøvestykket må efter prøvningen ikke udvise brud eller revner.

Bedømmelsen skal ske visuelt uden brug af optiske instrumenter.

*Udmattelsesprøvningen* foretages ved bestemmelse af udsvingsstyrken  $R_{0/+p}$  i henhold til DS 10010 og skal for  $2 \times 10^6$  skiftende påvirkninger mindst være 1/3 af den karakteristiske værdi af flydespænding  $f_{yk}$  eller 0,2-spændingen.

*Forankringsevnen* kvantificeres iht. DS 2082 ved *forankringsfaktoren*  $\zeta$ . Forankrings-faktoren, der bestemmes som forholdet mellem forankringsbrudkraften for en prøvestang og en gevindskåren referencestang med tilnærmelsesvis samme vægt pr. længdeenhed, skal opfylde følgende krav

- $\zeta \geq 0,6$  for ribbestål
- $\zeta \geq 0,4$  for overfladeprofileret stål
- $\zeta$  pålægges ingen krav ved glat konstruktionsstål

*Metervægten* bestemmes ved vejning og længdemåling af armeringsstænger. For samme nominelle diameter er den nominelle metervægt for rundstål og overfladeprofileret stål den samme, mens den for ribbestål ansættes 3% større end den nominelle metervægt for rundstål med samme diameter. Metervægtstolerancen må variere fra  $\pm 8\%$  af den nominelle metervægt for armeringsstål med  $\phi \leq 8\text{mm}$  til  $\pm 4\%$  for armeringsstål med  $\phi \geq 20\text{mm}$ .

Kravene til armeringens træk- og udsvingsstyrke samt bukkeegenskaber skal være opfyldt i såvel uældet som ældet tilstand, idet ældningen foretages ved, at prøveemnet før prøvning opvarmes til  $100^\circ\text{C}$  i mindst 6 timer. Kunstig ældning kan dog undlades for varmvalsede armeringsstål produceret som rette stænger uden kolddeformation. For de rustfaste stål kvaliteter, hvor der ikke kan forekomme ældningsfænomener, kan kunstig ældning ligeledes udelades.

For kolddeformeret armeringsstål skal 40% af prøverne udføres i uældet tilstand.

De krav, der i DS 13080 stilles til kemisk sammensætning, mekaniske, teknologiske og geometriske egenskaber for ribbestål, der anvendes som armering i betonkonstruktioner i form af stænger, coils (armering i ruller) eller armeringsnet, genfindes i det store og hele i Euronormen EN10080. Tilsvarende genfindes de krav og retningslinier, som er indeholdt i DS 411 principielt i EC2.

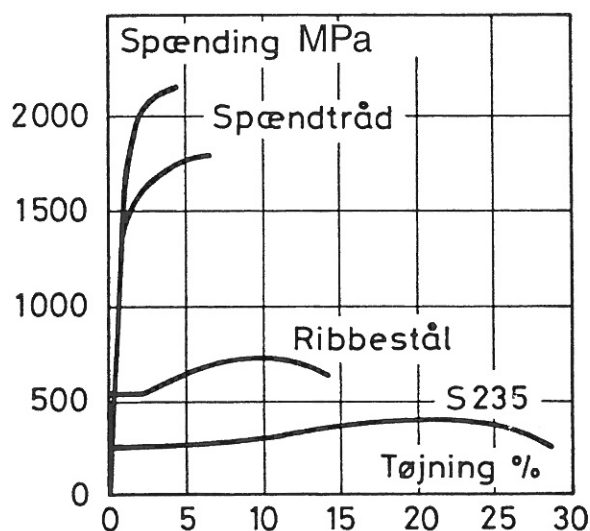
### 2.2.3 Armeringens arbejdslinie

Da armeringen i en betonkonstruktion i det væsentlige vil være udsat for enakset træk eller tryk, er det tilstrækkeligt blot at kende armeringens arbejdslinie for disse spændingstilstande. Og da forskelle mellem træk- og trykarbejdslinien ofte kan negligeres, er det normalt tilstrækkeligt at bestemme trækarbejdslinien.

Armeringens trækarbejdslinie bestemmes ved prøvning iht. DS 13080, og afprøvningen udføres iht. DS/EN 10002-1. Prøvestykket til trækprøvning skal have en længde på mindst  $30 \times d$ , dog mindst 500 mm, og skal være ubearbejdet på den frie længde. Den jævnt fordelte forlængelse efter brud skal bestemmes ved måling over en strækning, som før trækforsøget har haft en

længde på mindst 100 mm, og hvis begyndelsespunkt skal ligge i en afstand af mindst  $2,5 \times d$  fra brudstedet.

Eksempler på trækarbejdslinier for forskellige armeringsstål er vist i figur 2.2-3



Figur 2.2-3. Arbejdslinier for forskellige armeringsstål.

Arbejdslinier baseret på forsøg bestemmes på følgende måde.

På grundlag af et armeringsståls målte trækarbejdslinier fastlægges armeringens *karakteristiske arbejdslinie* iht DS 10111. Ud fra mindst 5 prøver udtaget spredt i partiet, defineres den karakteristiske trækarbejdslinie som den arbejdslinie, der fremkommer af middelarbejdslinien ved en affinitet i spændingsaksens retning, og som indeholder den karakteristiske trækflydespænding  $f_{yk}$  eller 0,2 pct.-spændingen og den dertil hørende tøjning. Middelarbejdslinien fastlægges som middelværdierne af spændingerne for en given tøjning.

Trækbrudtøjningen for armeringen  $\varepsilon_u$  defineres iht. DS 411 som tøjningen svarende til den karakteristiske arbejdslinies toppunkt, dvs.  $\varepsilon_u = A_{gt}$ , hvor  $A_{gt}$  er den totale tøjning ved en last svarende til peak-værdien af armeringens arbejdslinie.

Fastlægges arbejdslinien ikke ved forsøg, kan den karakteristiske arbejdslinien for et stål *med* udpræget flydegrænse erstattes af en bilinear arbejdslinie, hvor den første strækning består af en ret linie med hældningskoefficienten  $E_{sk}$  svarende til det elastiske område dvs. for tøjningen  $\varepsilon_s$  beliggende i intervallet  $0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yk}$  og en vandret linie svarende til flydespændingen  $f_{yk}$  for  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yk}$ .

For et stål *uden* udpræget flydegrænse har den første strækning også hældningen  $E_{sk}$  for  $\varepsilon_s \leq f_{0,2k} / E_{sk}$ , mens den vandrette strækning er defineret ved  $\sigma_s = f_{0,2k}$ ; se figur 2.2-4.

Den karakteristiske værdi af brudtøjningen  $\epsilon_{uk}$  defineres som

$$\epsilon_{uk} = A_{gtk} = A_{jk} + f_{tk} / E_{sk} \quad (2.2-4)$$

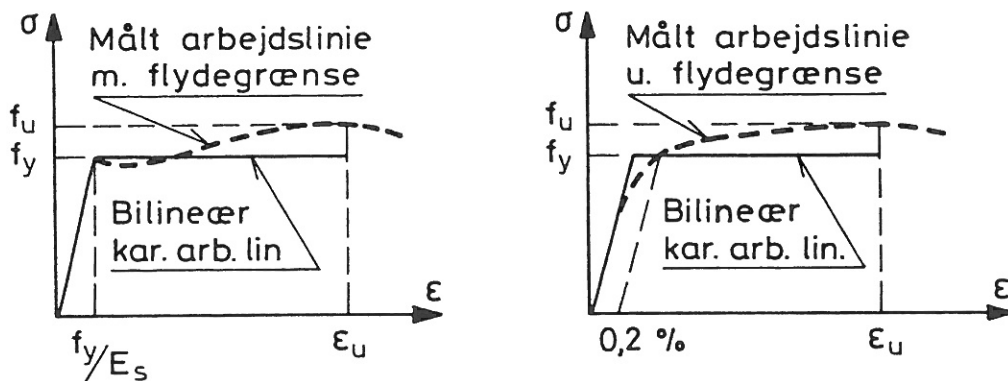
hvor

$A_{jk}$  er den karakteristiske værdi af den garanterede, jævnt fordelte forlængelse efter brud

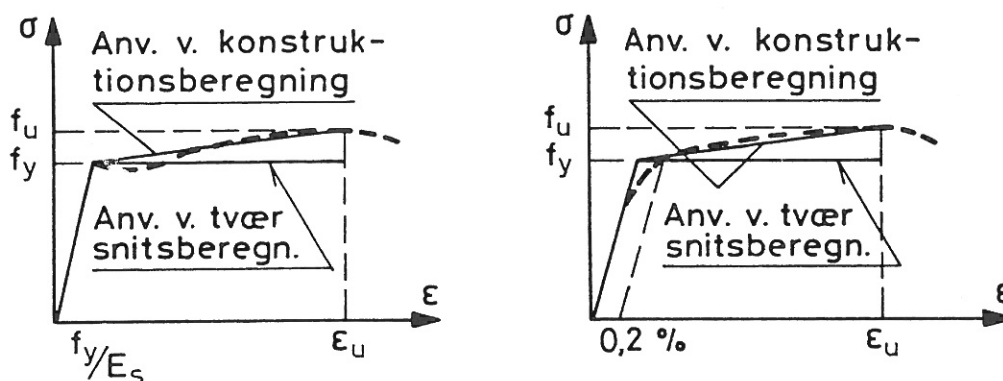
$f_{tk}$  er den karakteristiske trækstyrke

$E_{sk}$  er det karakteristiske elasticitetsmodul

### Karakteristiske arbejdslinier iht. DS411



### Karakteristiske arbejdslinier iht. EC2



Figur 2.2-4. Karakteristiske arbejdslinier for armering iht. DS 411 og EC2.

Det principielle forløb af de karakteristiske arbejdslinier for et armeringsstål i henhold til DS 411 og EC2 er vist i figur 2.2-4.

I EC2 tillades det - som i DS 411 - enten at anvende materialets virkelige arbejdslinie som den karakteristiske arbejdslinie eller at definere den ved en bilineær, karakteristisk arbejdslinie. For et

armeringsstål *med* udpræget flydegrænse, har den første linie i den bilineære arbejdslinie hældningskoefficienten  $E_{sk}$  i intervallet  $0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yk}$ , mens den anden rette linie, der også er skrå, er bestemt af de to punkter  $(\varepsilon_{yk}, f_{yk})$  og  $(\varepsilon_{uk}, f_{tk})$  for  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yk}$ .

For stål *uden* udpræget flydegrænse erstattes koordinaterne til liniernes fællespunkt af koordinaterne  $(f_{0,2k} / E_{sk}, f_{0,2k})$ , mens forløbet af linierne, principielt er det samme. Uanset flydegrænse tillader EC2 endvidere at erstatte den sidste skrå linie med en vandret linie som i den danske norm, se figur 2.2-4.

I følge EC2 kan den idealiserede bilineære arbejdslinie vist i figur 2.2-4 generelt anvendes ved konstruktionsberegninger indenfor temperaturintervallet  $-20^{\circ}\text{C}$  til  $200^{\circ}\text{C}$ , når de generelle sejhedskrav, der tidligere er specificeret under sejhedsklasser, er opfyldt.

## 2.2.4 Armeringens temperaturafhængighed.

Armeringens mekaniske egenskaber er alle temperaturafhængige, hvilket der må tages højde for i beregningerne. Således skal betonkonstruktioner, hvortil der stilles krav om brandmodstand, i overensstemmelse med DS 409 og DS 410, udformes så bæreevnen er tilstrækkelig under brandpåvirkning.

Foreligger der ikke veldokumenterede målinger af materialeegenskaberne, angiver DS 411 størrelsen af en række mekaniske parametre, der kan anses for at være på den sikre side

Armeringsstålets karakteristiske arbejdslinie under opvarmning kan regnes at bestå af tre dele, som vist i figur 2.2-5. De tre dele forløber som følger:

del I : en ret linie indtil proportionalitetsgrænsen  $(\varepsilon_{sp,\theta}, f_{spk,\theta})$

del II : en ellipse med lodret og vandret hovedakse, der tangerer del I i punkt  $(\varepsilon_{sp,\theta}, f_{spk,\theta})$  og har vandret tangent i punkt  $(0.02, f_{2.0k,\theta})$

del III : en vandret linie fra punkt  $(0.02, f_{2.0k,\theta})$  til punkt  $(\varepsilon_{uk,\theta}, f_{2.0k,\theta})$

Den del II af armeringsstålets karakteristiske arbejdslinie, der er elliptisk, er bestemt ved

$$\sigma_{sk}(\theta) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (0.02 - \varepsilon_s)^2} + f_{spk,\theta} - c \quad (2.2 - 5)$$

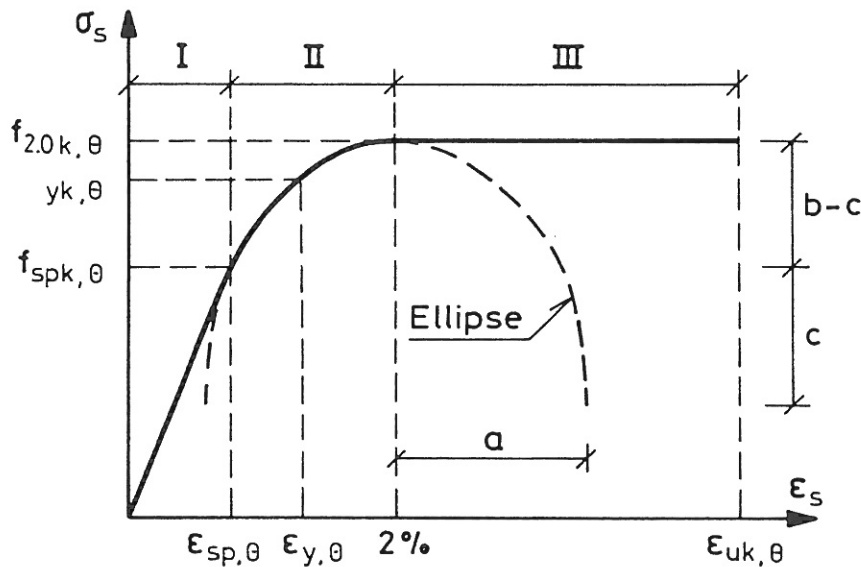
hvor størrelserne a, b og c er bestemt af følgende udtryk

$$a^2 = (0.02 - \varepsilon_{sp,\theta}) + c (0.02 - \varepsilon_{sp,\theta}) / E_{spk,\theta}$$

$$b^2 = E_{spk,\theta} (0.02 - \varepsilon_{sp,\theta}) c + c^2$$

$$c = (f_{2.0k,\theta} - f_{spk,\theta})^2 / [E_{spk,\theta} (0.02 - \varepsilon_{sp,\theta}) - 2 (f_{2.0k,\theta} - f_{spk,\theta})]$$

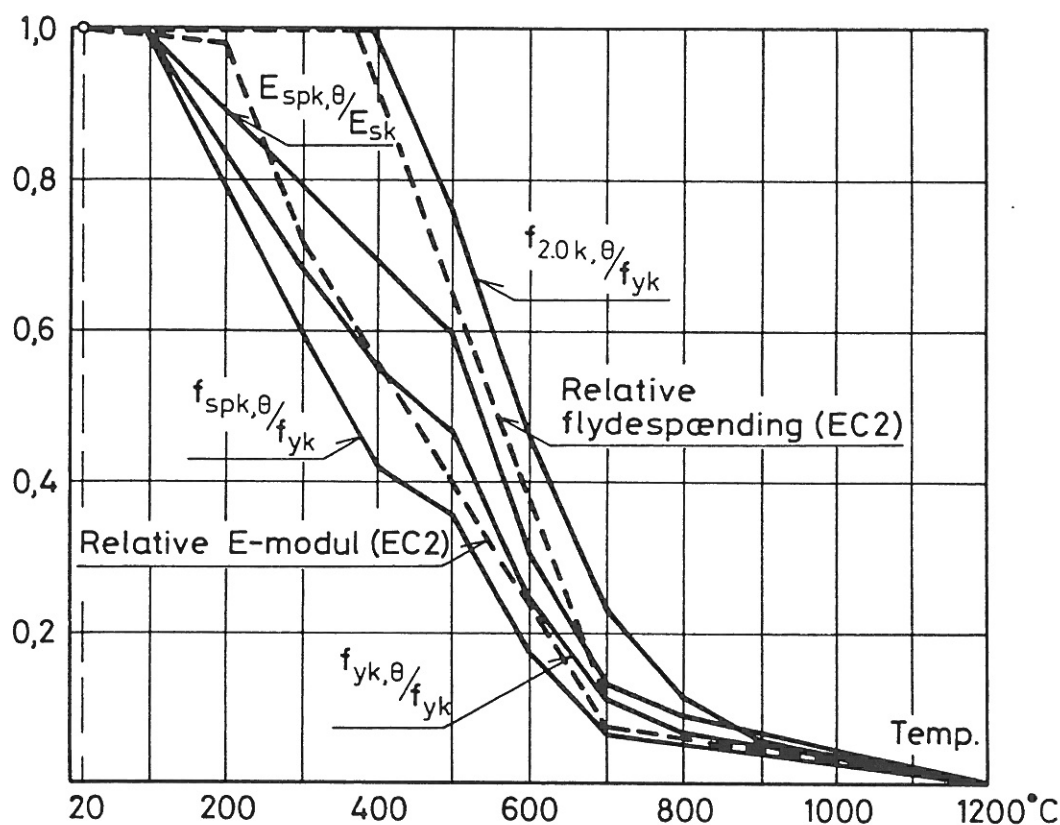
Tøjningsparametrene  $\varepsilon_{y,\theta}$  og  $\varepsilon_{uk,\theta}$  sættes til de værdier, der gælder for den kolde tilstand, dvs.  $\varepsilon_y$  og  $\varepsilon_{uk}$ .



Figur 2.2-5. Armeringsståls karakteristiske arbejdslinie ved  $\theta^{\circ}\text{C}$  under opvarmning.

I DS 411 er de relative værdier af relevante karakteristiske materialeparametre i forhold til de tilsvarende værdier for den kolde tilstand givet for stål, der er fremstillet ved henholdsvis varmvalset fri køling (+Q), varmvalset brat køling (+AC) og koldvalset koldtrukket (+C). De relative værdier er angivet for ståltemperaturer svarende til multipla af  $100^{\circ}\text{C}$ . For mellemliggende værdier tillader normen, at der interpoleres retlinet mellem de angivne værdier. I figur 2.2-6 er det relative E-modul og den relative flydespænding for stål fremstillet ved varmvalsning og fri køling optegnet som eksempel på forløbet af sådanne parametres variation med temperaturen.

I EC2 part 1-2, Branddimensionering er tilsvarende relative materialeparametre angivet omend forløbet er lidt forskelligt fra forløbet angivet i DS 411. Forløbet svarende til EC2 er også vist i figur 2.2-6, men med stiplede linier.



Figur 2.2-6. Relative, temperaturafhængige materialeparametre for stål iht. DS 411 og EC2.

### 2.2.5. Armeringens klassifikation, handelsformer og mærkning.

På det danske marked skal samtlige armeringsstål opfylde kravene i DS 411 og i DS 13080. Ved svejsning af armeringsstål anvendt som ikke forspændt armering i betonkonstruktioner, skal kravene i DS 13082 og DS 13083 overholdes. Svejste net må kun benyttes som armering, når de tilfredsstillende kravene i DS 13082. De stillede krav til armeringsstålet skal være opfyldt på det tidspunkt, hvor armeringen indstøbes i betonen, og armeringens kvalitet og benævnelse skal være angivet i forhold til dansk eller udenlandsk standard.

Det armeringsstål som normalt anvendes til ikke forspændt armering leveres iht. DS 13080 som rette stænger i form af ribbestål, overfladeprofileret stål eller glatte stænger.

Armeringsstål klassificeres efter den øvre trækflydespænding  $f_y$  eller 0,2 pct.-spændingen samt duktilitet og overfladeprofileret stål eller glatte stænger. Men herudover karakteriseres de også efterfølgende ved stålenes fremstillingsproces fx:

- varmvalset, efterfulgt af fri køling (styrke opnået ved legering)
- varmvalset, efterfulgt af bratkøling (styrke opnået ved hærkning og selvanløbning)
- koldtrukket eller koldvalset (styrke opnået ved kolddeformation)

Armeringsstål klassificeret efter DS 13080 betegnes med symbolet "B" efterfulgt af 3 cifre, der angiver den nedre grænse for den karakteristiske værdi af den øvre trækflydespænding  $f_{yk}$  eller 0,2 pct.-spændingen og foreskrives i klasserne

- B410 N/mm<sup>2</sup>
- B500 N/mm<sup>2</sup>
- B550 N/mm<sup>2</sup>

På det danske marked forhandles armeringsstål som stænger,coils eller svejste armeringsnet.

Alle armeringsstål forhandles i dimensionerne 8, 10, 12, 14, 16, 20 og 25mm. Derudover forhandles glat betonstål i dimensionerne 5, 6, 7 og 32 mm, ribbestål B410 i 35mm og armeringsstål B 550 i dimensionen 6 mm.

Svejste, koldtrukne armeringsnet leveres med maskestørrelser på 100, 150 og 200mm i tråddimensionerne 5, 6, 8, 10 og 12 mm samt med maskestørrelsen 50 mm i 5 mm tråd, maskestørrelsen 250 mm i 6 mm tråd og maskestørrelsen 150 mm i 7 mm tråd.

Afprøvningen af armeringsstålet er iht DS 13080 og mod dokumentation overladt til stålproducenten eller stålleverandøren således, at en afprøvning ikke skal foregå på byggepladsen. For stål leveret med inspektionscertifikat kan modtagekontrol af materialerne på byggepladsen således blot udføres som identifikationskontrol.

Armeringsstål klassificeret efter DS 13080 betegnes efter gældende retningslinier for betegnelse af stål som anført i DS/EN 10027-1 og DS/INF 87, dvs. betegnelsen omfatter:

- a) Produktform (Stang: Armeringsstål i rette stænger);
- b) Standardens nummer (DS 13080);
- c) Nominel diameter  $\phi$ ;
- d) Armeringsstålets styrke, duktilitet og overfladekarakteristika;
- e) Fremstillingsproces
  - Varmvalset, fri køling (+Q)
  - Varmvalset, bratkølet (+AC)
  - Koldvalset, koldtrukket (+C);
- f) Øvrige informationer
  - Rustfrit (+G1)

Som eksempel på hvorledes et armeringsstål betegnes, kan følgende eksempel betragtes:

Stang DS 13080-20-B550BR +Q

Ovennævnte eksempel betegner et armeringsstål i rette stænger klassificeret efter DS 13080 og med en nominal diameter på 20 mm, en flydespænding på 550 MPa, i duktilitetsklasse B (8%) samt med ribbeudformning ( $\zeta \geq 0,6$ ) og fremstillet ved varmvalsning og fri køling.

Hvert armeringsstål er ved indvalsning, prægning eller på anden måde forsynet med kodetegn således, at producent, styrkeklasse og duktilitetsklasse til enhver tid kan identificeres entydigt.

Når armeringsstål leveres på byggepladsen skal stålets egenskaber dokumenteres ved overensstemmelsesmærkning med en dokumenteret sporbarhed til producenten via mærkeskilt og indvalset mærkning. I modsat fald skal armeringsstålet underkastes en partikontrol, der dokumenterer, at alle krav i DS 13080 er opfyldt.

Mærkningen skal være påført hver enkelte forsendelse, slæng eller bundt, men mærkningen kan ved leverancer direkte fra værk blot være påført identifikationscertifikatet. Herudover kan producenten tilføje firmanavn, stål kvalitet, charge nr., vægt m.v. på mærkeskiltet.

Producenter af armeringsstål i stænger eller coils samt virksomheder, der retter armeringsstål fra coils eller som fremstiller maskinsvejste armeringsenheder kan tildeles en licens, der giver disse virksomheder ret til at certificere armeringsstål i overensstemmelse med kravene i DS 13080, DS 13082 eller DS 13084

Til trods for lighederne mellem danske og europæiske normer, må man være opmærksom på, at der også er mange forskelle. Eksempelvis klassificeres armeringsstål iflg. EC2 ud fra følgende parametre:

- styrke: angives ved den karakteristiske flydespænding  $f_{yk}$  i MPa
- klasse: der opereres med to sejhedsklasser:
  - høj klasse (H), hvor  $\varepsilon_{uk} > 5.0\%$  og  $(f_t/f_y)_k > 1.08$
  - normal klasse (N), hvor  $\varepsilon_{uk} > 2.5\%$  og  $(f_t/f_y)_k > 1.05$
- størrelse:
- overfladeegenskaber:
  - der defineres to karakteristiske overfladeformer:
    - ribbestænger med stor vedhæftningsevne
    - almindelige, glatte stænger med lille vedhæftningsevne.
  - Overfladen karakteriseres ved værdien af ribbefaktoren  $f_R$ .
- svejsbarhed: stålene skal opfylde kravene i de relevante standarder.

### **3 Sikkerhedsbestemmelser for betonkonstruktioner**

### 3. Sikkerhedsbestemmelse for betonkonstruktioner

#### 3.1 Generelt

Enhver betonkonstruktion må dimensioneres og udføres på en sådan måde, at den i løbet af den tilsigtede levetid med rimelig sikkerhed og indenfor rimelige økonomiske rammer

- til stadighed vil opfylde sin funktion
- kan modstå alle laster og påvirkninger, der med rimelighed kan forventes at forekomme under såvel opførelse som brug

Opfyldelse af disse grundlæggende krav sikrer, at konstruktionens funktion og sikkerhed ved normalt brug er tilgodeset, men konstruktionen må endvidere dimensioneres og udføres på en sådan måde, at ulykkeslaste som brand, eksplosioner, nedstyrtninger eller fejl som konstruktions- og forudsætningsfejl ikke forvolder skade, der står i et urimeligt forhold til skadens årsag. De potentielle skadesmuligheder bør selvfølgelig elimineres eller reduceres i størst mulig udstrækning samtidig med, at konstruktionens følsomhed overfor disse skadesfremkaldende situationer reduceres mest muligt. Konstruktionens indre sammenhæng (konstruktionens robusthed) må derfor i videst mulig udstrækning være sikret på en sådan måde, at bortfald af et enkelt eller et begrænset antal konstruktionselementer kun medfører begrænsede og lokale skader.

Ovenstående krav til en betonkonstruktion kan opfyldes ved passende valg af materialer, ved hensigtsmæssig dimensionering og udformning af konstruktionsdetaljer samt ved relevant specifikation af kontrolprocedurer for projektering, produktion, udførelse og anvendelse. Kravene, der retter sig mod dimensionering, udførelse og kontrol, er normalt specificeret i en række normer og standarder.

Betonkonstruktioner vil normalt opnå en acceptabel og rimelig sikkerhed og funktion såfremt de dimensioneres og udføres i henhold til de danske normer *DS 409 Norm for sikkerhedsbestemmelser for konstruktioner*, *DS 410 Norm for last på konstruktioner* og *DS 411 Norm for betonkonstruktioner* eller i henhold til de europæiske normer *EC1 Projekteringsgrundlag og last på konstruktioner* og *EC2 Design of concrete structures, Part 1: General rules for buildings*. Ved større eller specielle konstruktioner kan det dog ikke forventes, at normerne er fuldt dækkende, hvorfor dimensioneringsgrundlaget nøjere må vurderes og fastlægges i hvert enkelt tilfælde. Såfremt en afvigelse fra det relevante normkompleks foretages, kan dette ske iht til normerne, men det skal i alle tilfælde dokumenteres, at en sådan afvigelse er forsvarlig. Normerne er iøvrigt affattet under den forudsætning, at brugeren har den nødvendige og tilstrækkelige teoretiske og tekniske baggrund for at forstå og anvende normerne efter deres hensigt.

Såvel danske som europæiske normer tillader, at sikkerheden vurderes enten ud fra beregning eller ved prøvning. Udføres både en beregning og en prøvning, vil resultatet af prøvningen have

forrang. For de konstruktionselementer i den virkelige konstruktion, som ikke undersøges ved en modelprøvning, skal eftervisningen af sikkerheden ske ved beregning.

#### *Sikkerhedsklasser og dimensioneringstilstande*

I den danske norm DS 409 relateres en konstruktions sikkerhed til de mulige menneskelige og økonomiske omkostninger, som et svigt af konstruktionen vil kunne forvolde. Dette sker gennem indførelse af begrebet *sikkerhedsklasse*, idet en øget risiko for personskade og/eller tab af økonomiske værdier modsvarer af krav om øget konstruktionssikkerhed. Indledningsvis må man derfor ved enhver dimensioneringsopgave vurdere konsekvenserne af et konstruktionssvigt og henhøre den aktuelle konstruktion til en af følgende sikkerhedsklasser,

- *lav sikkerhedsklasse*, hvor et eventuelt svigt indebærer meget lille risiko for personskade og kun vil medføre små samfundsmæssige konsekvenser
- *normal sikkerhedsklasse*
- *høj sikkerhedsklasse*, hvor et eventuelt svigt indebærer stor risiko for personskader, eller vil medføre store samfundsmæssige konsekvenser.

De fleste konstruktioner henføres til normal sikkerhedsklasse, men en vurdering må i hvert enkelt tilfælde foretages fx på baggrund af normens vejledning.

I den europæiske norm EC1 opererer man ikke med begrebet sikkerhedsklasser. Derimod opererer man med et andet overordnet begreb *dimensioneringstilstande*, der omfatter de mulige lastsituationer, som kan komme på tale. I henhold til EC1 vurderer man indledningsvis de forhold, som en betonkonstruktion udsættes for i hele sin levetid, og de relevante dimensioneringstilstande, der karakteriserer disse forhold, udvælges. De valgte dimensioneringstilstande skal være tilstrækkeligt dækkende og så forskellige, at de omfatter alle forhold, der med rimelighed kan forventes at optræde under opførelse og brug af konstruktionen. Dimensioneringstilstandene klassificeres som:

- *vedvarende tilstande*, der svarer til forhold ved normal anvendelse;
- *overgangstilstande*, der svarer til midlertidige forhold, som fx under opførelse eller reparation;
- *ulykkestilstande*, der svarer til ekstraordinære forhold som fx brand, eksplosion eller nedstyrtning;
- *seismiske tilstande*, hvor konstruktionen udsættes for seismiske påvirkninger.

#### *Kontrol- og miljøklasser*

En konstruktions sikkerhed afhænger i høj grad af de materialer, der indgår i konstruktionen og dermed også af den usikkerhed, der knytter sig til værdien af materialeparametrene. Sikkerheden afhænger desuden af den omhu hvormed konstruktionen udføres, hvorfor det er nødvendigt at udføre såvel en *materialekontrol* som en *udførelseskontrol* således, at man har en acceptabel og

kendt sikkerhed for, at de forudsætninger man har lagt grund for dimensioneringen er i overensstemmelse med virkeligheden.

I de danske normer skelner man mellem følgende tre *kontrolklasser*

- *skærpet kontrol*
- *normal kontrol*
- *lempet kontrol*

Kontrolomfanget indenfor hver af de tre grupper er specificeret enten direkte i DS 411 eller i andre normer, hvortil der henvises.

Den færdige konstruktion vil være udsat for en række nedbrydende påvirkninger, der bl.a. omfatter vejrlig, røg, kemikalie- og vandpåvirkning. For at modvirke indflydelsen af sådanne påvirkninger må der bl.a. stilles krav til betonens tæthed og til tykkelsen af det betonlag (dæklaget), der beskytter armeringen. Kravene gradueres efter graden af miljøets aggressivitet, idet man opererer med følgende fire *miljøklasser*

- *ekstra aggressiv miljøklasse* omfatter fugtigt miljø, hvor der enten tilføres eller ophobes store mængder alkalier, og/eller chlorider til betonoverfladen.
- *aggressiv miljøklasse* omfatter fugtigt miljø, hvor der kan tilføres alkalier og/eller chlorider til betonoverfladen, eller hvor der forekommer kraftig fugtbelastning med risiko for vandmætning i kombination med frostpåvirkning.
- *moderat miljøklasse* omfatter fugtigt miljø, hvor der ikke er risiko for frostpåvirkning i kombination med vandmætning, og hvor der ikke i nævneværdig grad kan tilføres alkalier og/eller chlorider til betonoverfladen.
- *passiv miljøklasse* omfatter tørt miljø, hvor korrosion ikke kan forekomme.

Det er nødvendigt at forholde sig til spørgsmålet om kontrol- og miljøklasse på et tidligt tidspunkt under dimensioneringen, da vurderinger heraf har indflydelse på de efterfølgende skridt i beregningsgangen.

#### *Levetid og holdbarhed*

Det er en forudsætning ved projekteringen, at konstruktionen som helhed og samtlige delkonstruktioner har en sådan *holdbarhed*, at de stillede funktionskrav forbliver opfyldt i hele konstruktionens levetid, såfremt konstruktionen bliver passende vedligeholdt. Konstruktionen skal derfor projekteres på en sådan måde, at den miljømæssige nedbrydning ikke forringer dens holdbarhed mere, end hvad den planlagte vedligeholdelse kan kompensere for.

Konstruktionens forventede levetid skal vurderes og fastlægges således, at konstruktionen kan opfylde sit formål i hele sin levetid uden andre og væsentlige reparationer end de, der følger med normal vedligeholdelse. I EC1 er den forventede levetid opdelt i 4 klasser som angivet i tabel 3.1.

For at sikre en tilstrækkeligt holdbar konstruktion i hele konstruktionens levetid, er det nødvendigt, at man tidligt i projektforløbet forholder sig til og træffer beslutning om

- konstruktionens tilsigtede og eventuelle fremtidige anvendelse
- fremtidige miljøpåvirkninger
- vedligeholdelse

da beslutningerne medfører krav til bl.a.

- konstruktionssystem og konstruktionsudformning
- konstruktionens ydeevne
- materialernes sammensætning, egenskaber og ydeevne
- udførelseskvalitet og kontrolomfang
- særlige beskyttelsesforanstaltninger

Klasse	Krævet forventet levetid antal år	Eksempler
1	1 - 5	Midlertidige konstruktioner
2	25	Udskiftelige bærende dele, fx kranbjælker, lejer mv.
3	50	Bygningskonstruktioner og andre almindelige konstruktioner
4	100	Meget store bygningskonstruktioner, broer og andre anlægskonstruktioner.

Tabel 3.1. Klassifikation af forventet levetid.

Iht. DS 409 involverer kravet til materialernes egenskaber og ydeevne bl.a. en stillingtagen til den *brudtype*, som konstruktionen forventes at udvise. Brudtypen bedømmes på grundlag af forløbet af materialernes eller konstruktionens deformationsforhold ved de forekommende laster. I normen skelnes der mellem tre brudtyper:

- *sejt brud med bæreevnereserve*; fx i form af tøjningshærdning
- *sejt brud uden bæreevnereserve*; fx ideal plastisk materiale
- *skørt brud*; fx lineær elastisk materiale

I EC2 forekommer en tilsvarende skelnen mellem brudtyper.

Indenfor det danske normkompleks afhænger krav til en konstruktions sikkerhed af brudtype, kontrolklasse og sikkerhedsklasse. Krav til holdbarheden afhænger derimod af miljøklassen.

For at sikre, at konstruktionen opfylder de stillede krav til sikkerhed og ydeevne og, at den er i overensstemmelse med de forudsætninger, der er gjort under projekteringen, er det helt nødvendigt, at der foretages en løbende *kvalitetssikring*. En sådan omfatter fastlæggelse af pålidelighedskrav, organisationsmæssige forhold og kontrol under projektering, udførelse og anvendelse samt vedligeholdelse af konstruktionen.

### 3.2 Grænsetilstande

Kravene til en konstruktions sikkerhed formuleres i forhold til såkaldte *grænsetilstande*, der defineres som de tilstande, hvor konstruktionen *netop kan opfylde* de projekteringsmæssige krav til ydeevnen. Grænsetilstandene inkluderer to tilstande:

- *brudgrænsetilstand*
- *anvendelsesgrænsetilstand*

Dimensioneres der ud fra DS 409, henføres grænsetilstandene til en af de tre sikkerhedsklasser (lav, normal eller høj). Dimensioneres der derimod ud fra EC1 henføres grænsetilstandene til en af de fire dimensioneringstilstande (vedvarende, midlertidige, ulykke eller seismisk), der er nævnt på foregående side.

*Brudgrænsetilstande* er tilstande, der svarer til sammenstyrtning eller totalsvigt af hele konstruktionen eller dele heraf.

*Anvendelsesgrænsetilstande* er tilstande, der svarer til, at de stillede anvendelseskrav til en konstruktion eller dens delelementer under normal brug netop opfyldes.

Som eksempler på brudgrænsetilstande kan nævnes materialebrud, udmattelsesbrud, dannelse af flydemekanismer, instabilitet (udknækning, kipning, foldning, væltning) og progressiv kollaps. Som eksempel på overskridelse af anvendelsesgrænsetilstande kan nævnes overskridelse af krav til tæthed, korrosion, hygiejne, udseende eller komfort, foranlediget af fx deformationer, revnedannelse og svingninger eller vibrationer.

Grænsetilstandsprojektering gennemføres ved:

- opstilling af konstruktions- og lastmodeller for de relevante grænsetilstande, der skal overvejes i de forskellige lasttilfælde og dimensioneringstilstande.
- eftervisning af, at grænsetilstandene ikke er overskredet, når *regningsmæssige værdier* for laster, materialeparametre og geometriske data benyttes i modellerne. Begrebet regningsmæssige værdier er nærmere omtalt under afsnit 3.7.

Styrkeberegningerne i brudgrænsetilstanden gennemføres enten efter elasticitets- eller pla-

sticitetsteorien, mens beregningerne i anvendelsesgrænsetilstanden udelukkende gennemføres efter elasticitetsteorien.

Afvejningen af, om en konstruktion har den fornødne sikkerhed eller ej, foretages ud fra en beregningsmodel for konstruktionen i den aktuelle grænsetilstand samt ud fra en *sikkerhedsmetode*. Ved hjælp af sikkerhedsmetoden vurderer man, om konstruktionen med en krævet sikkerhed kan modstå de belastninger, som den påføres.

I den aktuelle grænsetilstand må *konstruktionens modstandsevne*  $R$  netop modsvare den *lastvirkning*  $S$ , som belastningen på konstruktionen medfører, hvilket kan udtrykkes ved

$$R - S = 0$$

hvor

$R$  er konstruktionens modstandsevne

$S$  er lastvirkningen (spænding, kraft eller moment)

Beregningsmodellen, der anvendes, skal indeholde de relevante *basisvariable*, dvs. påvirkninger, geometriske parametre og materialeparametre. I det følgende vil disse parametre blive behandlet mere indgående.

### 3.3 Laster

Påvirkninger er ikke blot ydre laster og miljøpåvirkninger, men også temperaturpåvirkninger, svind, krybning og sætninger, der er af betydning for konstruktionens spændings- og deformationsforhold. Kun påvirkninger i form af laster vil blive behandlet her.

Laster inddeles såvel i DS 409 som i EC1 efter deres *variation i tiden* i flg. grupper:

- *permanent last* ( $G$ ) er en last, hvis variation i tiden er uvæsentlig i forhold til middelværdien. Permanent last forudsætter derfor at forblive konstant og virke på konstruktionen i hele dens brugstid. Eksempler på permanent last er tyngden af permanent placerede konstruktionsdele og fast udstyr samt permanent virkende jord- og vandmasser.
- *variabel last* ( $Q$ ) er en last, hvis størrelsesvariation i tiden ikke er uvæsentlig i forhold til middelværdien. Der skelnes mellem variabel last ved fågangspåvirkning og variabel last ved udmattelsespåvirkning. De variable laster underinddeles i tre typer *afhængig af deres oprindelse*. Disse laster er:
  - *nyttelaster*, der er fri last fra fx personer, inventar, installationer, maskiner og køretøjer.
  - *naturlaster* dvs. vind, sne, is- og bølgelaster samt temperaturpåvirkninger.

- *vandret masselast* er vandrette laster, der tages i regning for at sikre en bygningskonstruktions styrke og stabilitet overfor utilsigtede vandrette påvirkninger, som ikke er indbefattet i andre laster.
- *ulykkeslaster (A)*, omfatter eksplosionslast, nedstyrtningslast, påkørselslast og brandlast.

Lasterne inddeles tillige efter deres *variation i rummet* i flg grupper:

- *bunden last*, hvis værdi overalt på konstruktionen forudsættes fastlagt, når blot værdien er fastlagt i ét punkt, som fx egenlast eller dele af variabel last.
- *fri last*, hvis intensitet på konstruktionens forskellige dele forudsættes at kunne variere indbyrdes uafhængigt mellem nul og maksimalværdien, som fx frit varierende nyttelaster, vind- og snelaster.

Afhængig af hvorledes en last påføres konstruktionen, og hvorledes konstruktionen reagerer på lasten, skelner man mellem:

- *statisk virkende last*, som ikke medfører accelerationer af betydning i konstruktionen
- *dynamisk virkende last*, som medfører accelerationer af betydning for konstruktionens virkemåde.

Ovennævnte opdeling af laster genfindes i de europæiske normer EC1 og EC2, men herudover skelnes der tillige mellem følgende to lasttyper:

- *direkte last*, dvs. en kraft, der er påført konstruktionen.
- *indirekte last*, dvs. en påført eller forhindret deformation eller acceleration forårsaget af temperaturændringer, fugtvariationer, sætninger eller jordskælv.

Enhver last beskrives ved hjælp af en model (fx enkeltkraft eller jævn fordelt linielast) hvor lastens størrelse kan have en eller flere repræsentative værdier afhængig af, hvilken situation, der skal undersøges. Ved udmattelsesundersøgelser og ved dynamiske beregninger kan det være nødvendigt at angive lastens størrelse ved en mere kompleks, tidsafhængig repræsentation.

I alle tilfælde er lastens værdi en usikker størrelse, hvor usikkerheden kan have baggrund i meget forskellige forhold. I visse tilfælde kan lasten beskrives ved en kendt statistisk fordeling som ved vind- bølge- og trafiklast, hvor dog såvel forventningsværdien som spredningen kan ændre sig i tidens løb. I andre tilfælde er lastens størrelse angivet ved fikserede værdier som ved egenlast, jord- og silotryk, og hvor usikkerheden stammer fra et mangelfuldt kendskab til disse værdier, fra en utilstrækkelig beregningsmodel eller fra uforudsete ændringer senere i konstruktionens

levetid. Endelig kan der ved dynamisk last være tale om stor usikkerhed ved de beregnede lastvirkninger.

Uanset hvilken type af usikkerhed der knytter sig til en lastangivelse, vil man ved fastsættelse af lastens værdi i normsammenhænge tage udgangspunkt i begrebet *karakteristisk last*.

#### *Karakteristisk last*

Den karakteristiske værdi  $F_k$  af en last er en repræsentative værdi for lastens størrelse. I visse tilfælde benyttes betegnelsen karakteristisk værdi for en foreskrevet værdi (defaultværdi).

I flg. DS 409 defineres den karakteristiske værdi af en permanent last  $G_k$  som den lastværdi, der med en sandsynlighed på 50% ikke overskrides. For en variabel last, defineres den karakteristiske værdi  $Q_k$  derimod som den lastværdi, der med en sandsynlighed på 98% ikke overskrides i løbet af et år. For ulykkeslast angives den karakteristiske værdi  $Q_k$  ved en foreskrevet værdi

For variable laster ved fågangspåvirkninger defineres ud over den karakteristiske værdi en sædvanlig værdi  $Q_s = \psi Q_k$ , hvor *lastkombinationsfaktoren*  $\psi$  afhænger af lastens variation i tiden samt af den lastkombination, hvori den indgår.

Karakteristiske værdier af laster på bærende konstruktioner samt værdier af lastreduktionsfaktoren  $\psi$  til bestemmelse af sædvanlige lastværdier er givet i DS 410 *Last på konstruktioner*. I tilfælde, hvor der ikke er anført lastværdier, skal disse fastlægges ud fra de anførte principper og i overensstemmelse med de retningslinier, der er anført i konstruktionsnormerne.

I henhold til EC1 kan den karakteristiske værdi af lasten enten være specificeret i relevante normer som en middelværdi, en øvre- eller nedreværdi eller som en nominel værdi svarende til en foreskrevet værdi. I de fleste tilfælde vil den karakteristiske værdi for fx egenlasten  $G_k$  kunne ansættes til middelværdien, men for sådanne permanente laster, hvor variationskoefficienten er stor, eller hvor lasterne kan variere i konstruktionens levetid, skelnes der i EC1 mellem to karakteristiske værdier, en øvre  $G_{k,sup}$  og en nedre  $G_{k,inf}$ . I de fleste tilfælde kan det forudsættes, at  $G_k$  er middelværdien og, at  $G_{k,sup}$  og  $G_{k,inf}$  svarer til henholdsvis 5%- og 95% fraktilen i den statistiske fordeling af  $G$ , der kan forudsættes at være normalfordelt.

For variable laster ansættes den karakteristiske værdi  $Q_k$  enten til en øvre værdi, der med en forventet sandsynlighed ikke bliver overskredet, eller til en nedre værdi, som med en forventet sandsynlighed ikke bliver underskredet i løbet af en referenceperiode. Den forventede sandsynlighed er 98% og referenceperioden er ét år. I tilfælde, hvor den statistiske fordeling ikke er kendt, kan den karakteristiske værdi af den variable last ansættes svarende til en nominel værdi. I tilfælde hvor normen ikke dækker, må man lægge en nøjere analyse til grund for valg af de karakteristiske værdier.

EC1 opererer også med andre repræsentative værdier, der afledes af den karakteristiske værdi  $Q_k$  ved multiplikation med *en faktor*  $\psi_i$ . Sådanne værdier defineres og benævnes som:

- $\psi_0 Q_k$  kombinationsværdi
- $\psi_1 Q_k$  hyppig værdi
- $\psi_2 Q_k$  kvasi-permanent værdi

Kombinationsværdier anvendes ved lastkombinationer for at tage hensyn til, at der er en nedsat sandsynlighed for, at de mest ugunstige værdier af flere uafhængige laster optræder samtidig.

Den hyppige værdi er fastsat således, at den samlede tid inden for en given tidsperiode, hvor værdien er overskredet med en nærmere specificeret del, er begrænset til en given værdi, eller hvor den hyppighed, hvormed værdien overskrides, er begrænset til en bestemt værdi. Delen af den valgte tidsperiode eller hyppigheden bør vælges under hensyntagen til det betragtede bygværk og beregningernes formål. Medmindre andre værdier er angivet, kan delen af tidsperioden vælges som 0,05 eller hyppigheden til 300 pr. år for almindelige bygninger.

Den kvasi-permanente værdi er fastsat sådan, at den samlede tid inden for en valgt tidsperiode, hvor værdien bliver overskredet, udgør en betydelig del af tidsperioden. Delen af den valgte tidsperiode kan vælges som 0,5, men den kvasi-permanente værdi kan også fastlægges som gennemsnitsværdien over den valgte tidsperiode.

Kombinationsværdierne bruges til eftervisning af brudgrænsetilstande og irreversible anvendelsesgrænsetilstande. De hyppige og kvasi-permanente værdier bruges til eftervisning af brudgrænsetilstande, der omhandler ulykkeslast, og til eftervisning af reversible anvendelsesgrænsetilstande. De kvasi-permanente værdier bruges også til beregning af langtidsvirkninger for anvendelsesgrænsetilstande.

Størrelsen af faktoren  $\psi_i$ , der afhænger af lastens variation i tiden, er specificeret i relevante lastnormer (fx EC2) eller fastlægges af bygherre eller den projekterende myndighed.

### 3.4 Materialer

Materialerne skal opfylde de krav, der er fastsat i konstruktionsnormerne, fx DS 411.

De værdier for materialeparametrene, der benyttes ved dimensioneringen, fastlægges som angivet i konstruktionsnormerne ved forundersøgelser, forudgående prøvning eller ved kontrol af, at forud specificerede værdier er overholdt. Ved fastlæggelse af værdierne tages hensyn til konstruktionens anvendelse og levetid, det omgivende miljø og til de forudsatte påvirkninger, herunder lastvarigheden. Ved konstruktionsberegninger tager værdiansættelsen af materialeparametrene udgangspunkt i begrebet *karakteristiske materialeparametre*.

#### *Karakteristiske værdier*

Karakteristiske værdier  $f_k$  fx for byggematerialers materialeparametre defineres normalt ud fra en bestemt fraktil  $p$ , dvs. den værdi under hvilken  $p\%$  af forsøgsresultaterne befinder sig i en teoretisk ubegrænset forsøgsserie. For beton og armering defineres de karakteristiske værdier sædvanligvis som 5%-fraktilen for styrkeparametrene og som middelværdien for

stivhedsparametrene. I de tilfælde, hvor den statistiske fordeling ikke kendes, kan man være nødsaget til at benytte en såkaldt nominel værdi, der kan være bestemt ud fra andre kriterier.

En materialestyrke kan have to karakteristiske værdier, en øvre og en nedre karakteristisk værdi. I de fleste tilfælde er det kun nødvendigt at betragte den nedre værdi.

### 3.5 Geometriske parametre

Karakteristiske værdier  $l_k$  af geometriske parametre svarer almindeligvis til de dimensioner, der er angivet i projektet, men i visse tilfælde kan værdien svare til en foreskrevet fraktil i den statistiske fordeling. Usikkerheden på dimensioner behandles normalt gennem begrebet tolerancer (DS1050), og det må i øvrigt sikres, at tolerancer for forbundne dele er indbyrdes forenelige.

### 3.6 Sikkerhedsmetoder

Iht. DS 409 foretages sikkerhedsurderingen normalt ved *partialkoefficientmetoden*, men andre sikkerhedsmetoder kan også anvendes, såfremt den fornødne information foreligger.

En mulig alternativ sikkerhedsmetode er *sikkerhedsindeksmetoden*, der både er anvendelig som en selvstændig metode og som hjælpemiddel ved fastlæggelsen af de *partialkoefficienter*, der indgår i partialkoefficientmetoden. En af fordelene ved sikkerhedsindeksmetoden er, at den gør det muligt at behandle de usikkerheder, der optræder ved dimensioneringen af bærende konstruktioner, på en særdeles rationel måde, men metoden er ikke helt så operationel som partialkoefficientmetoden. Sikkerhedsindeksmetoden inddrager i lighed med andre sikkerhedsmetoder kun svigt knyttet til laster og materialeparametre og de tilhørende variationer, mens grove fejl, der normalt har baggrund i menneskelige fejl, ikke inddrages til trods for, at disse er den mest almindelige årsag til konstruktionssvigt. Endnu har det ikke været muligt at tage hensyn til menneskelige fejl på en rationel måde, så derfor er det nok mest hensigtsmæssigt indtil videre at opfatte menneskelige/grove fejl som en følge af en utilstrækkelig kvalitetskontrol.

Sikkerhedsmetoder, der tilstræber at fastlægge den "eksakte" svigtsandsynlighed for et enkelt element eller for en konstruktion, kaldes ofte sikkerhedsmetoder på niveau III. Disse metoder er baseret på et fuldstændigt kendskab til simultane sandsynlighedsfordelinger for alle involverede parametre og til de korrekte svigtformer. En sådan fuldkommen information vil i almindelighed ikke være tilstede, og det er derfor i de fleste tilfælde nødvendigt at basere sig på forenklede og tilnærmede metoder. Sådanne metoder udgør sikkerhedsmetoderne på niveau I og II, hvor niveau II fx. inkluderer sikkerhedsindeksmetoden, mens niveau I omfatter deterministiske metoder såsom partialkoefficientmetoden, men som også inkluderer metoder baseret på sandsynlighedsteoretiske betragtninger.

I denne fremstilling vil kun partialkoefficientmetoden blive belyst nærmere.

### 3.7 Partialkoefficientmetoden

Ved sikkerhedsvurdering af en konstruktion efter *partiakoefficientmetoden* eftervises det, at den *regningsmæssige lastvirkning*  $S_d$  er mindre end eller lig med den *regningsmæssige modstandsevne*  $R_d$ , eller

$$R_d - S_d \geq 0$$

idet den regningsmæssige lastvirkning og den regningsmæssige modstandsevne bestemmes ud fra de regningsmæssige værdier af de tre basisvariable,

- *regningsmæssige laster*
- *regningsmæssige materialeparametre*
- *regningsmæssige geometriske parametre*

Disse størrelser defineres og værdisættes i det følgende.

Ved partialkoefficientmetoden eftervises det således, at grænsetilstandene ikke er overskredet i nogle af de relevante lasttilfælde (dimensioneringstilstande), konstruktionen udsættes for, når der i beregningsmodeller benyttes de regningsmæssige værdier for laster, materialeegenskaber og geometriske parametre. I særdeleshed skal det eftervises, at

- virkninger af regningsmæssige laster ikke overskrider konstruktionens regningsmæssige modstandsevne i *brudgrænsetilstanden*
- virkninger af regningsmæssige laster ikke overskrider ydeevnekravene i *anvendelsesgrænsetilstanden*.

Det kan for visse konstruktioner være nødvendigt at overveje andre eftervisninger, fx udmattelse.

#### *Lasttilfælde, lastkombinationer og lastarrangement*

De belastningssituationer (dimensioneringstilstande), der skønnes relevante for konstruktionens sikkerhed, skal alle tages i betragtning og indenfor hver af disse, skal de *kritiske lasttilfælde* identificeres. Et lasttilfælde angiver sammenhørende lastarrangementer, deformationer og imperfektioner, der bør betragtes *samtidig*. Eksempelvis vil egenlast, snelast, vind fra vest og sætningen i et givet punkt hver for sig beskrive fire forskellige lasttilfælde, der enkeltvis eller i kombinationer udgør forskellige dimensioneringstilstande. Såfremt laster af fysiske årsager ikke kan optræde samtidig, kan de naturligvis heller ikke udgøre en dimensioneringstilstand.

For hvert kritisk lasttilfælde skal de regningsmæssige værdier af lastvirkningerne bestemmes for *kombinationer af laste*. Regler for hvorledes de hinanden uafhængige laster i en valgt

dimensioneringstilstand kombineres, er fastlagt i de relevante lastnormer.

Et *lastarrangement* fastlægger angrebepunkt, størrelse og retning af en fri last, og sådanne lastarrangementer vil i vid udstrækning være beskrevet i lastnormen..

### 3.8 Regningsmæssig last

Den *regningsmæssige værdi af laster*  $F_d$  afledes af den karakteristiske værdi  $F_k$ , idet denne værdi multipliceres med en *partialkoefficient*  $\gamma_F$ , dvs.

$$F_d = \gamma_F F_k$$

hvor partialkoefficienten  $\gamma_F$  er den til kraften  $F$  svarende partialkoefficient, der tager hensyn til en række usikkerheder som ugunstig lastafvigelse, muligheden for unøjagtig lastmodellering, usikkerheder i vurderingen af lastvirkningen og usikkerheden i vurderingen af den betragtede grænsetilstand.

Eksempler på sådanne regningsmæssige værdier for laster kan fx være

$$G_d = \gamma_G G_k \text{ for permanent last}$$

og

$$Q_d = \gamma_Q Q_k \text{ for variabel last}$$

I DS410 er et meget stort antal karakteristiske værdier for såvel permanent som variabel laster angivet. Disse dækker et bredt spekter af ofte forekommende laster, men i de tilfælde, hvor normen ikke dækker, må værdierne fastlægges på anden måde.

I DS409 angives retningslinier for hvilke lastkombinationer, der normalt skal undersøges i anvendelsesgrænsetilstanden (lastkombination 1) henholdsvis brudgrænsetilstanden (lastkombination 2). Lastkombination 2 er underinddelt i 4 forskellige lastkombinationer, der hver især sigter mod at belyse særlige lastforhold.

For hver kritisk lastkombination beregnes den *regningsmæssige lastvirkninger*  $E_d$  (kraft, moment, spænding eller deformation), som er konstruktionens respons på samtidige laster. I det følgende er lastvirkningen tilknyttet en bestemt last eller lastkombination markeret ved symbolet "~".

#### *Lastkombination 1- anvendelsesgrænsetilstande*

Konstruktioner skal generelt vurderes for lastkombination 1 i det omfang, det er angivet i konstruktionsnormerne. For betons vedkommende skal der iht DS 411 tages hensyn til egenlast og nyttelast samt i nødvendigt omfang til naturlaster, herunder temperatur, svind og krybning.

For mange anvendelsestilstande sker undersøgelsen for de enkelte laster, fx

$S_d \sim 1,0 G_k$  (deformationer for den permanente last  $G$ )

$S_d \sim 1,0 Q_{1k}$  (deformationer for én variabel last  $Q_1$ )

Og ved undersøgelse af lastvirkningen af flere samtidig virkende laster anvendes følgende lastkombination

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,0 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_{3k} + \dots$

### *Lastkombination 2 - brudgrænsetilstande*

Konstruktioner skal vurderes for den ugunstigste af de fire angivne lastkombinationer 2.1, 2.2, 2.3 og 2.4, hvilket ofte medfører, at én eller flere lastkombinationer i denne grænsetilstand skal undersøges.

#### *Lastkombination 2.1*

Den dimensionsgivende lastkombination vil ofte findes i lastkombination 2.1, som anvendes i de tilfælde, hvor den variable last ved fågangspåvirkning er væsentlig i forhold til den permanente last. Er konstruktionen påvirket af egenlasten  $G_k$ , nyttelasten  $Q_{1k}$ , naturlasten  $Q_{2k}$  og flere øvrige variable laster  $Q_{ik}$ , da er den dimensionsgivende lastkombination bestemt ved

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,3 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_{3k} + \psi_4 Q_{4k} + \dots$

Eller hvis den variable last er en naturlast:

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,5 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_3 + \psi_4 Q_4 + \dots$

En konstruktion skal normalt undersøges for flere lastkombinationer, hvori der fx indgår egenlast  $G$ , nyttelast  $N$ , sne  $S$  og vind  $W$  som vist nedenfor,

$S_d \sim 1,0 G_k$

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,6 Q_{sk}$

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,3 Q_{nk} + \psi_w Q_{wk}$

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,6 Q_{sk} + \psi_w Q_{wk}$

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,6 Q_{wk}$

$S_d \sim 1,0 G_k + 1,6 Q_{wk} + \psi_w Q_{sk}$

Normalt er det kun nødvendigt at detailberegne enkelte af tilfældene.

#### *Lastkombination 2.2*

Denne lastkombination finder anvendelse i de tilfælde, hvor den permanente last fra konstruktionsdele virker til gunst og har afgørende betydning for konstruktionens sikkerhed, fx ved løft eller væltning af en konstruktion.

$$S_d \sim 0,80 G_k + 1,3 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_3 + \psi_4 Q_4 + \dots$$

Eller hvis den variable last er en naturlast

$$S_d \sim 0,80 G_k + 1,5 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_3 + \psi_4 Q_4 + \dots$$

#### *Lastkombination 2.3*

Denne lastkombination skal give fornøden sikkerhed i de tilfælde, hvor den permanente last er stor i forhold til den variable last ved fågangspåvirkning. 90% af den permanente last regnes som bunden last og 25% som fri last, dvs

$$E_d \sim 0,9 G_k (\text{bunden}) + 0,25 G_k (\text{fri}) + 1,0 Q_{1k} + \psi Q_{2k} + \psi Q_{3k}$$

#### *Lastkombination 2.4*

Lastkombination 2.4 skal give fornøden sikkerhed i de tilfælde, hvor gentagne lastvariationer kan give udmattelsesbrud. Der skal tages hensyn til samtlige forekommende laster, og de repræsentative laster opstilles under hensyn til de forekommende lasters størrelse, vidde og hyppighed. Bæreevnen vurderes for påvirkninger svarende til konstruktionens brugstid. Partialkoefficienterne for udmattelse fastsættes under hensyntagen til de variable lasters variation i tiden, herunder usikkerheden knyttet til størrelse, vidde og frekvens. For laster hvor variationskoefficienten på lastvidderne er af størrelsesordenen 30% anvendes  $\gamma_f = 1,3$ . For særlig velbestemte laster, hvor variationskoefficienten på lastvidderne er mindre end 10%, benyttes  $\gamma_f = 1,0$ . For andre værdier af variationskoefficienten fastlægges  $\gamma_f$  ved lineær interpolation.

#### *Lastkombination 3 - ulykkeslast*

Konstruktioner der er særlig udsat for påkørsel, eksplosioner eller nedstyrtningslast skal undersøges for en af nedenstående lastkombinationer. I lastkombination 3 regnes nyttelasten bunden, og der ses bort fra naturlast i lastkombination 3.1 og 3.2

*Lastkombination 3.1, ulykkeslast- påkørsel, eksplosion og nedstyrtningslast*

Lasternes størrelse og placering er angivet i DS 410. Hvis flere ulykkeslaster kan forekomme, undersøges konstruktionen for én last ad gangen. Sikringsrum skal undersøges for nedstyrtningslast.

Den regningsmæssige lastvirkning og tilhørende lastkombination angives ved

$$E_d \sim 1,0 G_k + 1,0 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_{3k} + \dots$$

hvor  $Q_{1k}$  er den betragtede ulykkeslast, mens  $Q_{2k}$  og  $Q_{3k}$  er variable laster.

*Lastkombination 3.2 - bortfald af konstruktionsdele*

Konstruktionen dimensioneres og udføres således, at hverken hele konstruktionen eller en vigtig del af den vil kollapse, hvis et lokalt brud forekommer, og en konstruktionsdel bortfalder. I dette tilfælde angives lastkombinationen ved

$$S_d \sim 1,0 G_k + \psi_1 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_{3k} + \dots$$

*Lastkombination 3.3 - brand.*

Konstruktioner, hvortil der stilles krav om brandmodstandsevne, skal undersøges for lastkombination 3.3, uanset om brandmodstandsevnen bestemmes ved forsøg eller ved prøvning eller en kombination heraf. Den termiske påvirkning som følge af brand bestemmes som angivet i DS 410. Ved brandteknisk dimensionering skal medtages de laster og deformationer, som hidrører fra de af branden forårsagede temperaturer i konstruktionen.

For en konstruktion i normal eller høj sikkerhedsklasse skal der ved brandteknisk dimensionering regnes med vindlast eller vandret masselast, såfremt konstruktionen medvirker i den hovedkonstruktion, der sikrer bygningens stabilitet overfor vandrette laster. For vind ved brand er  $\psi = 0,25$ . For alle andre konstruktioner kan der ses bort fra vindlast og vandret masselast. Der kan dog ikke ses bort fra snelasten.

For lasterne skal der anvendes de samme karakteristiske laster som før branden, selv om de i visse situationer kan tænkes helt eller delvis at forsvinde som følge af branden

Den regningsmæssige lastvirkning og tilhørende lastkombination er givet ved

$$E_d \sim 1,0 G_k + 1,0 Q_{1k} + \psi_2 Q_{2k} + \psi_3 Q_{3k} + \dots$$

hvor laster hidrørende fra branden indgår i  $Q_{1k}$  herunder også virkningen af opvarmning og geometriske ændringer.

I den europæiske lastnorm EC1 er lastkombinationerne angivet lidt anderledes end i den danske norm, da de refererer til begrebet dimensioneringstilstande, som den danske lastnorm DS 409 ikke opererer med.

### 3.9 Regningsmæssige materialeparametre

Den regningsmæssige værdi  $X_d$  af en materiale- eller produkt egenskab defineres som forholdet mellem den karakteristiske materialeparameter og partialkoefficienten, dvs

$$X_d = \eta X_k / \gamma_M$$

hvor

$\eta$  er en konverteringsfaktor, der tager hensyn til lastens varighed, volumen- og skalaeffekter, virkninger af fugt, temperatur mv. I nogle tilfælde er der implicit taget hensyn hertil, enten i værdien af  $\gamma_M$  eller i selve den karakteristiske værdi. Normalt er  $\eta = 1$ .

$X_k$  er den karakteristiske værdi for en materialeegenskaben

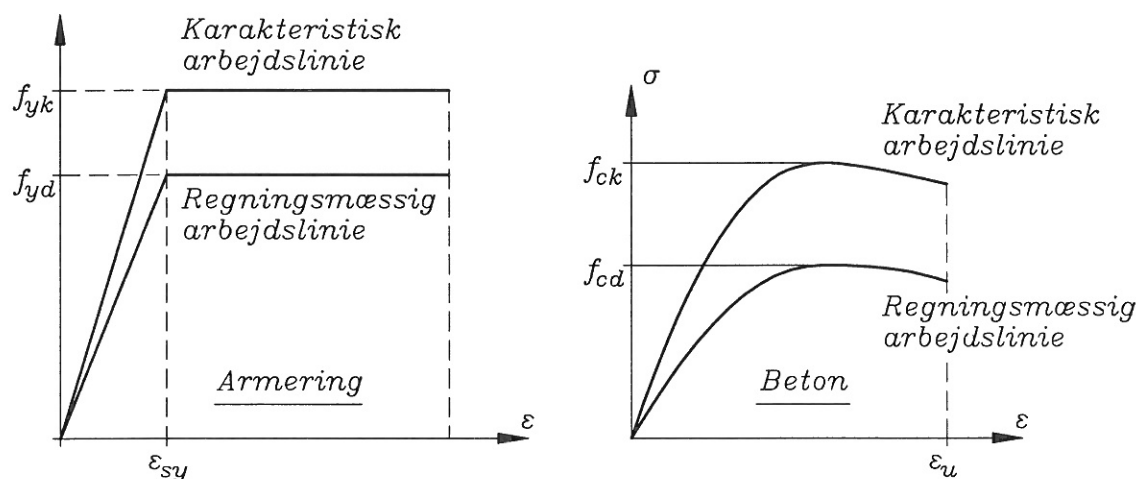
$\gamma_M$  er partialkoefficienten for en materialeegenskaben

Ved undersøgelser for lastkombination 2, brudgrænsetilstande fastsættes iht DS 411 partialkoefficienten  $\gamma_s$  for armering og  $\gamma_c$  for beton som følger, under hensyn til den aktuelle konstruktions eller konstruktionsdels sikkerhedsklasse og kontrolklasse:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= 1,30 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_5 \\ \gamma_c &= 1,65 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_5 && \text{for armeret beton} \\ \gamma_c &= 2,50 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_5 && \text{for uarmeret beton} \end{aligned}$$

Faktoren  $\gamma_1$  tager hensyn til sikkerhedsklassen, mens faktoren  $\gamma_5$  tager hensyn til kontrolklassen. Værdien af  $\gamma_1$  ansættes til 0,9 - 1,0 - 1,1 for henholdsvis lav, normal og høj sikkerhedsklasse, mens værdien af  $\gamma_5$  ansættes til 0,95 - 1,0 - 1,1 for henholdsvis skærpet, normal og lempet kontrolklasse.

De regningsmæssige arbejdslinier for beton og armering er således affine i  $\sigma$ -aksens retning med de tilsvarende karakteristiske arbejdslinier vist i figur 2.1-5 og figur 2.2-4. Affinitetsforholdet er  $\gamma_c$  for beton og  $\gamma_s$  for armering. Følgelig er de karakteristiske og regningsmæssige værdier af flydetøjningerne og brudtøjningerne de samme for begge materialers vedkommende, mens de regningsmæssige elasticitetsmoduler er  $E_{cd} = E_{ck}/\gamma_c$  henholdsvis  $E_{sd} = E_{sk}/\gamma_s$ . Arbejdslinierne er vist i figur 3.9-1.



Figur 3.9-1. Regningsmæssige arbejdslinier for beton og armering.

### 3.10 Regningsmæssige geometriske parametre

Regningsmæssige værdier af geometriske parametre repræsenteres generelt ved de nominelle værdier, dvs.

$$a_d = a_{\text{nom}}$$

men i de tilfælde hvor afvigelser i de geometriske parametre har væsentlig indflydelse på en konstruktions pålidelighed, er de geometriske værdier defineret ved

$$a_d = a_{\text{nom}} + \Delta_a$$

hvor  $\Delta_a$  tager hensyn til muligheden for ugunstige afvigelser fra de karakteristiske værdier. Værdier for  $\Delta_a$  er angivet i de danske konstruktionsnormer.

### 3.11 Regningsmæssig modstandsevne.

Ud fra de regningsmæssige værdier af materialeegenskaber, geometriske parametre og i visse tilfælde lastvirkninger defineres såvel i DS 409 som i EC1 den *regningsmæssige modstandsevne*  $R_d$  der eksempelvis kan antage formen

$$R_d = R \{ X_k / \gamma_M, a_{\text{nom}} \}$$

Denne størrelse sammenholdes med den regningsmæssige lastvirkning  $S_d$  i de grænsetilstandsundersøgelser, hvor der i et tværsnit, en konstruktionsdel eller samling optræder brud eller forekommer store deformationer. Det skal vises, at

$$S_d \leq R_d$$

Helt tilsvarende krav finder man også i fx DS 411.

### 3.12 Beregningsmodeller.

*Modeller til analyse og beregning* af konstruktioner og deres modstandsevne skal være velegnede til på en realistisk måde at gengive konstruktionens virkemåde under indflydelse af de relevante variable. Beregningsmodellerne bør normalt baseres på anerkendt ingeniørmæssig teori og praksis, om nødvendigt eftervist ved forsøg.

Ved snitkraftbestemmelsen kan man anvende plasticitetsteorien eller elasticitetsteorien med sædvanlig anerkendte tilnærmelser.

Anvendelse af plasticitetsteorien forudsætter dog, at konstruktionen har tilstrækkelig flydeevne, dvs. at flydningen i armeringen udvikles væsentligt, inden andre brudformer, som fx instabilitet, afslutter et påbegyndt sejt brud.

I DS411 udtrykkes dette ved, at når plasticitetsteorien anvendes, så kan eftervisning af flydeevnens tilstrækkelighed udelades, hvis følgende betingelser er opfyldt:

- Snitkraftfordelingen afviger ikke for stærkt fra snitkraftfordelingen svarende til elasticitetsteorien. En nøjagtig beregning af snitkraftfordelingen efter elasticitetsteorien er ikke påkrævet. Det vil i almindelighed være tilstrækkeligt at anvende et kvalificeret skøn eller simple tilnærmelsesmetoder.
- Tværsnittene er normalt armeret.
- Brudgrænsetilstanden er ikke betinget af instabilitet.

Iht. EC2 kan plasticitetsteoretiske beregningsmodeller for retlinede bjælker ligeledes anvendes uden direkte kontrol af deres rotationskapacitet, såfremt der kan sikres tilstrækkelig sejghed, og der tages hensyn til andre faktorer såsom modulusikkerhed. Betingelserne i EC2 for at undgå eftervisning af flydeevnens tilstrækkelighed er en del skrapper end de betingelser, der stilles i DS 411.

I såvel DS411 som EC2 er beregningsprocedurer for en række normalt forekommende konstruktionselementer som bjælker, plader og søjler samt flere andre angivet, og der skal derfor henvises til disse normer i forbindelse med gennemførelsen af praktiske beregninger. Normerne er sine steder ret kortfattede, så derfor kan de ikke benyttes ukritisk, men må hele tiden vurderes ud fra sund fornuft, en bred ingeniørmæssig viden og en klar forståelse og beskrivelse af den aktuelle problemstilling.

## **4 Beregning af armerede betonkonstruktioner i brudgrænsetilstanden**

### **4.1 Bøjningsbæreevne**

## 4 Beregning af armerede betonkonstruktioner i brudgrænsetilstanden

### 4.1 Bøjningsbæreevne

#### 4.1.1 Indledning

Bøjningsbæreevnen for et givet bjælke- eller pladtværsnit defineres som det moment  $M_u$ , der for en given normalkraft  $N$  medfører, at tværsnittets bøjningsbæreevne er udtømt.

Normalkræfter, spændinger og tøjninger regnes positive som træk, se nærmere herom i afsnit 4.1.3.

$M_u$  benævnes brudmomentet. Værdien af brudmomentet nås, enten når den numerisk største tøjning i betonens trykzone er lig betonens brudtøjning  $\epsilon_{cu}$ , eller når den maksimale tøjning i trækarmeringen er lig armeringens brudtøjning  $\epsilon_u$ .

Det er vigtigt at være opmærksom på, at der for en given last på en bjælke kan forekomme så store deformationer, at de i praksis ikke kan accepteres, selv om bøjningsbæreevnen ikke er udtømt. I sådanne tilfælde er det krav til deformationerne og ikke det regningsmæssige brudmomentets størrelse, der vil være dimensionsgivende for tværsnittet.

For at beregne et tværsnits brudmoment  $M_u$  er det nødvendigt at have kendskab til materialernes arbejdslinier. Vedr. disse arbejdslinier henvises til afsnit 2.1.1 *Betonens arbejdslinie for énakslet tryk- og trækpåvirkning* og 2.2.1 *Armeringens arbejdslinie*.

#### 4.1.2 Bjælkets tværsnits bøjningsarbejdslinie

Ved at følge en bjælke påvirket til ren bøjning fra ubelastet tilstand gennem en voksende last til den lasttilstand, hvor der opstår et bøjningsbrud i bjælken, får man en god indsigt i spændings- og tøjningsforløbet over et bjælkets tværsnit under denne proces. Dette forløb kan visualiseres ved optegning af det armerede tværsnits bøjningsarbejdslinie, der viser relationen mellem det bøjende moment, der påvirker tværsnittet og, den tilhørende krumning.

I figur 4.1-1 er vist et armeret tværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt påvirkningen  $M$ .

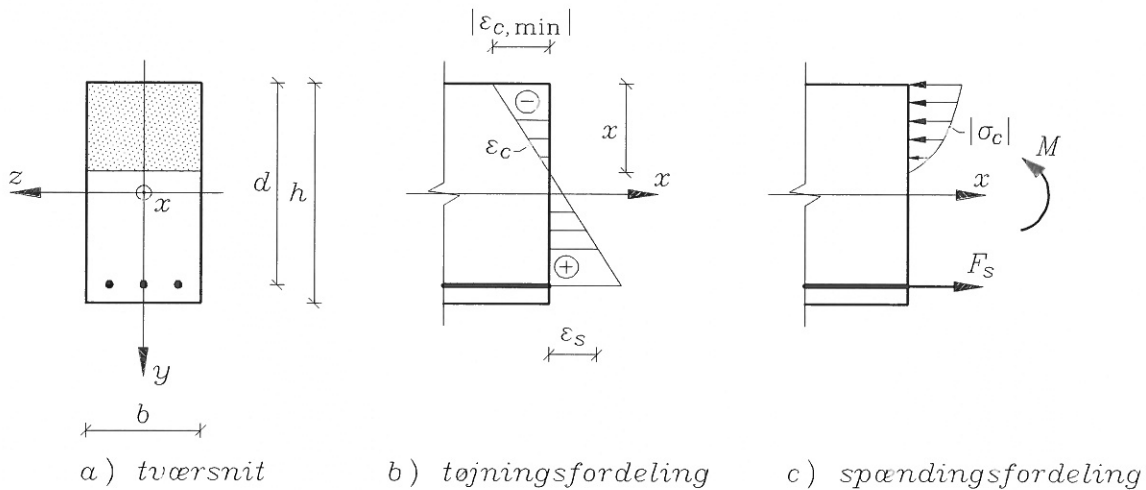
Krumningen  $\kappa$  kan tilnærmet beregnes som

4.1-2

$$\kappa = -\frac{d^2 w_y}{dx^2} = -\frac{\epsilon_{c,\min}}{x} = \frac{\epsilon_s}{d-x} \quad (4.1-1)$$

hvor

- $w_y$  er bjælkens nedbøjning
- $x$  er tværsnittets nulliniedybde eller koordinaten langs bjælkeaksen ( $dx$  i udtrykket  $d^2 w_y/dx^2$  er en tilvækst i bjælkeaksens retning)
- $d$  er tværsnittets effektive højde, som er afstanden fra resultanten af kræfterne i trækarmingen til tværsnittets kant med den største tryktøjning
- $\epsilon_s$  er tøjningen i armeringen regnet positiv som træk
- $\epsilon_{c,\min}$  er den mindste tryktøjning i betonen regnet positiv som træk. Bemærk at dette svarer til den numerisk største betontryktøjning.



Figur 4.1-1 Armeret betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt momentpåvirkning.

Ved lineærelastiske materialer kan krumningen bestemmes af

$$\kappa = \frac{M_z}{EI_z} \quad (4.1-2)$$

hvor

- $M_z$  er det bøjende moment m.h.t. z-aksen
- $E$  er materialets elasticitetskoefficient
- $I_z$  er tværsnittets inertimoment m.h.t. z-aksen

For at bestemme et tværsnits bøjningsarbejdslinie er det nødvendigt at have kendskab til materialernes arbejdslinier. Vedr. disse arbejdslinier henvises til afsnit 2.1.1 *Betonens arbejdslinie for eenakset tryk- og trækpåvirkning* og 2.2.1 *Armeringens arbejdslinie*.

Det antages, at tøjningsfordelingen over tværsnittet er plan, dvs. tøjningen i armeringen og betonen er proportional med afstanden fra nullinien. Spændingsfordelingen over betonens trykzone bliver ligedannet med betonens arbejdslinie svarende til det spændingsniveau, der er nået i betonen. Spændingen i armeringen vil svare til den tøjning, der forekommer på armeringens plads. Dette er illustreret i figur 4.1-2e.

Til illustration af en bjælkes opførsel samt af sammenhængen mellem spændinger, tøjninger, krumninger og momenter når en bjælke belastes af en jævnt voksende last, der vokser fra lasten nul til brudlasten, betragtes den i figur 4.1-2 viste bjælke med tilhørende tøjnings- og spændingsfordelinger samt bøjningsarbejdslinie. Bøjningsarbejdslinien er optegnet efter måleresultater fra et bøjningsforsøg (P. Sandbye [3]). Bjælketilstanden vurderes i spændings- og tøjningsstadierne ① - ⑥, der er beskrevet nedenfor.

*stadie ① :*

For små værdier af lasten  $P$  og dermed momentet  $M = P c$  vil spændingerne i bjælkematerialet være så små, at tværsnittet er urevnet, og spændingerne kan med god tilnærmelse bestemmes ved hjælp af elasticitetsteorien, f.eks. ved anvendelse Naviers formel for transformerede tværsnit, se afsnit 5.2.2.

Krumningen kan beregnes af

$$\kappa = \frac{M_z}{E_c I_{zur,tr}} \quad (4.1-3)$$

hvor  $I_{zur,tr}$  er inertimomentet for det transformerede urevnede tværsnit, se afsnit 5.2.2.  
 $E_c$  er betonens elasticitetskoefficient

Så længe trækspændingerne i bjælkeundersiden er mindre end betonens bøjningstrækstyrke, d.v.s.  $\sigma_{ct} < f_{ct,fl}$  er betonen urevnet, og bøjningarbejdslinien vil med god tilnærmelse være en ret linie gennem (0,0) med hældningskoefficienten  $E_c I_{zur,tr}$ .

*stadie ② -③:*

Når spændingen i betonen i bjælkens underside bliver lig med betonens bøjningstrækstyrke  $f_{ct,fl}$ , der antages at være ca. 1,6 gange størrelsen af den eenaksede trækstyrke  $f_{ct}$ , d.v.s.  $\sigma_{ct} = f_{ct,fl} \approx 1,6f_{ct}$  vil betonen revne. Dette indtræder først på strækningen mellem de to kræfter  $P$ , hvor momentet og dermed trækspændingerne er størst. Trykspændingerne i betonen i bjælkens overside vil stadig være så små, at spændingstilstanden svarer til den nederste del af betonens arbejdslinie, der med god tilnærmelse kan regnes retlinet. Spændingerne i armeringen er i det elastiske område. Dette betyder, at beregningerne som ovenfor kan foretages efter elasticitetste-

#### 4.1-4

orien ved anvendelse af det transformerede tværsnit, blot skal nu kun den trykkede del af betontværsnittet og det transformerede armeringstværsnit tages i regning. Vedr. det transformerede tværsnit henvises til afsnit 5.2.2.

Ved voksende værdier af P vil revnerne udvikle sig mere og mere. Dels vil revnevidden vokse, og dels vil der opstå nye revner i områderne mellem understøtningerne og de to kræfter P. Bøjningsarbejdslinien vil på strækningen fra stadie ②, hvor revnedannelsen starter, til stadie ③, hvor revnedannelsen antages fuldt udviklet, være en krum linie med den viste punkterede linie gennem (0,0) som asymptote. Den punkterede linie viser bøjningsarbejdslinien ved fuldt revnet tværsnit givet ved

$$M_z = E I_{zr,tr} \kappa \quad (4.1-4)$$

hvor  $I_{zr,tr}$  er inertimomentet for det transformerede revnede tværsnit. Det transformerede revnede tværsnit består af det trykkede betontværsnit og det transformerede armeringstværsnit.

*stadie ③ - ④:*

Øges lasten yderligere vil såvel beton- som armeringsspændingerne vokse. Armeringsspændingerne vil dog stadig befinde sig på den elastiske del af armeringens arbejdslinie, medens den maksimale spænding i betonen vil ligge på den mere krumme del af betonens arbejdslinie, se ③ i figur 4.1-2 e. Forudsætningerne for anvendelse af elasticitetsteorien bliver derfor mere og mere tvivlsomme. Bøjningsarbejdslinien vil krumme mere og mere, men vil dog stadig med rimelig god tilnærmelse følge den ovenfor omtalte punkterede linie.

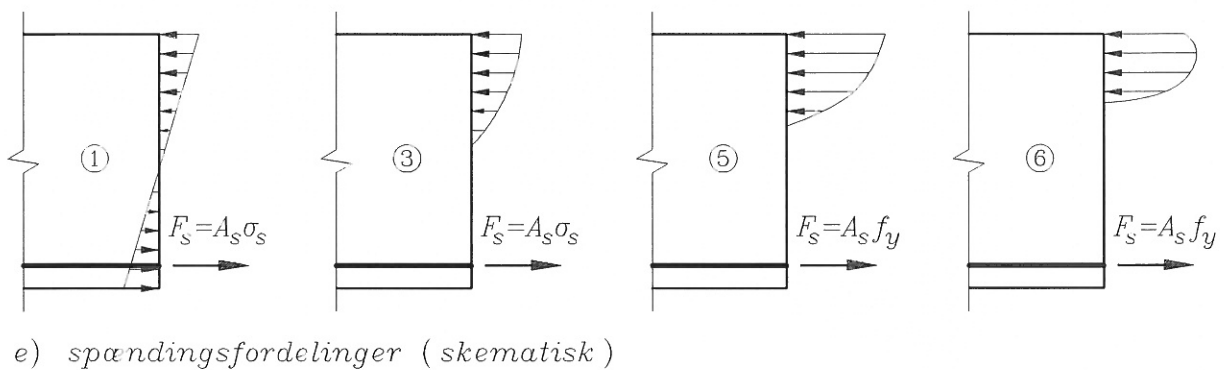
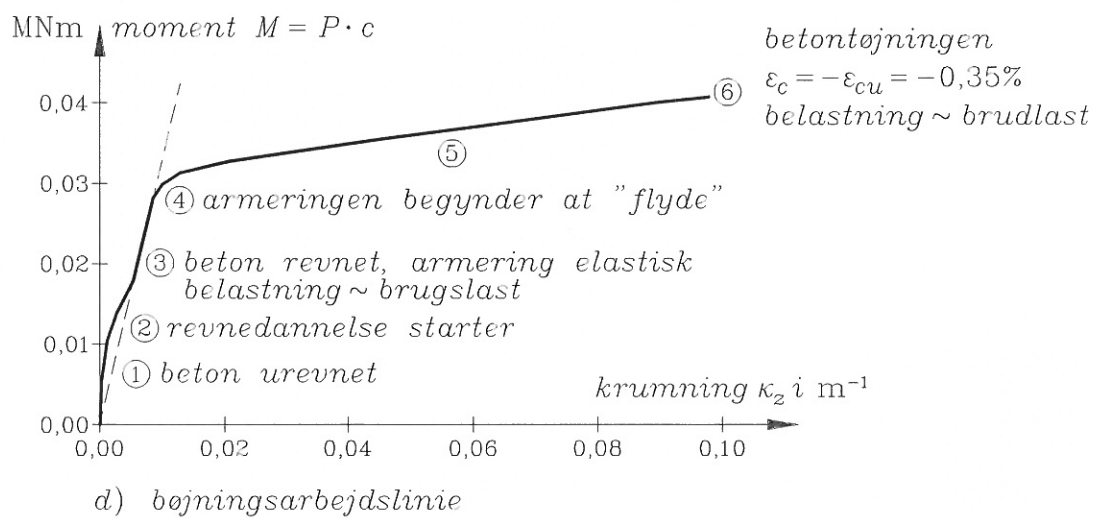
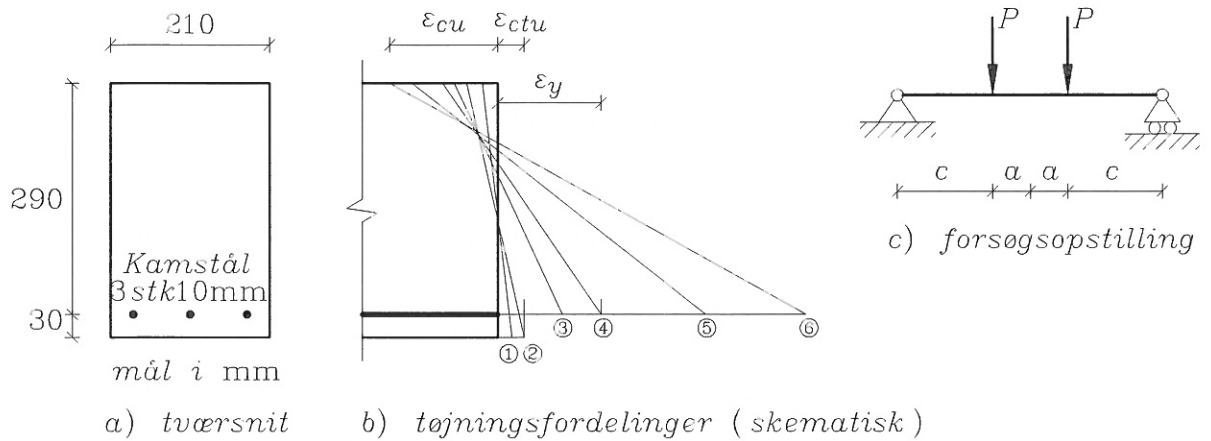
*stadie ④ - ⑤:*

Øges lasten yderligere vil armeringen begynde at flyde, hvilket ved antagelse af en lineærelastisk-idealplastisk arbejdslinie for armeringen betyder, at kraften i armeringen forbliver konstant for voksende værdier af krumningen og dermed nedbøjningen. Når kraften i armeringen forbliver konstant, vil dette medføre et næsten konstant moment for voksende krumning.

Bøjningsarbejdslinien vist i figur 4.1-2 d har en krumning i området efter begyndende flydning i armeringen samt herefter en tydelig stigning ved voksende værdi af krumningen. Dette skyldes, at bjælken i det betragtede forsøg er armeret med et kamstål uden udpræget flydegrænse. Vedr. arbejdslinier for stål uden udpræget flydegrænse se kapitel 2.2.3.

*stadie ⑤ - ⑥:*

Øges værdien af lasten P yderligere vil den numeriske værdi af betontøjningerne i bjælkens overside og træktøjningerne i armeringen vokse mod brudværdierne henholdsvis  $\epsilon_{cu}$  og  $\epsilon_u$ . Spændingstilstanden i betonens trykzone nærmer sig den i ⑥ i figur 4.1.1-2 e viste fordeling, medens armeringsspændingerne stiger relativt langsomt svarende til stigningen på armeringens arbejdslinie. Bøjningsarbejdslinien vil derfor være svagt stigende mod højre for voksende krumninger, hvilket svarer til en kraftigt voksende nedbøjning for en relativ lille lastøgning.



Figur 4.1-2 Bøjningsarbejdslinie for et tværsnit i en armeret betonbjælke optegnet efter måleresultater fra et bøjningsforsøg (P. Sandbye [3])

#### 4.1-6

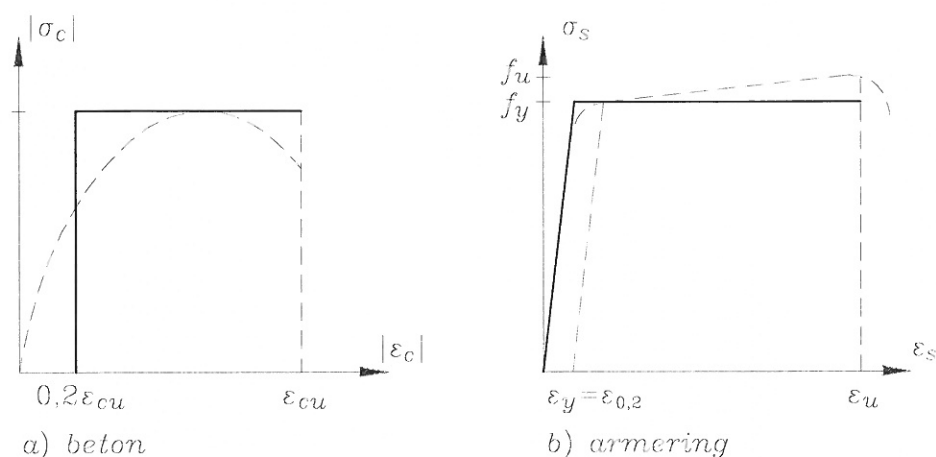
#### 4.1.3 Bestemmelse af bøjningsbæreevnen $M_u$ for et armeret tværsnit påvirket til bøjning med normalkraft

I dette afsnit vil den teoretiske bestemmelse af et armeret betontværsnits bøjningsbæreevne være baseret på følgende forudsætninger:

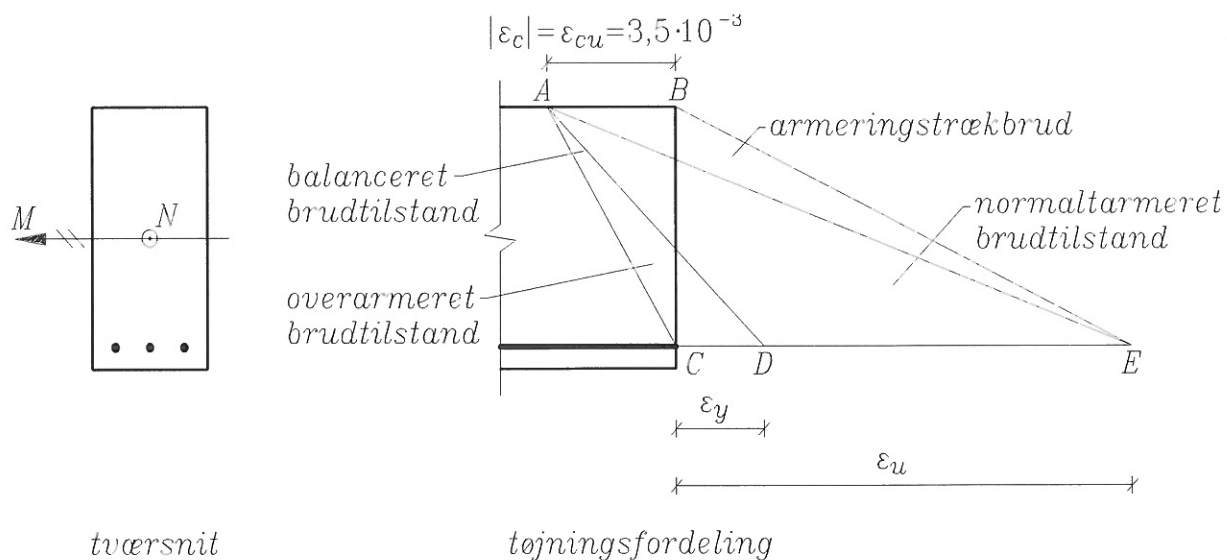
- tøjninger og spændinger regnes positive for henholdsvis forlængelser og træk.
- i forbindelse med anvendelse af betegnelserne *tryktøjning* eller *trykspænding* angives den pågældende størrelse ved den numeriske værdi, ligesom betonens enaksede trykbrudspænding  $f_c$  og trykbrudtøjning  $\epsilon_{cu}$  angives ved den numeriske værdi.
- tøjningsfordelingen antages at være plan, dvs. tøjningerne vinkelret på tværsnittet i armeringen og betonen er proportionale med afstanden fra nullinien.
- betonspændingerne afledes af betonens trykarbejdslinie, idet der dog ikke må regnes med en tryktøjning større end 0,35 %. Betonens trækspændinger tages ikke i regning. Spændingerne i betonens trykzone regnes i revnede tværsnit at være ækvivalente med en konstant spænding lig trykstyrken  $f_c$  virkende på et areal, hvis udstrækning, regnet fra kanten med den største tryktøjning til en linie parallel med nullinien, er 0,8 x, hvor x er trykzonens højde. Denne spændingsfordeling svarer til den idealiserede arbejdslinie for betonen vist fuldt optrukket i figur 4.1-3a.
- spændingerne i trækarmeringen afledes af den idealiserede bilineære arbejdslinie, vist fuldt optrukket i figur 4.1-3b, hvorfor armeringsspændingerne antager værdien  $\sigma_s = E_s \epsilon_s$ , når  $\epsilon_s \leq \epsilon_y$ , og  $\sigma_s = f_y$ , når  $\epsilon_s \geq \epsilon_y$ .
- spændingerne i trykarmeringen afledes af armeringens trykarbejdslinie, som numerisk antages at være identisk med armerings trækarbejdslinie. For kolddeformeret armering må armeringens trykflydespænding dog kun antages at være lig 80 % af trækflydespændingen, dvs.  $f_{yc} = 0,8 f_y$ .

Der vil i det følgende blive skelnet mellem nedenstående brudtilstande, se figur 4.1-4

- normaltarmet brudtilstand*, hvor  $\epsilon_c = -\epsilon_{cu} = -0,0035$  og  $\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq \epsilon_u$  med tøjningsforløb i område DAE
- balanceret brudtilstand*, hvor  $\epsilon_c = -\epsilon_{cu} = -0,0035$  og  $\epsilon_s = \epsilon_y$  med tøjningsforløb svarende til linien AD
- overarmeret brudtilstand*, hvor  $\epsilon_c = -\epsilon_{cu} = -0,0035$  og  $\epsilon_s < \epsilon_y$  med tøjningsforløb i område ACD
- armeringstrækbrud*, hvor  $|\epsilon_c| < \epsilon_{cu} = 0,0035$  og  $\epsilon_s = \epsilon_u$  med tøjningsforløb i område ABE



Figur 4.1-3 Arbejdslinier for énakslet tryk i betonen og énakslet træk i armeringen. De punkterede kurver angiver “virkelige” arbejdslinier medens de fuldt optrukne kurver angiver de idealiserede arbejdslinier, der i afsnit 4.1 benyttes ved bestemmelse af brudmomenter.



Figur 4.1-4 Mulige tøjningsfordelinger ved bøjningsbrud svarende til brudtilstandene normalt armeret-, balanceret- og overarmeret brudtilstand samt armeringstrækbrud.

#### 4.1-8

*Normaltarmet brudtilstand* er den brudtilstand, der sædvanligvis tilstræbes ved dimensionering af en armeret betonkonstruktion. Denne brudtilstand er karakteriseret ved, at armeringens tøjning ligger mellem flyde- og brudtøjningen, og tryktøjningen i betonen er lig brudtøjningen  $\epsilon_{cu}$ . Benyttes plasticitetsteorien (som fx ved det i DS 411 anvendte princip *delvis indspænding*, se nærmere herom i afsnit 4.7) til bestemmelse af snitkraftforløbet i en betonkonstruktion, kræves det, at der anvendes normaltarmede tværsnit, som er armerede tværsnit, der ved brud vil være i en normaltarmet brudtilstand. Den normaltarmede brudtilstand vil udvise et sejt brud.

*Balanceret brudtilstand* er karakteriseret ved, at tryktøjningen i betonen er lig med trykbrudtøjningen  $\epsilon_{cu} = 0,0035$  samtidig med, at tøjningen i trækarmeringen er lig med flydetøjningen dvs.  $\epsilon_s = \epsilon_y$ . Den balancerede brudtilstand er et specialtilfælde, der angiver overgangen mellem den normaltarmede brudtilstand og den overarmede brudtilstand.

*Overarmet brudtilstand* er karakteriseret ved, at der forekommer brud i betonen før armeringen flyder. Denne tilstand er mindre økonomisk, da armeringen ikke udnyttes fuldt ud. Den overarmede brudtilstand vil ved brud udvise et mindre sejt brud end den normaltarmede brudtilstand. Det er derfor ikke tilladt at anvende den overarmede brudtilstand, når snitkraftbestemmelsen foregår ved anvendelse af plasticitetsteorien.

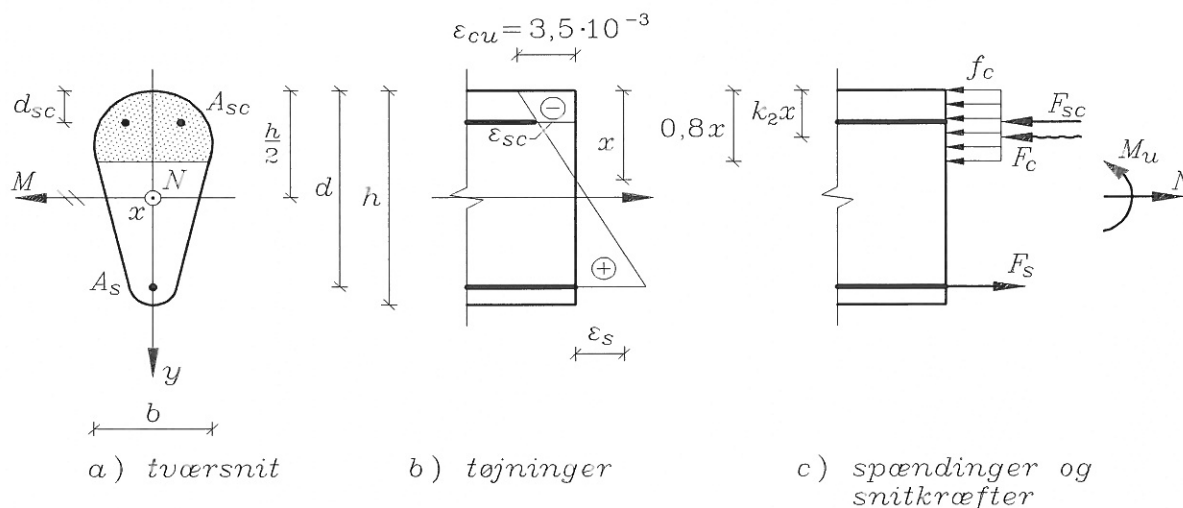
*Armeringstrækbrud* er karakteriseret ved, at tøjningen i armeringen når brudtøjningen  $\epsilon_u$ , før tryktøjningen i betonen når brudværdien  $\epsilon_{cu}$ . Armeringsmængden svarende til denne brudtilstand vil være relativt ringe. At dimensionere en bjælke svarende til denne brudtilstand vil normalt være uøkonomisk for bjælker med rektangulært tværsnit på grund af, at betonens trykstyrke ikke udnyttes, men for bjælker med T-tværsnit kan en dimensionering svarende til brudtilstanden armeringstrækbrud ofte anvendes med økonomisk fordel, fordi T-bjælkens relativt store flangebredde automatisk vil være tilstede. Dette gælder specielt ved anvendelse af ribbedæk. Det er vigtigt at være opmærksom på, at der i alle landes normer for betonkonstruktioner stilles krav om en vis minimumsarmering, som ofte vil være større end den armering, der svarer til et armeringstrækbrud. Der skal på få undtagelser nær altid anvendes et armeringsareal, der er lig med eller større end det armeringsareal, der svarer til minimumsarmeringen, idet der ellers bl.a. kan være fare for et uvarslet brud. Ved meget små armeringsmængder i en bjælke dannes der kun én eller få store revner i betonen. Armeringsspændingerne og dermed armeringstøjningerne vil derfor i et relativt snævert område omkring en revne være store, mens de uden for dette område vil være mindre, idet den urevnede beton vil optage en del af trækken. Bjælkens nedbøjning vil derfor være meget lille inden et eventuelt brud indtræder, idet flydningen i armeringen kun sker inden for en relativt lille strækning. Spørgsmålet vedr. minimumsarmering behandles senere i dette afsnit.

Nedenfor vises en generel fremgangsmåde for beregning af brudmomentet  $M_u$  for et vilkårligt enkeltsymmetrisk tværsnit, der er påvirket af en normalkraft  $N$  og armeret med træk- og trykarmering.

Efterfølgende vil fremgangsmåden ved beregning af brudmomentet svarende til ovennævnte brudtilstande blive vist for specialtilfælde med rektangulære bjælketværsnit.

I figur 4.1- 5 er vist et tværsnit med træk- og trykarmring. I samme figur er snitkræfterne  $N$  og  $M$ , tøjnings- og spændingsfordelingen samt spændingsfordelingernes resultanter  $F_c$ ,  $F_{sc}$  og  $F_s$  vist, hvor

- $F_c$  er resultanten af trykspændingerne i betonen
- $F_{sc}$  er resultanten af trykspændingerne i trykarmringen
- $F_s$  er resultanten af spændingerne i trækarmringen



Figur 4.1-5 Armeret betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt snitkraftpåvirkning.

Idet der skal være ækvivalens mellem snitkræfterne og de viste spændingsresultanter fås ved vandret projektion

$$N = -F_c - F_{sc} + F_s = -k_1 A_c(x) f_c + A_{sc} \sigma_{sc} + A_s \sigma_s \quad (4.1-5)$$

hvor

- $k_1$  er en faktor, der reducerer trykzonearealet  $A_c(x)$  svarende til, at betonspændingen regnes konstant over en højde, der er 80 % af nulliniedybden  $x$ . For tværsnit med konstant trykzonebredde fx rektangulære tværsnit er  $k_1 = 0,8$  og dermed  $k_1 A_c(x) f_c = 0,8 x b f_c$ .

$A_c(x)$  er arealet af betontværsnittet i trykzonen som funktion af  $x$

$A_s$  er trækarmringens tværsnitsareal

$A_{sc}$  er trykarmringens tværsnitsareal

$$\sigma_{sc} = \begin{cases} -f_y & \text{for } \epsilon_{sc} \leq -\epsilon_{yc} \\ f_y & \text{for } \epsilon_{sc} \geq \epsilon_y \\ E_s \epsilon_{sc} & \text{for } -\epsilon_{yc} < \epsilon_{sc} < \epsilon_y \end{cases} \quad (4.1-6)$$

4.1-10

$$\sigma_s = \begin{cases} -f_y \\ f_y \\ E_s \varepsilon_s \end{cases} \quad \text{for} \quad \begin{cases} \varepsilon_s \leq -\varepsilon_{yc} \\ \varepsilon_s \geq \varepsilon_y \\ -\varepsilon_y < \varepsilon_s < \varepsilon_y \end{cases} \quad (4.1-7)$$

$$\varepsilon_{sc} = -\varepsilon_{cu} \frac{x - d_{sc}}{x} \quad (4.1-8)$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \frac{d - x}{x} \quad (4.1-9)$$

Ved bestemmelsen af et tværsnits bæreevne sættes  $\varepsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3}$

Nulliniedybden  $x$  findes ved løsning af (4.1-5), hvori  $x$  optræder som eneste ubekendt, når  $\sigma_{sc}$  og  $\sigma_s$  ved benyttelse af udtrykkene (4.1-6) - (4.1-9) indsættes i (4.1-5)

Hvis  $|\varepsilon_{sc}|$  og  $\varepsilon_s$  er større end henholdsvis  $\varepsilon_{yc}$  og  $\varepsilon_y$  bliver (4.1-5) en første grads ligning i  $x$ .  
Hvis  $|\varepsilon_{sc}|$  og/eller  $\varepsilon_s$  er mindre end henholdsvis  $\varepsilon_{yc}$  og  $\varepsilon_y$  bliver (4.1-5) en andengrads ligning i  $x$ .

Problemet løses ved at skønne, om  $|\varepsilon_{sc}|$  og  $\varepsilon_s$  er større eller mindre end henholdsvis  $\varepsilon_{yc}$  og  $\varepsilon_y$ , hvorefter de til dette skøn hørende udtryk for  $\sigma_{sc}$  og  $\sigma_s$  findes af (4.1-6) - (4.1-9) og indsættes i (4.1-5).

Efter beregning af  $x$  undersøges det ved brug af (4.1-8) og (4.1-9), om forudsætningerne vedr.  $\varepsilon_{sc}$  og  $\varepsilon_s$  er opfyldte. Hvis ikke dette er tilfældet foretages et nyt skøn, og beregningerne gentages, indtil forudsætningerne er opfyldte.

For en given normalkraft  $N$  bestemmes herefter det til denne normalkraft hørende brudmoment  $M_u$  ved opstilling af en ækvivalensbetingelse fx ved moment om  $F_c$

$$\begin{aligned} M_u + N (0,5h - k_2 x) &= F_s (d - k_2 x) + F_{sc} (k_2 x - d_{sc}) \\ &= A_s \sigma_s (d - k_2 x) - A_{sc} \sigma_{sc} (k_2 x - d_{sc}) \end{aligned} \quad (4.1-10)$$

eller ved moment om  $F_{sc}$

$$\begin{aligned} M_u + N (0,5h - d_c) &= F_s (d - d_{sc}) - F_c (k_2 x - d_{sc}) \\ &= A_s \sigma_s (d - d_c) - k_1 A_c(x) f_c (k_2 x - d_c) \end{aligned} \quad (4.1-11)$$

hvor

$k_2 x$  er afstanden fra betontværsnittets trykkede kant til betontrykspændingernes resultant.

$k_2$  er en faktor, der er afhængig af betontværsnittets form. Ved rektangulære tværsnit er  $k_2 = 0,4$ .

Tværsnittets bæreevne er tilstrækkelig, hvis  $M_u \geq M$ , hvor  $M$  er snitmomentet hidrørende fra den ydre lastpåvirkning.

Den beskrevne fremgangsmåde vises i eksempel 4.1-1 ved beregning af brudmomentet for et normalkraftpåvirket rektangulært tværsnit, der er armeret med både træk- og trykarmering.

Ved brug af computer kan  $x$  fx. bestemmes iterativt ved følgende fremgangsmåde

- værdi for  $x$  skønnes,  $x = x_1$
- $\epsilon_{sc}$  og  $\epsilon_s$  beregnes af (4.1-8) og (4.1-9)
- $\sigma_{sc}$  og  $\sigma_s$  beregnes af (4.1-6) og (4.1-7)
- $N_1$  bestemmes af (4.1-5) og sammenlignes med den givne værdi af snitkraften  $N$
- for  $N_1 > N$  skønnes et nyt  $x = x_2 = x_1 + \Delta x$  ( $\Delta x$  positiv)  
for  $N_1 < N$  skønnes et nyt  $x = x_2 = x_1 - \Delta x$   
hvorefter beregningerne under a - d gentages med nye værdier af  $x$  indtil  $N_n \sim N$
- når en tilstrækkelig nøjagtig værdi af  $x$  er bestemt, bestemmes brudmomentet herefter af (4.1-10) eller (4.1-11)

#### Eksempel 4.1-1

For det i figur 4.1-6 viste rektangulære tværsnit påvirket af en tryknormalkraft  $N = -250$  kN ønskes brudmomentet  $M_u$  bestemt.

Tværsnittets dimensioner er vist i figur 4.1-6 a. Træk- og trykarmeringen består af henholdsvis 4 og 2 stk. ribbestål med  $d = 16$  mm, d.v.s.  $A_{st} = 804$  mm<sup>2</sup> og  $A_{sc} = 402$  mm<sup>2</sup>.

Armeringens arbejdslinie regnes lineærelastisk-idealplastisk med  $f_y = 550$  MPa,  $E_s = 2 \cdot 10^5$  MPa og  $\epsilon_y = |\epsilon_{yc}| = 550/2 \cdot 10^5 = 2,75 \cdot 10^{-3}$ .

Betonens trykstyrke er  $f_c = 30$  MPa, og der regnes med en spændingsfordeling i betonen som vist i figur 4.1-6 c.

Det skønnes at

$$\epsilon_s \geq \epsilon_y \rightarrow \sigma_s = f_y = 550 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{sc} \geq -\epsilon_{yc} \rightarrow \sigma_{sc} = E_s \cdot \epsilon_{sc} = -2 \cdot 10^5 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} (x-40)/x = -7 \cdot 10^2 (x-40)/x$$

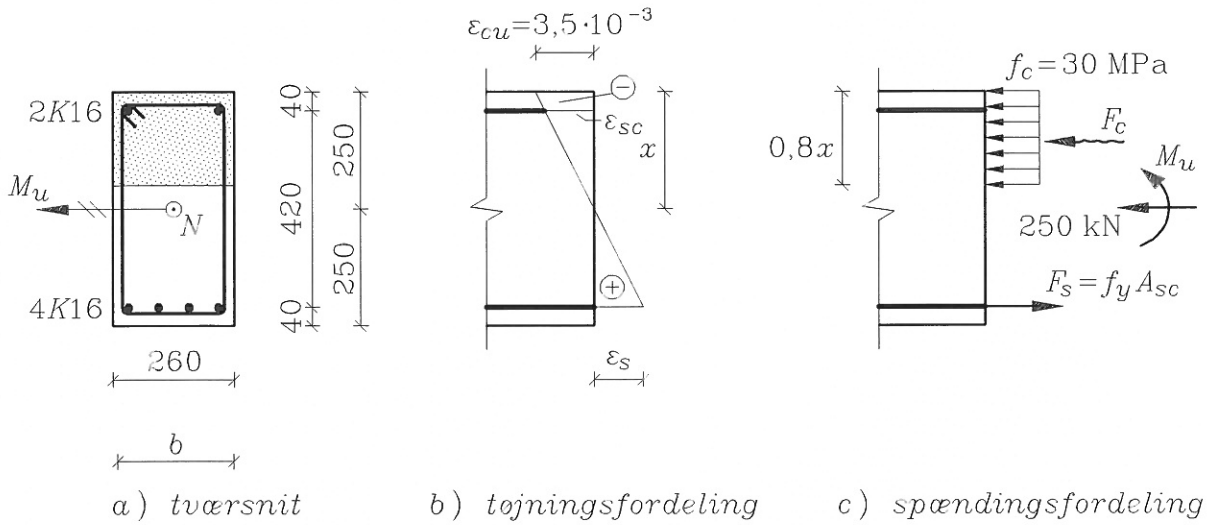
indsættes dette sammen med  $k_1 = 0,8$  i (4.1-5) fås

$$-250 \cdot 10^3 = -0,8 \cdot x \cdot 260 \cdot 30 + 402 (-7 \cdot 10^2 (x-40)/x) + 804 \cdot 550$$

4.1-12

der kan reduceres til

$$6,24 x^2 - 410,8x - 11256 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 86,7 \text{ mm}$$



Figur 4.1-6 Armeret, rektangulært betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt snitkraftpåvirkning  $M_u$  og  $N = -250 \text{ kN}$

De skønnede tøjningsforudsætninger kontrolleres ved anvendelse af (4.1-8) og (4.1-9)

$$\epsilon_{sc} = - 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{(86,7 - 40)}{86,7} = - 1,89 \cdot 10^{-3} > \epsilon_{yc} = - 2,75 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_s = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{(500 - 40 - 86,7)}{86,7} = 15,1 \cdot 10^{-3} \begin{cases} > \epsilon_y = 2,75 \cdot 10^{-3} \\ < \epsilon_u = 82,75 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Heraf ses, at tøjningernes størrelse er i overensstemmelse med det skønnede.

Flydemomentet bestemmes herefter af (4.1-11) ved moment om en linie gennem trykarmeringen:

$$M_u + (-250 \cdot 10^3)(250 - 40) = 804 \cdot 550 (500 - 40 - 40) - 0,8 \cdot 86,7 \cdot 260 \cdot 30 (0,4 \cdot 86,7 - 40)$$

$$M_u = 241 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 241 \text{ kNm}$$

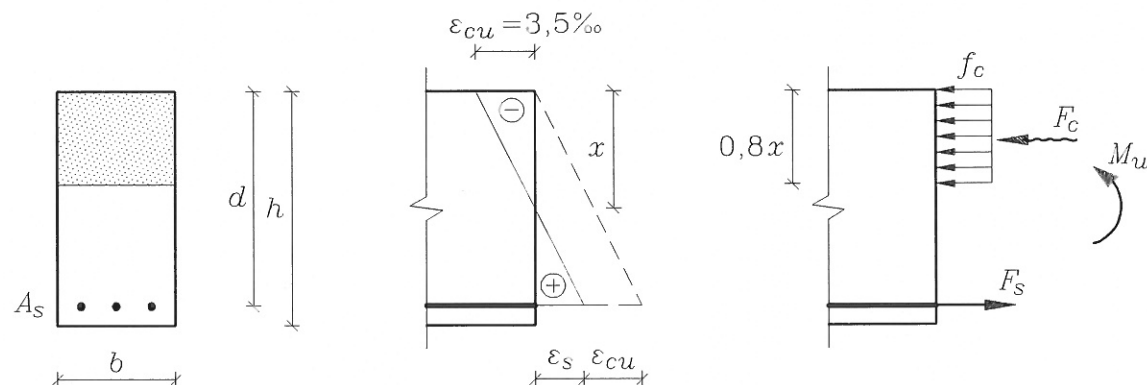
#### 4.1.4 Bestemmelse af bøjningsbæreevnen for tværsnit med konstant trykzonebredde

Nedenfor vil bestemmelsen af brudmomentet for tværsnit med konstant trykzonebredde svarende til normaltarmet-, ballanceret- og overarmet brudtilstand samt armeringstrækbrud blive behandlet i en række udvalgte tilfælde.

Konstant trykzonebredde forekommer ved bjælker med rektangulært tværsnit, T-bjælker samt i ribbedæk. I figur 4.1-9 er vist eksempler på bjælketværsnit, der kan behandles som tværsnit med konstant trykzonebredde.

##### A. Ren bøjning uden trykarmering, tværsnit med konstant trykzonebredde

I afsnit A gennemgås teorien ved betragtning af et rektangulært tværsnit, som vist i figur 4.1-7.



Figur 4.1-7 Armeret, rektangulært betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt snitkraftpåvirkning.

##### A1. Normaltarmet og ballanceret tværsnit, $\epsilon_s \geq \epsilon_y$ og $\epsilon_c = -\epsilon_{cu}$

Tværsnittet siges at være *normaltarmet*, når tøjningen  $\epsilon_s$  i armeringen ved beregning af brudmomentet er større end flydetøjningen  $\epsilon_y$  og mindre end brudtøjningen  $\epsilon_{cu}$ , samt største tryktøjning i betonen er lig brudtøjningen  $\epsilon_{cu}$ . Når tøjningerne opfylder disse betingelser, taler man om en normaltarmet brudtilstand.

Hvis  $\epsilon_s = \epsilon_y$ , er tværsnittet *ballanceret*, og man taler om en *ballanceret brudtilstand*.

Ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen (4.1-5) samt (4.1-7) fås

$$0 = -0,8 x b f_c + A_s f_y \quad (4.1-12)$$

4.1-14

$$x = 1,25 \frac{A_s f_y}{b f_c} \quad (4.1-13)$$

Brudmomentet kan herefter bestemmes af

$$M_u = A_s f_y (d - 0,4x) = A_s f_y \left( d - 0,5 \frac{A_s f_y}{b f_c} \right) \quad (4.1-14)$$

Ved indførelse af den mekaniske armeringsgrad  $\Phi$  som

$$\Phi = \frac{A_s f_y}{b d f_c} \quad (4.1-15)$$

kan (4.1-13) og (4.1-14) omskrives til

$$x = 1,25 d \frac{A_s f_y}{b d f_c} = 1,25 \Phi d = \beta d \quad \text{hvor } \beta = 1,25 \Phi \quad (4.1-16)$$

og

$$M_u = A_s f_y d (1 - 0,5 \Phi) = b d^2 f_c \Phi (1 - 0,5 \Phi) \quad (4.1-17)$$

Indføres yderligere

$$\mu = \Phi (1 - 0,5 \Phi) \quad (4.1-18)$$

kan brudmomentet  $M_u$  skrives som

$$M_u = \mu b d^2 f_c \quad (4.1-19)$$

Udtrykkene (4.1-15) til (4.1-19) for  $\Phi$ ,  $x$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  og  $M_u$  gælder kun for  $\epsilon_s \geq \epsilon_y$ .

Bemærk, at størrelserne  $\beta$  og  $\mu$  og dermed nulliniedybden  $x$  og brudmomentet  $M_u$  er funktioner af  $\Phi$  alene, hvorfor  $\beta$  og  $\mu$  kan tabelleres som funktioner af  $\Phi$ , se tabel 4.1-1

$\Phi$	$\beta$	$\mu$	$1-\frac{1}{2}\Phi$	$\Phi$	$\beta$	$\mu$	$1-\frac{1}{2}\Phi$	$\Phi$	$\beta$	$\mu$	$1-\frac{1}{2}\Phi$
0,001	0,001	0,001	0,999	0,047	0,059	0,046	0,976	0,096	0,119	0,091	0,952
0,002	0,003	0,002	0,999	0,048	0,060	0,047	0,976	0,097	0,121	0,092	0,952
0,003	0,004	0,003	0,998	0,049	0,062	0,048	0,975	0,098	0,122	0,093	0,951
0,004	0,005	0,004	0,998	0,050	0,063	0,049	0,975	0,099	0,124	0,094	0,951
0,005	0,006	0,005	0,997	0,051	0,064	0,050	0,974	0,100	0,125	0,095	0,950
0,006	0,008	0,006	0,997	0,052	0,065	0,051	0,974	0,101	0,126	0,096	0,949
0,007	0,009	0,007	0,996	0,053	0,067	0,052	0,973	0,102	0,128	0,097	0,949
0,008	0,010	0,008	0,996	0,054	0,068	0,053	0,973	0,103	0,129	0,098	0,948
0,009	0,011	0,009	0,995	0,056	0,069	0,054	0,972	0,104	0,131	0,099	0,948
0,010	0,013	0,010	0,995	0,057	0,071	0,055	0,972	0,106	0,132	0,100	0,947
0,011	0,014	0,011	0,994	0,058	0,072	0,056	0,971	0,117	0,146	0,110	0,942
0,012	0,015	0,012	0,994	0,059	0,073	0,057	0,971	0,128	0,160	0,120	0,936
0,013	0,016	0,013	0,993	0,060	0,075	0,058	0,970	0,140	0,175	0,130	0,930
0,014	0,018	0,014	0,993	0,061	0,076	0,059	0,970	0,151	0,189	0,140	0,924
0,015	0,019	0,015	0,992	0,062	0,077	0,060	0,969	0,163	0,204	0,150	0,918
0,016	0,020	0,016	0,992	0,063	0,079	0,061	0,969	0,175	0,219	0,160	0,912
0,017	0,021	0,017	0,991	0,064	0,080	0,062	0,968	0,188	0,234	0,170	0,906
0,018	0,023	0,018	0,991	0,065	0,081	0,063	0,967	0,200	0,250	0,180	0,900
0,019	0,024	0,019	0,990	0,066	0,083	0,064	0,967	0,213	0,266	0,190	0,894
0,020	0,025	0,020	0,990	0,067	0,084	0,065	0,966	0,225	0,282	0,200	0,887
0,021	0,027	0,021	0,989	0,068	0,085	0,066	0,966	0,238	0,298	0,210	0,881
0,022	0,028	0,022	0,989	0,069	0,087	0,067	0,965	0,252	0,315	0,220	0,874
0,023	0,029	0,023	0,988	0,070	0,088	0,068	0,965	0,265	0,331	0,230	0,867
0,024	0,030	0,024	0,988	0,072	0,089	0,069	0,964	0,279	0,349	0,240	0,861
0,025	0,032	0,025	0,987	0,073	0,091	0,070	0,964	0,293	0,366	0,250	0,854
0,026	0,033	0,026	0,987	0,074	0,092	0,071	0,963	0,307	0,384	0,260	0,846
0,027	0,034	0,027	0,986	0,075	0,093	0,072	0,963	0,322	0,402	0,270	0,839
0,028	0,036	0,028	0,986	0,076	0,095	0,073	0,962	0,337	0,421	0,280	0,832
0,029	0,037	0,029	0,985	0,077	0,096	0,074	0,962	0,352	0,440	0,290	0,824
0,030	0,038	0,030	0,985	0,078	0,098	0,075	0,961	0,368	0,459	0,300	0,816
0,031	0,039	0,031	0,984	0,079	0,099	0,076	0,960	0,384	0,479	0,310	0,808
0,033	0,041	0,032	0,984	0,080	0,100	0,077	0,960	0,400	0,500	0,320	0,800
0,034	0,042	0,033	0,983	0,081	0,102	0,078	0,959	0,417	0,521	0,330	0,792
0,035	0,043	0,034	0,983	0,082	0,103	0,079	0,959	0,434	0,543	0,340	0,783
0,036	0,045	0,035	0,982	0,083	0,104	0,080	0,958	0,452	0,565	0,350	0,774
0,037	0,046	0,036	0,982	0,085	0,106	0,081	0,958	0,471	0,589	0,360	0,765
0,038	0,047	0,037	0,981	0,086	0,107	0,082	0,957	0,490	0,613	0,370	0,755
0,039	0,048	0,038	0,981	0,087	0,108	0,083	0,957	0,510	0,638	0,380	0,745
0,040	0,050	0,039	0,980	0,088	0,110	0,084	0,956	0,531	0,664	0,390	0,735
0,041	0,051	0,040	0,980	0,089	0,111	0,085	0,956	0,553	0,691	0,400	0,724
0,042	0,052	0,041	0,979	0,090	0,113	0,086	0,955	0,576	0,720	0,410	0,712
0,043	0,054	0,042	0,979	0,091	0,114	0,087	0,954	0,600	0,750	0,420	0,700
0,044	0,055	0,043	0,978	0,092	0,115	0,088	0,954	0,626	0,782	0,430	0,687
0,045	0,056	0,044	0,977	0,093	0,117	0,089	0,953	0,654	0,817	0,440	0,673
0,046	0,058	0,045	0,977	0,094	0,118	0,090	0,953	0,684	0,855	0,450	0,658

Tabel 4.1-1  $\beta$ ,  $\mu$  og  $(1-\frac{1}{2}\Phi)$  som funktion af den mekaniske armeringsgrad  $\Phi$ .

## 4.1-16

Efter beregning af  $\Phi$  og tabelopslag for bestemmelse af  $\mu$  og  $\beta$  kan brudmomentet  $M_u$  og  $x$  for et givet betontværsnit med konstant tværsnitbredde og en given armering hurtigt beregnes af (4.1-19) og (4.1-16).

*Bestemmelse af størrelsesordenen af armeringsarealet for et normaltarmet betontværsnit påvirket til ren bøjning, dvs.  $N=0$*

Ved dimensionering af en betonkonstruktion er det hensigtsmæssigt først at bestemme størrelsesordenen af armeringsarealet  $A_s$ . Når normalkraften  $N = 0$  kan dette gøres som vist

$$M_u = z A_s f_y \quad (4.1-20)$$

nedenfor, idet brudmomentet kan skrives som hvor  $z = d - 0,4 x$ .  $z$  er afstanden mellem tværsnittets træk- og trykresultant og benævnes *tværsnittets indre momentarm*. For bestemmelse af størrelsesordenen af armeringen  $A_s$  for et tværsnit med konstant trykzonebredde påvirket til ren bøjning ( $N = 0$ ) kan nedenstående tilnærmede udtryk for  $z$  benyttes

$$z \approx 0,9 d \approx 0,9 \cdot 0,9 h = 0,81 h \quad (4.1-21)$$

hvorefter størrelsesordenen for  $A_s$  kan bestemmes af

$$A_s \sim \frac{M_s}{0,81 h f_y} \quad (4.1-22)$$

hvor  $M_s$  er det dimensionsgivende moment.

Bemærk, at der ved praktisk dimensionering skal benyttes regningsmæssige størrelser for henholdsvis det dimensionsgivende snitmoment  $M_s$  og armeringens flydespænding  $f_y$ .

Af (4.1-14) ses, at (4.1-22) er på den sikre side, når

$$d - 0,5 \frac{A_s f_{yd}}{b f_{cd}} \geq 0,9 d \quad (4.1-23)$$

eller når  $\Phi \leq 0,2$ , der er en omskrivning af (4.1-23).

Anvendes (4.1-14) eller (4.1-19) til bestemmelse af  $M_y$  er det nødvendigt for et normaltarmet tværsnit at eftervise, at  $\epsilon_s \geq \epsilon_y$ , eller at  $\Phi \leq \Phi_{bal}$ , se (4.1-27).

Dette gøres ved at bestemme  $\epsilon_s$  efter (4.1-9) eller efter den nedenfor angivne (4.1-24), der er en omskrivning af (4.1-9) ved indførelse af  $x = \beta d$

4.1-17

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x} = \varepsilon_{cu} \frac{d - \beta d}{\beta d} = \varepsilon_{cu} \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (4.1-24)$$

Når  $\varepsilon_c = \varepsilon_u$  og  $\varepsilon_s = \varepsilon_y$  benævnes brudtilstanden *den balancerede brudtilstand*, og man taler om *et balanceret tværsnit*.

Ved betragtning af de ensvinklede trekanten i tøjningsfiguren i figur 4.1-7 fås

$$x_{bal} = d \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} \quad (4.1-25)$$

hvor  $x_{bal}$  er tværsnittets nulliniedybde i det balancerede tværsnit.

Ved anvendelse af (4.1-16) og (4.1-25) fås

$$x_{bal} = d \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} = 1,25 \Phi_{bal} d \quad (4.1-26)$$

hvor  $\Phi_{bal}$  er den til det balancerede tværsnit hørende mekaniske armeringsgrad.

Af (4.1-26) fås

$$\Phi_{bal} = 0,8 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} \quad (4.1-27)$$

Det balancerede brudmoment  $M_{u,bal}$  kan i henhold til (4.1-19) beregnes af

$$M_{u,bal} = \mu_{bal} b d^2 f_c \quad (4.1-28)$$

hvor

$$\mu_{bal} = \Phi_{bal} (1 - 0,5\Phi_{bal}) \quad (4.1-29)$$

Da  $\varepsilon_{cu}$  og  $\varepsilon_y$  er kendte værdier for henholdsvis den anvendte betons trykbrudtøjning og den anvendte armerings flydetøjning, kan  $\Phi_{bal}$  og  $\mu_{bal}$  tabelleres.

Det er tidligere nævnt, at kontrollen af, om et tværsnit er normalarmeret eller overarmeret, kan

## 4.1-18

foretages ved at sammenligne den beregnede værdi af  $\varepsilon_s$  med værdien af  $\varepsilon_y$ . Tværsnittet er normalarmeret, når  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_y$ .

Af ovenstående fremgår, at denne undersøgelse også kan foretages ved at sammenligne den aktuelle værdi af  $\Phi$  med  $\Phi_{\text{bal}}$ . Hvis  $\Phi \leq \Phi_{\text{bal}}$  er der tale om et normalarmeret tværsnit, og hvis  $\Phi > \Phi_{\text{bal}}$ , er der tale om et overarmeret tværsnit.

## A2. Overarmeret brudtilstand $\varepsilon_s < \varepsilon_y$ og $\varepsilon_c = -\varepsilon_{cu}$

Fremgangsmåden ved bestemmelsen af brudmomentet for et *overarmeret tværsnit (overarmeret brudtilstand)* er vist nedenfor.

Idet tværsnittet ikke er trykarmeret og påvirket til ren bøjning, er  $A_{sc} = 0$ ,  $N = 0$  og  $\varepsilon_s < \varepsilon_y$ . Ved betragtning af figur 4.1-7 samt anvendelse af udtrykket (4.1-9) for tøjningen  $\varepsilon_s$  og ækvivalensbetingelsen (4.1-5) fås følgende udtryk til bestemmelse af  $x$

$$F_s = A_s E_s \varepsilon_s = A_s E_s \varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x} \quad (4.1-30)$$

$$N = 0 = -0,8 b x f_c + A_s E_s \varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x} \quad (4.1-31)$$

Herefter kan  $x$  beregnes af 2. gradsligningen

$$x^2 + \frac{A_s E_s \varepsilon_{cu}}{0,8 b f_c} x - \frac{A_s E_s \varepsilon_{cu}}{0,8 b f_c} d = 0 \quad (4.1-32)$$

med løsningen

$$x = \frac{A_s E_s \varepsilon_{cu}}{1,6 b f_c} \left( -1 + \sqrt{1 + 3,2 \frac{b d f_c}{A_s E_s \varepsilon_{cu}}} \right) \quad (4.1-33)$$

Indføres

$$\Phi = \frac{A_s f_y}{b d f_c} \quad (4.1-34)$$

og

$$\gamma = \frac{E_s \varepsilon_{cu}}{f_y} \quad (4.1-35)$$

kan (4.1-33) omskrives til

$$x = 0,625 \Phi \gamma d \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{3,2}{\Phi \gamma}} \right) \quad (4.1-36)$$

Når  $x$  er bestemt af (4.1-33) eller (4.1-36) kan brudmomentet  $M_u$  bestemmes af et af nedenstående udtryk ved brug af ækvilensbetingelsen for momenter, idet der tages moment om punkter på henholdsvis  $F_s$  og  $F_c$ 's angrebslinier

$$M_u = 0,8 b x f_c (d - 0,4 x) \quad (4.1-37)$$

eller

$$M_u = A_s E_s \varepsilon_{cu} \frac{d - x}{x} (d - 0,4 x) \quad (4.1-38)$$

### A3. Armeringstrækbrud $|\varepsilon_c| < \varepsilon_{cu}$ og $\varepsilon_s = \varepsilon_u$

Ved armeringstrækbrud forstås den brudtilstand, hvor armeringen bliver trukket over, d.v.s.  $\varepsilon_s = \varepsilon_u$ , før betonen i trykzonen knuses eller med andre ord, før tøjningen i betonen når værdien svarende til brudtøjningen. Tøjningsfordelingen ved armeringstrækbruddet vil ligge i område ABE, se figur 4.1-4.

Denne brudtilstand kan forekomme for tværsnit med et relativt lille trækarmingsareal eller for tværsnit påvirket af en træknormalkraft.

Bortset fra enkelte undtagelsestilfælde stilles der i normerne krav om, at arealet af trækarmeringen  $A_s$  skal være større end arealet svarende til minimumstrækarmeringen  $A_{s,min}$ , se mere herom i delafsnit D. *Minimumsarmering*.

#### 4.1-20

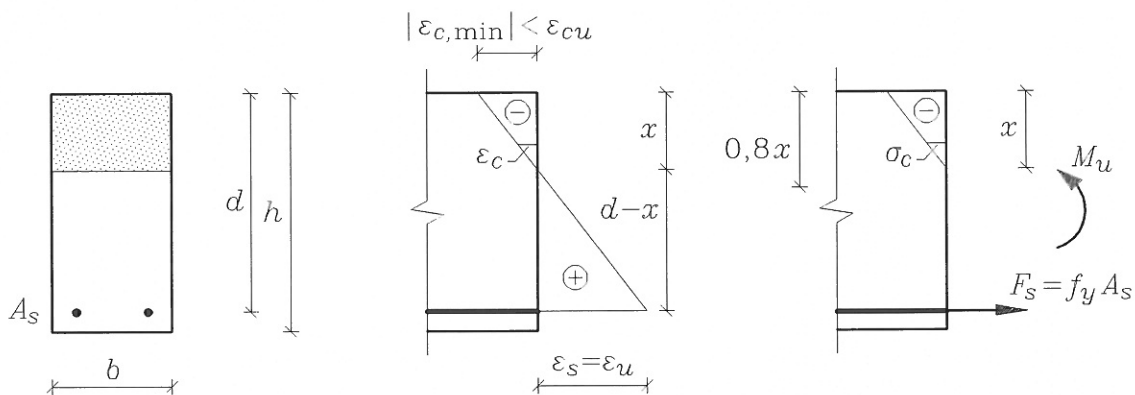
Den foran anvendte tilnærmede spændingstilstand med konstant betontrykspænding  $f_c$  over højden  $0,8x$  forudsætter, at  $|\epsilon_c|_{\max} = \epsilon_{cu}$ . Da  $|\epsilon_c|_{\max} < \epsilon_{cu}$  vil den virkelige spændingsfordeling i betonen være afhængig af størrelsen af  $A_s$ , som vist i ①, ③ eller ⑤ i figur 4.1-2e.

For tværsnit påvirket til ren bøjning ( $N = 0$ ) og med armeringstrækbrud som brudform kan fremgangsmåden vist for den normaltarmerede brudtilstand anvendes som en god tilnærmelse, d.v.s brudmomentet kan bestemmes af (4.1-17) som

$$M_u = A_s f_y d (1 - 0,5\Phi) = b d^2 f_c \Phi (1 - 0,5\Phi) \quad (4.1-39)$$

Nedenfor er der i eksempel 4.1-2 foretaget en vurdering af, hvor stor en fejl der begås ved beregning af brudmomentet  $M_u$  under antagelse af konstant trykspænding  $f_c$  over højden  $0,8x$ , når brudformen er et armeringstrækbrud med  $\epsilon_s > \epsilon_y$  og  $|\epsilon_c| < \epsilon_{cu}$ .

#### Eksempel 4.1-2



Figur 4.1-8

Armeret, rektangulært betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt snitkraftpåvirkning svarende til brudtilstanden *armeringstrækbrud*, dvs.  $|\epsilon_{c,\min}| < \epsilon_{cu}$  og  $\epsilon_s = \epsilon_u$

Den største afvigelse fås ved at antage en trekantformet fordeling for betontrykspændingerne svarende til en numerisk lille værdi for betontryktøjningen og dermed betontrykspændingen. Betonspændingerne refererer til den første del af den opadgående gren på betonarbejdslinien, der med god tilnærmelse kan regnes retlinet.

I figur 4.1-8 er vist et rektangulært tværsnit påvirket til ren bøjning med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt snitkraftpåvirkning. Brudformen antages at svare til armeringstrækbrud.

Brudmomentet kan beregnes som

$$M_u = A_s f_{yd} z = A_s f_{yd} (d - \alpha x) \quad (4.1-40)$$

hvor

$z$  er tværsnittets indre momentarm

$$\alpha = \begin{cases} 0,4 & \text{for rektangulær fordeling af betontrykspændingerne} \\ 0,333 & \text{for trekantformig fordeling af betontrykspændingerne} \end{cases} \quad (4.1-41)$$

Af ensvinklede trekanter i tøjningsfordelingen vist i figur 4.1-8 fås

$$x = \frac{-\varepsilon_{c,\min}}{-\varepsilon_{c,\min} + \varepsilon_u} d \quad (4.1-42)$$

idet  $\varepsilon_{c,\min}$  er negativ.

Ved armeringstrækbrud kan følgende uligheder opstilles for beton- og armeringstøjningerne

$$|\varepsilon_{c,\min}| < 0,35\% < \varepsilon_u \quad (4.1-43)$$

Ifølge DS 411 skal følgende krav til armeringens brudtøjning tilfredsstilles

$$\varepsilon_u \geq 3\% + \frac{f_y}{E_s} \sim 3,3\% \quad (4.1-44)$$

Normalt er  $\varepsilon_u > 5\%$

Antages f.eks.  $\varepsilon_{c,\min} = -0,3\%$  og  $\varepsilon_u = 3,3\%$  fås af (4.1-42)

$$x = \frac{0,3}{0,3 + 3,3} d \approx 0,08 d \quad (4.1-45)$$

Indsættes (4.1-41) og (4.1-45) i (4.1-40) fås

$$M_u = \begin{cases} 0,9680 A_s f_y d & \text{for rektangulær spændingsfordeling} \\ 0,9734 A_s f_y d & \text{for trekantformig spændingsfordeling} \end{cases}$$

heraf ses, at den fejl, der begås ved at anvende en konstant betopspænding  $f_c$  over højden  $0,8x$  ved bestemmelsen af brudmomentet  $M_u$  for et tværsnit med brudformen armeringstrækbrud, vil være mindre end  $0,7\%$ .

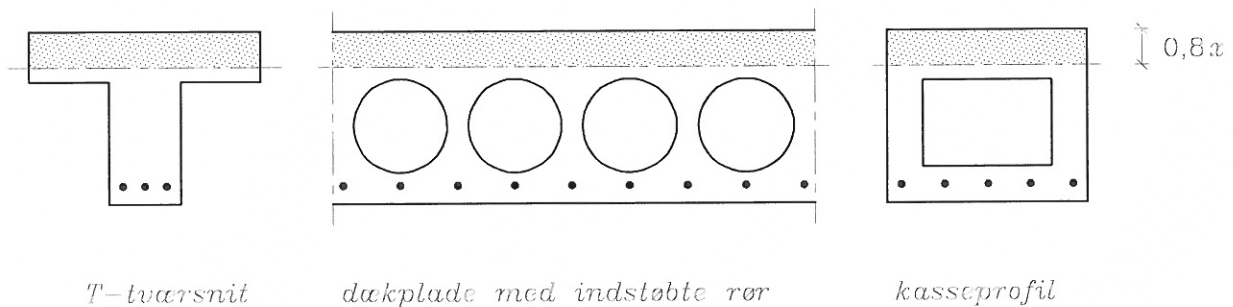
### B. Brudmoment for bjælker med vilkårligt tværsnit

For bjælker med vilkårligt tværsnit beregnes tværsnittets brudmoment normalt som ved et rektangulært tværsnit, idet betontrykspændingen  $f_c$  tilnærmet antages konstant over højden  $0,8x$ . Trykresultanten angriber derfor i tyngdepunktet for den del af tværsnittet, der er påvirket af

trykspændinger.

Nulliniedybden  $0,8x$  er tilpasset tværsnit med konstant trykzonebredde således, at antages en konstant betonspænding  $f_c$  over højden  $0,8x$  fås et beregnet brudmoment, der meget nær har samme størrelse som brudmomentet fundet ved forsøg med bjælker med det betragtede tværsnit.

Ovennævnte tilnærmelse for vilkårlige tværsnit bevirker derfor, at det beregnede brudmoment for et vilkårligt tværsnit normalt vil afvige mere fra det virkelige brudmoment end det beregnede brudmoment for et tværsnit med konstant trykzonebredde afviger fra det virkelige brudmoment for dette tværsnit. Fejlen spiller dog sjældent nogen større rolle ved ren bøjning, da nulliniedybden ved denne påvirkning normalt er relativ lille i forhold til den indre momentarm  $z$ . Fejlens størrelse er dog afhængig af tværsnittets form og må ved tværsnit, der afviger stærkt fra tværsnit med konstant nulliniedybde, vurderes i hvert enkelt tilfælde.

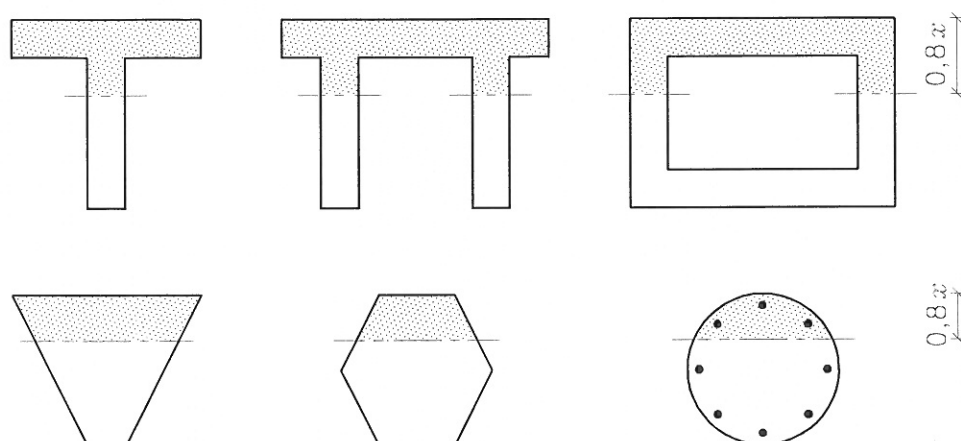


Figur 4.1-9 Eksempler på armerede betontværsnit der beregningsmæssigt kan behandles som tværsnit med konstant trykzonebredde.

Ved bøjning med tryknormalkraft kan fejlen have større betydning, hvorfor det ved denne påvirkning i hvert enkelt tilfælde ligeledes må vurderes, om den nævnte tilnærmede konstante spændingsfordeling er acceptabel.

I figur 4.1-9 er vist eksempler på vilkårlige tværsnit for hvilke beregning af brudmomentet under antagelse af konstant spænding over højden  $0,8x$  giver lige så gode resultater som de tilsvarende beregninger for massive rektangulære tværsnit med samme bredde  $b$ . Dette skyldes, at der ved beregning af brudmomentet helt ses bort fra den beton, der ligger under linien i afstanden  $0,8x$  fra bjælketværsnittets overside, idet betonens trækstyrke ikke tages i regning, og at den del af tværsnittet, der regnes påvirket af trykspændinger, har konstant bredde. Fordelen ved de i figur 4.1-9 viste tværsnit sammenlignet med massive rektangulære tværsnit er, at de viste tværsnit kræver et mindre materialeforbrug og dermed har en mindre egenvægt pr. løbende meter.

Tværsnittene vist i figur 4.1-10 har ikke konstant tværsnitsbredde i det område over højden  $0,8x$ , der antages påvirket af en konstant betontrykspænding. De tilhørende beregninger bliver derfor lidt anderledes end for rektangulære bjælketværsnit, idet trykresultanten ikke ligger i afstanden  $0,4x$  fra bjælkeoversiden.



Figur 4.1-10 Eksempler på armerede betontværsnit med variabel trykzonebredde

Beregningerne udføres normalt ved, at det areal, der antages påvirket af en konstant trykspænding  $f_c$ , opdeles i delarealer med kendt tyngdepunktsbeliggenhed. Det kan fx være i form af rektangler, trekanter, cirkelafsnit, cirkeludsnit mv.. Efter at have bestemt størrelsen  $0,8x$  ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen for projektion på bjælkeaksen bestemmes brudmomentet  $M_u$  ved ækvivalensbetingelsen for moment om  $fx$  resultanten af trækkræfterne i armeringen, tværsnittets overside eller resultanten af spændingerne virkende på et af de nævnte deltværsnit. Fremgangsmåden illustreres i eksemplerne 4.1-3 og 4.1-4

#### Eksempel 4.1-3

Brudmomentet ønskes bestemt for en bjælke med det i figur 4.1-11 viste kasseformede tværsnit.

Bjælken er fremstillet af beton og armeret i underflangen med 16 stk kamsstål med diameteren  $\phi = 25$  mm svarende til  $A_s = 7854 \text{ mm}^2$ .

Det betragtede tværsnit vil i praksis af konstruktive grunde også være forsynet med bøjler og langsgående armeringsstænger i kroppene og overflangen, men i dette eksempel tages der ved bestemmelse af brudmomentet  $M_u$  kun hensyn til den viste armering i tværsnittets underside.

Materialedata:

beton:  $f_c = 30 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_{cu} = 0,0035$

armering:  $f_y = 550 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_u = 0,08$ ,  $E_s = 200000 \text{ MPa}$

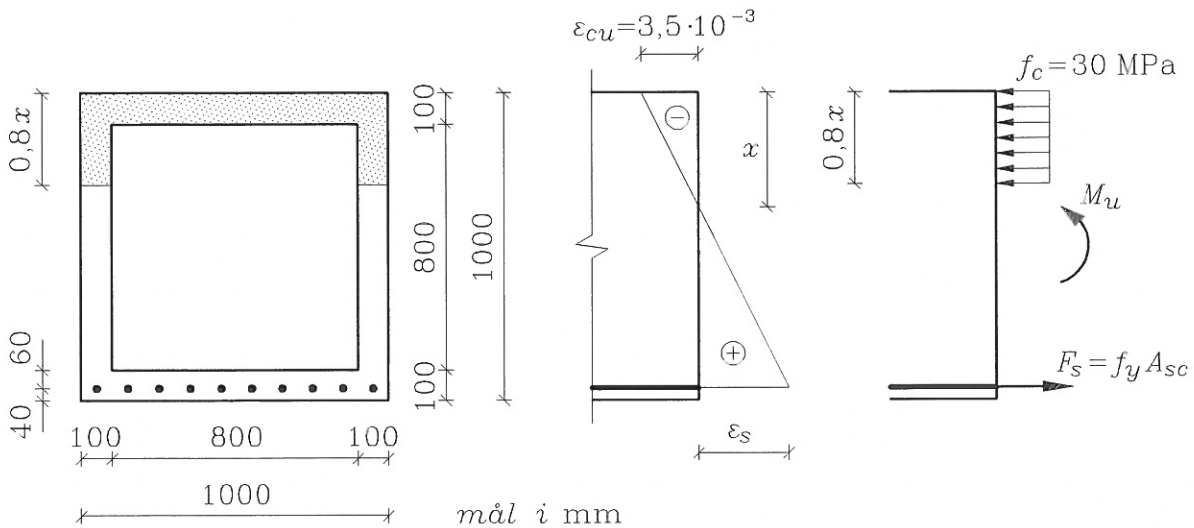
Tværsnittets effektive højde er  $d = 1000 - 40 = 960 \text{ mm}$

Ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen for vandret projektion fås

$$N = 0 = (800 \cdot 100 + 0,8x \cdot 100 \cdot 2) \cdot 30 = 7854 \cdot 550$$

4.1-24

og deraf  $x = 400 \text{ mm}$



Figur 4.1-11 Kasseformet bjælketværsnit af armeret beton

$$\varepsilon_s = 0,0035(960-400)/400 = 0,0049 > \varepsilon_y = 550/200000 = 0,00275$$

Ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen for moment om trækarmingen bestemmes

$$M_u = \{800 \cdot 100 (960 - 50) + 0,8 \cdot 400 \cdot 100 \cdot 2 \cdot (960 - 0,4 \cdot 400)\} \cdot 30 \cdot 10^{-6}$$

$$M_u = 2184 + 1536 = 3720 \text{ kNm}$$

#### Eksempel 4.1-4

Brudmomentet ønskes bestemt for en bjælke med det i figur 4.1-12 viste sekskantede tværsnit.

Bjælken er fremstillet af beton og armeret i underflangen med 3 stk kamsstål med diameteren  $\varphi = 25 \text{ mm}$  svarende til  $A_s = 1473 \text{ mm}^2$ .

Det betragtede tværsnit vil i praksis af konstruktive grunde også være forsynet med bøjler og langsgående armeringsstænger ved bjælkemidte og -overside, men i dette eksempel tages der ved bestemmelse af brudmomentet  $M_u$  kun hensyn til den viste armering i tværsnittets underside.

Materialedata:

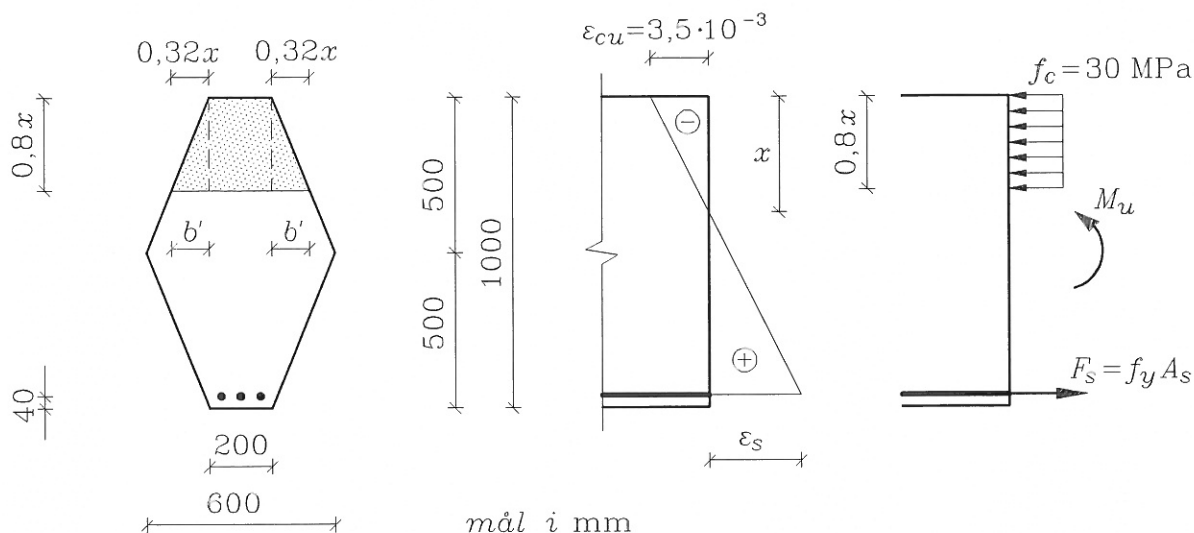
beton:  $f_c = 30 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{cu} = 0,0035$

armering:  $f_y = 550 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_u = 0,08$ ,  $E_s = 200000 \text{ MPa}$

Tværsnittets effektive højde er  $d = 960 \text{ mm}$

I beregningerne opdeles arealet af det trykpåvirkede betontværsnit i delarealer, nemlig et rektangel med bredden 200 mm og 2 trekanter med højden  $0,8 x$ , og bredden  $b'$  af de vandrette kateter.  $b'$  bestemmes af

$$b' = 0,5 \cdot 0,8x (600 - 200)/500 = 0,32x$$



Figur 4.1-12 Sekskantformet bjælketværsnit af armeretbeton med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling samt snitkraftpåvirkning.

Ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen for vandret projektion fås

$$N = 0 = (200 \cdot 0,8x + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,8x \cdot 0,32x) \cdot 30 - 1473 \cdot 550$$

hvilket giver fig. 2. grads ligning til bestemmelse af  $x$

$$0,256x^2 + 160x - 27005 = 0$$

$$x = 138,2 \text{ mm}$$

Ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen for moment om trækarmingen bestemmes

$$M_u = \{200 \cdot 0,8 \cdot 138,2 \cdot (960 - 0,4 \cdot 138,2) + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,8 \cdot 138,2 \cdot 0,32 \cdot 138,2 \cdot (960 - 2/3 \cdot 0,8 \cdot 138,2)\} \cdot 30 \cdot 10^{-6}$$

$$M_u = 600,2 + 130,0 = 730,2 \text{ kNm.}$$

### C. Brudbetingelse for bøjning med normalkraft

Bøjningsbæreevnen for et givet bjælketværsnit defineres som det moment  $M_{u,N}$ , der for en given normalkraft  $N$  medfører, at tværsnittets bæreevne er udtømt. Den maksimale bæreevne opnås umiddelbart før, der forekommer trykbrud i betonen eller trækflydning i armeringen.

Afbildes alle de kombinationer af  $M$  og  $N$ , der giver brud i tværsnittet, i et  $MN$ -diagram, vil der fremkomme en lukket kurve, som vist punkteret i figur 4.1-13. For kombinationer af  $M$  og  $N$ , hvor punktet  $(N, M)$  er et punkt indenfor den lukkede kurve, vil tværsnittets bæreevne være større end den betragtede belastning, hvorimod bæreevnen vil være overskredet, hvis punktet falder udenfor den lukkede kurve. Den lukkede kurve er krum, som vist punkteret, men i praksis

#### 4.1-26

anvendes ofte som en tilnærmelse den viste fuldt optrukne og stykvis retlinet kurve, idet punkterne A, B, C, D, E, D', C' og B' forbindes med rette linier.

De nævnte punkter svarer til følgende situationer

A	trækflyde- eller 0,2 %-spænding i al hovedarmering
B og B'	ren bøjning
C og C'	balanceret brudtilstand, d.v.s. ved den ene tværsnitskant er $\epsilon_c = -\epsilon_{cu}$ og ved den modsatte kant er $\epsilon_s = \epsilon_y$
D og D'	ved den ene tværsnitskant er betonens tøjning $\epsilon_c = -\epsilon_{cu}$ , og ved den modsatte kant er tøjningen i armeringen lig nul, d.v.s. $\epsilon_s = 0$
E	Tøjningen er konstant over hele tværsnittet svarende til den maksimale ordinat på betonens trykarbejdslinie, hvilket i henhold til DS 411 svarer til - 0,2 %

I det følgende gennemgås, hvordan de enkelte punkter bestemmes for et rektangulært tværsnit armeret med træk- og trykarmering.

Tøjnings- og spændingstilstandene svarende til de enkelte punkter A, B, C, D, E, B', C' og D' på brudbetingelsen er for et rektangulært tværsnit vist i figur 4.1-14. Spændingen i trykarmeringen kan antage værdier i henhold til (4.1-6).

N antages at angribe i tværsnittets lodrette symmetrilinie i afstanden  $\frac{1}{2}h$  fra tværsnittets overkant. Til bestemmelse af N, x og  $M_{u,N}$  benyttes ækvivalensbetingelserne for henholdsvis projektion på bjælkeaksen og moment, idet der for pkt. A og E tages moment om betontværsnittets midte, medens der for de øvrige punkter tages moment om betontrykkets resultant. Det antages, at  $f_{yc} = f_y$

##### Punkt A:

$$N = A_{sc}f_y + A_s f_y \quad (4.1-46)$$

$$M_{u,N} = A_s f_y (d - 0,5 h) - A_{sc} f_y (0,5 h - d_{sc}) \quad (4.1-47)$$

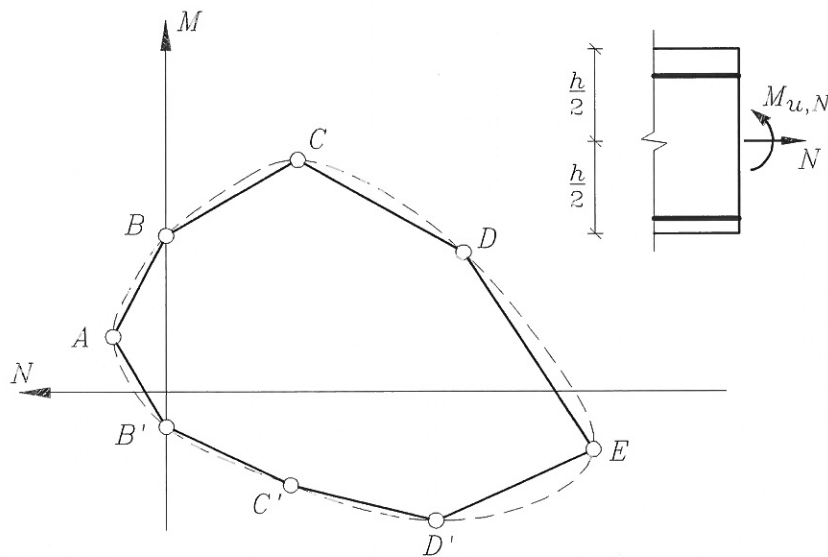
##### Punkt B:

$$N = 0 = A_s f_y + A_{sc} \sigma_{sc} - 0,8 x b f_c \quad (4.1-48)$$

$$x = 1,25 \frac{A_s f_y + A_{sc} \sigma_{sc}}{b f_c} \quad (4.1-49)$$

$\sigma_{sc}$  skønnes at antage én af værdierne angivet i (4.1-6), og der omregnes, indtil der er overensstemmelse mellem værdierne af spændinger og tøjninger. Herefter bestemmes  $M_u$  af

$$M_{u,N} = A_s f_y (d - 0,4 x) - A_{sc} \sigma_{sc} (0,4 x - d_{sc}) \quad (4.1-50)$$



Figur 4.1-13 Brudbetingelse for bøjning med normalkraft, MN-diagram

#### Punkt C:

Af ensvinklede trekanter i tøjningsfiguren, se figur 4.1-14 fås

$$x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y} d \quad (4.1-51)$$

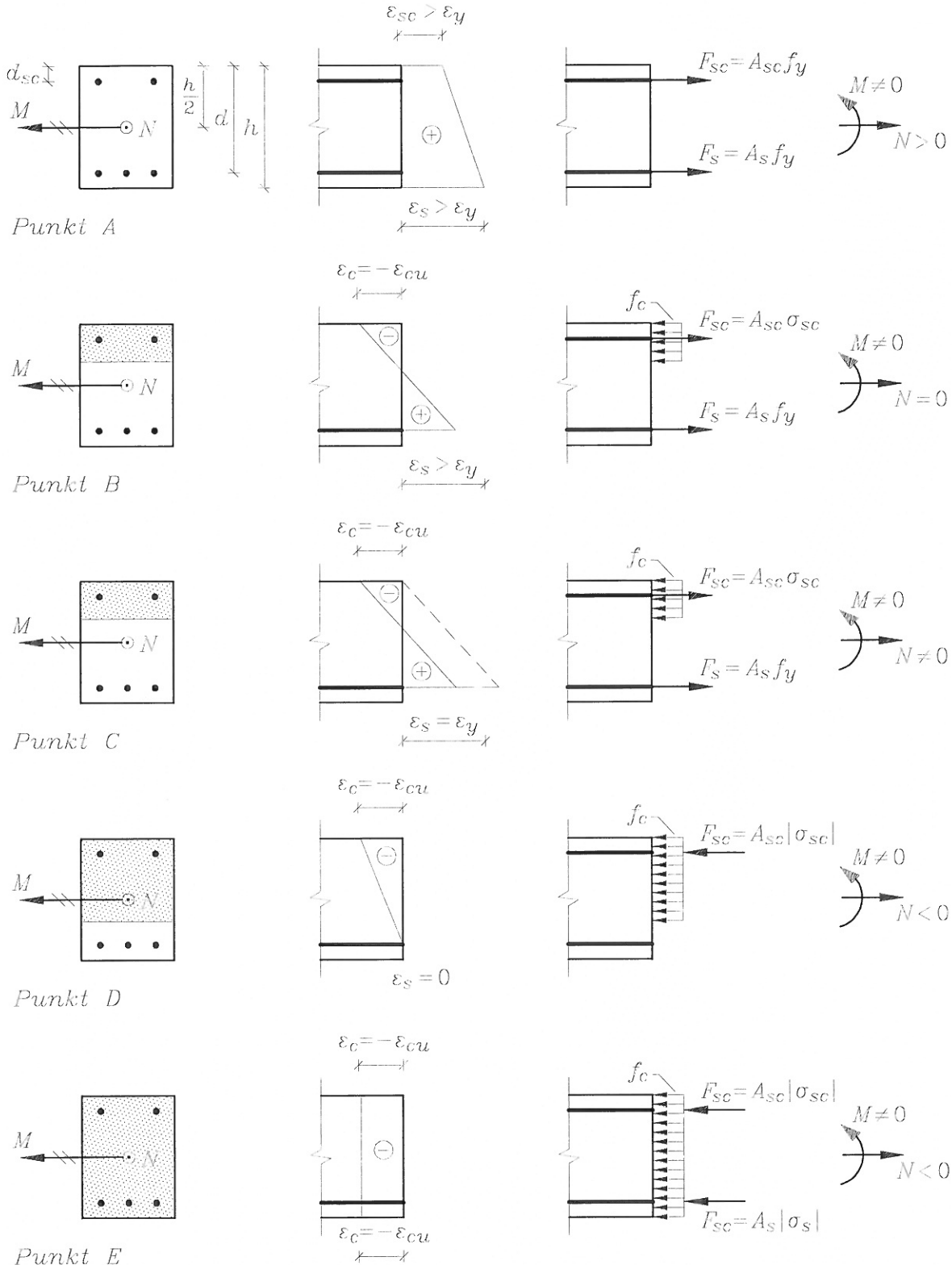
hvorefter normalkraften  $N$  og momentet brudmomentet  $M_{u,N}$  kan beregnes af

$$N = A_s f_y + A_{sc} \sigma_{sc} - 0,8 x b f_c \quad (4.1-52)$$

hvor  $\sigma_{sc}$  bestemmes i henhold til (4.1-6)

$$M_{u,N} = A_s f_y (d - 0,4 x) - A_{sc} \sigma_{sc} (0,4 x - d_{sc}) - N(0,5 h - 0,4 x) \quad (4.1-53)$$

4.1-28



Figur 4.1-14 Tøjnings- og spændingstilstande svarende til punkterne A, B, C, D og E på MN-kurven i figur 4.1-12 der angiver brudbetingelsen for bøjning med normalkraft for det viste rektangulære armerede betontværsnit.

Punkt D:

$$x = d \quad (4.1-54)$$

hvorefter normalkraften  $N$  og momentet brudmomentet  $M_{u,N}$  kan beregnes af

$$N = -A_{sc} / \sigma_{sc} / - 0,8 x b f_c = -A_{sc} / \sigma_{sc} / - 0,8 d b f_c \quad (4.1-55)$$

$$M_{u,N} = A_{sc} / \sigma_{sc} / (0,4d - d_{sc}) - N(0,5h - 0,4d) \quad (4.1-56)$$

Punkt E:

$$N = -A_s / \sigma_s / - A_{sc} / \sigma_{sc} / - b h f_c \quad (4.1-57)$$

$$M_{u,N} = -A_s / \sigma_s / (d - 0,5h) + A_{sc} / \sigma_{sc} / (0,5h - d_{sc}) \quad (4.1-58)$$

Der skal erindres om, at spændinger og normalkraft regnes positive som træk. I ovenstående vil  $N$  og  $\sigma_{sc}$  ofte være negative tal i normalt forekommende beregninger for armerede betonkonstruktioner.

Ved beregning af  $N$  og  $M$  svarende til punkt E i MN-diagrammet må der højst regnes med en spænding i armeringen svarende til tøjningen ved toppunktet på betonens arbejdslinie, dvs.  $|\epsilon_{sc}| = 0,2 \%$ , idet større tryktøjninger vil give  $\sigma_c < f_c$ .

*D. Minimumsarmering ved ren bøjning*

En konstruktion tilstræbes dimensioneret på en sådan måde, at hvis der forekommer et begyndende brud i konstruktionen fx på grund af overbelastning, vil brudformen svare til et varslet brud, der er kendetegnet ved forekomsten af store nedbøjninger og store revner. Der vil i så fald ofte være mulighed for en aflastning og/eller en afstivning, inden konstruktionen evt. styrter sammen. For at opnå et varslet brud i en statisk bestemt konstruktion kræves der en minimumsarmering, som i DS 411 bestemmes ved et krav om, at det revnede tværsnits karakteristiske bæreevne skal være større end den karakteristiske bæreevne for det urevnede tværsnit. Ved beregning af minimumsarmering sættes den karakteristiske bøjningstrækstyrke  $f_{ct,flk}$  til 2 x den karakteristiske værdi af den énaksede trækstyrke  $f_{ctk}$ , dvs.

$$f_{ct,flk} = 2f_{ctk} \quad (4.1-59)$$

Vedr. karakteristiske og regningsmæssige værdier henvises til afsnit 3.1 *Sikkerhedsvurdering ved beregning*.

En konstruktion forsynet med en armering, der er mindre end ovennævnte minimumsarmering, benævnes ofte en *underarmeret konstruktion*.

Det er særlig vigtigt at overholde kravet om minimumsarmering i statisk bestemte konstruktioner, da der her ikke er nogen mulighed for omlejring af snitkræfterne, hvis et enkelt underarmeret tværsnit overbelastes. Omlejring af snitkræfterne kan derimod finde sted ved statisk ubestemte konstruktioner, hvorfor det ikke nødvendigvis medfører et pludseligt brud, selv om et underarmeret tværsnit overbelastes.

Undtagen i nedennævnte tilfælde anbefales det altid at indlægge en armering, der er større end eller lig med minimumsarmeringen.

Krav om minimumsarmering er ikke nødvendig

- ved fordelingsarmeringen i enkeltspændte plader
- ved længdearmering i konstruktioner, hvor selv en kraftig overbelastning kombineret med svindpåvirkninger giver anledning til så små trækspændinger i den urevnedede beton, at disse kan omlejres til og optages af den indlagte armering ved en pludselig revnedannelse.

For at opnå en god revnefordeling i armerede betonkonstruktioner anses det for god praksis bl.a. at indlægge en armering svarende til mindst minimumsarmeringen. Når en konstruktion med en armering mindre end minimumsarmeringen revner, viser forsøg, at der kun dannes én eller meget få revner med stor revnevidde. Dette kan forklares ved, at armeringsarealet er så lille, at det ikke kan bevirke, at der i nabotværsnit til revnen opstår trækspændinger i betonen lig betonens trækstyrken. Derved dannes der kun denne ene revne (eller meget få revner), og hele deformationen skal optages i denne revne med store revnevidder og stor lokal forlængelse i armeringen tilfølgende.

Det skal dog præciseres, at anvendelse af en minimumsarmering bestemt efter reglerne i DS 411 ikke sikrer, at revnevidden bliver acceptabel set fra et holdbarhedsmæssigt synspunkt. Dette skal sikres ved et krav til revneviddernes størrelse, se nærmere herom i afsnit 5.4 *Revner i armerede betonkonstruktioner*.

Kræves i henhold til DS 411, at det revnede tværsnits karakteristiske bæreevne skal være større end den karakteristiske bæreevne for det urevnedede tværsnit, fås for et vilkårligt tværsnit

$$M_{revne} = W f_{ct,flk} = 2 W f_{ctk} \leq M_u = A_{s,min} f_{yk} z \quad (4.1-60)$$

hvor  $W$  er det urevnedede tværsnits modstandsmoment svarende til forekomsten af de største trækspændinger i betonen,  $z$  er det revnede tværsnits indre momentarm og  $A_{s,min}$  er minimumsarmeringsarealet.  $A_{s,min}$  bestemmes af

$$A_{s,\min} = 2 \frac{W}{z} \frac{f_{ctk}}{f_{yk}} \quad (4.1-61)$$

Sættes for et rektangulært tværsnit  $W = 1/6 bh^2$ , og benyttes tilnærmelsen  $h \approx 1,1d$  og  $z \approx 0,9d$  fås af (4.1-61) følgende udtryk for minimumsarmeringsforholdet

$$\rho_{\min} = \frac{A_{s,\min}}{bd} = \frac{2 \cdot 1/6 b (1,1d)^2 f_{ctk}}{0,9d f_{yk} b d} = 0,45 \frac{f_{ctk}}{f_{yk}} \quad (4.1-62)$$

Ved bestemmelse af minimumsarmering for T-bjælker bør flangebredden ikke regnes mindre end  $b = b_w + 2h_f$ , hvor  $b_w$  er bredden af T-bjælkens krop, og  $h_f$  er tykkelsen af T-bjælkens flange.

Ved dimensionering i den regningsmæssige brudgrænsetilstand defineres den mekaniske armeringsgrad  $\Phi$  som

$$\Phi = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (4.1-63)$$

Minimumsværdien for den mekaniske armeringsgrad  $\Phi$  er defineret ved

$$\Phi_{\min} = \rho_{\min} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (4.1-64)$$

heraf fås ved anvendelse af (4.1-62)

$$\Phi_{\min} = 0,45 \frac{f_{ctk}}{f_{yk}} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0,142 \frac{\gamma_c}{\gamma_s} \frac{1}{\sqrt{f_{ck}}} \quad (4.1-65)$$

hvor partialkoefficienterne  $\gamma_c$  og  $\gamma_s$  samt  $f_{ctk} = \sqrt{0,1 f_{ck}}$  er indført

Forsøg viser, at trækstyrken er afhængig af tværsnittets størrelse samt, at betonens bøjnings-trækstyrken i uarmerede konstruktioner højst er 1,6 til 1,7 gange den enaksede trækstyrke. Det er derfor på den sikre side ved bestemmelse af minimumsarmeringen at regne med  $f_{ct,flk} = 2f_{ctk}$ .

I DS 411 tages der ikke hensyn til den nævnte størrelseseffekt ved bestemmelse af minimumsarmering, hvorimod der i EC2 tages hensyn til denne effekt.

#### 4.1-32

I EC 2 afsnit 9.2.1 anbefales nedenstående udtryk til bestemmelse af minimumsarmeringen i bjælker samtidig med, at der henvises til nationale annekser

$$A_{s,\min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t d \quad \text{dog ikke mindre end } 0,0013b_t d \quad (4.1-66)$$

hvor

$b_t$  er middelbredden af trækzonen; for T-bjælker med tryk i flangen er  $b_t$  middelbredden af bjælkekroppen.

$f_{ctm}$  er betonens middeltrykstyrke efter 28 døgn. I EC 2 regnes  $f_{ctm} = 1,45 f_{ctk}$ . Det skal bemærkes, at for samme værdi af  $f_{ck}$  angiver EC 2 en større værdi for  $f_{ctk}$  end DS 411.

Hvis der stilles krav til revnevidde, angives der i EC 2 afsnit 7.3.2 en mere kompliceret bestemmelse af minimumsarmeringen. Interesserede læsere henvises til dette afsnit.

#### Litteraturliste

- [1] M.P. Nielsen: Beton1, del 2 Tværsnitsundersøgelse i brugs- og brudstadiet, DTU, Lyngby 1993.
- [2] Knud Christiansen: Armerede Betonbjælker, Danmarks Ingeniørakademi, Bygningssafdelingen, december 1983
- [3] Poul Sandbye: "Plasticitetsteorien for plane jernbetonrammer", Laboratoriet for bærende konstruktioner, DTH 1965
- [4] Kong & Evans: Reinforced and Prestressed Concrete, Third edition, Chapman & Hall, London 1994.
- [5] Dansk Standard, DS 411 (4.1), Norm for betonkonstruktioner, 4. udgave/1. oplag godkendt: 1999-03-03
- [6] Eurocode No. 2: prEN 1992-1-1 (draft for Stage 49) Design of concrete structures-Part 1: General rules and rules for buildings, juli 2002.

## 4.2 Forskydningsbæreevne

## 4.2 Forskydningsbæreevne

### 4.2.1 Indledning

Forskydningspåvirkning i bjælker og plader forekommer normalt sammen med bøjningspåvirkning, medens en dimensionering i sjældnere tilfælde også vil omfatte vridnings- og normalkraftpåvirkning. I det følgende vil hovedvægten blive lagt på bestemmelse af forskydningsbæreevnen for konstruktionsdele påvirket af forskydningskræfter og bøjende momenter.

Forskydningsbæreevnen for armerede betonkonstruktioner kan bestemmes ved anvendelse af plasticitetsteorien. En metode til bestemmelse af bjælkers forskydningsbæreevne, der bygger på plasticitetsteorien, er indført i såvel "DS 411, Norm for betonkonstruktioner" som "ENV 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1: General rules and rules for buildings" (EC 2). Metoden benævnes normalt i Danmark ved *Diagonaltrykmetoden* (DIAM) og i EC 2 ved *Variable truss angle inclination method* (VTAM). Metoden gælder kun for last på bjælkers overside.

### 4.2.2 Normal- og forskydningsspændinger samt hovedspændinger i bøjnings- og forskydningskraftpåvirket bjælke

Materialets inhomogenitet i en armeret betonbjælke samt betonens lave trækstyrke er med til at vanskeliggøre opstillingen af en teori for bestemmelse af en betonkonstruktions forskydningsbæreevne, der korrekt beskriver de fysiske forhold i et forskydningsbrud.

For at få en ide om årsager til forskydningsbrud og revnedannelse betragtes indledningsvis en rektangulær bjælke af et homogent materiale påvirket til forskydning og bøjning.

I en sådan bjælke beregnes normal- og forskydningsspændinger ved brug af henholdsvis Naviers og Grashoffs formler som angivet i henholdsvis (4.2-1) og (4.2-2)

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (4.2-1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{V S_{\omega z}}{I_z b_w} \quad (4.2-2)$$

hvor  $\sigma_x$  er normalspændingen i bjælkeaksens retning

$\tau_{xy}$  er forskydningsspændingen i  $zy$ - og  $zx$ -planet

$M_z$  er det bøjende moment med  $z$ -aksen som momentvektor

$V$  er forskydningskraften i  $y$ -aksens retning

$I_z$  er tværsnittets inertimoment mht.  $z$ -aksen

$S_{\omega z}$  er det statiske moment mht.  $z$ -aksen for den løsskårne del af tværsnittet svarende til  $y$ -værdien for det vandrette snit, hvori forskydningsspændingen beregnes

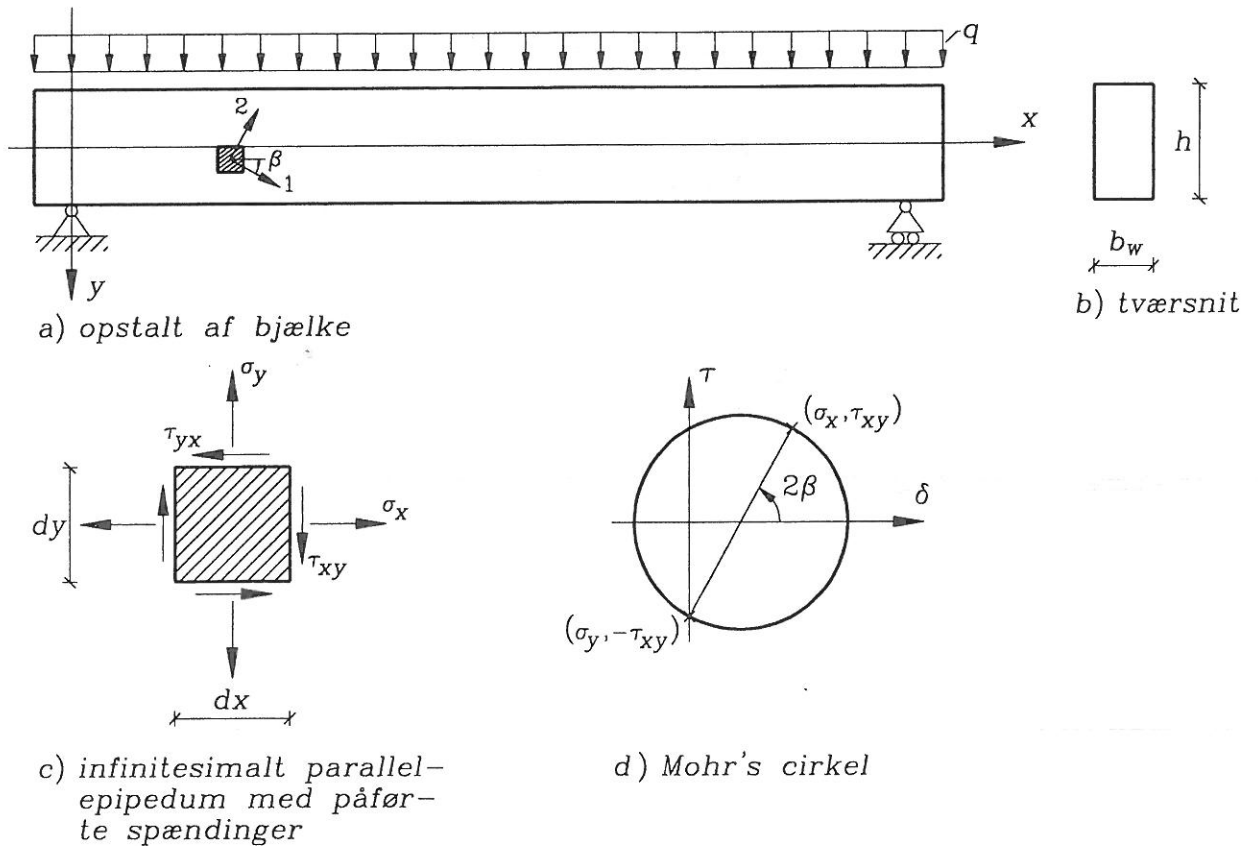
4.2-2

$y$  er afstanden fra tyngdepunktsaksen til det betragtede snit eller punkt

$b_w$  er bjælkelegemets bredde

Vedr. akseretninger se figur 4.2-1.

Ser man bort fra områderne ved bjælkens understøtninger og ved evt. enkeltlaste, vil spændingerne  $\sigma_y$  vinkelret på bjælkeaksen være af ringe størrelse, således at man ved vurdering af hovedspændingsretninger m.m. normalt kan sætte  $\sigma_y = 0$ .



Figur 4.2-1 Bjælkeopstalt, bjælkeelement og Mohr's cirkel.

Med en kendt spændingstilstand  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  kan hovedspændingerne beregnes af transformationsformlen

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad (4.2 - 3)$$

og vinklen  $\beta$  mellem 1. hovedspændingsretning og  $x$ -aksen kan beregnes af

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.2 - 4)$$

Vinklen  $\beta$  måles positiv mod uret fra 1. hovedspændingsretning mod  $x$ -aksen.

Antages som nævnt ovenfor, at  $\sigma_y = 0$  reduceres (4.2-3) og (4.2-4) til

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_x\right)^2} \quad (4.2-5)$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = 2 \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad (4.2-6)$$

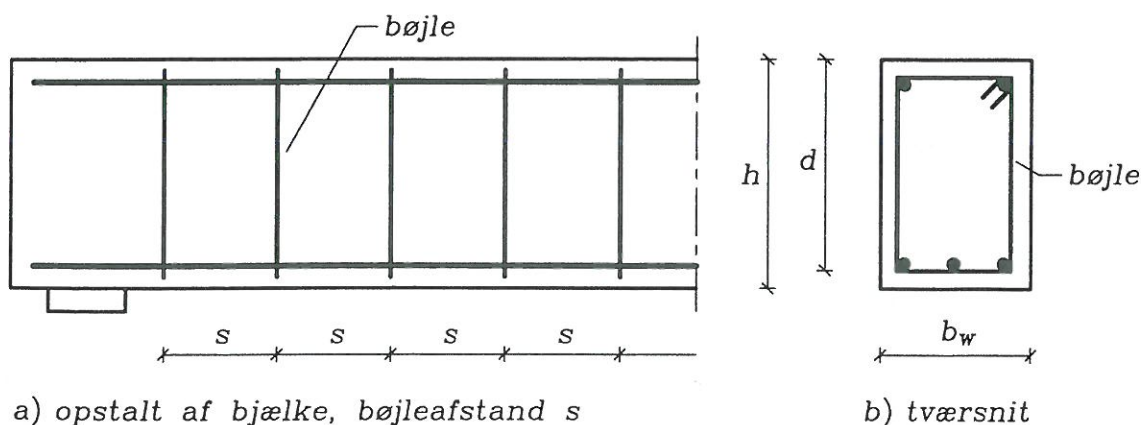
Ovenstående transformationsformler kan beskrives ved Mohr's cirkel, der sammen med bjælken er vist i fig. 4.2-1.

Belastes bjælken med voksende værdier af linielasten  $q$ , vil spændingerne vokse, og for materialer med lave trækstyrker vil der opstå revner, når hovedtrækspændingen når op på materialets trækstyrke.

### 4.2.3 Indledende betragtninger vedr. forskydningskraftpåvirkede armerede betonbjælker

I en betonbjælke vil der opstå revner forskellige steder i bjælken, når hovedtrækspændingens størrelse bliver lig med betonens trækstyrke, og revnerens retning vil i princippet være vinkelrette på hovedtrækspændingsretningen.

Ved bjælkens underside hvor  $\sigma_x = \sigma_{x,\max} > 0$  og  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$  bliver  $\beta = 0$ , hvilket er ensbetydende med, at 1. hovedakse her er sammenfaldende med  $x$ -aksen og revneretningen derfor lodret. Ved  $z$ -aksen gennem tværsnittets tyngdepunkt, hvor  $\tau_{xy} = \tau_{xy,\max} \neq 0$  og  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , idet  $N = 0$ , er  $\beta = 45^\circ$ , hvilket er ensbetydende med, at 1. hovedakse og revneretningen her danner vinklen  $45^\circ$  med  $x$ -aksen. Revneretningen er vinkelret på 1. hovedakse. Ved forskydningsforsøg vil retningerne af de først observerede revner meget nær følge ovenstående, men ved forøgelse af lasten vil såvel forskydningsarmeringen som længdearmeringen have indflydelse på revnedannelserne, hvorfor revneretningerne ikke kan bestemmes ved anvendelse af ovenstående formler gældende for homogene tværsnit.

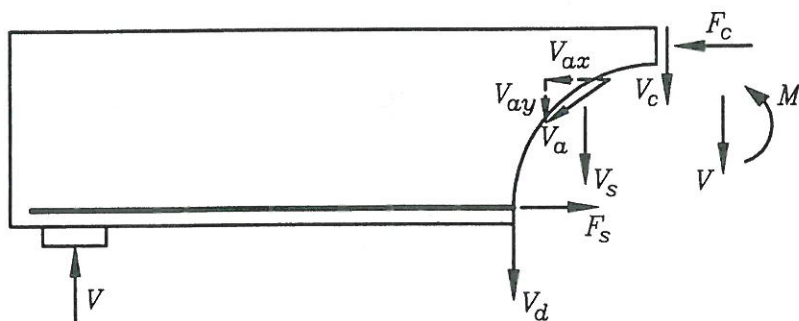


Figur 4.2-2 Opstalt og tværsnit af betonbjælke forskydningsarmeret med bøjler.

Forskydningskræfter i armerede betonbjælker optages som skrå trykspændinger i betonen og træk i forskydningsarmeringen  $f_x$  i form af bøjler. I figur 4.2-2 er vist opstalten

af en bjælkedel med tilhørende tværsnit samt længde- og forskydningsarmering i form af bøjler med afstanden  $s$ . Teorien for optagelse af forskydningskræfter i en forskydningsarmeret betonbjælke vil blive gennemgået i afsnit 4.2.5.

Mellem bjælkedelene på hver sin side af en revne overføres der kræfter gennem revnen. Mange mekanismer deltager i denne kraftoverførelse, som endnu ikke kan beskrives i detaljer. De vigtigste er vist i figur 4.2-3.



Figur 4.2-3 Skrårevne med angivelse af indre kræfter i revnen.

Nedenfor af betydningen af symbolerne i figur 4.2-3 angivet.

$V_c$  er den del af forskydningskraften, der overføres gennem betontværsnittets trykkede del.

$V_a$  er den del af forskydningskraften, der overføres tangentielt i revnen ved forskydning i tilslag m.m., der virker som en slags forskydningsknaster. I figuren er også vist  $V_a$ 's komponenter  $V_{ax}$  og  $V_{ay}$ .

$V_d$  er den del af forskydningskraften, der overføres ved dyvelvirkning i forbindelse med længdearmeringen.

$V_s$  er den del af forskydningskraften, der overføres af forskydningsarmeringen i form af bøjler.

$F_c$  er resultanten af trykspændingerne i betonen hidrørende fra momentet  $M$ .

$F_s$  er resultanten af trækspændingerne i armeringen hidrørende fra momentet  $M$ .

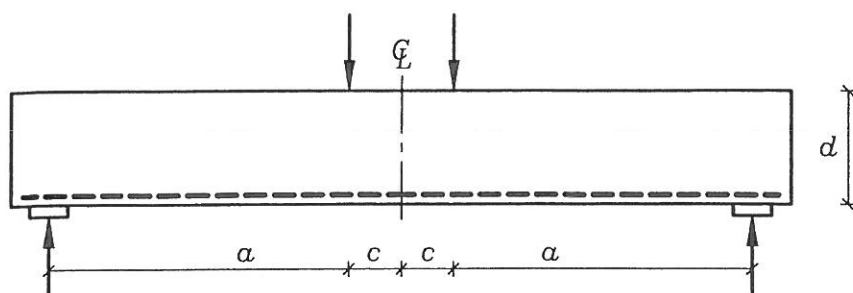
Ved projektion på lodret fås

$$V = V_c + V_{ay} + V_d + V_s \quad (4.2 - 7)$$

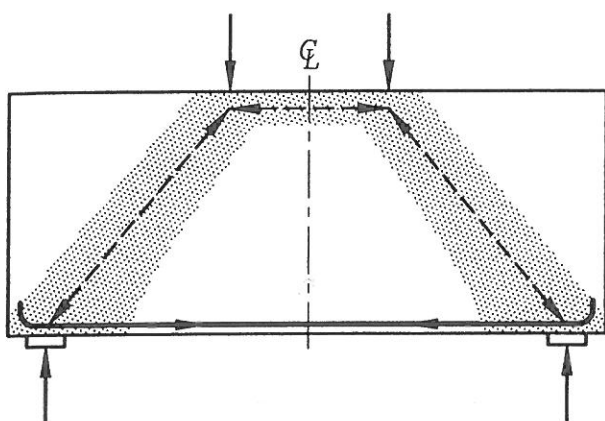
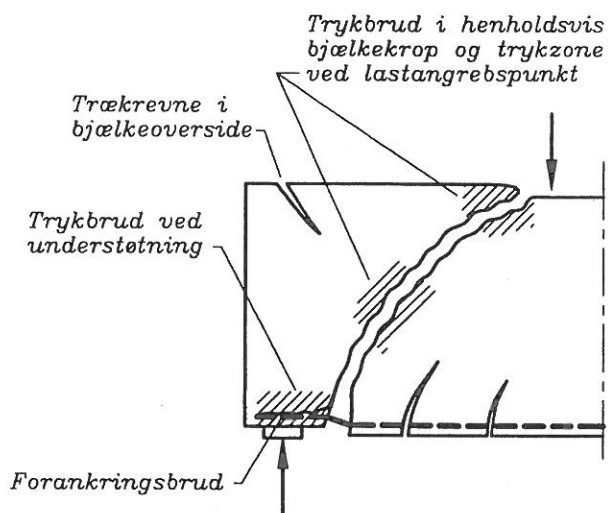
I ikke forskydningsarmerede bjælker forekommer bidraget  $V_s$  ikke.

Størrelsen af ovennævnte bidrag, som man endnu ikke er i stand til hver for sig at bestemme teoretisk, er foruden af konstruktionsudformningen også afhængig af lastniveauet.

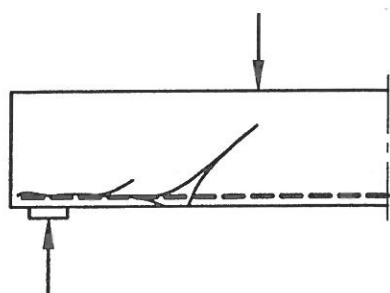
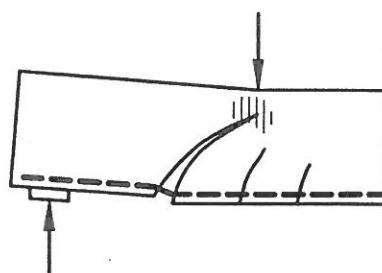
Før revnedannelsen optages forskydningspændingerne hovedsagelig af den urevnedede beton, idet længdearmeringen og forskydningsarmeringen kun giver et ganske lille bidrag til forskydningsbæreevnen.



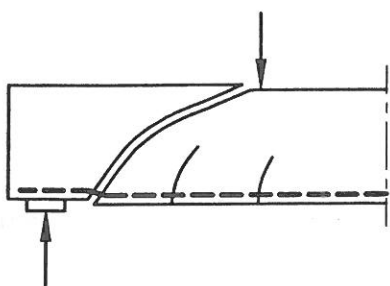
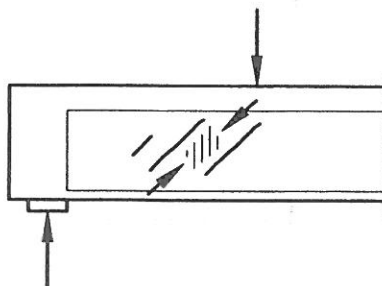
a) Bjælkeopstalt med last

b) Opstalt for høje bjælker med  $a/d < 1$ 

Mulige brudformer

c) trækforskydningsbrud  
eller forankringsbrud

d) Trykforskydningsbrud

e) Brud ved flydning i  
forskydningsarmeringen

f) Trykbrud i bjælkekrop

Figur 4.2-4 Brudformer ved forskydningsbrud. b  $a/d < 1$  c-f  $a/d > 1$ .

Ved revnedannelsen sker der en omlejring af spændingerne, hvormed størrelsen af de enkelte led i (4.2-7) forøges diskontinuert. Hvis bjælken er forskydningsarmeret, vil  $V_s$  give det største bidrag, og i brudtilstanden vil  $V_s$  normalt give langt det største bidrag, således at der i brudtilstanden kun regnes med dette bidrag.

Et forskydningsbrud kan optræde under forskellige former som vist i figur 4.2-4 for en bjælke belastet med 2 enkeltkræfter. Denne opstilling anvendes ofte ved udførelse af forsøg vedr. forskydningsbæreevne. Afstanden  $a$  mellem last og understøtningsreaktion betegnes "forskydningsspændvidden".

Ved vurdering af forsøg og ved dimensionering for forskydningspåvirkning anvendes ofte en formel forskydningsspænding beregnet som

$$\tau = V/(b_w z) \quad (4.2 - 8)$$

hvor  $V$  er forskydningskraften

$b_w$  mindste bjælkebredde i forskydningszonen

$z$  den indre momentarm

Udledningen af formlen  $\tau = V/(b_w z)$  er vist nedenfor, se side 7

Ved mange forsøg beregnes den formelle forskydningsspænding dog ved anvendelse af bjælketværsnittets effektive højde  $d$  i stedet for  $z$ .

Ved nedenstående kommentering af brudformerne vist i figur 4.2-4 benyttes forholdet  $a/d$  mellem forskydningsspændvidden og tværsnittets effektive højde.

For høje bjælker med  $a/d < 1$  og armeret alene med længdearmering, som vist i figur 4.2-4 b, vil der opstå revner som vist, og bjælken vil bære som en bue med trækband. Brudformen kan her være enten brud i trækarmingen (flydning, overtrækning eller forankringsbrud), eller brud i trykbuen (ved lasten, ved understøtningen eller i kroppen ved en tynd krop).

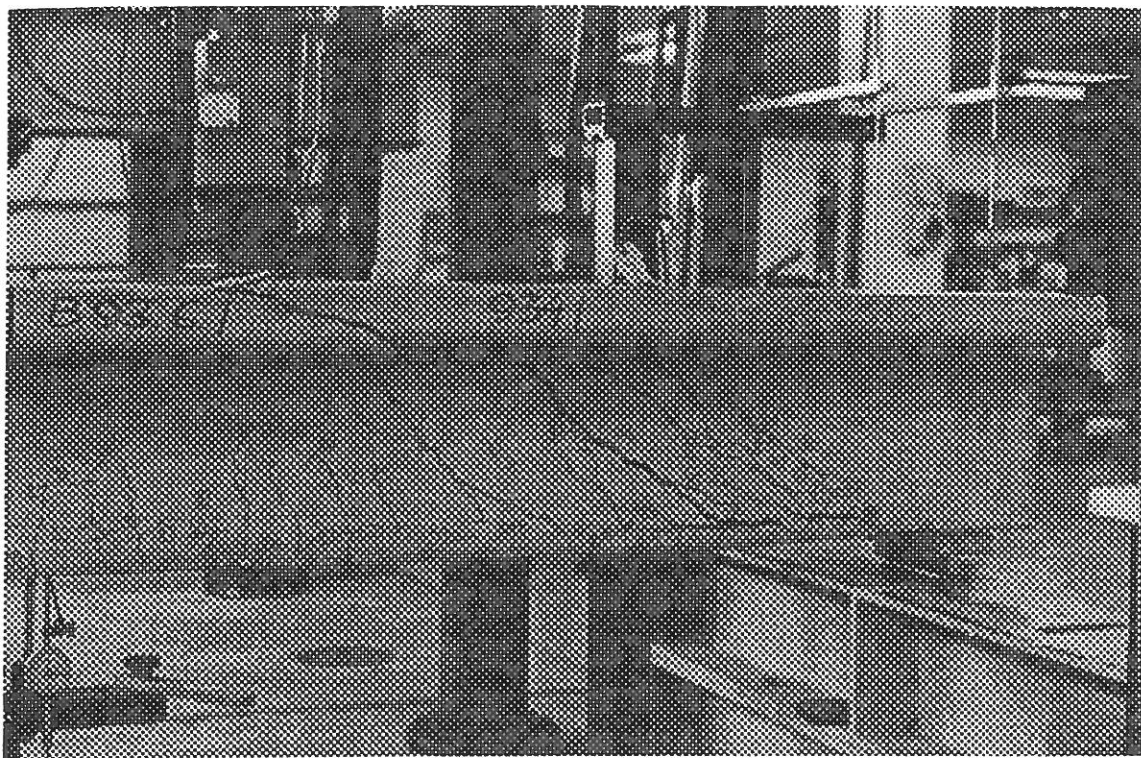
For bjælker med  $a/d > 1$  vil der kunne forekomme en brudform, som vist i figur 4.2-4 c til f. Brudformen i figur 4.2-4 c viser en revne løbende langs længdearmeringen i nærheden af understøtningen og derefter langs en skrå revne op til området omkring lasten. Denne brudform kaldes et forskydningstrækbrud eller et forankringsbrud.

Med en effektiv forankring kan bruddet forekomme i området omkring lasten og benævnes i dette tilfælde et forskydningstrykbrud, som vist i figur 4.2-4 d. At der kan optræde knusningsbrud i trykzonen skyldes, at betontryktøjningerne i dette område bl.a. som følge af kraftige revnedannelser i undersiden bliver en del større end tøjningerne beregnet ud fra bøjningspåvirkningen.

Hvis bøjlearmeringen ikke er tilstrækkelig til optagelse af forskydningskraften, kan der forekomme flydning i bøjlerne med en brudform, som vist i figur 4.2-4 e.

Hvis bøjlearmeringen er tilstrækkelig, og bjælken har en tynd krop, kan der opstå et betontrykbrud i trykstringeren i kroppen, som vist i figur 4.2-4 f.

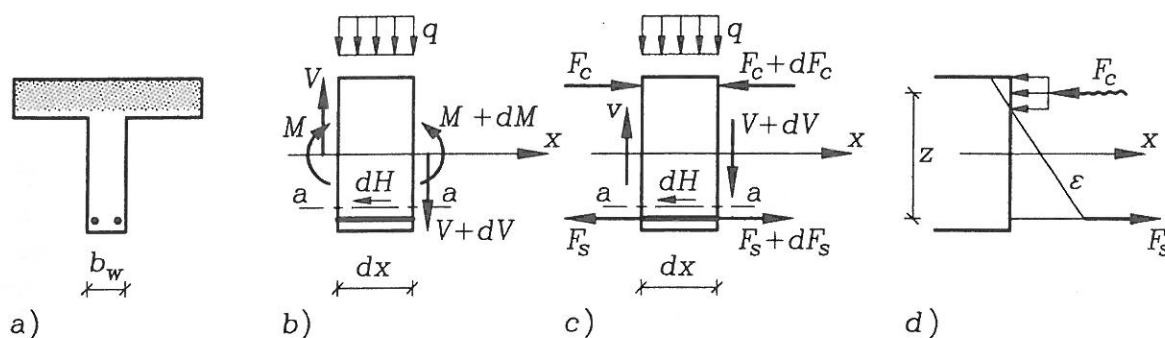
I figur 4.2-5 er vist et fotografi af en T-bjælke, der ved forsøg udviste et forskydningsbrud med flydning i forskydningsarmeringen.



Figur 4.2-5 Fotografi af forsøgsbjælke med forskydningsbrud.

*Udledning af formel for den formelle forskydningsspænding  $\tau = V/(b_w z)$*

Formlen for den formelle forskydningsspænding  $\tau = V/(b_w z)$  udledes ved betragtning af det infinitesimale stykke  $dx$  af en armeret betonbjælke, se figur 4.2-6.



Figur 4.2-6 Bjælke model for udledning af formelen  $\tau = V/(b_w z)$ .

I figur 4.2-6 a og b er vist henholdsvis bjælketværsnit og del af bjælke mellem to snit med afstanden  $dx$  målt i bjælkens længderetning samt med angivelse af snitkræfter og ydre påvirkning. I figur 4.2-6 c og d er snitmomentet erstattet af de resulterende ækvivalente kræfter  $F_s$  og  $F_c$  i træk- og trykzonerne.

Lægges et vandret snit a-a i bjælkens krop over armeringen og betragtes ligevægten af den under snittet liggende del af bjælken, fås ved vandret projektion:

$$dH + F_s - (F_s + dF_s) = 0 \quad (4.2 - 9)$$

$$dH = (F_s + dF_s) - F_s = \frac{M + dM}{z} - \frac{M}{z} = \frac{dM}{z} \quad (4.2 - 10)$$

hvor  $dH$  er den forskydende kraft  $\neq$  bjælkeaksen på strækningen  $dx$  regnet positiv i  $x$ -aksens negative retning.

Ved betragtning af figur 4.2-6 b fås ved moment om  $x$ -aksens skæring med højre snitflade:

$$M + dM + \frac{1}{2}qdx^2 - M - Vdx = 0$$

som ved  $dx \rightarrow 0$  kan skrives som

$$dM = Vdx \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = V \quad (4.2 - 11)$$

Den maksimale forskydningsspænding findes i kroppen mellem armeringen og undersiden af bjælketværsnittets flange. Antages det, at den forskydende kraft  $dH$  fordeles jævnt på arealet  $b_w dx$  fås ved benyttelse af (4.2-10) og (4.2-11) følgende udtryk for den formelle forskydningsspænding  $\tau$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{dH}{b_w dx} = \frac{dM}{b_w z dx} = \frac{V}{b_w z} \quad (4.2 - 12)$$

$\tau$  benævnes den formelle forskydningsspænding, da  $\tau$  er bestemt uden hensyntagen til revner i betonen og eventuelt forekommende forskydningsarmering.

#### 4.2.4 Bjælker uden forskydningsarmering

Der er udført mange forsøg med bjælker uden forskydningsarmering med den hensigt at opstille en teori, hvorefter forskydningsbæreevnen for en ikke forskydningsarmeret betonbjælke kan bestemmes, men der er endnu ikke opstillet en veldokumenteret teori for beregning af denne forskydningsbæreevne. Indtil dette sker, må man anvende empiriske formler til bestemmelse af forskydningsbæreevnen for bjælker uden forskydningsarmering.

I DS 411 angives flg. vedr. *ikke-forskydningsarmede bjælker og plader*:

Bjælker eller plader, der primært er påvirket af statisk last, regnes at kunne optage forskydningspåvirkningen, hvis den regningsmæssige, formelle forskydningsspænding  $\tau_{sd} = V_{sd}/(b_w z)$  opfylder betingelsen

$$\tau_{sd} \leq \begin{cases} \beta \tau_0 \\ \frac{1}{2} \nu_v f_{cd} \end{cases} \quad (4.2 - 13)$$

hvor  $\beta = 2,5d/x_1$  er en faktor, der indregner indflydelsen af en eventuel buevirkning ved understøtninger (se nedenfor). Hvis buevirkningen ikke medregnes, benyttes  $\beta = 1$ .

$$\tau_0 = 0,25 k (1,2 + 40\rho_l) f_{ctd} + 0,15\sigma_{cp}$$

$$\nu_v = 0,7 - f_{ck}/200 \text{ er en effektivitetsfaktor}$$

$k = 1,6 - d \geq d$  er en faktor hidrørende fra skalaeffekten (størrelseseffekten).  $d$  er tværsnittets effektive højde regnet i m

$$\rho_l = A_{sl}/(b_w d) \text{ er længdearmeringens geometriske armeringsforhold}$$

$$\sigma_{cp} = N_{Sd}/A_c \text{ er en normalspænding}$$

$N_{Sd}$  er den regningsmæssige normalkraft i tværsnittet hidrørende fra lastvirkning eller forspænding (regnet positiv som tryk)

$A_{sl}$  er det effektive areal af længdearmeringen i bjælkens trækside

$A_c$  er arealet af betontværsnittet

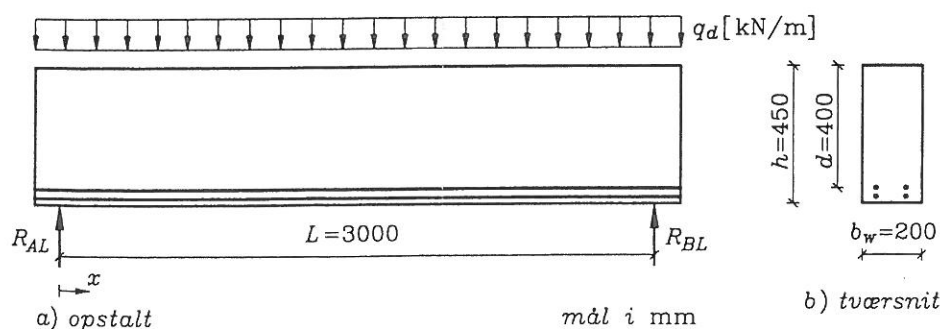
For konstruktionsdele, hvor mere end halvdelen af trækarmeringen er afkortet, sættes  $k = 1$ .

Det geometriske armeringsforhold  $\rho_l = A_{sl}/(b_w d)$  må ikke regnes større end 0,02. Ved beregning af det effektive trækareal  $A_{sl}$  skal der tages højde for forankringsforholdene. For  $A_{sl}$  benyttes den mindste værdi af trækarmeringen i konstruktionselementet. For indspændte bjælker bestemmes  $\rho_l$  på grundlag af trækarmeringen ved indspændingen. Den effektive trækarmering bør for ethvert snit som minimum svare til minimumsarmeringen for bjælker.

Faktoren  $\beta$ , der indregner indflydelsen af en eventuel buevirkning ved understøtninger, er bestemt ved  $\beta = 2,5d/x_1 \leq 5$ , hvor  $x_1$  er afstanden fra understøtningens kant til det betragtede snit. En nedre grænseværdi er  $\beta = 1$ . Anvendelse af værdier for  $\beta$  større end 1 kræver, at bjælken er direkte understøttet. For strækningen  $x_1 \leq 2,5d$  kan effekten af buevirkningen kombineres med beregningen for forskydningsarmerede bjælker og plader, idet der beregningsmæssigt alene kræves indlagt forskydningsarmering for de tværsnit, hvor  $\tau_{Sd} > \beta\tau_0$ . Den forskydningsarmeringsintensitet der kræves, hvor  $\tau_{Sd} = \beta\tau_0$ , fortsættes til understøtningen.

I EC 2 bestemmes forskydningsbæreevnen efter principielt efter samme regler som i DS 411.

#### Eksempel 4.2-1



Figur 4.2.7 Bjælkeopstalt med belastning og bjælketværsnit.

## 4.2-10

Bæreevnen  $q$  i kN/m for den i figur 4.2-7 viste ikke-forskydningsarmerede betonbjælke ønskes bestemt når

- der ikke tages hensyn til buevirkningen
- der tages hensyn til buevirkningen

Den viste betonbjælke med rektangulært tværsnit er armeret med en længdearmring bestående af 4 stk. kamstål med  $\phi_s = 16$  mm i hele bjælkens længde.

Bjælken er i normal sikkerhedsklasse og normal kontrolklasse.

Bjælkens materialeparametre er givet ved

beton:

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa}, \quad f_{cd} = \frac{30}{1,65} = 18,2 \text{ MPa}, \quad f_{ctk} = 1,8 \text{ MPa},$$

$$f_{ctd} = \frac{1,8}{1,65} = 1,09 \text{ MPa}, \quad \nu_v = 0,7 - \frac{30}{200} = 0,55$$

armering:

$$f_{yk} = 550 \text{ MPa}, \quad f_{yd} = \frac{550}{1,3} = 423 \text{ MPa}$$

$$\tau_0 \text{ bestemmes af } \tau_0 = 0,25k(1,2 + 40\rho_l)f_{ctd} + 0,15\sigma_{cp}, \quad \text{se (4.2-13), idet}$$

$$k = 1,6 - 0,4 = 1,2$$

$$\rho_l = \frac{804}{200 \cdot 400} = 0,010$$

$$\sigma_{cp} = 0 \text{ idet normalkraften } N = 0$$

$$\tau_0 = 0,25 \cdot 1,2(1,2 + 40 \cdot 0,010) \cdot 1,09 = 0,52 \text{ MPa}$$

Tværsnittets brudmoment bestemmes som vist nedenfor

$$N = 0 = 200 \cdot 0,8 \cdot x \cdot 18,2 - 804 \cdot 423 \rightarrow x = 117 \text{ mm}$$

$$z = 400 - 0,4 \cdot 117 = 353,2 \text{ mm}$$

$$M_u = 804 \cdot 423 \cdot 353,2 \cdot 10^{-6} = 120,1 \text{ kN/m}$$

Bæreevnen  $q_{Rd,b}$  svarende til bøjningsbæreevnen bestemmes af

$$q_{Rd,b} = \frac{M_u}{\frac{1}{8} \cdot L^2} = \frac{120,1 \cdot 8}{3^2} = 106,8 \text{ kN/m}$$

a. Bjælkens regningsmæssige forskydningsbæreevne  $q_{Rd,f}$  hvis der ikke tages hensyn til buevirkningen

Da der ikke tages hensyn til buevirkningen er  $\beta = 1$

$$\tau_{Rd,f} \leq \begin{cases} \tau_0 \leq & 0,52 \text{ MPa} \\ \frac{1}{2}\nu_v \cdot f_{cd} = \frac{1}{2} \cdot 0,55 \cdot 18,2 = & 5,01 \text{ MPa} \end{cases}$$

dvs.  $\tau_{Rd,f} = 0,52$  MPa, hvor  $\tau_{Rd,f}$  er bjælkens forskydningsbæreevne udtrykt ved forskydnings-spændinger. Den regningsmæssige forskydningsbæreevne  $q_{Rd,f}$  relateret til forskydningspåvirkningen bestemmes som vist nedenfor

$$V_{Sd,max} = R_{AL} = \frac{1}{2}L \cdot q_{Sd,f} = 1,5 \cdot q_{Sd,f}$$

$$\tau_{Sd,max} = \frac{V_{Sd,max}}{b_w \cdot z} = \frac{1,5 \cdot q_{Sd,f}}{b_w \cdot z}$$

sættes  $\tau_{Sd,max} = \tau_{Rd,f}$  og  $q_{Rd,f} = q_{Sd,f}$  fås

$$q_{Rd,f} = \frac{1}{1,5} \cdot \tau_{Rd,f} \cdot b_w \cdot z = \frac{1}{1,5} \cdot 0,52 \cdot 200 \cdot 353,2 \cdot 10^{-3} = 24,5 \text{ kN/m}$$

Forskydningsbæreevnen  $q_{Rd,f} = 24,5 \text{ kN/m}$  ses i dette tilfælde at være væsentlig mindre end bøjningsbæreevnen  $q_{Rd,b} = 106,8 \text{ kN/m}$ .

*b. Bjælkens regningsmæssige forskydningsbæreevne  $q_{Rd,f}$  hvis der tages hensyn til buevirkningen*

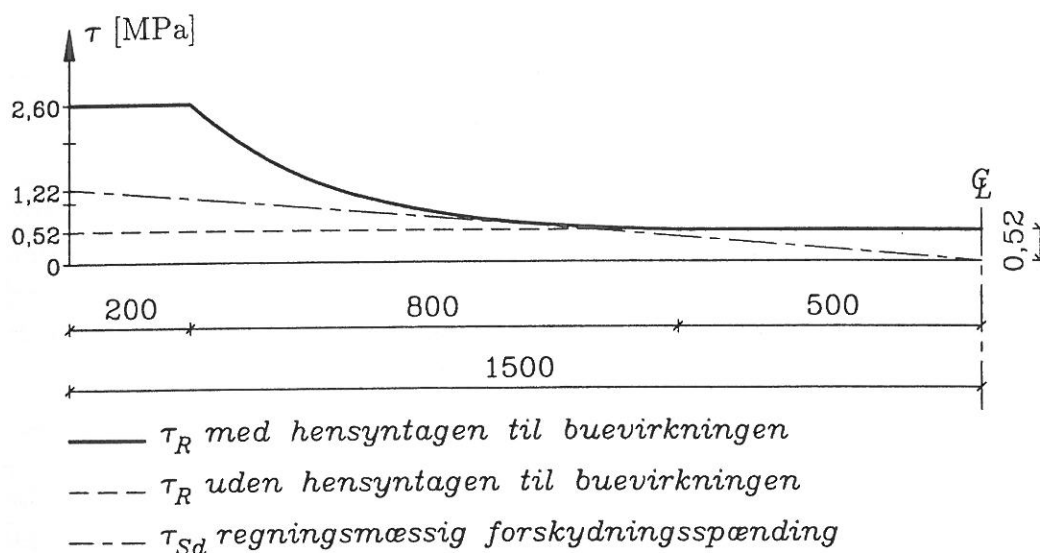
Der tages hensyn til buevirkningen ved at benytte faktoren  $\beta = 2,5 \cdot d/x = \frac{2,5 \cdot 400}{x} = \frac{1000}{x}$ , hvor  $x$  er afstanden fra understøtningens kant. I dette eksempel regnes på den sikre side understøtningens kant og det teoretiske understøtningspunkt  $A$  at være sammenfaldende.

I henhold til DS411 skal  $\beta$  ligge i intervallet  $1 \leq \beta = \frac{1000}{x} \leq 5$  dvs. der kan regnes med buevirkningen i området  $200 \leq x \leq 1000 \text{ mm}$ .

$\tau_{Rd,f}$  beregnes af

$$\tau_{Rd,f} = \beta \tau_0 = \frac{1000}{x} \cdot \tau_0 = \frac{1000}{x} \cdot 0,52 = \frac{520}{x}$$

I figur 4.2.8 er bæreevnen for den betragtede bjælke angivet ved  $\tau_{Rd,f}$ . Den punkterede kurve angiver  $\tau_{Rd}$ , når der ikke tages hensyn til buevirkningen, og den fuldt optrukne kurve angiver  $\tau_{Rd,f}$ , når der tages hensyn til buevirkningen. På grund af symmetri vises kun halvdelen af bjælken i figur 4.2-8.



Figur 4.2-8 Forskydningsbæreevnen givet ved  $\tau_{Rd}$  for en ikke forskydningsærmeret bjælke.

Den stiplede rette linie angiver den regningsmæssige forskydningsspænding  $\tau_{Sd}$  for en bjælke påvirket af en jævnt fordelt linielast  $q_{Sd,f}$ .

Tages der hensyn til buevirkningen aflæses  $\tau_{Sd,max} = 1,22 \text{ MPa}$  i figur 4.2-8, idet den stiplede rette linie bestemmes således, at den skærer nullinien ved bjælkemidten og tangerer den fuldt optrukne  $\tau_{Rd}$ -kurve.  $q_{Sd,f,max}$  kan herefter bestemmes af

$$\tau_{Sd,max} = 1,22 \text{ MPa} = \frac{V_{Sd,max}}{b_w \cdot z} = \frac{1,5 \cdot q_{Sd,f,max}}{b_w \cdot z} = \frac{1,5 \cdot q_{Sd,f,max} \cdot 10^3}{200 \cdot 353,2} \rightarrow q_{Sd,f,max} = 57,5 \text{ kN}$$

Heraf ses, at hensyntagen til buevirkningen øger bæreevnen fra  $q_{Sd,f} = 24,5 \text{ kN/m}$  til  $q_{Sd,f} = 57,5 \text{ kN/m}$ , dvs. ca. 135%.

### 4.2.5 Bjælker med forskydningsarmering – Diagonaltrykmetoden

Bestemmelsen af forskydningsbæreevnen for forskydningsarmerede betonbjælker er baseret på plasticitetsteoriens nedreværdisætning, se fx /1/ og /7/. Metoden giver for flere simple og i praksis ofte forekommende lasttilfælde plasticitetsteoretiske eksakte løsninger, idet der i disse tilfælde kan angives geometrisk mulige brudfigurer, der giver samme bæreevne (øvre værdiløsning) som ovennævnte nedreværdiløsning.

Betonens trækstyrke regnes lig nul, hvorfor forskydningskræfterne alene regnes optaget som skrå tryk i betonen og træk i forskydningsarmeringen. Metoden benævnes i Danmark ved *Diagonaltrykmetoden* og i EC 2 ved *Variable truss angle inclination method*.

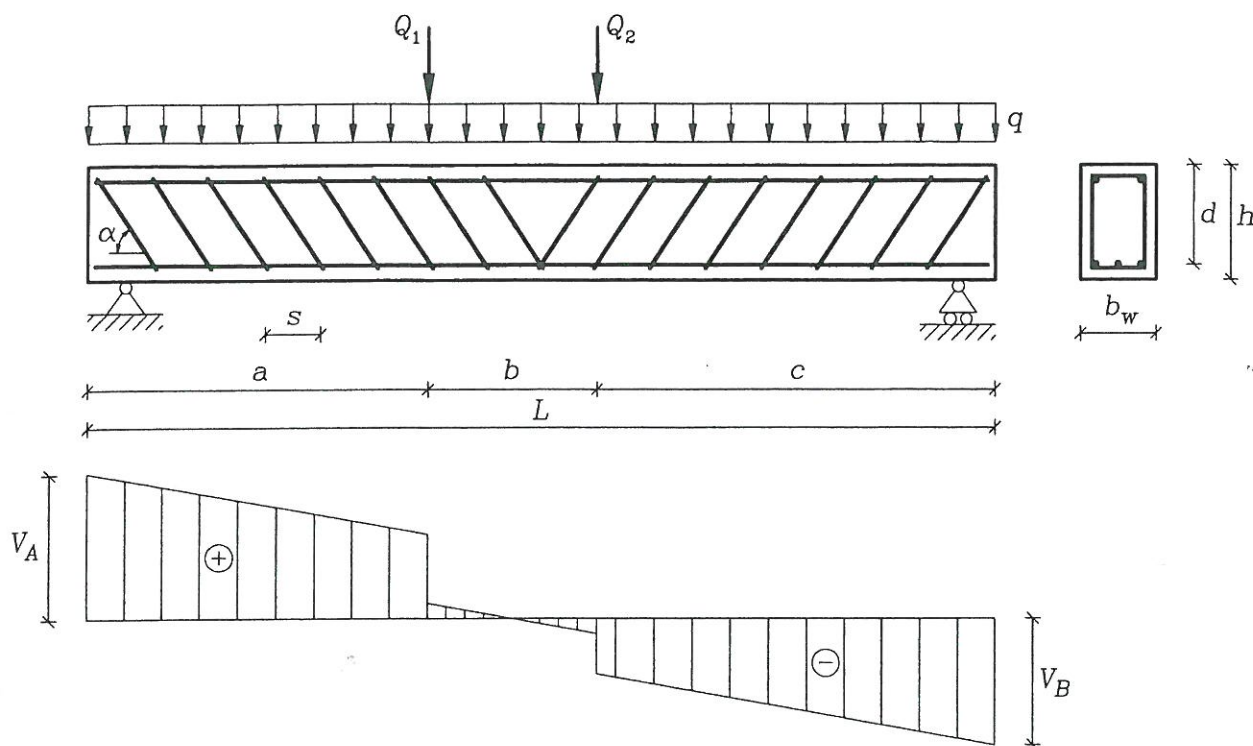
Metoden udmærker sig ved, at alle anvendte ligninger stort set kan udledes af de givne forudsætninger ved anvendelse af ækvivalens- og ligevægtsbetingelser, dvs. en teoretisk velfunderet metode. Dertil kommer, at metoden i de fleste tilfælde giver en bedre udnyttelse af forskydningsarmeringen end tidligere anvendte metoder.

Metoden vil blive beskrevet ved betragtning af en bjælke med rektangulært tværsnit, der er forsynet med en vandret længdearmering og en forskydningsarmering bestående af bøjler, der danner vinklen  $\alpha$  med bjælkeaksen, se figur 4.2-9 og -10. Bjælken antages at være belastet af enkeltkræfterne  $Q_1$  og  $Q_2$  kN samt af en jævnt fordelt linielast  $q$  kN/m.

Da der i praksis oftest anvendes bøjler med bøjleplan  $\perp$  på bjælkeaksen, vil de hertil svarende simple formler blive angivet efter udledelsen af de generelle formler.

Bøjningsmomentet regnes optaget som et kraftpar virkende i bjælkens tryk- og trækzone, benævnt tryk- og trækstringere. Forskydningskraften optages i bjælkens forskydningszone beliggende mellem tryk- og trækstringerne. Forskydningszonens højde regnes som afstanden mellem disse stringeres tyngdepunkter. Denne højde benævnes  $z$  og kaldes *tværsnittets indre momentarm*. Der regnes med en konstant værdi for  $z$  i hele bjækelængden svarende til værdien for  $z$  i det hårdest momentpåvirkede snit.

I virkeligheden burde en betonbjælke dimensioneres for den kombinerede virkning af moment og forskydningskraftpåvirkningen, men da der endnu ikke for betonkonstruktioner er opstillet en "brudhypotese" gældende for denne kombinerede påvirkning, foretages dimensioneringen i to separate beregninger for henholdsvis bøjnings- og forskydningsbæreevnen. Forsøg og praksis viser, at dette er forsvarligt, når der ved bestemmelse af længdearmeringen tages hensyn til effekten af dannelsen af skrå revner i forskydningszonen, se afsnittet om skrårevneeffekten side 17.



Figur 4.2-9 Bjælkeopstalt, tværsnit og forskydningskraftkurve.

### Nedreværdiløsning - Diagonaltrykmetoden

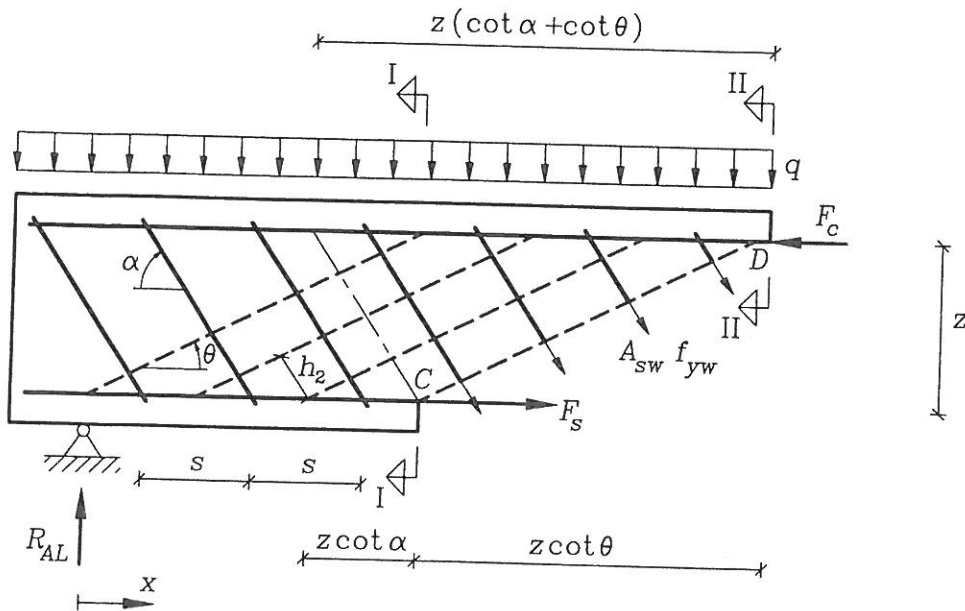
Til bestemmelse af forskydningsbæreevnen opstilles en nedreværdiløsning, der gøres så enkel som mulig.

Som den mest enkle spændingstilstand i betonen i forskydningszonen antages det, at der optræder et enakset tryk  $\sigma_c$  i de skrå betonlameller vist med punkteret streg i figur 4.2-10. Det enaksede tryk danner vinklen  $\theta$  med bjælkeaksen.

Lamellernes bredde er lig bjælkebredden  $b_w$ , og lamellernes "højde"  $h_2$ , målt vinkelret på det skrå betontryk, er  $h_2 = s \sin \theta$ , hvor  $s$  er bøjleafstanden målt langs bjælkeaksen.

I figur 4.2-10 er vist venstre del af den i figur 4.2-9 viste bjælke, idet der til venstre for enkeltkraften er lagt et skråt snit parallelt med retningen af det énaksede skrå betontryk. Den betragtede bjælkedel påvirkes således kun af en jævnt fordelt last  $q$ .

I figuren er tilføjet de kræfter, der antages at virke i snittet nemlig  $F_c$ ,  $F_s$  og  $A_{sw}f_{yw}$ , som er henholdsvis trykkraften i betonen (trykstringeren), trækraften i armeringen (trækstringeren) og trækraften svarende til flydning i en bøjle, idet  $f_{yw}$  er bøjlematerialets flydespænding og  $A_{sw}$  er forskydningsarmeringens tværsnitsareal. Udføres forskydningsarmeringen med 2-snitsbøjler er  $A_{sw} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \phi_w^2$ , hvor  $\phi_w$  er bøjlestangens diameter.



Figur 4.2-10 Udsnit af bjælke mellem understøtning og enkeltkraft.

Antallet af bøjler  $n_w$ , der skærer det skrå snit mellem  $C$  og  $D$  er

$$n_w = \frac{z(\cot \theta + \cot \alpha)}{s} \quad (4.2 - 14)$$

Lodret projektion for bjælkedelen vist i figur 4.2-10 giver

$$R_{AL} - qx_D - n_w A_{sw} f_{yw} \sin \alpha = 0 \quad (4.2 - 15)$$

Størrelsen  $R_{AL} - qx_D$  er lig forskydningskraften  $V_D$  i et lodret snit gennem punkt  $D$ . Indsættes dette sammen med (4.2-14) i (4.2-15) fås

$$V_{D,R} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yw} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha \quad (4.2 - 16)$$

hvor  $V_{D,R}$  er forskydningsbæreevnen i punkt  $D$  svarende til forskydningsarmeringen  $A_{sw}$  anbragt med afstanden  $s$ . Hermed har man en relation mellem forskydningskraften  $V$ , arealet af bøjlearmeringen  $A_{sw}$  og bøjleafstanden  $s$ .

Af udledningen af (4.2-16) samt af figur 4.2-10 ses, at forskydningsarmeringen på strækningen  $z(\cot \theta + \cot \alpha)$  bestemmes af (4.2-16) ved anvendelse af forskydningskraften  $V_D$  i det lodrette snit gennem  $D$ , selv om forskydningskraften til venstre for  $D$  er større end i punkt  $D$ .

Dette gælder dog ikke, hvis der forekommer spring i forskydningskraftkurven, dvs. hvis der forekommer enkeltkræfter i belastningen. I så fald skal der betragtes snit henholdsvis til højre og til venstre for enkeltkraftens angrebspunkt.

Forskydningsbæreevnen, beregnet af (4.2-16), er bestemt ved fuld udnyttelse af bøjlematerialet, idet der antages flydning i bøjlerne.

Det er dog ikke givet, at  $V$  bestemt af (4.2-16) er bjælkens forskydningsbæreevne, idet det også må sikres, at der ikke opstår trykbrud i de skrå tryklameller, hvori der ifølge forudsætningerne antages at optræde en énaksset trykspænding  $\sigma_c$ .

Den størst tænkelige værdi for denne énaksede trykspænding er betonens trykstyrke  $f_c$ , men af mange grunde kan trykstyrken i de skrå betonlameller ikke udnyttes fuldt ud til denne værdi. Bl.a. kan nævnes, at den beskrevne teori forudsætter idealplastiske materialer. Dette er en rimelig tilnærmelse for armeringen, men betonens arbejdslinie er langt fra idealplastisk. Desuden forudsætter teorien, at betontrykkene i de skrå betonlameller skal overføres til bøjlerne gennem de af bøjlerne fastholdte længdearmningsstænger i bunden af bjælken, hvilket giver anledning til store og ubestemmelige spændingskoncentrationer. Selv om de direkte trykspændinger mellem armeringsstænger og beton kan regnes større end betonens trykstyrke  $f_c$ , da dette kan betragtes som "koncentreret tryk" på en flade, vil den middelspænding, der kan regnes optaget, være mindre end  $f_c$ .

Det er derfor nødvendigt at indføre en effektiv trykstyrke  $\nu f_c$  således, at kravet til betonspændingen i de skrå betonlameller bliver

$$\sigma_c \leq \nu f_c \quad (4.2 - 17)$$

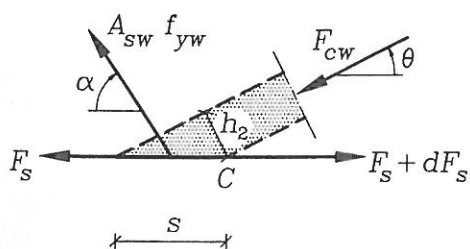
Det kunne forventes, at den effektive trykstyrke i de skrå betonlameller ville være stærkt afhængig af tværsnitsudformningen, antallet af længdearmningsstænger, der er fastholdt af bøjler, længdearmningens diameter, bøjleafstanden, dækkende betonlag m.m., men det er heldigvis ikke tilfældet.

Forsøg udført på DTU-ABK har vist, at effektivitetsfaktoren  $\nu$  ikke er særlig følsom over for de nævnte parametre. Derimod viste forsøgene en klar afhængighed af betonstyrken. Et lineært udtryk for  $\nu$  givende mindst afvigelse efter mindste kvadraters metode angives ved

$$\nu = 0,8 - f_{ck}/200 \quad (4.2 - 18)$$

I DS 411 og EC2 er valgt en konservativ værdi i underkanten af forsøgsresultaterne givet ved

$$\nu = 0,7 - f_{ck}/200 \quad (4.2 - 19)$$



Figur 4.2-11 Kraftpåvirkning i skæringspunkt mellem længdearmning, forskydningsarmning og betonlamel.

I figur 4.2-11 er kraftpåvirkningen i et skæringspunkt mellem længdearmring, forskydningsarmring og en betonlamel vist.

Hvis trykspændingen  $\sigma_c$  i betonlamellen er bestemmende for bæreevnen bestemmes den maksimale kraft i den skrå tryklamel af

$$F_{cw} = b_w h_2 \sigma_c = b_w s \nu f_c \sin \theta \quad (4.2 - 20)$$

idet  $\sigma_c = \nu f_c$  og  $h_2 = s \sin \theta$  er indført.

Lodret projektion giver

$$A_{sw} f_{yw} \sin \alpha - F_{cw} \sin \theta = A_{sw} f_{yw} \sin \alpha - b_w s \nu f_c \sin^2 \theta = 0 \quad (4.2 - 21)$$

Isoleres  $A_{sw} f_{yw}$  i (4.2-16) og indsættes i (4.2-21) fås ved isolering af  $V_D$

$$V_D = b_w z (\cot \theta + \cot \alpha) \nu f_c \sin^2 \theta \quad (4.2 - 22)$$

$$\text{indsættes } \sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \quad (4.2 - 23)$$

fås

$$V_D = V_{D,R} = b_w z \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \nu f_c \quad (4.2 - 24)$$

hvor  $V_{D,R}$  er forskydningsbæreevnen, hvis det er det enaksede betontryk, der er dimensionsgivende.

Dette betyder, at for et givet betontværsnit med given forskydningsarmring samt givne værdier af  $f_c$  og  $f_{yw}$  bestemmes forskydningsbæreevnen i det betragtede snit som den mindste værdi af  $V_R$  bestemt af (4.2-16) og (4.2-24), dvs.

$$V_R \leq \begin{cases} \frac{A_{sw}}{s} z f_{yw} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha \\ b_w z \nu f_c \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \end{cases} \quad (4.2 - 25)$$

I henhold til plasticitetsteorien kan  $\cot \theta$  vælges således, at den størst mulige bæreevne opnås.

Af (4.2-25) fremgår, at for voksende værdier af  $\cot \theta$  vil øverste udtryk i (4.2-25) vokse, medens nederste udtryk vil aftage og omvendt for aftagende værdier af  $\cot \theta$ , dog kun ned til  $\cot \theta = 1$ . For aftagende værdier af  $\cot \theta$  under  $\cot \theta = 1$  vil nederste udtryk i (4.2-25) vokse. Den optimale værdi for  $\cot \theta$  fås ved, at begge materialer udnyttes fuldt ud, dvs. når de to udtryk i (4.2-25) sættes lig hinanden, se mere herom side 19.

Af (4.2-25) ses, at for en given forskydningskraft  $V$  vil valg af en stor værdi for  $\cot \theta$ , dvs. en lav hældning for det enaksede betontryk, give et relativt lille areal  $A_{sw}$  for forskydningsarmeringen med deraf følgende relativt store forskydningsrevnevidder.

For at begrænse disse revnevidder er der i DS 411 og EC 2 derfor indført grænser for  $\cot \theta$ .

DS 411 angiver, at  $\cot \theta$  skal ligge i intervallet

$$\tan \frac{\alpha}{2} \leq \cot \theta \leq \begin{cases} 2,0 & \text{hvis afkortet længdearmering anvendes} \\ 2,5 & \text{hvis længdearmeringen ikke afkortes} \end{cases} \quad (4.2 - 26)$$

EC 2 angiver, at  $\cot \theta$  skal ligge i intervallet

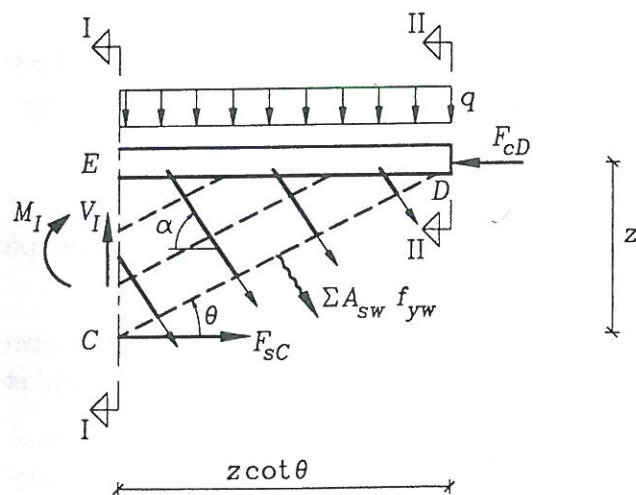
$$\left. \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,4 \end{array} \right\} \leq \cot \theta \leq \begin{cases} 2,0 & \text{hvis afkortet længdearmering anvendes} \\ 2,5 & \text{hvis længdearmeringen ikke afkortes} \end{cases} \quad (4.2 - 27)$$

Ud over ovennævnte bæreevnekrav stiller DS411 krav om, at bjælker skal forsynes med en minimumsforskydningsarmering svarende til

$$\frac{A_{sw}}{b_w s} \geq 0,2 \frac{f_{ctk}}{f_{yw k}}$$

### Skrårevneeffekten

I figur 4.2-12 er vist en løsskåret del af bjælken, der er begrænset af en skrå linie gennem  $C$  og  $D$  (se også figur 4.2-10) parallel med retningen af det skrå betontryk samt 2 lodrette snit I-I og II-II gennem henholdsvis punkt  $C$  og  $D$ .



Figur 4.2-12 Løsskåret bjælkedel.

Påvirkningen til venstre for snit I-I er angivet ved snitkræfterne  $V_I$  og  $M_I$  og til højre for snit I-I ved kræfterne i træk- og trykstringerne henholdsvis  $F_{sC}$  og  $F_{cD}$  samt den

samlede bøjlekraft  $\Sigma A_{sw} f_{yw}$ , der antages at angribe midt på liniestykket  $CD$ , idet der er forudsat fuld udnyttelse og dermed samme kraft i hver bøjle.

Ved lodret projektion fås

$$V_I - (\Sigma A_{sw} f_{yw}) \sin \alpha - qz \cot \theta = 0 \quad (4.2 - 28)$$

Ved multiplikation med  $\cot \alpha$  fås af (4.2-28)

$$(\Sigma A_{sw} f_{yw}) \cos \alpha = V_I \cot \alpha - qz \cot \theta \cot \alpha \quad (4.2 - 29)$$

Ved moment om punkt  $E$ , der er trykstringerens skæring med snit  $I - I$  fås

$$\begin{aligned} F_{sC} z - M_I - (\Sigma A_{sw} f_{yw}) \sin \alpha \frac{1}{2} z \cot \theta + (\Sigma A_{sw} f_{yw}) \cos \alpha \frac{1}{2} z - \\ \frac{1}{2} q z^2 \cot^2 \theta = 0 \end{aligned} \quad (4.2 - 30)$$

indsættes (4.2-29) i (4.2-30) fås efter reduktion

$$F_{sC} = \frac{M_I}{z} + \frac{1}{2} V_I (\cot \theta - \cot \alpha) + \frac{1}{2} q z \cot \theta \cot \alpha \quad (4.2 - 31)$$

Heraf ses, at trækraften i armeringen i et snit I-I ud over momentbidraget  $\frac{M_I}{z}$  skal forøges med kraften

$$\frac{1}{2} V_I (\cot \theta - \cot \alpha) + \frac{1}{2} q z \cot \theta \cot \alpha \quad (4.2 - 32)$$

I afsnit 6.2.2.1 (19) i DS411 angives forøgelsen af trækraften kun til  $\frac{1}{2} V_I (\cot \theta - \cot \alpha)$ , hvorfor vejledningen i DS 411 er på den usikre side ved anvendelse af skrå bøjler.

### *Forskydningsarmering udført som bøjler vinkelret på bjælkeaksen*

Teorien beskrevet i det følgende vil kun omhandle bjælker med bøjler vinkelret på bjælkeaksen.

I praksis bliver armerede betonbjælker i langt overvejende grad udført med bøjler vinkelret på bjælkeaksen, dvs.  $\alpha = 90^\circ$ , der medfører  $\cot \alpha = 0$  og  $\sin \alpha = 1$ , hvilket simplificerer de foran udledte formler.

Ved anvendelse af bøjler vinkelret på bjælkeaksen ændres (4.2-25) til

$$V_R = \begin{cases} \frac{A_{sw}}{s} z f_{yw} \cot \theta \\ b_w z \nu f_c \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{b_w z \nu f_c}{tg \theta + \cot \theta} \end{cases} \quad (4.2 - 33)$$

$$\text{idet } \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta + \cot \theta}$$

Trækraften i armeringen bestemmes af (4.2-31) til

$$F_s = \frac{M}{z} + \frac{1}{2}V \cot \theta = \frac{M_{s,f}}{z} \quad (4.2 - 34)$$

hvor  $F_s$ ,  $M$  og  $V$  er sammenhørende værdier af trækraften i længdearmeringen, moment og forskydningskraft i et lodret snit i bjælken. Ved negative momenter indsættes den numeriske værdi af  $M$ .  $M_{s,f}$  er momentet i samme snit målt på en forskudt momentkurve, se mere herom nedenfor.

Trækraften skal altså forøges med en kraft  $\frac{1}{2}V \cot \theta$ . Hvis belastningen angriber på bjælkens overside, kan trækraften i armeringen dog aldrig blive større end værdien af det numerisk største moment, da  $V = 0$ , hvor  $M$  numerisk antager maksimumsværdier.

Af (4.2-34) fås ved multiplikation med  $z$

$$M_{s,f} = M + V \frac{1}{2}z \cot \theta \quad (4.2 - 35)$$

Af (4.2-34) og (4.2-35) ses, at kraften  $F_s$  i trækarmeringen kan bestemmes som  $M_{s,f}/z$ , hvor  $M_{s,f}$  er momentværdien i det betragtede snit på den bøjningsmomentkurve, der fremkommer ved, at den aktuelle snitmomentkurve  $M$  forskydes stykket  $\frac{1}{2}z \cot \theta$  i bjælkeaksens retning. Denne forskydning af snitmomentkurven skal for såvel positive som negative momenter forskydes i en sådan retning, at det moment  $M_{s,f}$ , der bestemmes af den forskudte momentkurve, numerisk er større end snitmomentet. Denne effekt kaldes *skrårevneeffekten*. Se også afsnit 4.7.3.

Ved dimensionering af en normalarmeret betonbjælke skal et tværsnits brudmoment  $M_u$  og armering  $A_s$  i ethvert snit i bjælken opfylde betingelserne

$$M_u = F_s z = A_s f_y z \geq M_{s,f} = M + \frac{1}{2}V z \cot \theta \quad (4.2 - 36)$$

$$F_s = A_s f_y \geq \frac{M_{s,f}}{z} = \frac{M}{z} + \frac{1}{2}V \cot \theta \quad (4.2 - 37)$$

Af (4.2-37) ses, at ved en simpel understøtning, hvor momentet er nul, skal armeringen kunne optage en trækraft af størrelsen  $\frac{1}{2}V \cot \theta$ . Dette betyder, at ved en simpel understøtning skal armeringen altid forankres for denne kraft.

Omskrives (4.2-33), kan man dels beregne det nødvendige bøjleareal  $A_{sw}$  for en given bøjleafstand  $s$  af udtrykket

$$A_{sw} \geq \frac{V s}{z f_{yw} \cot \theta} \quad (4.2 - 38)$$

og dels beregne bøjleafstanden  $s$  for et givet bøjleareal  $A_{sw}$  af udtrykket

$$s \leq \frac{z}{V} A_{sw} f_{yw} \cot \theta \quad (4.2 - 39)$$

Med fastlagte værdier for  $A_{sw}$  og  $s$  beregnes forskydningsbæreevnen  $V_R$  af (4.2-33).

Den optimale værdi for  $\cot \theta$  opnås ved at udnytte såvel det skrå betontryk som forskydningsarmeringen fuldt ud, dvs. ved at sætte de to udtryk for  $V_R$  i (4.2-33) lig hinanden

$$\frac{A_{sw}}{s} z f_{yw} \cot \theta = b_w z \nu f_c \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \quad (4.2 - 40)$$

Indføres den mekaniske forskydningsarmeringsgrad  $\psi_{sw}$  ved

$$\psi_{sw} = \frac{A_{sw} f_{yw}}{b_w s f_c} \quad (4.2 - 41)$$

i (4.2-40) fås efter omskrivning

$$\frac{\psi_{sw}}{\nu} = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta}$$

Den optimale værdi for  $\cot \theta$  kan herefter beregnes af

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{\nu - \psi_{sw}}{\psi_{sw}}} \quad (4.2 - 42)$$

Ved dimensionering i praksis benyttes regningsmæssige værdier for  $f_{yw}$  og  $f_c$ . Antager  $\cot \theta$  beregnet af (4.2-42) større værdier end intervallerne relevante øvre grænse i (4.2-26) eller (4.2-27) benyttes denne øvre grænseværdi for  $\cot \theta$ , hvilket er ensbetydende med, at betonen ikke udnyttes fuldt ud, og at forskydningsbæreevnen  $V_R$  bestemmes af øverste udtryk i (4.1-33).

Af (4.2-38) og (4.2-39) ses det, at jo større værdi for  $\cot \theta$ , der vælges, desto mindre bliver forskydningsarmeringsarealet  $A_{sw}$  for en given værdi af  $s$  eller desto større bliver  $s$  for en given værdi af  $A_{sw}$ . Dvs. den nødvendige mængde af forskydningsarmeringen formindskes med voksende værdi af  $\cot \theta$ , svarende til aftagende værdi af det enaksede betontryks vinkel med bjælkeaksen.

Det fremgår desuden af ovenstående, at det ikke er nødvendigt at armere for en forskydningskraft  $V$  større end den, der forekommer i afstanden  $z \cot \theta$  fra understøtningen, hvis der ikke forekommer enkeltkræfter på denne strækning.

I praksis vil man af udførelsmæssige grunde undgå at skifte bøjleafstand eller -diameter for ofte hen gennem en bjælke. Design af forskydningsarmeringen kan foretages på forskellige måder. Én fremgangsmåde kan være fig.:

- forskydningskraftkurven bestemmes og optegnes
- bæreevnen svarende til minimumskravet til forskydningsarmering beregnes og indtegnes som en vandret linie i figuren. Denne vandrette linie kan i henhold til ovenstående forløbe "ind i" forskydningskraftkurven over en strækning på  $z \cot \theta$ , hvorefter der skal anvendes en mindre bøjleafsand eller et større tværsnitsareal for bøjlen
- på strækningen  $z \cot \theta$  nærmest understøtningen anvendes en forskydningsarmering, der giver en bæreevne, der er større end eller lig med forskydningskraften i afstanden  $z \cot \theta$  fra understøtningen
- mellem de ovennævnte to strækninger indlægges der over passende længder en forskydningsarmering, der giver en bæreevne af en sådan størrelse, at den vandrette linie, der angiver bæreevnen på den pågældende strækning, ingen steder forløber "ind i" forskydningskraftkurven på strækninger, der er større end  $z \cot \theta$ .

*Fremgangsmåde ved beregning af forskydningsbæreevnen for bjælker med forskydningsarmering vinkelret på bjælkeaksen*

Ved dimensionering af betonkonstruktioner i praksis skal der anvendes regningsmæssige værdier for såvel lastværdier som materialestyrker, idet der dog, som angivet nedenfor i enkelte tilfælde som ved bestemmelse af minimumsarmering m.m. anvendes karakteristiske værdier for materialestyrkerne.

Da kg-prisen for bøjlerne i det færdige armeringsarrangement er langt større end kg-prisen for længdearmeringen, vil man i praksis spare på bøjlerne ved at vælge store værdier for  $\cot \theta$ , normalt vælges den højest tilladelige værdi iht. (4.2-26) eller (4.2-27).

Konstruktionens forskydningsbæreevne kan anses for at være tilstrækkelig, når kravet

$$V_{Sd} \leq V_{Rd} \quad (4.2 - 43)$$

hvor  $V_{Sd}$  er den regningsmæssige forskydningskraft i det betragtede snit

$V_{Rd}$  er den regningsmæssige forskydningsbæreevne i det betragtede snit.

For et givet bøjlearmeringsarrangement, dvs. med kendte værdier for  $A_{sw}$  og  $s$ , kan den regningsmæssige forskydningsbæreevne svarende til denne armering beregnes som den mindste værdi af

$$V_{Rd} = \begin{cases} \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta \\ b_w z \nu f_{cd} \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \end{cases} \quad (4.2 - 44)$$

hvor  $f_{ywd}$  er forskydningsarmeringens regningsmæssige flydespænding

$f_{cd}$  er betonens regningsmæssige trykstyrke

I DS 411 stilles der udover styrkemæssige krav til bøjlerne flg. krav til bøjleafstande:

- a. Den største bøjleafstand  $s$  skal vælges således, at en evt. skrå forskydningsrevne ikke kan forløbe over hele bjælkehøjden uden at passere en bøjle. For at opfylde dette krav skal

$$s \leq \begin{cases} 0,7h \cot \theta \\ 0,7h \end{cases} \quad (4.2 - 45)$$

hvor  $h$  er tværsnittets totalhøjde.

- b. Bjælker skal forsynes med en minimumsbøjlearmering svarende til

$$\frac{A_{sw}}{b_w s} \geq 0,2 \frac{f_{ctk}}{f_{yw k}} \quad (4.2 - 46)$$

der kan omskrives til

$$s \leq \frac{5A_{sw} f_{yw k}}{b_w f_{ctk}} \quad (4.2 - 47)$$

I EC2 angives minimumsforskydningsarmeringen i en tabel som funktion af beton- og armeringsstyrkerne, og maksimumsafstanden for bøjler angives som funktion af bjælkehøjden og forskydningskraftens størrelse. EC2's krav til minimumsarmeringen er større end DS411's krav, ligesom EC2's krav til den maksimale bøjleafstand også er skrapere end DS411's krav undtagen for meget små forskydningskræfter, se nærmere herom i EC2.

- c. Ved stød i armeringen, hvor to armeringsstænger overlapper hinanden, og ved forankringer skal der i bjælken over den nødvendige forankringslængde indlægges en tværarmering. Kravet til afstanden mellem stængerne i tværarmeringen, der her tænkes udført som bøjler, kan bestemmes af (4.2-48). Bøjler, der er regnet udnyttet som forskydningsarmering, kan også udnyttes som tværarmering.

$$s \leq 55 \frac{\phi_{sw}^2}{\phi_s} \quad (4.2 - 48)$$

hvor  $\phi_s$  og  $\phi_{sw}$  er armeringsdiametere for henholdsvis længdearmeringen og bøjlearmeringen (tværarmeringen).

Dette krav, der benævnes *55-reglen*, hidrører fra ønsket om at kunne optage de spaltekrafter, der opstår i forankrings- og stødzone, hvor armeringen forankres eller stødes og for at begrænse revnevidderne eller forhindre revnedannelse i området. Ved brug af 55-reglen se afsnit 4.6.

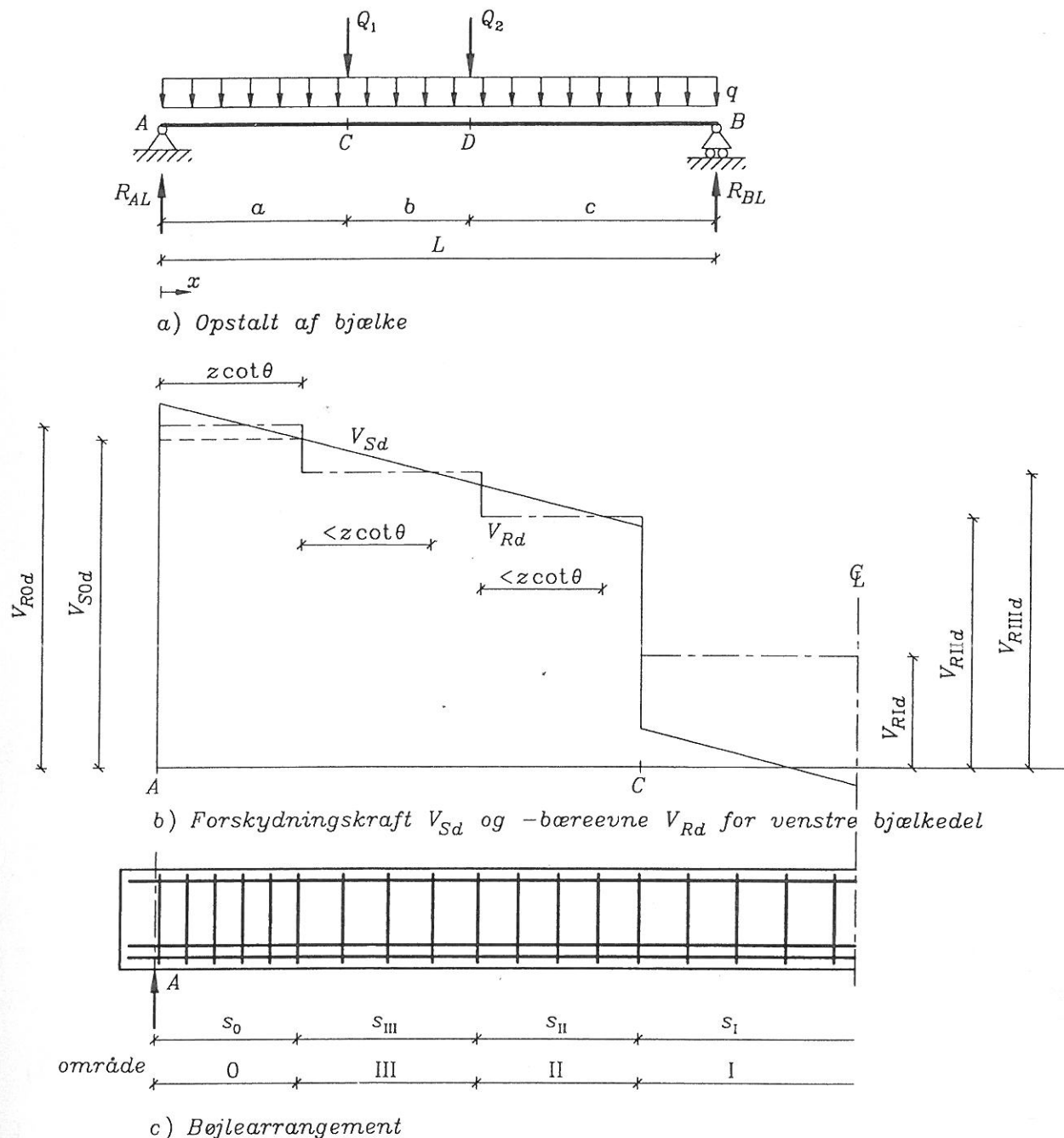
Ovenstående kan sammenfattes i følgende krav til bøjleafstanden.

$$s \leq \begin{cases} \frac{A_{sw}}{V_{Sd}} z f_{ywd} \cot \theta = s_s & \text{(bæreevnekrav)} \\ 0,7h & \text{(minimumskrav)} \\ 0,7h \cot \theta & \text{(minimumskrav)} \\ \frac{5A_{sw} f_{yw k}}{b_w f_{ctk}} & \text{(minimumskrav)} \\ 55 \frac{\phi_{sw}^2}{\phi_s} & \text{(kun ved stød og forankringer)} \end{cases} \quad (4.2 - 49)$$

hvor

$f_{yw}$  er forskydningsarmeringens karakteristiske flydespænding

$s_s$  er den bøjleafstand, der netop kan optage den regningsmæssige forskydningskraft  $V_{Sd}$ .



Figur 4.2-13 Opstalt af bjælke, kurver for den regningsmæssige forskydningskraft  $V_{Sd}$  og forskydningsbæreevne  $V_{Rd}$  samt bøjlearrangement for venstre bjælkedel.

Som nævnt tidligere kan  $\cot \theta$  ud fra et plasticitetsteoretisk synspunkt principielt vælges vilkårlig. Den optimale værdi for  $\cot \theta$  må være den værdi  $\cot \theta_0$ , der giver en samtidig

fuld udnyttelse af bøjlearmeringen og det skrå betontryk.  $\cot \theta_0$  findes af (4.2-42) ved at indsætte den regningsmæssige værdi for  $\psi_{swd}$  dvs.

$$\cot \theta_0 = \sqrt{\frac{\nu - \psi_{swd}}{\psi_{swd}}} \quad (4.2 - 50)$$

hvor  $\psi_{swd} = \frac{A_{sw} f_{ywd}}{b_w s f_{cd}}$  er den regningsmæssige værdi for den mekaniske bøjlearmeringsgrad.

$\cot \theta_0$  skal, afhængig af hvilken standard der benyttes som dimensioneringsgrundlag, opfylde betingelserne for  $\cot \theta$  angivet i (4.2-26) eller (4.2-27)

Fremgangsmåden beskrives ved betragtning af en simpel understøttet bjælke belastet med en kontinuert jævnt fordelt last og to enkeltkræfter, se figur 4.2-13. Forskydningsarmeringen tænkes udført med lodrette bøjler. I det følgende beskrives fremgangsmåden ved dimensionering af forskydningsarmeringen fra punkt  $A (x = 0)$  til det punkt på bjælkeaksen, hvor  $V_d = 0$ . For højre del af bjælken, hvor forskydningskraften er negativ, er fremgangsmåden analog. Bestemmelserne i DS 411 benyttes som dokumentationsgrundlag.

Der er ikke een men mange forskellige løsninger til et forskydningsarmeringsarrangement afhængig af hvilken bøjleafstand  $s$  og antal skift i  $s$  eller i bøjlediameter  $\phi_{sw}$ , der anvendes. Vælges f.eks. at anvende konstant bøjleafstand over strækninger på ca.  $2z \cot \theta$  kan fremgangsmåden være som angivet nedenfor:

1. Beregning og optegning af den regningsmæssige forskydningskrafts variation over bjælkelængden.
2. For beregning og optegning af den regningsmæssige bæreevnekurve ( $V_{Rd}$ ) vælges bøjlearmeringsdiameter, -kvalitet og værdi for  $\cot \theta$ . Normalt vælges den størst mulige værdi for  $\cot \theta$  i henhold til (4.2-26) eller (4.2-27) afhængig af hvilken standard, der benyttes ved dimensioneringen.

I henhold til det tidligere meddelte er det tilladt, at bæreevnekurven  $V_{Rd}$  "skærer ind" i forskydningskraftkurven, idet  $V_{Rd}$  på strækninger mindre end  $z \cot \theta$  må være mindre end den regningsmæssige forskydningskraft  $V_{Sd}$ .

3. Den maksimalt anvendelige bøjleafstand bestemmes af

$$s_{\max} \leq \begin{cases} 0,7h \\ 0,7h \cot \theta \\ \frac{5A_{sw} f_{yw}}{b_w f_{ctk}} \end{cases} \quad (4.2 - 51)$$

Bøjleafstanden vælges normalt som et multiplum af 10 mm. Med den valgte maksimale bøjleafstand  $s_I = s_{\max}$  beregnes den hertil svarende regningsmæssige forskydningsbæreevne  $V_{RI d}$  af øverste udtryk i (4.2-44)

$$V_{RI d} = \frac{A_{sw}}{s_I} z f_{ywd} \cot \theta \quad (4.2 - 52)$$

Hvis  $V_{RI d}$  er mindre end forskydningskraften til venstre for enkeltkraften  $Q_1$ , kan bøjleafstanden  $s_I = s_{\max}$  kun benyttes mellem enkeltkræfterne.

4. Forskydningskraften  $V_{SO d}$  bestemmes i afstanden  $z \cot \theta$  fra understøtningen i A, og den nødvendige bøjleafstand  $s_{0, \text{nød v}}$  bestemmes ved brug af øverste udtryk i (4.2-49)

$$s_{0, \text{nød v}} = \frac{A_{sw}}{V_{SO d}} z f_{ywd} \cot \theta$$

hvorefter bøjleafstanden  $s_0$  vælges som et multiplum af 10 mm,  $V_{RO d}$  beregnes af

$$V_{RO d} = \frac{A_{sw}}{s_0} z f_{ywd} \cot \theta$$

og indtegnes i forskydningskraftfiguren, idet det vælges over hvor lang en strækning (område 0, se figur 4.2-13) bøjlerne placeres med afstanden  $s_0$ .

5. Herefter vurderes det, hvor mange områder med forskellig bøjleafstand, man vil have mellem område I og område 0, idet kravet  $V_{Rd} \geq V_{Sd}$  skal opfyldes bortset fra strækninger af højst længden  $z \cot \theta$ , hvor kravet må fraviges. I figur 4.2-13 er der valgt 2 strækninger ud over strækning I og 0. I princippet kan bjælken forskydningsarmeres således, at  $V_{Rd}$  overalt er mindre end  $V_{Sd}$ , hvis blot det forekommer på strækninger, der er mindre end  $z \cot \theta$ .

Fremgangsmåden er yderligere vist i eksemplerne 4.2-2 og 4.2-3.

### *Forskydning mellem krop og flange i T-bjælker*

I T-bjælker påvirket til bøjning og forskydning optræder der forskydende kræfter i de lodrette snit mellem flangen og bjælkekroppen. Disse forskydende kræfter kan fx beregnes ved anvendelse af Grashofs formel. Der skal ikke her opstilles en teori for bestemmelse af en armering til optagelse af de forskydende kræfter i snittet mellem flange og krop, men blot meddeles den formel, der iht. DS 411 kan benyttes til bestemmelse af denne armering.

For T-bjælker med symmetriske tværsnit, der er påvirket af en jævnt fordelt last, kan der regnes med, at de forskydende kræfter mellem bjælkens krop og flanger kan optages af en jævnt fordelt tværarmering i flangerne med et areal  $A_f$  pr. længdeenhed, der kan bestemmes af

$$A_f = \frac{3(b_f - b_w)^2(g + q)}{8 b_f z f_{yd}}$$

- hvor  $b_f$  er den effektive bredde af T-bjælkens trykflange  
 $b_w$  er kropbredden  
 $g + q$  er bjælkens regningsmæssige last pr. længdeenhed

## Eksempel 4.2-2

Forskydningsarmeringen ønskes dimensioneret for den i figur 4.2-14 viste T-bjælke med spændvidden 8 m. Bjælken er i undersiden armeret med 6 stk. kamstål med  $\phi_s = 25$  mm, dvs.  $A_s = 2945$  mm<sup>2</sup>, og forskydningsarmeringen udføres som 2-snitsbøjler af kamstål med  $\phi_{sw} = 8$  mm, dvs.  $A_{sw} = 2 \cdot 50 = 100$  mm<sup>2</sup>. Al armering er ribbestål med flydespændingen  $f_{yk} = 550$  MPa. Bjælken belastes af en jævnt fordelt linilast  $q = 78$  kN/m. På grund af symmetrien vises dimensioneringen kun for venstre bjælkehalvdel.

Bjælken tænkes udført i moderat miljøklasse, normal sikkerhedsklasse og under normal kontrol.

Materialekonstanter:

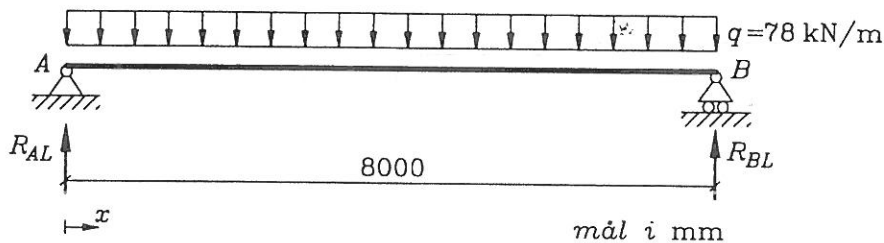
Beton:

$$f_{ck} = 40 \text{ MPa} \quad , \quad f_{cd} = \frac{40}{1,65} = 24,2 \text{ MPa} \quad , \quad f_{ctk} = 2 \text{ MPa} \quad , \quad f_{ctd} = \frac{2,0}{1,65} = 1,21 \text{ MPa}$$

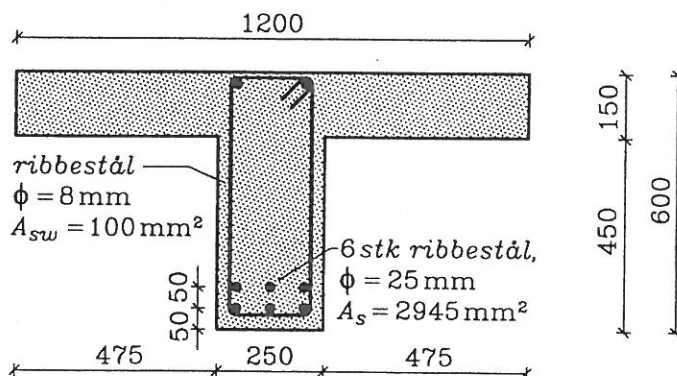
$$\nu = 0,7 - \frac{40}{200} = 0,5$$

Armering:

$$f_{yk} = 550 \text{ MPa} \quad , \quad f_{yd} = \frac{550}{1,3} = 423 \text{ MPa} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{550}{2 \cdot 10^6} = 0,275 \cdot 10^{-3}$$



a Bjælkeopstalt med påførte mål og last.



b Bjælketværsnit.

Figur 4.2-14 Bjælkeopstalt med påførte mål og last samt bjælketværsnit.

$$V_{\max} = R_{AL} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 78 = 312,0 \text{ kN}$$

$$V = 312 - 78 \cdot x$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8} \cdot 78 \cdot 8^2 = 624,0 \text{ kNm}$$

Nulliniedybden  $x$  findes af ækvivalensbetingelsen

$$N = 0 = 1200 \cdot 0,8x \cdot 24,2 - 2945 \cdot 423$$

$$x = 53,6 \text{ mm} < t = 150 \text{ mm}$$

Afstanden  $c_g$  fra armeringens tyngdepunkt til bjælkebunden beregnes af

$$c_g = 50 + \frac{1}{2} \cdot 50 \rightarrow c_g = 75 \text{ mm}$$

Den indre momentarm  $z$  i det tværsnit, der er påvirket af det største moment, beregnes af

$$z = 600 - (75 + 0,4 \cdot 53,6) = 503,6 \text{ mm}$$

Tøjningen i øverste armeringslag bestemmes af

$$\epsilon_s = 0,35 \cdot 10^{-3} \frac{(600 - 100) - 53,6}{53,6} = 2,91 \cdot 10^{-3} > \epsilon_y = 0,275 \cdot 10^{-3}$$

Det antages, at længdearmeringen i bjælken ikke afkortes. For at få den mindst mulige mængde af forskydningsarmeringen vælges  $\cot \theta = 2,5$ .

$$z \cot \theta = 503,6 \cdot 2,5 = 1259 \text{ mm.}$$

For  $x = x_0 = 1259 \text{ mm}$  haves  $V_{Sd0} = 312,0 - 78 \cdot 1,259 = 213,8 \text{ kN}$  hvor  $x_0$  er abscissen til områder 0's endepunkt.

Den maksimale bøjleafstand findes af (4.2-49)

$$s_I = s_{\max} \leq \begin{cases} \frac{5 \cdot 100 \cdot 550}{250 \cdot 2} = 550 \text{ mm} \\ 0,7 \cdot 600 = 420 \text{ mm} \end{cases}$$

Der er i eksemplet ikke taget hensyn til "55-reglens" krav om bøjler i forankringsområdet ved bjælkens understøtninger.

Med  $s_I = 420 \text{ mm}$  fås af (4.2-44) flg. forskydningsbæreevne i område I

$$V_{RdI} \leq \begin{cases} \frac{100}{420} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = \underline{126,8 \text{ kN}} \\ 250 \cdot 503,6 \cdot 0,5 \cdot 24,2 \frac{2,5}{1 + 2,5^2} \cdot 10^{-3} = 525,3 \text{ kN} \end{cases}$$

Bæreevnekurven  $V_{RdI} = 126,8 \text{ kN}$  skærer forskydningskraftkurven  $V$  for værdien  $x_I$  hvor  $x_I$ , der er abscissen til område I's begyndelsepunkt, bestemmes af

$$V = 312 - 78x_I = 126,8 \rightarrow x_I = 2,374 \text{ m}$$

$$x_I - x_0 = 2,374 - 1,259 = 1,115 \text{ m} < z \cot \theta = 1259 \text{ mm}$$

Heraf ses, at en løsning vil være kun at skifte bøjleafstand 1 gang pr. bjælkehalvdel.

Bøjleafstanden nærmest understøtningen bestemmes af øverste formel i (4.2-49).

$$s_{0, \text{nød v.}} = \frac{100}{213,8 \cdot 10^3} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 = 249 \text{ mm}$$

$$s_{0, \text{valgt}} = 240 \text{ mm}$$

## 4.2-28

For  $s_0 = 240$  mm bestemmes bæreevnen af (4.2-44)

$$V_{Rd0} \leq \begin{cases} \frac{100}{240} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = & \underline{221,9 \text{ kN}} \\ 250 \cdot 503,6 \cdot 0,5 \cdot 24,2 \frac{2,5}{1+2,5^2} \cdot 10^{-3} = & 525,3 \text{ kN} \end{cases}$$

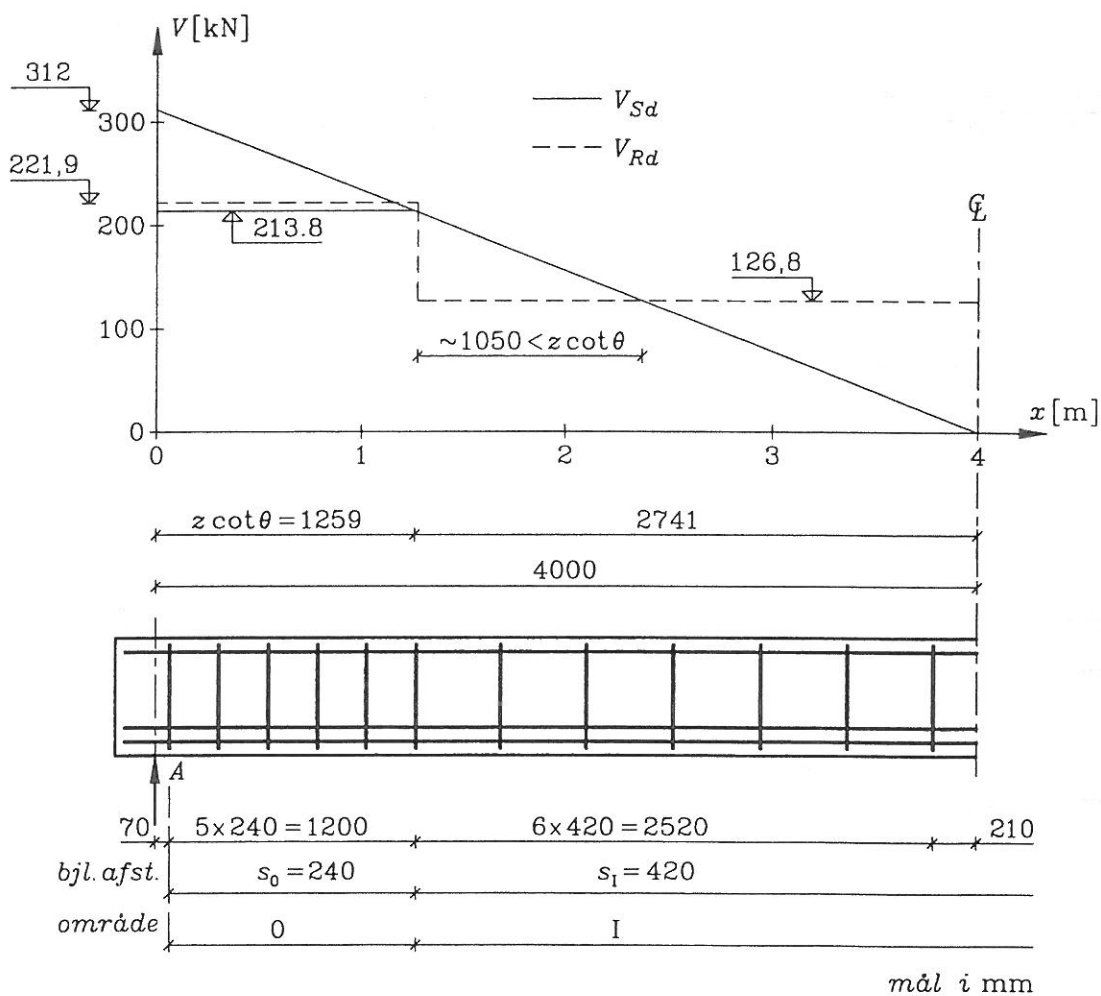
Da forskydningskraften er symmetrisk om bjælkens midte, planlægges bøjlearmeringen ud fra bjælkemidten. Anbringes første bøjle i afstanden  $\frac{1}{2}S_I = \frac{1}{2} \cdot 420 = 210$  mm fra bjælkemidten, og derefter 6 bøjler med afstanden  $s_I = 420$  mm bestemmes udstrækningen  $l_I$  af område I af

$$l_I = 210 + 6 \cdot 420 = 2730 \text{ mm}$$

Anbringes derefter 5 bøjler med afstanden 240 mm hen mod understøtningen bliver sidste bøjle placeret i afstanden  $4000 - (2730 + 5 \cdot 240) = 70$  mm fra understøtningen.

I figur 4.2-15 er forskydningskraftkurven  $V_{Sd}$  vist fuldt optrukket, og bæreevnekurven  $V_{Rd}$  vist punkteret.

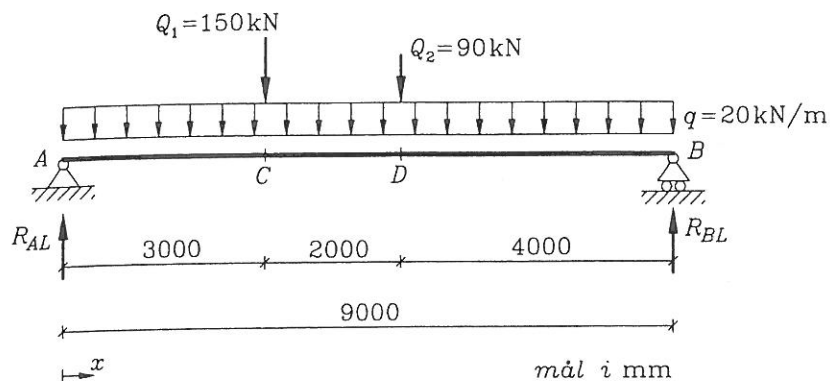
Det ses, at bjælken med det viste bøjlearrangement har en tilstrækkelig forskydningsbæreevne, idet den punkterede bæreevnekurve  $V_{Rd}$  ikke er numerisk mindre end den fuldt optrukne forskydningskraftkurve  $V_{Sd}$  over strækninger, der er større end  $z \cot \theta = 1259$  mm.



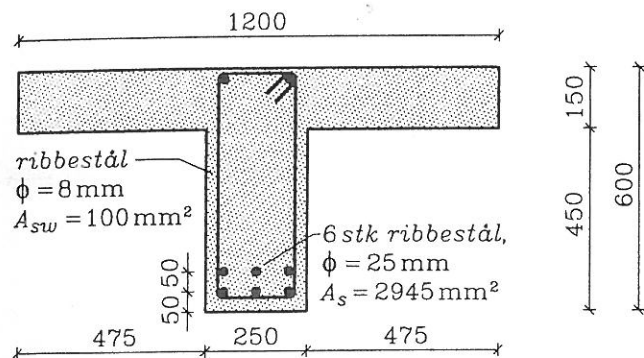
Figur 4.2-15 Forskydningskraftkurve  $V_{Sd}$ , forskydningsbæreevne  $V_{Rd}$ , samt bjælke med bøjlearrangement,  $\phi_{sw} = 8$  mm.

## Eksempel 4.2-3

Forskydningsarmeringen ønskes dimensioneret for den i figur 4.2-16 viste T-bjælke med spændvidden 9 m. Bjælken er i undersiden armeret med 6 stk. kamstål med  $\phi_s = 25$  mm, dvs.  $A_s = 2945$  mm<sup>2</sup>, og forskydningsarmeringen udføres som 2-snitbøjler af kamstål med  $\phi_{sw} = 8$  mm, dvs.  $A_{sw} = 2 \cdot 50 = 100$  mm<sup>2</sup>. Al armering er ribbestål med flydespændingen  $f_{yk} = 550$  MPa. Bjælken belastes af 2 enkeltkræfter  $Q_1 = 155$  kN og  $Q_2 = 100$  kN samt en jævnt fordelt linielast  $q = 20$  kN/m.



a Bjælkeopstalt med påførte mål og laster.



b Bjælketværsnit.

Figur 4.2-16 Bjælkeopstalt med påførte mål og last samt bjælketværsnit.

Bjælken tænkes udført i moderat miljøklasse, normal sikkerhedsklasse og under normal kontrol.

Materialekonstanter:

Beton:

$$f_{ck} = 40 \text{ MPa} \quad , \quad f_{cd} = \frac{40}{1,65} = 24,2 \text{ MPa} \quad , \quad f_{ctk} = 2 \text{ MPa} \quad , \quad f_{ctd} = \frac{2,0}{1,65} = 1,21 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,7 - \frac{40}{200} = 0,5$$

Armering:

$$f_{yk} = 550 \text{ MPa} \quad , \quad f_{yd} = \frac{550}{1,3} = 423 \text{ MPa}$$

I tabel 4.2-1 er bjælkens forskydningskræfter angivet.

Pkt.	A	C		D	B	
afstand i m fra understøtning A	0	3,0	4,0	5,0	9,0	
$V_{Sd}$ i kN	230,0	tv 170,0	th 20,0	0	tv -20,0	th -110,0

Tabel 4.2-1 Regningsmæssige forskydningskræfter i bjælken.

$$M_{\max} = 230,0 \cdot 4,0 - 150 \cdot 1,0 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4,0^2 = 610 \text{ kNm}$$

Nullniedybden  $x$  findes af ækvivalensbetingelsen

$$N = 0 = 1200 \cdot 0,8x \cdot 24,2 - 2945 \cdot 423$$

$$x = 53,6 \text{ mm} < t = 150 \text{ mm}$$

Afstanden  $c_g$  fra armeringens tyngdepunkt til bjælkebunden beregnes af

$$c_g = 50 + \frac{1}{2} \cdot 50 \rightarrow c_g = 75 \text{ mm}$$

Den indre momentarm  $z$  i det tværsnit, der har den hårdeste momentpåvirkning beregnes af

$$z = 600 - (75 + 0,4 \cdot 53,6) = 503,6 \sim 504 \text{ mm}$$

Det antages, at længdearmeringen i bjælken ikke afkortes. For at få den mindst mulige mængde af forskydningsarmering vælges  $\cot \theta = 2,5$  og dermed fås  $z \cot \theta = 503,6 \cdot 2,5 = 1259 \text{ mm}$ .

$$\text{For } x = x_0 = 1259 \text{ mm} \text{ haves } V_{Sd0} = 230 - 20 \cdot 1,259 = 204,8 \text{ kN}$$

$$\text{og for } x = x_I = 1259 \text{ mm} \text{ haves } V_{SdI} = -190 + 20 \cdot 1,259 = -164,8 \text{ kN}$$

hvor  $x_0$  og  $x_I$  er koordinaterne til henholdsvis område 0 og I's endepunkter. Forskydningskraftkurven  $V_{Sd}$  er vist i figur 4.2-17.

Den maksimalt tilladelige bøjleafstand findes af (4.2-49)

$$s_{II, \text{nød}} = s_{\max} \leq \begin{cases} \frac{5 \cdot 100 \cdot 550}{250 \cdot 2} = 550 \text{ mm} \\ 0,7 \cdot 600 = \underline{420 \text{ mm}} \end{cases}$$

Med  $s_{II} = s_{II, \text{valgt}} = 420 \text{ mm}$  fås af (4.2-44) flg. forskydningsbæreevne i område II

$$V_{RdII} \leq \begin{cases} \frac{100}{420} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = \underline{126,8 \text{ kN}} \\ 250 \cdot 503,6 \cdot 0,5 \cdot 24,2 \frac{2,5}{1 + 2,5^2} \cdot 10^{-3} = 523,3 \text{ kN} \end{cases}$$

Ved betragtning af  $V_{Sd}$ -kurven i figur 4.2-17 ses, at 2 snitsbøjler med  $d = 8 \text{ mm}$  og bøjleafstanden  $s_{II} = 420 \text{ mm}$  giver tilstrækkelig bæreevne på strækningen  $3,25 \leq x \leq 7,03$ .

Bøjleafstandene på strækningerne 0 og I bestemmes af øverste formel i (4.2-49), dvs.

$$s_{0, \text{nød}} = \frac{100}{204,8 \cdot 10^3} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 = 260 \text{ mm} \rightarrow s_{0, \text{valgt}} = 260 \text{ mm}$$

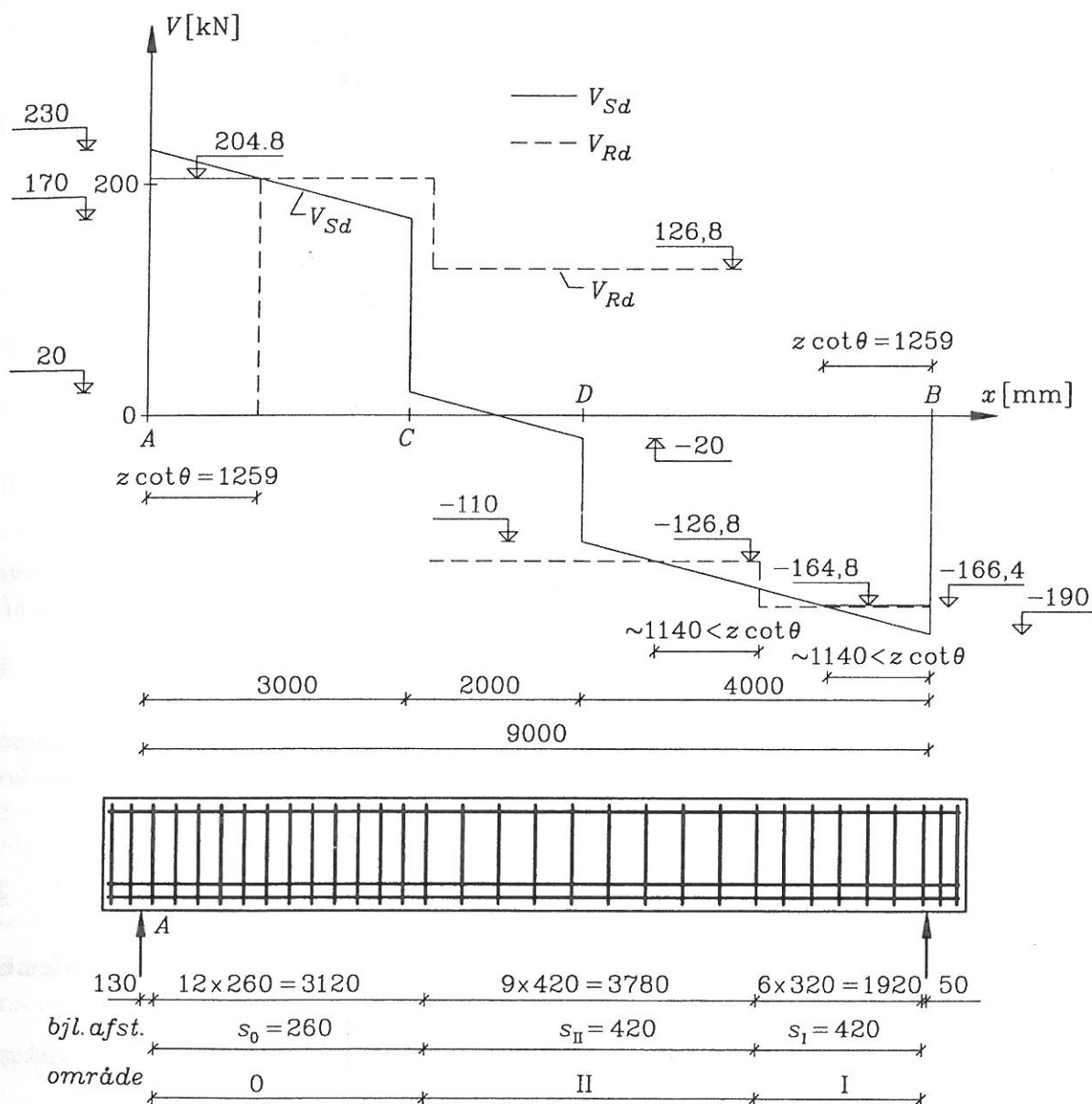
$$s_{sI, \text{nød}} = \frac{100}{164,8 \cdot 10^3} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 = 323 \text{ mm} \rightarrow s_{sI, \text{valgt}} = 320 \text{ mm}$$

Med  $s_0 = 260 \text{ mm}$  og  $s_I = 320 \text{ mm}$  bestemmes forskydningsbæreevne i områderne 0 og I af (4.2-44)

$$V_{Rd0} = \frac{100}{260} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 204,8 \text{ kN}$$

$$V_{RdI} = \frac{100}{320} \cdot 503,6 \cdot 423 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 166,4 \text{ kN}$$

Anbringes første bøjle i afstanden  $x = \frac{1}{2}s_0 = \frac{1}{2} \cdot 260 = 130 \text{ mm}$  fra understøtning A, 12 bøjler i område 0 med afstanden  $s_0 = 260 \text{ mm}$  indtil  $x \geq 3,25 \text{ m}$ , 9 bøjler i område II med afstanden  $s_{II} = 420 \text{ mm}$  og endelig 6 bøjler i område I med afstanden  $s_I = 320 \text{ mm}$ , fås det i figur 4.2-17 viste bøjlearrangement med tilhørende bæreevnekurve. Det ses, at bjælken med det viste bøjlearrangement har en tilstrækkelig forskydningsbæreevne, idet den punkterede bæreevnekurve  $V_{Rd}$  ikke er numerisk mindre end den fuldt optrukne forskydningskraftkurve  $V_{Sd}$  over strækninger, der er større end  $z \cot \theta = 1259 \text{ mm}$ .



Figur 4.2-17 Forskydningskraftkurve  $V_{Sd}$ , forskydningsbæreevne  $V_{Rd}$  samt bjælke med bøjlearrangement  $\phi_{sw} = 8 \text{ mm}$ .

### Udledning af de i DS 411 og EC 2 angivne formler til bestemmelse af forskydningsbæreevnen for forskydningsarmerede betonkonstruktioner

I DS 411 angives 2 metoder, nemlig diagonaltrykmetoden (DIAM) i selve normteksten og en alternativ metode angivet i anneks A. I EC 2 angives ligeledes 2 metoder, nemlig *Variable truss angle inclination method* (VTAM) og *Standard method* (SM), hvor sidstnævnte stort set svarer til den alternative metode i DS 411.

Selv som de formler til bestemmelse af forskydningsbæreevnen, der er angivet i DS 411 og EC 2, har helt forskellig udseende, er de udledt ved anvendelse af samme teori og giver derfor også identiske bæreevner ved anvendelse af samme sikkerhedssystem (materialestyrker og partialkoefficienter). Kun DIAM og VTAM vil blive behandlet her, da disse metoder anses for at være de mest økonomiske og mest hensigtsmæssige til brug ved dimensionering af forskydningsarmering.

Formlerne i EC 2 er direkte sammenlignelige med de ovenfor udledte, medens dette ikke er tilfældet for formlerne i DS 411.

Nedenfor vil sammenhængen mellem formelsættene blive klarlagt.

#### DS 411

I DS 411 afsnit 6.2.2.1 *Forskydning i armerede bjælker og plader* angives bl.a.:

(16) For en stykvis homogen fordeling af de skrå betontryk bestemmes  $\sigma_c$  af

$$\sigma_c = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cot \theta + \cot \alpha} \tau_{sd} \quad (4.2 - 53)$$

(17) Forskydningsarmeringen på en strækning  $l$  af længdeaksen, hvor den mindste formelle forskydningsspænding er  $\tau_{sd}$ , og hvor der ikke er spring i  $\tau_{sd}$ , bestemmes af

$$N_{td} \sin \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) \geq \tau_{sd} l b_w \quad (4.2 - 54)$$

Her betegner  $N_{td}$  summen af de stykvis homogent fordelte regningsmæssige trækstyrker i forskydningsarmeringen inden for den pågældende strækning  $l$  af længdeaksen.

(18) strækningen  $l$  vælges således, at

$$l \leq (\cot \theta + \cot \alpha) z \quad (4.2 - 55)$$

såfremt der anvendes forskellige værdier af  $\cot \theta$  for det samme konstruktionselement, kræves styrken dokumenteret ved en særlig undersøgelse.

(19) Som følge af forskydningspåvirkningen optræder trækraften  $\Delta N_{sd}$ , virkende parallel med bjælkeaksen.  $\Delta N_{sd}$  kan bestemmes af

$$\Delta N_{sd} = |V_{sd}| (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (4.2 - 56)$$

$\Delta N_{sd}$  kan optages af træk- og trykstringere, idet hver stringer tildeles halvdelen af  $\Delta N_{sd}$ , der således giver en forøgelse af trækraften i længdearmeringen udover det bøjende

moments bidrag. Det bemærkes, at der kan være træk i den traditionelle trykstringer, f.eks. ved momentnulpunkter.

Ifølge (4.2-25) skal der pr. længdeenhed af bjælkeaksen anvendes flg. bøjleareal

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{V}{z f_{yw} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha} \quad (4.2 - 57)$$

Summen af de regningsmæssige trækstyrker i bøjlerne  $N_{td}$  inden for længden  $l$  bliver derfor

$$N_{td} \geq l \frac{A_{sw}}{s} f_{yw} = l \frac{V}{z (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha} \quad (4.2 - 58)$$

Indføres  $\tau = \frac{V}{z b_w}$  fås af (4.2-58)

$$N_{td} \sin \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) \geq \tau l b_w \quad (4.2 - 59)$$

Dette udtryk er identisk med (4.2-54), der er angivet i DS 411.

Ved i (4.2-24) at indsætte  $\nu f_c = \sigma_c$  og  $\tau = \frac{V}{b_w z}$  fås

$$\sigma_c = \tau \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cot \theta + \cot \alpha} \quad (4.1.2 - 60)$$

som er identisk med (4.2-53), der er angivet i DS 411.

I DS 411 angives forøgelsen  $\Delta N_{sd}$  af trækraften i længdearmring til

$$\Delta N_{sd} = |V_{sd}| (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (4.2 - 61)$$

Tænkes halvdelen af  $\Delta N_{sd}$  optaget i trækarmeringen ses det, at (4.2-61) er identisk med (4.2-32) bortset fra leddet  $\frac{1}{2} q z \cot \theta \cot \alpha$ . Vejledningen i DS 411 ses derfor i dette tilfælde at være på den usikre side, når der anvendes forskydningsarmering, der ikke er vinkelret på bjælkeaksen.

## EC 2

EC 2 angiver den regningsmæssige forskydningsbæreevne for bjælker armeret med lodret forskydningsarmering ved

$$V_{Rd2} = b_w z \nu f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) \quad (4.2 - 62)$$

$$V_{Rd3} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{yw} \cot \theta \quad (4.2 - 63)$$

however, with

$$\frac{A_{sw}f_{ywd}}{b_w s} \leq \frac{1}{2} \nu f_{cd} \quad (4.2 - 64)$$

hvor

$V_{Rd2}$  er forskydningsbæreevnen for bjælken, hvis det skrå betontryk i bjælkekroppen er bestemmende

$V_{Rd3}$  er forskydningsbæreevnen for bjælken, hvis trækket i den lodrette forskydningsarmering (bøjlerne) er bestemmende

Formuleringen "however, with" er uklar, men det betyder, at

for  $\frac{A_{sw}f_{ywd}}{b_w s} \leq \frac{1}{2} \nu f_{cd}$  er (4.2-63) bestemmende

for  $\frac{A_{sw}f_{ywd}}{b_w s} \geq \frac{1}{2} \nu f_{cd}$  er (4.2-62) bestemmende

Idet  $\frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{1}{\cot \theta + \tan \theta}$  ses (4.2-62) og (4.2-63) at være identisk med (4.2-44).

## Litteraturhenvisning

- /1/ M.P. Nielsen og Finn Bach: *Beregning af forskydningsarmering efter diagonaltrykmotoden*. Bygningsstatistiske meddelelser, Vol. 51, No. 3-4, 1980.
- /2/ M.P. Nielsen: *Beton 1 Del 3, Bøjning med forskydning, To-aksede spændingstilstande, Søjler og bjælkesøjler, Konstruktive regler, Resumesamling*. 2. foreløbige, rettede udgave, Lyngby 1993.
- /3/ DS 411, Dansk Ingeniørforenings norm for *Betonkonstruktioner*, 3. udgave, marts 1984, 6. oplag, april 1994.
- /4/ DS/ENV 1992-1-1, Eurocode No. 2: *Betonkonstruktioner, Del 1: Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner*. 1. udgave, maj 1992.
- /5/ DS/ENV 1992-1-1 NAD, Dansk supplement til Eurocode No. 2: *Betonkonstruktioner, Del 1-1: Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner*.
- /6/ S.U. Pillai, D.W. Kirk: *Reinforced concrete design*. Second Edition, McGraw-Hill Ryerson Limited, 1988.
- /7/ M.P. Nielsen: *Limit analyses and concrete plasticity*. Prentice-Hall 1984.

## 4.4 Centralt og excentrisk belastede søjler og vægge

## 4.4 Centralt og excentrisk belastede søjler og vægge

### 4.4.1 Indledning

I dette afsnit behandles teorien for beregning af centralt belastede og excentrisk belastede søjler.

En søjle er en slank konstruktionsdel, hvori tryknormalkraften er den dominerende snitkraft. Fortegnsregningen vil derfor i dette afsnit 4.4 modsat fortegnsregningen i bogens øvrige kapitler og afsnit være således, at normal kræfter, -spændinger og tøjninger regnes positive som tryk og forkortelse. Når der i dette afsnit henvises til formler i bogens øvrige kapitler og afsnit, skal der derfor i formlernes fortegn tages hensyn til den anvendte fortegnsregning.

Forudsætninger for de i dette afsnit behandlede betonsøjler er, at

- søjlen har konstant tværsnit i hele længden
- søjlens tyngdepunktsakse er retlinet
- søjlen er enkelt eller dobbeltsymmetrisk, og lasten virker i søjlens symmetriplan
- søjlen er påvirket til bøjning om én akse.

I en *centralt belastet søjle* er normalkraftens angrebslinie sammenfaldende med akse gennem søjletværsnittets tyngdepunkt i den retlinede tilstand før udbøjning, se figur 4.4-1 a.

I en *excentrisk belastet søjle* kan excentriciteten, som angivet nedenfor, forekomme på tre måder

- søjlen påvirkes af en kontinuert tværlast  $q$  og/eller en tværkraft  $F_h$  samt en centralt virkende normalkraft  $N$ , se figur 4.4-1 c. Tværkraften  $F_h$  er ikke vist i figuren.
- søjlen påvirkes af en normalkraft  $N$  med en initial excentricitet  $e_0$ , se figur 4.4-1 d
- søjlen påvirkes af en kombination af ovennævnte laster

Søjlerne vist i tilfælde c og d benævnes ofte *bjælkesøjler*.

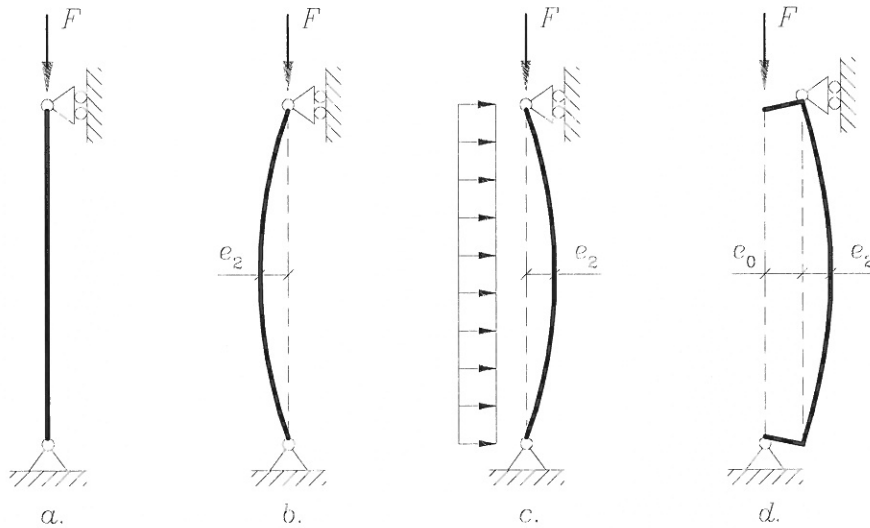
Søjler kan blive påvirket af snitkræfterne  $N$ ,  $V$  og  $M$ , som er henholdsvis en normalkraft, en forskydningskraft og et moment. Ved centralt belastede søjler er  $M = 0$  i den retlinede tilstand før udbøjning og  $V = 0$ . I excentrisk belastede søjler er alle 3 snitkræfter forskellig fra nul, dog er  $V = 0$ , når søjlen påvirkes af en normalkraft med en initial excentricitet  $e_0$ , der giver konstant moment over hele søjlelængden (se figur 4.4-1 d).

Normalt er forskydningskraften relativ lille, således at en undersøgelse af søjlens forskydningsbæreevne er unødvendig, men nødvendigheden af en forskydningsundersøgelse skal vurderes i hvert tilfælde. Hvis en forskydningsundersøgelse er nødvendig, foretages den i henhold til afsnit 4.2 Forskydningsbæreevne.

I det følgende vil de i DS 411 *Norm for betonkonstruktioner* anvendte regningsmæssige værdier for elasticitetskoefficienter m.m. blive benyttet. Teorien for bæreevnebestemmelse for centralt og excentrisk belastede søjler vil derfor blive beskrevet ved anvendelse af regningsmæssige

#### 4.4-2

værdier for materialeparametre , bæreevner mm.



Figur 4.4-1 Statisk model for 3 søjletyper, nemlig en centralt belastet søjle (a+b), en tværbelastet søjle (c) og en excentrisk belastet søjle (d).  $e_2$  angiver søjlens udbøjning i den deformerede ligevægtstilstand. Søjlernes normalkraft er i de viste tilfælde  $N = F$ .

#### 4.4.2 Centralt belastede søjler

En centralt belastet søjle vil for voksende normalkraft  $N_{Sd}$  forblive retlinet indtil den kritiske last  $N_{Sd} = N_{Rcrd}$  er nået. Søjlen vil herefter for lasten  $N_{Sd} = N_{Rcrd}$  kunne være i ligevægt for en vilkårlig lille udbøjning. Blicher  $N_{Sd} \geq N_{Rcrd}$  vil søjlen bryde pludseligt sammen.

##### Uarmerede søjler.

Indledningsvis betragtes en uarmeret søjle, hvor betonen antages at være et homogent materiale.

Da beton er et ikke-lineærelastisk materiale kan  $N_{Rcrd}$  bestemmes ved brug af Engessers 1. søjleteori

$$N_{Rcrd} = \frac{\pi^2 E_{\sigma crd} I}{l_s^2} \quad (4.4-1)$$

Søjlels kritiske normalkraft  $N_{Rcrd}$  giver før udbøjning anledning til en konstant spænding over søjletværsnittet, der kan bestemmes af

$$\sigma_{crd} = \frac{N_{Rcrd}}{A_c} = \frac{\pi^2 E_{\sigma crd} I_c}{l_s^2 A_c} = \frac{\pi^2 E_{\sigma crd}}{\left(\frac{l_s}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E_{\sigma crd}}{\lambda^2} \quad (4.4-2)$$

hvor  $\sigma_{crd}$  er den regningsmæssige værdi af søjlens kritiske betonspænding ved central last  
 $E_{\sigma crd}$  er den regningsmæssige værdi for den spændingsafhængige elasticitetskoefficient dvs. hælningskoefficienten til betonens arbejdslinie i punktet svarende til spændingen  $\sigma_{cd} = \sigma_{crd}$   
 $A_c$  er søjleværsnittets areal  
 $I_c$  er søjleværsnittets inertimoment om tværsnittets tyngdepunktsakse vinkelret på udbøjningsretningen  
 $l_s$  er den frie søjlelængde  
 $i = (I_c A_c)^{0,5}$  er tværsnittets inertiradius  
 $\lambda = l_s / i$  er søjlens slankhedsforhold.

Antages betonens arbejdslinie parabelformet og givet ved  $\sigma_c = f_{cd} (2 \varepsilon_c / \varepsilon_{cl} - (\varepsilon_c / \varepsilon_{cl})^2)$ , se figur 4.4-3, findes  $E_{\sigma crd}$  som tangenthældningen til betonens regningsmæssige arbejdslinie svarende til  $\sigma_c = \sigma_{crd}$ .  $E_{\sigma crd}$  ses at variere fra  $E_{\sigma crd} = E_{0d}$  for  $\sigma_c = 0$  til  $E_{\sigma crd} = 0$  for  $\sigma_c = f_{cd}$ . Dette betyder, at man ikke direkte kan beregne  $\sigma_{crd}$  af (4.4-2), idet  $E_{\sigma crd}$  er en funktion af  $\sigma_c = \sigma_{crd}$ .

Inden det vises, hvordan dette problem løses, vil der i det følgende blive foretaget en vurdering af betonens begyndelseselasticitetskoefficient  $E_0$ .

$E_0$  er en funktion af betonens trykstyrke, idet voksende trykstyrke  $f_c$  giver voksende værdi for  $E_0$ . Forsøgsresultater indsamlet og bearbejdet af M. Ros og beskrevet i Monatsnachrichten Österreichische Betonverein, februar 1937 viser, at relationen mellem betonens trykstyrke  $f_c$  og betonarbejdsliniens begyndeshældning  $E_0$  kan beskrives ved det empiriske udtryk

$$E_0 = 55.000 \frac{f_c}{f_c + 15} \quad (4.4-3)$$

hvor  $E_0$  og  $f_c$  regnes i MPa.

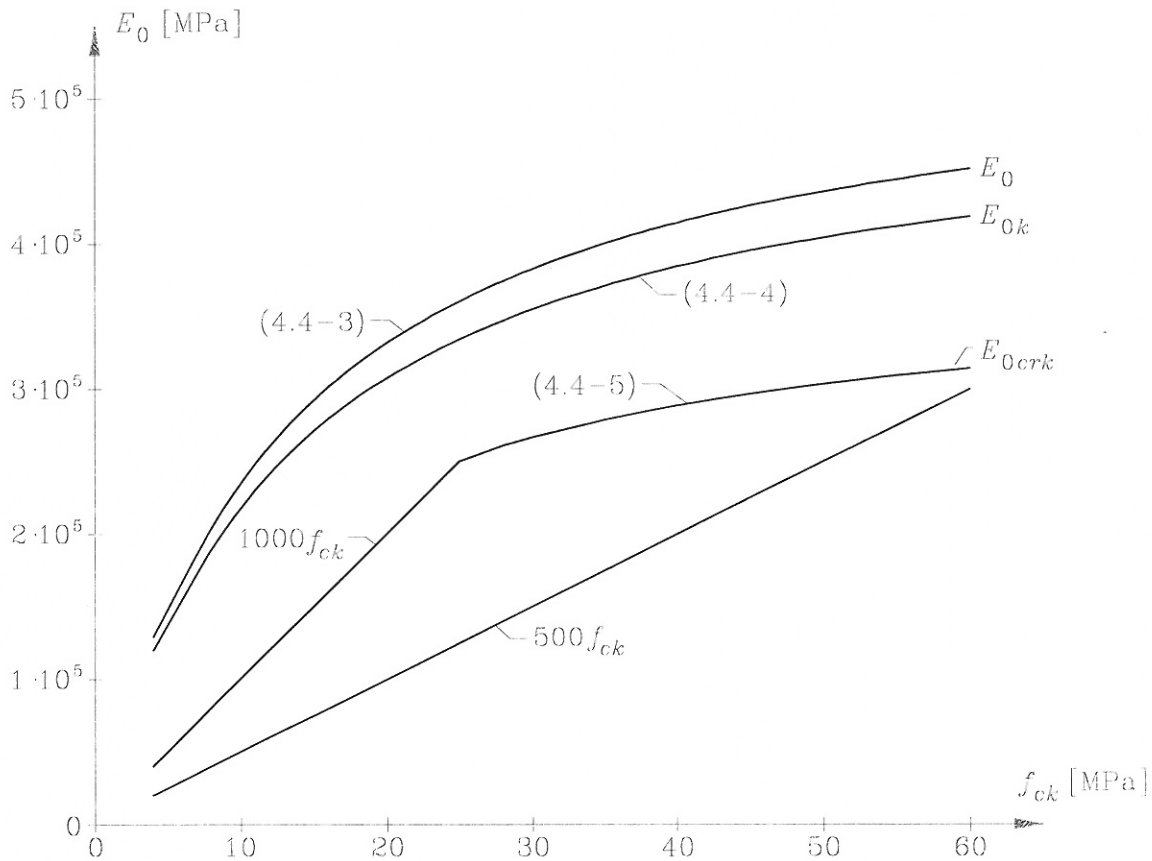
I henhold til DS 411 kan den karakteristiske værdi af begyndeshældningen  $E_{0k}$  bestemmes af udtrykket (4.4-4), der er en modificeret udgave af (4.4-3)

$$E_{0k} = 51.000 \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13} \quad (4.4-4)$$

For at indføre en ekstra sikkerhed ved søjleberegninger angives i DS 411, at man ved bestemmelse af  $\sigma_{crd}$  og  $N_{Rcrd}$  skal anvende flg. udtryk for den regningsmæssige værdi af begyndelseselasticitetskoefficienten  $E_{0crd}$

$$E_{0crd} \leq \frac{E_{0crk}}{\gamma_c} = \begin{cases} 1000 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 1000f_{cd} & \text{for } f_{ck} \leq 25 \text{ MPa} \\ 0,75 \frac{E_{0k}}{\gamma_c} = 38.250 \frac{f_{cd}}{f_{ck} + 13} & \text{for } f_{ck} > 25 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.4-5)$$

I figur 4.4-2 er de i (4.4-3) og (4.4-4) angivne udtryk for betonens begyndelseselasticitetskoefficient vist som en funktion af betonstyrken  $f_{ck}$ . Desuden er den karakteristiske værdi  $E_{0crk}$ , svarende til den regningsmæssige værdi  $E_{0crd}$ , der er givet ved (4.4-5), samt den rette linie  $E_{0crk} = 500 f_{ck}$  vist.



Figur 4.4-2 Værdier for elasticitetskoefficienterne for  $E_0$  og  $E_{0k}$  i henhold til (4.4-3) og (4.4-4), samt  $E_{0crk}$  svarende til den regningsmæssige værdi  $E_{0crd}$ , der er givet ved (4.4-5). Desuden er  $E_{0crk} = 500f_{ck}$  vist.

I DS 411 benyttes flg. udtryk for den spændingsafhængige  $E_\sigma$

$$E_\sigma = E_0 \left[ 1 - \frac{\sigma_c}{f_c} \right] \quad (4.4-6)$$

Ved bestemmelse af en centralt belastet søjles regningsmæssige bæreevne benyttes  $\sigma_c = \sigma_{crd}$ ,  $f_c = f_{cd}$  og  $E_0 = E_{0crd}$ , som indsat i (4.4-6) giver

$$E_{\sigma crd} = E_{0crd} \left[ 1 - \frac{\sigma_{crd}}{f_{cd}} \right] \quad (4.4-7)$$

Det analytiske udtryk for den regningsmæssige betonarbejdslinie, hvis tangenthældning bestemmes ved (4.4-7) er givet ved

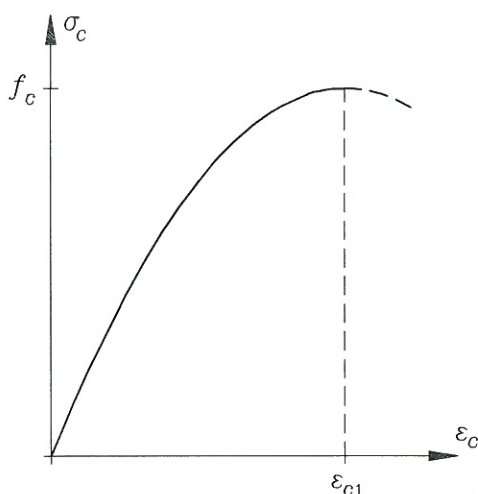
$$\sigma_{cd} = f_{cd} \left( 1 - e^{-E_{0crd} \epsilon_{cd} / f_{cd}} \right) \quad (4.4-8)$$

Anvendelse af udtrykket (4.4-7) for  $E_{\sigma crd}$  vil normalt være på den sikre side, idet den virkelige tangenthældning normalt vil være større, se nedenfor.

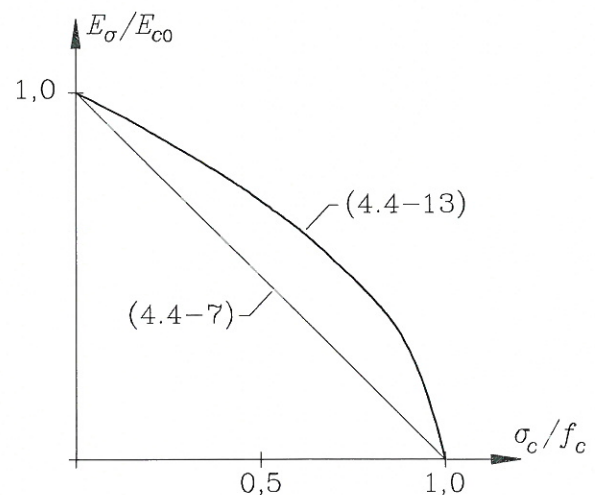
Arbejdslinien for beton i intervallet  $0 \leq \sigma_c \leq f_c$  kan med god tilnærmelse beskrives ved en parabel bestemt ved (4.4-9), se figur 4.4-3

$$\sigma_c = f_c \left( 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right) = f_c \left( 2 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right) \quad (4.4-9)$$

hvor  $\epsilon_{c1}$  er abscissen til toppunktet på betonens arbejdslinie



Figur 4.4-3 Arbejdslinie for beton bestemt ved (4.4-9)



Figur 4.4-4 Relation mellem  $E_\sigma/E_0$  og  $\sigma_c/f_c$  i henhold til (4.4-7) og (4.4-13)

Differentieres (4.4-9) fås

$$E_\sigma = \frac{d\sigma_c}{d\epsilon_c} = 2 \frac{f_c}{\epsilon_{c1}} \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right) \quad (4.4-10)$$

#### 4.4-6

For  $\varepsilon_c = 0$  fås  $E_\sigma = E_{c0} = 2f_c/\varepsilon_{c1}$  som indsat i (4.4-10) giver

$$E_\sigma = E_{c0} \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) \quad (4.4-11)$$

Løses 2. gradsligningen i (4.4-9) mht.  $\varepsilon_c/\varepsilon_{c1}$  fås

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} = \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_c}{f_c}} \right) \quad (4.4-12)$$

Indsættes (4.4-12) i (4.4-11) fås flg udtryk for  $E_\sigma$

$$E_\sigma = E_{c0} \sqrt{1 - \frac{\sigma_c}{f_c}} \quad (4.4-13)$$

Udtrykkene (4.4-7) og (4.4-13) er vist i figur 4.4-4, hvor det ses, at (4.4-13) giver større værdier end (4.4-6), hvilket viser, at anvendelsen af udtrykket (4.4-7) for  $E_{\sigma crd}$  ved bestemmelse af betonsøjlers bæreevne vil være på den sikre side.

Indsættes (4.4-7) i (4.4-2) kan  $\sigma_{crd}$  findes af (4.4-2) ved isolering af  $\sigma_{crd}$

$$\sigma_{crd} = \frac{f_{cd}}{1 + \frac{f_{cd}}{\pi^2 E_{0crd}} \lambda^2} \quad (4.4-14)$$

og søjlens bæreevne kan bestemmes som

$$N_{Rcrd} = \sigma_{crd} A_c \quad (4.4-15)$$

Ved indsættelse af (4.4-5) i faktoren  $f_{cd}/(\pi^2 E_{0crd})$  til  $\lambda^2$  fås

$$\frac{f_{cd}}{\pi^2 E_{0crd}} = \begin{cases} \frac{1}{1000 \pi^2} = 1,01 \cdot 10^{-4} \sim 1,0 \cdot 10^{-4} & \text{for } f_{ck} \leq 25 \text{ MPa} \\ \frac{f_{ck} + 13}{37,75} \cdot 10^{-4} & \text{for } f_{ck} > 25 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.4-16)$$

Størrelsen af faktoren  $10^4 \cdot f_{cd}/(\pi^2 E_{0crd})$  er angivet i tabel 4.4-1 med 1 decimal og svarer til tabel V 6.2.5.1 i DS 411

Det skal bemærkes, at partialkoefficienten for uarmeret beton er større end partialkoefficienten for armeret beton, og der må i henhold til DS 411 i uarmerede betonkonstruktioner ikke regnes med betonstyrker større end  $f_{ck} = 25$  MPa. Faktoren  $f_{cd}/(\pi^2 E_{0crd})$  er uafhængig af partialkoefficienter og gælder derfor både for armerede og uarmerede betonsøjletværsnit.

$f_{ck}$ i MPa	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$10^4 \cdot f_{cd} / (\pi^2 E_{0crd})$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,7	1,8	1,9
$\alpha$	42	32	25	20	17	15	13	11	10	09	08

Tabel 4.4-1 Faktoren  $f_{cd} / (\pi^2 E_{0crd})$  i (4.4-14) og forholdet  $\alpha = E_{sd} / 500 f_{cd}$  som funktion af  $f_{ck}$

### Armerede søjler.

Når spændingen i en centralt belastet søjle når den kritiske værdi  $\sigma_{crd}$ , vil søjlen kunne være i ligevægt i en udbøjet stilling. Umiddelbart før søjlen bøjer ud, vil der være en konstant tøjning  $\epsilon_{crd}$  i beton og armering over hele tværsnittet. Søjleens bæreevne kan bestemmes af

$$N_{Rcrd} = \sigma_{crd} A_c + (\sigma_{sd} - \sigma_{crd}) A_{sc} \quad (4.4-17)$$

hvor  $\sigma_{crd}$  er den regningsmæssige værdi af den kritiske betontrykspænding  
 $\sigma_{sd}$  er den regningsmæssige trykspænding i armeringen svarende til tøjningen  $\epsilon_{crd}$   
 $A_c$  = bh er betontværsnittets areal  
 $A_{sc}$  er længdearmeringens tværsnitsareal

Normalt regnes  $\sigma_{sd} - \sigma_{crd} \sim \sigma_{sd}$ . Fejlen, der begås herved er lille, idet det normalt vil gælde, at  $\sigma_{crd} \ll \sigma_{sd}$  og  $A_{sc} \ll A_c$ . I DS 411 angives (4.4-17) således som

$$N_{Rcrd} = \sigma_{crd} A_c + \sigma_{sd} A_{sc} \quad (4.4-18)$$

Indsættes  $\sigma_{sd} = E_{sd} \epsilon_{crd}$  i (4.4-18) fås

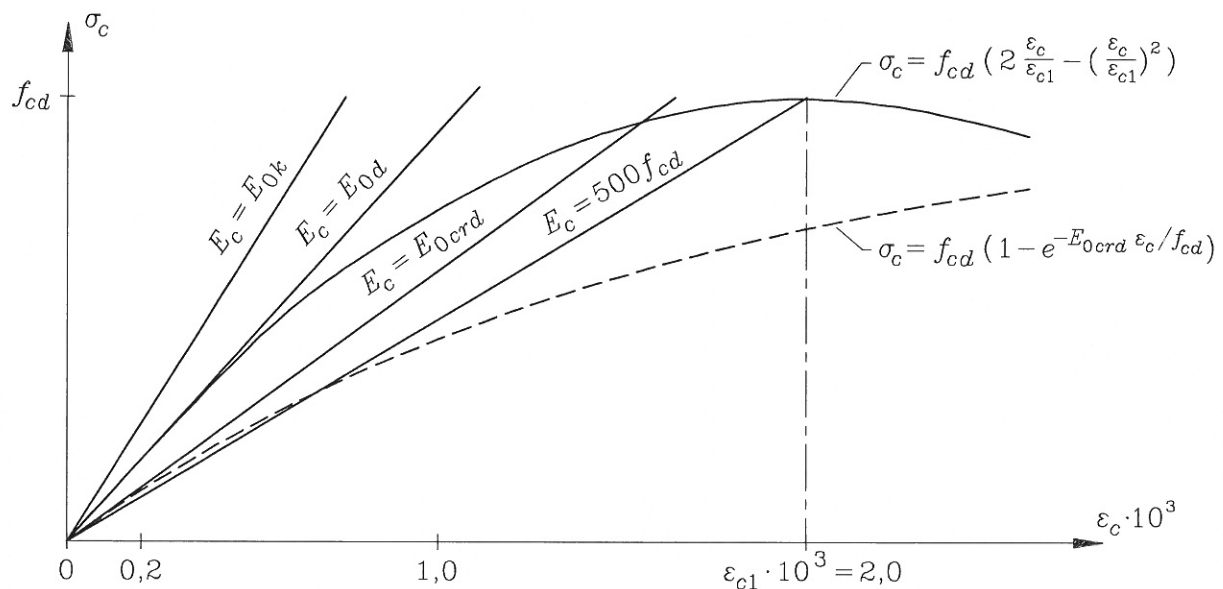
$$N_{Rcrd} = \sigma_{crd} A_c + E_{sd} \epsilon_{crd} A_{sc} \quad (4.4-19)$$

En korrekt beregning af søjlens bæreevne efter (4.4-19) vil kunne foretages iterativt, men vil være temmelig besværlig. For at kunne bestemme  $\sigma_{crd}$  af (4.4-2) skal man nemlig kende størrelsen af det transformerede tværsnits areal og inertimoment. For at beregne disse størrelser skal man have kendskab til  $\alpha = E_{sd} / E_{0crd}$ , der er forholdet mellem de regningsmæssige værdier af armeringens og betonens elasticitetskoefficienter svarende til punktet ( $\epsilon_{crd}$ ,  $\sigma_{crd}$ ) på betonens arbejdslinie. Men dette kræver kendskab til størrelsen af  $\sigma_{crd}$ , som er den størrelse, der ønskes beregnet, idet  $E_{0crd}$  er en funktion af  $\sigma_{crd}$ .

For at lette beregningerne har man i DS 411 indført 2 tilnærmelser

- Ved bestemmelse af tværsnittets areal  $A_c$  og inertimoment  $I_c$ , der begge indgår i (4.4-2) for beregning af  $\sigma_{crd}$ , tager man ikke hensyn til søjlens armering, hvorfor kendskab til  $\alpha$  ikke er nødvendig. Denne tilnærmelse vil normalt være på den sikre side.

- b. Ved beregning af  $\alpha = E_{sd} / E_{\sigma_{crd}}$  regnes betonens elasticitetskoefficient uafhængig af  $\sigma_{crd}$  og bestemmes af  $E_{\sigma_{crd}} = 500f_{cd}$ , hvilket svarer til en retlinet arbejdslinie gående gennem punkterne  $(\epsilon_c, \sigma_c) = (0,0)$  og  $(\epsilon_c, \sigma_c) = (\epsilon_{c1}, f_{cd})$ , hvor  $\epsilon_{c1} = 2 \cdot 10^{-3}$ , se figur 4.4-5. Denne tilnærmelse vil for høje betonstyrker være på den sikre side, idet det af figur 4.4-6 fremgår, at den til  $\sigma_{crd}$  svarende tøjning  $\epsilon_{crd}$  bestemt af den retlinede arbejdslinie ④ er mindre end tøjningen svarende til arbejdslinien ③, som er den arbejdslinie for betonen, der svarer til den valgte værdi for  $E_{\sigma_{crd}}$  givet ved (4.4-7). Armeringsbidraget  $\Delta N_{Rcrd} = E_{sd} \epsilon_{crd} A_{sc}$  i (4.4-19) bliver derfor mindre ved anvendelse af arbejdslinien ④ end ved anvendelse af ③. For lave betonstyrker er tilnærmelsen på den usikre side for relativt små værdier af  $\sigma_{crd}$ , medens tilnærmelsen er på den sikre side for relativt store værdier af  $\sigma_{crd}$ .



Figur 4.4-5 Arbejdslinier for beton givet ved henholdsvis  $\sigma_c = f_{cd} (2 \epsilon_c / \epsilon_{c1} - (\epsilon_c / \epsilon_{c1})^2)$  og  $\sigma_c = f_{cd} (1 - \exp(-E_{0crd} \epsilon_c / f_{cd}))$  samt 4 lineærelastiske arbejdslinier ved henholdsvis  $\sigma_c = E_{0k} \epsilon_c$ ,  $\sigma_c = E_{0d} \epsilon_c$ ,  $\sigma_c = E_{0crd} \epsilon_c$ ,  $\sigma_c = 500 f_{cd} \epsilon_c$

Fejlene, der begås ved de to tilnærmelser, ophæver til dels hinanden, og med de begrænsninger DS 411 indlægger i beregningen af størrelsen af  $N_{Rcrd}$ , se nedenfor, skønnes den resulterende fejl at være uden betydning for praktisk beregning af bæreevnen for centralt belastede søjler. Indføres tilnærmelse a samt iht tilnærmelse b  $\epsilon_{crd} = \sigma_{crd} / E_{\sigma_{crd}} = \sigma_{crd} / (500 f_{cd})$  i (4.4-19) fås

$$N_{Rcrd} = \sigma_{crd} A_c + E_{sd} \frac{\sigma_{crd}}{500 f_{cd}} A_{sc} \frac{A_c}{A_c} \quad (4.4-20)$$

Indføres forholdet  $\alpha$  mellem armeringens og betonens elasticitetskoefficienter samt armeringsforholdet  $\rho$  givet ved henholdsvis

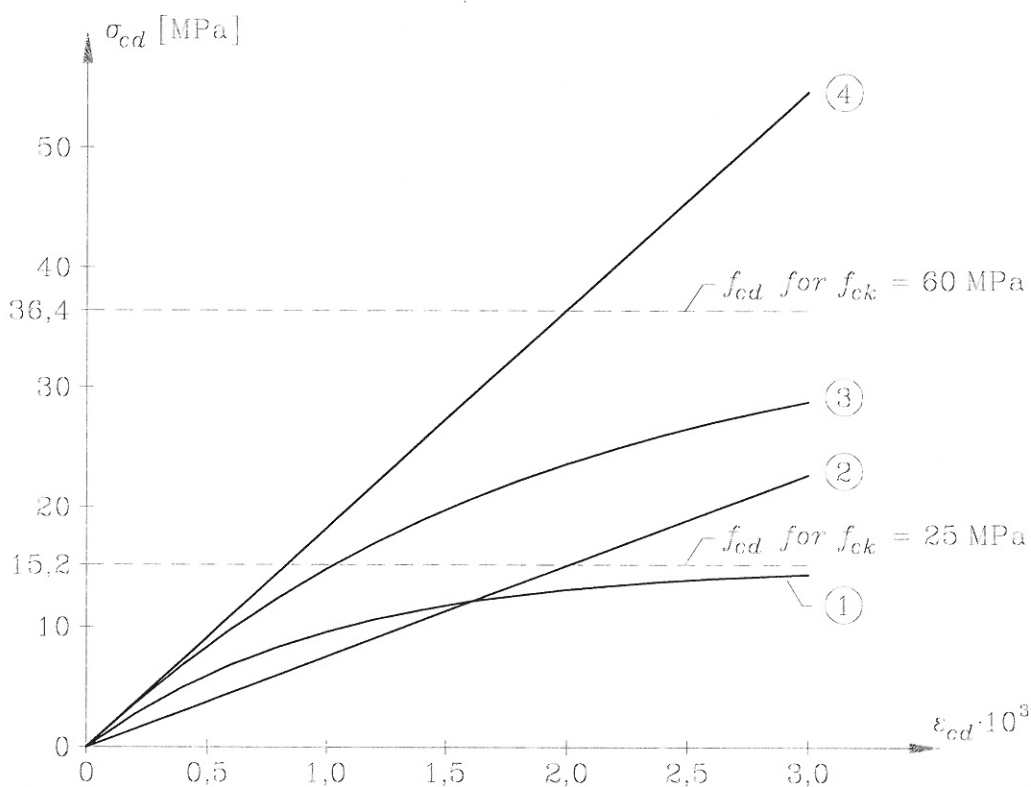
$$\alpha = \frac{E_{sd}}{500 f_{cd}} = \frac{E_{sk} \gamma_c}{500 f_{ck} \gamma_s} \quad \text{og} \quad \rho = \frac{A_{sc}}{A_c} \quad (4.4-21)$$

hvor  $\gamma_c$  og  $\gamma_s$  er partialkoefficienter for henholdsvis beton og armering, fås

$$N_{Rcrd} = \sigma_{crd} A_c (1 + \alpha \rho) \quad (4.4-22)$$

I tabel 4.4-1 er  $\alpha$  angivet som funktion af  $f_{ck}$ . Da  $\gamma_s = 1,3 \gamma_1 \gamma_5$  og  $\gamma_c = 1,65 \gamma_1 \gamma_5$ , se afsnit 3.9, er  $\alpha$  uafhængig af valg af kontrol- og sikkerhedsklasse.

Hvis der er flydning i armeringen, dvs.  $\epsilon_s = \epsilon_{crd} \geq \epsilon_y$ , indsættes  $\sigma_{sd} = f_{yd}$  i (4.4-18).



Figur 4.4-6 Regningsmæssige arbejdslinier for beton med trykstyrker henholdsvis  $f_{ck} = 25$  MPa og  $f_{ck} = 60$  MPa  
 ① og ③ angiver arbejdslinien  $\sigma_{cd} = f_{cd} (1 - \exp(-E_{0crd} \epsilon_{cd}/f_{cd}))$  for henholdsvis  $f_{ck} = 25$  MPa og  $f_{ck} = 60$  MPa  
 ② og ④ angiver arbejdslinien  $\sigma_{cd} = 500 f_{cd} \epsilon_{cd}$  for henholdsvis  $f_{ck} = 25$  MPa og  $f_{ck} = 60$  MPa

4.4-10

I DS 411 kræves, at armeringens bidrag til bæreevnen  $\Delta N_{Rcrd} = \sigma_{sd} A_{sc}$  ikke må være større end betonens bidrag, hvis der ikke anvendes overlappingsstød i søjlens armering og ikke større end 50% af betonens bidrag, hvis der anvendes overlappingsstød.

Med disse bestemmelser og begrænsninger kan bæreevnen for en centralt belastet betonsøjle beregnes som den mindste af værdierne angivet i (4.4-23).

$$N_{Rcrd} \leq \min \begin{cases} \sigma_{crd} A_c (1 + \alpha \rho) \\ \sigma_{crd} A_c + f_{yd} A_{sc} \\ 2 \sigma_{crd} A_c \\ 1,5 \sigma_{crd} A_c \end{cases} \begin{array}{l} \text{hvis der ikke anvendes overlappingsstød} \\ \text{hvis der anvendes overlappingsstød} \end{array} \quad (4.4-23)$$

I det følgende skal der foretages en vurdering af størrelsen af den fejl, der begås ved at anvende ovennævnte tilnærmelser a og b.

Det analytiske udtryk for den regningsmæssige betonarbejdslinie, hvis tangenthældning bestemmes ved (4.4-7), er givet ved

$$\sigma_{cd} = f_{cd} (1 - e^{-E_{0crd} \epsilon_{cd} / f_{cd}}) \quad (4.4-24)$$

Det ses lettest ved at differentiere udtrykket (4.4-24)

$$\frac{d \sigma_{cd}}{d \epsilon_{cd}} = E_{\sigma cd} = E_{0crd} e^{-E_{0crd} \epsilon_{cd} / f_{cd}} \quad (4.4-25)$$

Indsættes (4.2-24) i (4.4-7), idet  $\sigma_{crd}$  i (4.4-7) sættes lig  $\sigma_{cd}$ , fås

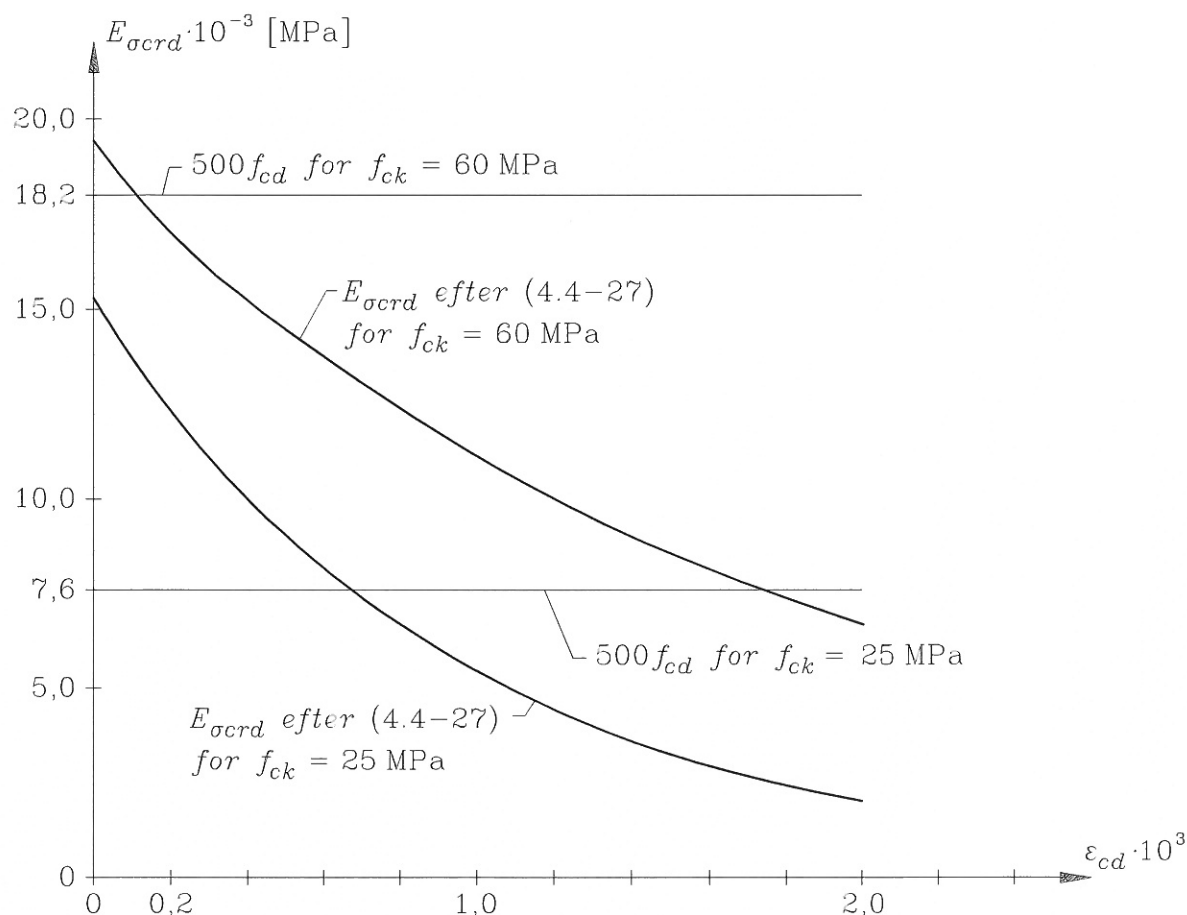
$$E_{\sigma crd} = E_{0crd} \left( 1 - \frac{f_{cd} (1 - e^{-E_{0crd} \epsilon_{cd} / f_{cd}})}{f_{cd}} \right) \quad (4.4-26)$$

og dermed

$$E_{\sigma crd} = E_{0crd} e^{-E_{0crd} \epsilon_{cd} / f_{cd}} \quad (4.4-27)$$

Det ses, at (4.4-25) og (4.4-27) er identiske, hvilket er ensbetydende med, at (4.2-24) i et  $(\epsilon_{cd}, \sigma_{cd})$ -koordinatsystem angiver det analytiske udtryk for den arbejdslinie, der har en tangenthældning givet ved (4.4-7).

Dvs. arbejdslinien givet ved (4.4-24), er den arbejdslinie, der skal benyttes, hvis en centralt belastet søjles bæreevne skal bestemmes uden anvendelse af tilnærmelsen b omtalt ovenfor. I figur 4.4-7 er  $E_{\sigma crd}$  vist bestemt som henholdsvis  $E_{\sigma crd} = 500 f_{cd}$  og  $E_{\sigma crd}$  bestemt ved (4.4-27).



Figur 4.4-7  $E_{\sigma_{crd}} = 500 f_{cd}$  og  $E_{\sigma_{crd}} = E_{0crd} \exp(-E_{0crd} \epsilon_{cd}/f_{cd})$  i ht. (4.4-27) som funktion af  $\epsilon_{cd}$  for betonstyrkerne  $f_{ck} = 25$  MPa og  $f_{ck} = 60$  MPa

I det følgende benyttes symbolet  $N_{Rcrd2}$  for bæreevnen bestemt uden anvendelse af tilnærmelserne a og b, medens bæreevnen bestemt i henhold til DS 411, se (4.4-23), benævnes  $N_{Rcrd1}$ .

$N_{Rcrd2}$  kan bestemmes ved følgende fremgangsmåde:

- værdi for  $\epsilon_{cd} = \epsilon_{crd}$  skønnes
- $\sigma_{cd}$  bestemmes af (4.2-24)
- $E_{\sigma_{crd}}$  bestemmes af (4.2-27)
- det urevnedede transformerede tværsnits areal  $A_{ur,tr}$  og inertimoment  $I_{ur,tr}$  bestemmes ved anvendelse af  $\alpha = E_{sd}/E_{\sigma_{crd}}$
- $\lambda^2 = l_s^2 A_{ur,tr}/I_{ur,tr}$  bestemmes
- $\sigma_{crd}$  bestemmes af (4.4-2) og sammenlignes med den under b) beregnede værdi af  $\sigma_{cd}$
- hvis de to værdier ikke stemmer overens, skønnes en ny værdi for  $\epsilon_{cd} = \epsilon_{crd}$ , og omregning foretages, indtil  $\sigma_{crd}$  bestemt af (4.4-2) er lig værdien af  $\sigma_{cd}$  bestemt efter (4.4-24)
- herefter bestemmes bæreevnen  $N_{Rcrd2}$  af (4.4-23).

Beregning af  $N_{Rcrd1}$  og  $N_{Rcrd2}$  er gennemført for ialt 8 søjler, benævnt *søjle 1* til *søjle 8* i tabel 4.4-2 og 4.4-3, med betontværsnit  $b \cdot h = 300 \cdot 300$  mm. I disse søjler er der anvendt flg. parametre, der er valgt som henholdsvis

#### 4.4-12

høje og lave værdier for  $f_{ck}$ ,  $\rho$  og  $\lambda$ .

- høj og lav betonstyrke, henholdsvis  $f_{ck} = 60$  MPa og  $f_{ck} = 25$  MPa
- højt og lavt armeringsforhold, henholdsvis  $\rho = 8,55$  % og  $\rho = 0,75$  %
- højt og lavt slankhedsforhold, henholdsvis  $\lambda = 150$  (fri søjlelængde  $l_s = 13,0$  m) og  $\lambda = 29$  (fri søjlelængde  $l_s = 2,5$  m)

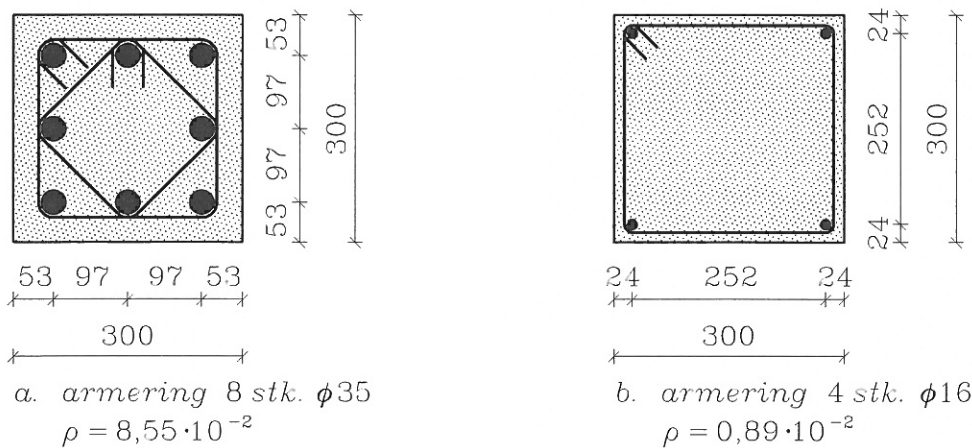
Søjletværsnittene med armering er vist i figur 4.4-8.

Resultatet af disse beregninger er angivet i tabel 4.4-2 og 4.4-3.

Størrelsen af forholdet  $N_{Rcrd2}/N_{Rcrd1}$  er vist i række 7 i tabel 4.4-2. Når  $N_{Rcrd2}/N_{Rcrd1} > 1,0$  betyder dette, at en beregning af søjlens bæreevne i henhold til DS 411 er på den sikre side sammenlignet med bæreevnen beregnet af  $N_{Rcrd2} = \pi^2 E_{ocrd} I_{ur,tt}/l_s^2$ , hvor  $E_{ocrd}$  bestemmes af (4.4-27) som tangenthældningen til betonens arbejdslinie givet ved (4.4-24). Metoden til bestemmelse af bæreevnen  $N_{Rcrd2}$  benævnes i det følgende ved metode 2

Af tabel 4.4-2 fremgår det, at af de beregnede søjlebæreevner er det kun søjlerne med relativt lave betonstyrker ( $f_{ck} = 25$  MPa) og høje værdier for armeringsforholdet ( $\rho = 8,55 \cdot 10^{-2}$ ), der, beregnet iht. DS 411, er på den usikre side, og det ses at være under 2 %.

Derimod er bæreevnen bestemt i henhold til DS 411 for en relativ høj betonstyrke ( $f_{ck} = 60$  MPa), høj værdi for armeringsforholdet ( $\rho = 8,55 \cdot 10^{-2}$ ) og lav værdi for slankhedsforholdet ( $\lambda = 29$ ) ca. 15 % på den sikre side, se (søjle 2).



Figur 4.4-8 a. søjletværsnit for søjlerne 1, 2, 5 og 6, se tabel 4.4-2  
 b. søjletværsnit for søjlerne 3, 4, 7 og 8, se tabel 4.4-2

Nedenfor kommenteres 4 af de 8 søjler, for hvilke bæreevnen er angivet i i tabel 4.4-2. I kommentarerne vil de parametre, se tabel 4.4-2 og tabel 4.4-3, der benyttes ved vurderingen, blive forsynet med ekstra indeks 1 og 2, eftersom de benyttes i beregninger i henhold til henholdsvis DS 411 og metode 2. De 4 kommenterede søjler benævnes søjle 2, søjle 4, søjle 5 og søjle 8, se tabel 4.4-2 og 4.4-3.

De tre værdier for henholdsvis  $N_{Rcrd1}$  og  $N_{Rcrd2}$  svarer til værdierne bestemt af de 3 øverste linier i (4.4-23). Bæreevnen er markeret med en  $\blacktriangleright$ .

søjle 2:

Søjlen er karakteriseret ved en relativ høj betonstyrke,  $f_{ck} = 60 \text{ Mpa}$ , et stort armeringsforhold,  $\rho = 8,55 \cdot 10^{-2}$ , og et lille slankhedsforhold,  $\lambda = 29$ .

Af tabel 4.4-2 ses, at bæreevnebestemmelsen efter DS 411 er ca. 15 % på den sikre side. Det ses, at bæreevnerne  $N_{crd1}$  og  $N_{crd2}$  efter DS 411 og metode 2 bestemmes af henholdsvis linie 1 og 3 i bæreevneudtrykket (4.4-23).

tilnærmelse a:

Af tabel 4.4-3 ses, at inertiradierne  $i_1 = 86,6 \text{ mm}$  og  $i_2 = 84,8 \text{ mm}$  er af samme størrelsesorden. Da  $i_1$  kun er lidt større end  $i_2$ , betyder dette, at tilnærmelse a kun er lidt på den usikre side ved en bæreevnebestemmelse efter DS 411.

tilnærmelse b:

Den relativt korte søjle ( $l_y = 2,5 \text{ m}$ ,  $\lambda = 29$ ) har en relativ høj værdi for den kritiske spænding ( $\sigma_{crd} = \text{ca. } 31 \text{ Mpa}$ ). Af figur 4.4-7 og tabel 4.4-3 ses, at den til  $\sigma_{crd}$  svarende tøjning i beton og armering er væsentlig større ved anvendelse af metode 2 ( $\epsilon_{crd2} = 3,7 \cdot 10^{-3} > \epsilon_y = 2,75 \cdot 10^{-3}$ ) end ved anvendelse af DS 411 ( $\epsilon_{crd1} = 1,7 \cdot 10^{-3}$ ). Dette betyder relativt store armeringsspændinger efter metode 2, som dog ikke kan vælges større end  $f_{yd}$ . Armeringen giver et stort bidrag til bæreevnen  $N_{crd2}$  for denne søjle. Med begrænsningen i linie 2 og 3 i (4.4-23) kan disse armeringsspændinger dog ikke udnyttes, hvorfor  $N_{crd2} \approx 5.606 \text{ kN}$  kun bliver ca. 15 % større end  $N_{crd1} \approx 4.858 \text{ kN}$ .

Tilnærmelse a og b er henholdsvis på den usikre og den sikre side ved bæreevnebestemmelsen iht. DS 411 for søjle 2.

søjle 3:

Søjlen er karakteriseret ved en relativ høj betonstyrke,  $f_{ck} = 60 \text{ Mpa}$ , et lille armeringsforhold,  $\rho = 0,89 \cdot 10^{-2}$ , og et stort slankhedsforhold,  $\lambda = 150$ .

Af tabel 4.4-2 ses, at bæreevnebestemmelsen efter DS 411 er ca. 9 % på den sikre side, og at bæreevnerne  $N_{crd1}$  og  $N_{crd2}$  begge bestemmes af linie 1 i (4.4-23).

tilnærmelse a:

Af tabel 4.4-3 ses, at  $i_2 = 90,5 \text{ mm}$  er ca. 4,5 % større end  $i_1 = 86,6 \text{ mm}$ , hvilket betyder, at tilnærmelse a er på den sikre side ved en bæreevnebestemmelse efter DS 411.

tilnærmelse b

Den relativt høje søjle ( $l_y = 13,0 \text{ m}$ ,  $\lambda = 150$ ) har en relativ lav værdi for den kritiske spænding ( $\sigma_{crd} = \text{ca. } 7 \text{ Mpa}$ ). Af figur 4.4-7 og tabel 4.4-3 ses, at de til denne spænding svarende tøjninger  $\epsilon_{crd1} = 0,373 \cdot 10^{-3}$  og  $\epsilon_{crd2} = 0,427 \cdot 10^{-3}$  er af samme størrelsesorden. Dette betyder, at armeringens bidrag til bæreevnen  $\Delta N_{crd} = E_{sd} \epsilon_{crd} A_s$  kun er lidt på den sikre side ved bestemmelse af bæreevnen efter DS 411. Største parten af den ca. 9 % større bæreevne ved bestemmelse efter DS 411 skyldes tilnærmelse a.

Tilnærmelse a og b er begge på den sikre side ved bæreevnebestemmelsen iht. DS 411 for søjle 3.

Bæreevner for centralt belastede søjler med betontværsnit $b \times h = 300 \times 300$ mm									
1	betonstyrke $f_{ck} = 60$ MPa og $f_{cd} = 36,4$ MPa			betonstyrke $f_{ck} = 25$ MPa og $f_{cd} = 15,2$ MPa			armring 4 stk $\varnothing 16$ mm $q = 0,89 \cdot 10^{-2}$	$\lambda = 29$	$\lambda = 29$
	armring 8 stk $\varnothing 35$ mm $q = 8,55 \cdot 10^{-2}$	armring 4 stk $\varnothing 16$ mm $q = 0,89 \cdot 10^{-2}$	armring 8 stk $\varnothing 35$ mm $q = 8,55 \cdot 10^{-2}$						
2	$\lambda = 150$	søjle 1	søjle 2	søjle 3	søjle 4	søjle 5	søjle 6	søjle 7	søjle 8
3	$\lambda = 150$	søjle 1	søjle 2	søjle 3	søjle 4	søjle 5	søjle 6	søjle 7	søjle 8
4	$\lambda = 150$	søjle 1	søjle 2	søjle 3	søjle 4	søjle 5	søjle 6	søjle 7	søjle 8
5	$N_{Rcrd1} \leq$ i kN	▶ 1.052,9 3.866,9 1.221,8	▶ 4.857,9 6.074,5 5.637,1	▶ 657,1 951,0 1.221,8	▶ 3.031,6 3.158,7 5.637,1	1.141,8 3.673,2 ▶ 834,5	3.442,8 4.514,1 ▶ 2.516,2	▶ 492,9 757,4 834,5	▶ 1.486,3 1.598,3 2.516,2
6	$N_{Rcrd2} \leq$ i kN	▶ 1.106,9 3.856,0 1.200,0	16.253,0 6.058,9 ▶ 5.605,9	▶ 715,2 996,2 1.312,0	5.105,0 ▶ 3.289,2 5.898,2	914,0 3.665,5 ▶ 819,0	14.643,0 4.509,4 ▶ 2.506,7	▶ 515,0 793,8 907,2	3.849,6 ▶ 1.642,0 2.603,6
7	$N_{Rcrd2}/N_{Rcrd1}$	1,051	1,154	1,088	1,085	0,981	0,996	1,045	1,105
8	$\sigma_{erd1}$ $\sigma_{erd2}$ i MPa	6,8 6,6	31,3 31,1	6,8 7,3	31,3 32,8	4,6 4,6	14,0 13,9	4,6 5,1	14,0 14,5
9	$\epsilon_{erd1} \cdot 10^3$ $\epsilon_{erd2} \cdot 10^3$ $\sigma_{sd2}$ i MPa	0,373 0,385 59	1,70 3,70 $f_{yd} = 423$	0,373 0,427 66	1,70 4,44 $f_{yd} = 423$	0,610 0,354 54	1,80 2,50 385	0,61 0,40 62	1,80 3,06 $f_{yd} = 423$

Tabel 4.4-2 Regningsmæssige bæreevner for 8 centralt belastede søjler fremstillet af betonstyrker med  $f_{ck}$  lig henholdsvis 60 Mpa og 25 Mpa og forskellige værdier for armeringsforhold  $q$  og slankhedsforhold  $\lambda$ . De 3 værdier for henholdsvis  $N_{Rcrd1}$  og  $N_{Rcrd2}$  svarer til værdierne bestemt af de 3 øverste linier i (4.4-23).

række 5 angiver den regningsmæssige søjlebæreevne  $N_{crd1}$  beregnet i henhold til DS 411. Bæreevnen er markeret med en ▶

række 6 angiver den regningsmæssige søjlebæreevne beregnet af  $N_{crd2} = \pi^2 E_{crd} I_{trd} / l_s^2$ , hvor  $E_{crd}$  bestemmes af betonens arbejdslinie givet ved

$\sigma_{cd} = f_{cd} (2 \epsilon_c / \epsilon_{c1} - (\epsilon_c / \epsilon_{c1})^2)$  og  $I_{trd}$  er inertimomentet for det transformerede tværsnit. Bæreevnen er markeret med en ▶

række 7 angiver forholdet  $N_{crd2} / N_{crd1}$ . For  $N_{crd2} / N_{crd1} > 1,0$  er det på den sikre side at anvende de i DS 411 angivne regler til bestemmelse af en centralt belasted søjles bæreevne

række 8 angiver de regningsmæssige kritiske betonspændinger  $\sigma_{erd1}$  svarende til arbejdslinierne ② og ④ samt  $\sigma_{erd2}$  svarende til ① og ③ i figur 4.4-6

række 9 angiver tøjningerne  $\epsilon_{erd1}$  og  $\epsilon_{erd2}$  svarende til spændingerne  $\sigma_{erd1}$  og  $\sigma_{erd2}$  samt armeringsspændingen  $\sigma_{sd2}$

søjle 5:

Søjlen er karakteriseret ved en relativ lav betonstyrke,  $f_{ck} = 25$  MPa, et stort armeringsforhold,  $\rho = 8,55 \cdot 10^{-2}$ , og et stort slankhedsforhold,  $\lambda = 150$ .

Af tabel 4.4-2 ses, at bæreevnebestemmelsen efter DS 411 er ca. 2 % på den usikre side, og at bæreevnerne  $N_{crd1}$  og  $N_{crd2}$  begge bestemmes af linie 3 i (4.4-23)

tilnærmelse a:

Af tabel 4.4-3 ses, at  $i_1 = 86,6$  mm og  $i_2 = 85,4$  mm er af samme størrelsesorden. Tilnærmelse a er kun lidt på den usikre side ved en bæreevnebestemmelse efter DS 411.

tilnærmelse b:

Den relativt høje søjle ( $l_s = 13,0$  m,  $\lambda = 150$ ) har en relativ lav værdi for den kritiske spænding ( $\sigma_{crd} = 4,6$  MPa).

Af figur 4.4-7 og tabel 4.4-3 ses, at de til denne spænding svarende tøjninger er henholdsvis  $\epsilon_{crd1} = 0,61 \cdot 10^{-3}$  og  $\epsilon_{crd2} = 0,35 \cdot 10^{-3}$ . Armeringens bidrag til bæreevnen bliver henholdsvis

$\Delta N_{crd1} = 1,54 \cdot 10^5 \cdot 0,61 \cdot 10^{-3} \cdot 7697 \cdot 10^{-3} = 723$  kN, ca. 63 % af værdien i linie 1 i (4.4-23), og

$\Delta N_{crd2} = 1,54 \cdot 10^5 \cdot 0,35 \cdot 10^{-3} \cdot 7697 \cdot 10^{-3} = 415$  kN, ca. 45 % af værdien i linie 1 i (4.4-23)

Dvs. tilnærmelse b er en del på den usikre side ved bestemmelse af bæreevnen efter DS 411, men begrænsningen i linie 3 i (4.4-23) betyder, at bæreevnen kun bliver ca. 2% på den usikre side.

Tilnærmelse a og b er begge på den usikre side ved bæreevnebestemmelsen iht. DS 411 for søjle 5.

søjle 8:

Søjlen er karakteriseret ved en relativ lav betonstyrke,  $f_{ck} = 25$  MPa, et lille armeringsforhold,  $\rho = 0,89 \cdot 10^{-2}$ , og et lille slankhedsforhold,  $\lambda = 29$ .

Af tabel 4.4-2 ses, at bæreevnebestemmelsen efter DS 411 er 10,5 % på den sikre side, og at bæreevnerne  $N_{crd1}$  og  $N_{crd2}$  bestemmes af henholdsvis linie 1 og linie 2 i (4.4-23).

tilnærmelse a:

Af tabel 4.4-3 ses, at  $i_2 = 114,2$  mm er ca. 32 % større end  $i_1 = 86,6$  mm, hvilket betyder, at tilnærmelse a er en del på den sikre side ved en bæreevnebestemmelse efter DS 411.

tilnærmelse b

Den relativt korte søjle ( $l_s = 2,5$  m,  $\lambda = 29$ ) har en relativ høj værdi for den kritiske spænding

( $\sigma_{crd} =$  ca. 14 MPa). Af figur 4.4-7 og tabel 4.4-3 ses, at de til denne spænding svarende tøjninger er henholdsvis  $\epsilon_{crd1} = 3,1 \cdot 10^{-3} > \epsilon_y = 2,75 \cdot 10^{-3}$  og  $\epsilon_{crd2} = 2,75 \cdot 10^{-3} = \epsilon_y$ .

Tilnærmelse b er derfor en del på den sikre side, men da begrænsningen i linie 2 i (4.4-23) bevirker, at  $\sigma_{sd} = f_{yd} = 423$  MPa, bliver bæreevnebestemmelsen iht. DS 411 for søjle 8 alt i alt kun 10,5 % på den sikre side, selv om både tilnærmelse a og b er på den sikre side.

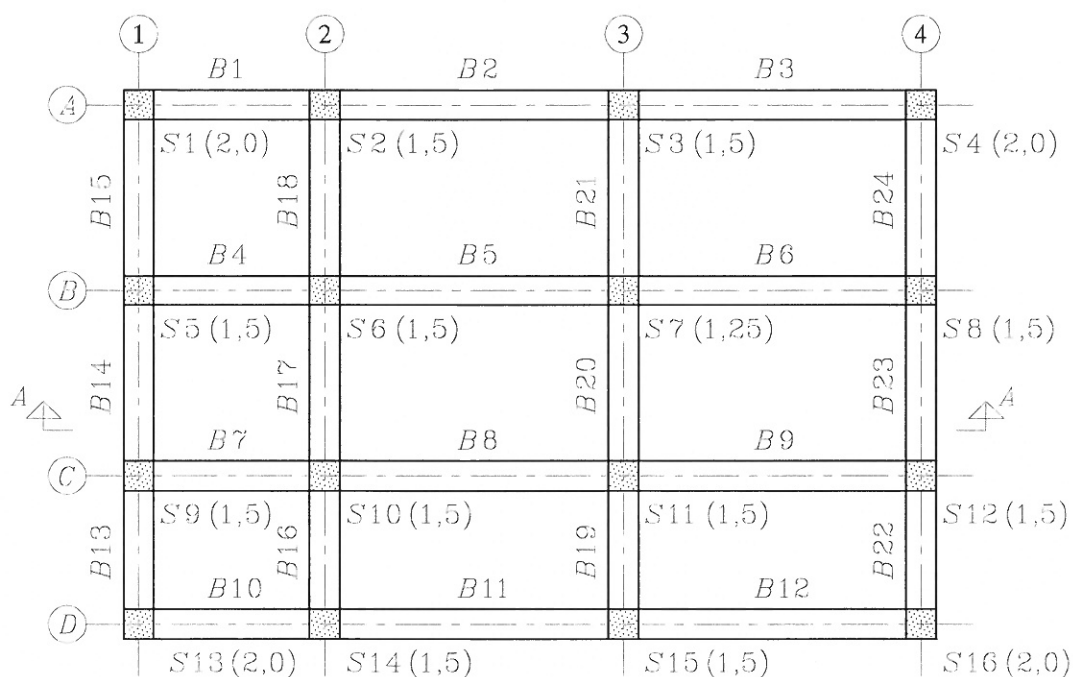
I den ovenfor omtalte undersøgelse er der betragtet yderværdier for betonstyrker ( $f_{ck} = 60$  MPa og  $f_{ck} = 25$  MPa), armeringsforhold ( $\rho = 8,55 \cdot 10^{-3}$  og  $\rho = 0,89 \cdot 10^{-3}$ ) samt slankhedsforhold ( $\lambda = 150$  og  $\lambda = 29$ ). Det ses, at bæreevnebestemmelsen efter de 2 metoder giver rimeligt overensstemmende værdier, der normalt er på den sikre side ved en bæreevnebestemmelse efter DS 411. Dette gælder for 6 af de undersøgte søjler med en maksimal forskel på ca. 15 %. I to tilfælde, nemlig for søjlerne 5 og 6 er bestemmelsen efter DS 411 på den usikre side, men, som det fremgår af tabel 4.4-2, kun ca. 2 % i værste tilfælde (søjle 5).

	$\sigma_{\text{crd1}}$	$\epsilon_{\text{crd1}} \cdot 10^3$	$E_{\text{ocrd1}} \cdot 10^{-4}$	$\alpha_1$	$i_1$
	$\sigma_{\text{crd2}}$	$\epsilon_{\text{crd2}} \cdot 10^3$	$E_{\text{ocrd2}} \cdot 10^{-4}$	$\alpha_2$	$i_2$
	MPa		MPa		mm
<u>søjle 1:</u> $f_{\text{ck}}=60$ MPa $q = 8,55 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 150$	6,8	0,373	1,818	8,5	86,6
	6,6	0,385	1,557	9,9	85,6
<u>søjle 2:</u> $f_{\text{ck}}=60$ MPa $q = 8,55 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 29$	31,3	1,70	1,818	8,5	86,6
	31,1	3,70	0,274	56,1	84,8
<u>søjle 3:</u> $f_{\text{ck}}=60$ MPa $q = 0,89 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 150$	6,8	0,373	1,818	8,5	86,6
	7,3	0,427	1,523	10,1	90,5
<u>søjle 4:</u> $f_{\text{ck}}=60$ MPa $q = 0,89 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 29$	31,3	1,70	1,818	8,5	86,6
	32,8	4,44	0,188	81,8	105,1
<u>søjle 5:</u> $f_{\text{ck}}=25$ MPa $q = 8,55 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 150$	4,6	0,61	0,758	20,3	86,6
	4,6	0,35	1,068	14,4	85,4
<u>søjle 6:</u> $f_{\text{ck}}=25$ MPa $q = 8,55 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 29$	14,0	1,80	0,758	20,3	86,6
	13,9	2,50	1,231	124,9	84,6
<u>søjle 7:</u> $f_{\text{ck}}=25$ MPa $q = 0,89 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 150$	4,6	0,612	0,758	20,3	86,6
	5,1	0,404	1,016	15,1	92,2
<u>søjle 8:</u> $f_{\text{ck}}=25$ MPa $q = 0,89 \cdot 10^{-2}$ $\lambda = 29$	14,0	1,8	0,758	20,3	86,6
	14,6	3,1	0,070	219,1	114,2

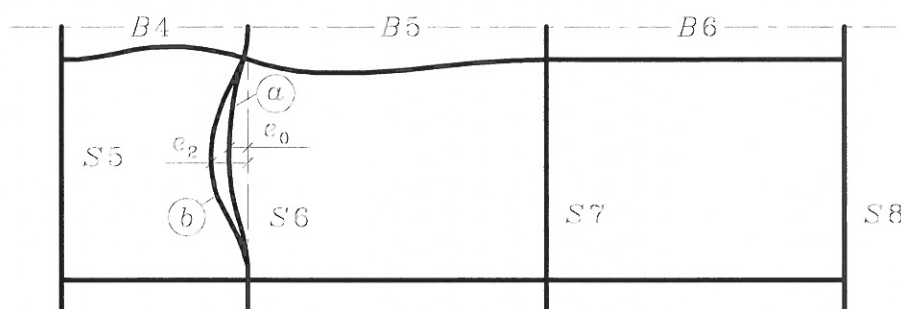
Tabel 4.4-3 Kritiske spændinger  $\sigma_{\text{crd1}}$ ,  $\sigma_{\text{crd2}}$  med tilhørende tøjninger  $\epsilon_{\text{crd1}}$ ,  $\epsilon_{\text{crd2}}$  og elasticitetskoefficienter  $E_{\text{ocrd1}}$ ,  $E_{\text{ocrd2}}$  samt  $\alpha$ - og  $i$ -værdier for de centralt belastede søjler, *søjle 1* til *søjle 8*.  
Øverste og nederste værdi i en række angiver parametrene med henholdsvis indeks 1 og 2

### Alternativ beregning af armerede søjler.

I en husbygningskonstruktion, hvor bjælker og søjler eller plader og søjler er støbt sammen, vil det ofte være meget kompliceret at bestemme snitkraftfordelingen i bjælker, plader og søjler, idet bjælker og søjler eller plader og søjler her vil være momentstift forbundet til hinanden. Søjlerne er i sådanne tilfælde påvirket af både normalkraft, forskydningskraft og moment.



a. Plan af etageadskillelse



b. snit A-A. Søjler og bjælker er vist ved deres systemlinjer.  $\textcircled{a}$  og  $\textcircled{b}$  viser den deformerede søjle S6 henholdsvis uden og med søjlevirkning.

Figur 4.4-9 Etageplan og snit i en in situ støbt husbygningskonstruktion

DS 411 anviser i afsnit 6.2.5.3 i en vejledningstekst en metode, hvorefter ovennævnte søjler kan

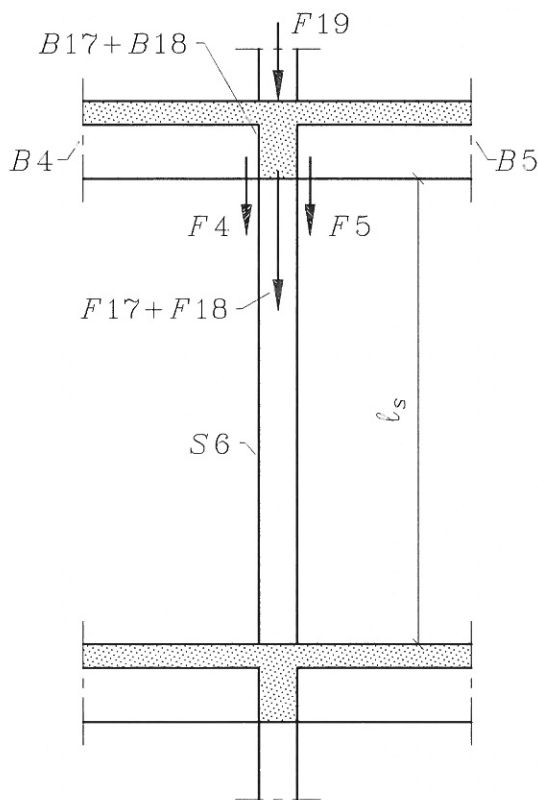
4.4-18

dimensioneres som centralt belastede søjler, når en række forudsætninger er opfyldt. Inden denne metode med tilhørende forudsætninger omtales nøjere, skal der foretages en kvalitativ betragtning af problemets omfang.

I figur 4.4-9 er vist en plan af den betragtede dækkonstruktion bestående af plader og bjælker understøttet på søjler, der er anbragt i bjælkernes krydsningspunkter. Dækket tænkes belastet af en permanent last  $g$  og en nyttelast  $q$ , der regnes som en fri last.

I figur 4.4-9 er ligeledes vist et snit A-A indeholdende 2 etageadskillelser i den betragtede bygningskonstruktion. Konstruktionens deformationer er vist overdrevet for bjælkerne B4 og B5 samt søjlen S6. For søjle S6's vedkommende er deformationerne vist både med og uden søjlevirkning. I snit A-A er kun systemlinierne for søjler og bjælker vist.

Søjlen S6 i skæringspunktet mellem modullinierne 2 og B er vist i figur 4.4-10. De viste kræfter  $F_4$ ,  $F_5$ ,  $F_{17}$  og  $F_{18}$  er reaktionerne fra bjælkerne B4, B5, B17 og B18 i dækket lige over søjlen, medens kraften  $F_{19}$  er normalkraften i søjlen over den betragtede søjle S6.  $F_{19}$  stammer fra lasten på højere beliggende etageadskillelser.



Figur 4.4-10 Søjle S6 med de regningsmæssige belastninger (reaktioner)  $F_4$ ,  $F_5$ ,  $F_{17}$  og  $F_{18}$  fra bjælkerne B4, B5, B17, og B18 i det umiddelbart over søjlen beliggende etagedæk samt  $F_{19}$ , der er den regningsmæssige normalkraft i søjlen over  $F_{19}$ .  $F_4$ ,  $F_5$ ,  $F_{17}$  og  $F_{18}$  multipliceres med faktorerne angivet i figur 4.4-9. For S6 er faktoren 1,5.

Af deformationsfiguren i figur 4.4-9 fremgår det, at søjlen S6 vil blive momentpåvirket pga. forskellige længder og stivheder for bjælkerne B4 og B5 på hver side af søjlen. Søjlen vil få en udbøjning  $e_0$  alene fra omtalte momentpåvirkning, se udbøjningsfigur a i figur 4.4-9. Denne udbøjning vil øges pga. normalkraften (søjlevirkningen) til den resulterende udbøjning  $e_2$ , se udbøjning b i figur 4.4-9.

Som tidligere nævnt vil en korrekt bestemmelse af momentfordelingen i søjlerne kræve en temmelig kompliceret beregning. I stedet for denne komplicerede beregning angiver DS 411 i afsnit 6.2.5.3 i en vejledningstekst en metode, hvorefter søjlen kan dimensioneres som centralt belastet med den frie søjlelængde  $l_s$ , der måles som vist i figur 4.4-10. Denne beregning kræver, at nedenstående 4 forudsætninger er opfyldes.

1. Konstruktionen skal have en fast knudepunktsfigur. Fast knudepunktsfigur betyder, at punkterne i etagedækkene, hvor søjlernes systemlinier skærer etagepladens midterplan, ikke flytter sig, når konstruktionen påvirkes af vandret eller lodret last eller af kombinationer af vandret og lodret last. Dette kan regnes at være tilfældet, hvis etagedækkene er fastholdt mod vandret flytning af stabiliserende vægge. De stabiliserende vægge er ikke vist i figur 4.4-9.
2. Søjler er armeret og sammenstøbt med bjælker og plader i de tilstødende etagedæk.
3. Søjlelængdens slankhedsforhold  $\lambda$  skal være mindre end 90, dvs.  $\lambda = l_s/i = l_s(A_c/I_c)^{0,5} < 90$   
 hvor  $A_c$  er betontværsnittets areal uden hensyntagen til armeringen  
 $I_c$  er betontværsnittets inertimoment uden hensyntagen til armeringen  
 $i = (I_c/A_c)^{0,5}$  er betontværsnittets inertiradius  
 $l_s$  er den fri søjlelængde, der måles som vist i figur 4.4-10
4. Ved beregning af søjlens regningsmæssige normalkraft  $N_{sd}$  skal den last hidrørende fra den regningsmæssige last ( $g_d + q_d$ ), der kommer fra etagedækket umiddelbart over den betragtede søjle, multipliceres med én af faktorerne 1,25, 1,5 eller 2,0 afhængig af søjlens placering i byggeriets plan, se figur 4.4-9. For søjle S6 skal faktoren 1,5 anvendes, og den regningsmæssige normalkraft, der skal benyttes, når søjlen dimensioneres som en centralt belastet søjle bestemmes som  $N_{sd} = 1,5(F4+F5+F17+F18) + F19$  hvor F4, F5, F17 og F18 er de regningsmæssige reaktioner fra bjælkerne B4, B5, B17 og B18. F19 er den regningsmæssige normalkraft i søjlen over S6. Egenvægten af søjle S6 kan medregnes i F19.  
 Faktoren 1,25, 1,5 eller 2,0, der skal anvendes ved de enkelte søjler, fremgår af figur 4.4-9, hvor faktoren er angivet i en parentes efter søjlenummeret.

### *Hensyntagen til excentriciteter*

Ved fastlæggelse af excentriciteter skal der tages hensyn til udførelsesunøjagtigheder, blandt andet ved angivelse af tolerancer.

En søjle kan iht. DS 411 regnes centralt påvirket, hvis normalkraftens excentricitet under hensyntagen til tolerancer mm. højst er  $1/5$  af betontværsnittets mindste kerneradius  $k_c = W_{c,\min}/A_c$ .

### Minimumslængdearmering for armerede søjler

DS 411 stiller det minimumskrav til søjlens længdearmering, at armerede søjler, der kan regnes som centralt belastede søjler, skal forsynes med en længdearmering, der uanset armerings kvalitet mindst udgør 0,75% af det nødvendige betontværsnit, dvs.

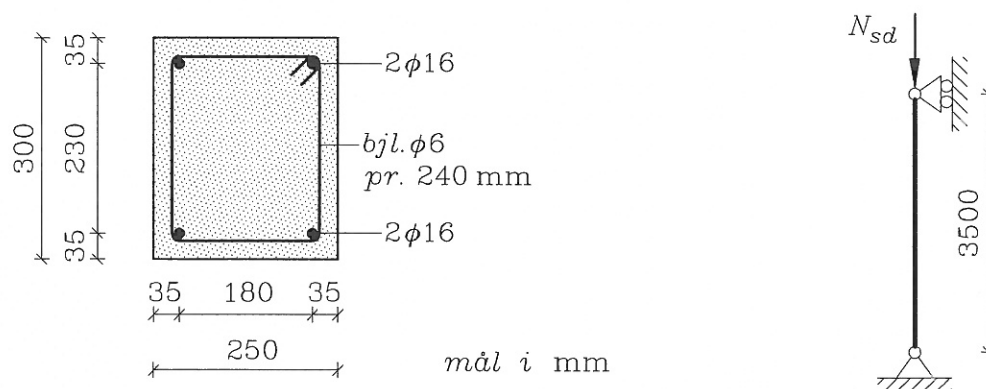
$$A_{sc,\min} = 0,75 \cdot 10^{-2} \frac{N_{sd}}{\sigma_{crd}} \quad (4.4-28)$$

Anvendes en længdearmering, der er mindre end minimumsarmeringen  $A_{sc,\min}$ , skal søjlen betragtes som uarmeret, og den for uarmeret beton gældende partialkoefficient skal anvendes.

### Bøjlearmering.

I henhold til DS 411 skal trykarmering, der medtages ved beregning af søjlens bæreevne, fastholdes mod udbøjning af bøjler, hvis afstand ikke må overstige  $15 \varnothing$  eller 350 mm. Denne bøjlearmering skal have en karakteristisk flydekraft på mindst 4 kN, når der anvendes trykarmering med  $\varnothing \leq 12$  mm og mindst 8 kN, når  $\varnothing > 12$  mm. Længdearmeringen kan ikke regnes fastholdt mod udbøjning, hvis længdearmeringen er fastgjort til bøjlen på dennes retlinede dellængder.

#### Eksempel 4.4-1



Figur 4.4-11 Søjletværsnit og opstalt.

En armeret betonsøjle har det i figur 4.4-11 viste tværsnit. Søjlelængden er  $l_s = 3,5$  m. Søjlen udføres i normal kontrolklasse, i normal sikkerhedsklasse og i passiv miljøklasse af en beton med den karakteristiske trykstyrke  $f_{ck} = 30$  MPa

Søjlen armeres med ribbestål med en karakteristisk træk- og trykstyrke på  $f_{yk} = 550$  MPa. Længdearmeringen består af 4 stk  $\phi 16$ , og bøjlearmeringen er  $\phi 6$  pr. 240 mm. Længdearmeringen stødes ved søjlens understøtninger.

På grund af udførelsesunøjagtigheder skal der regnes med, at normalkraften kan virke med en excentricitet på  $e_1 = 5$  mm.

Den regningsmæssige bæreevne ønskes bestemt for den ovenfor beskrevne armerede betonsøjle.

*Materialeparametre:*

$$\begin{aligned} f_{ck} &= 30 \text{ MPa} & f_{cd} &= 30/1,65 = 18,2 \text{ MPa} \\ f_{yk} &= 550 \text{ MPa} & f_{yd} &= 550/1,3 = 423 \text{ MPa} & E_{sd} &= 2 \cdot 10^5 / 1,3 = 1,54 \cdot 10^5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

*Tværsnitskonstanter:*

$$\begin{aligned} A_c &= 250 \cdot 300 = 75 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 & W_{c,\min} &= 1/6 \cdot 300 \cdot 250^2 = 3,13 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \\ I_{c,\min} &= 1/12 \cdot 300 \cdot 250^3 = 390,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 & A_{sc} &= 4 \cdot 201 = 804 \text{ mm}^2 \\ i &= (I_c/A_c)^{0,5} = (390,6 \cdot 10^6 / 75 \cdot 10^3)^{0,5} = 72,2 \text{ mm} & \lambda &= l_s / i = 3500/72,2 = 48,5 \end{aligned}$$

mindste kærneradius bestemmes af  $k_c = W_c / A_c = 3,13 \cdot 10^6 / 75 \cdot 10^3 = 41,7$  mm

Da excentriciteten  $e_1 = 5$  mm er mindre end  $0,2 k_c = 0,2 \cdot 41,7 = 8,3$  mm, kan søjlen regnes som centralt belastet.

Den regningsmæssige kritiske betonspænding bestemmes af (4.4-14). Idet faktoren til  $\lambda^2$  tages fra tabel 4.4-1 fås

$$\sigma_{crd} = \frac{18,2}{1 + 1,1 \cdot 10^{-4} \cdot 48,5^2} = \frac{18,2}{1 + 0,259} = 14,5 \text{ MPa} \quad (4.4-29)$$

Armeringsforholdet  $\rho$  bestemmes af (4.4-21) og  $\alpha$  findes i tabel 4.4-1, dvs

$$\rho = 804 / 75 \cdot 10^3 = 10,72 \cdot 10^{-3} \quad \text{og} \quad \alpha = 17$$

Herefter kan søjlens regningsmæssige bæreevne  $N_{Rcd}$  iht (4.4-23) bestemmes som den mindste af de nedenfor beregnede værdier

$$N_{Rcd} \leq \begin{cases} 14,5 \cdot 75 \cdot 10^3 (1 + 17 \cdot 10,72 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-3} & = 1286 \text{ kN} \\ (14,5 \cdot 75 \cdot 10^3 + 423 \cdot 804) \cdot 10^{-3} & = 1428 \text{ kN} \\ 2 \cdot 14,5 \cdot 75 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} & = 2175 \text{ kN} \end{cases} \quad (4.4-30)$$

Det ses, at søjlens regningsmæssige bæreevne er  $N_{Rcd} = 1286$  kN.

Regnes søjlen fuldt udnyttet, dvs  $N_{Sd} = N_{Rcd}$ , er kravet til minimumsarmering ifølge (4.4-28)

$$A_{sc,\min} = 0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 1286 \cdot 10^3 / 14,5 = 665 \text{ mm}^2$$

#### 4.4-22

Da  $A_{sc} = 804 \text{ mm}^2 > A_{sc,min} = 665 \text{ mm}^2$  er kravet til søjlens minimumsarmering opfyldt.

Søjlens bøjler placeres med afstanden  $s = 15 d = 15 \cdot 16 = 240 \text{ mm}$ .

### 4.4.3 Excentrisk belastede søjler

En excentrisk belastet søjle, som i det følgende vil blive benævnt som en bjælkesøjle, er en søjle, der bliver påvirket af en normalkraft  $N$  og et moment sammensat af momentet  $M_0$  hidrørende fra en ydre belastning og et tillægsmoment  $\Delta M = N e_2$ , hvor  $e_2$  er søjlens resulterende udbøjning. Momentpåvirkningen  $M_0$  kan hidrøre fra en excentrisk virkende normalkraft, en tværlast eller fra en kombination af disse lastformer. Se eksempler herpå i figur 4.4-1 og 4.4-15. Bjælkesøjlen vil således blive belastet af en normalkraft  $N$  og et resulterende moment  $M$  givet ved

$$M = M_0 + N e_2 \quad (4.4-31)$$

Når det resulterende moment i bjælkesøjlen er bestemt, eftervises søjlens bæreevne ved at eftervise, at søjletværsnittets brudmoment  $M_{u,N}$  svarende til søjlens normalkraft  $N$  er større end søjlens resulterende snitmoment  $M = M_0 + N e_2$ . Der skal igen gøres opmærksom på, at normalkræfter, spændinger og tøjninger i afsnittet om søjlekonstruktioner regnes positive som tryk og forkortelse. Når der i det følgende henvises til formler i bogens øvrige kapitler og afsnit, skal der derfor i formlernes fortegn tages hensyn til denne fortegneregning, da kræfter, spændinger og tøjninger i bogens øvrige afsnit regnes positive som træk og forlængelse.

I modsætning til en centralt belastet søjle, der kun kan være i ligevægt i en udbøjet deformationstilstand, når den netop påvirkes af den kritiske last, vil der for en bjælkesøjle for et givet lasttilfælde altid forekomme en dertil svarende deformationstilstand. Hvis lasten øges vil udbøjningen tilsvarende øges.

På grund af de ikke-lineære arbejdslinier for beton og armering er det meget kompliceret at foretage en korrekt bestemmelse af den resulterende udbøjning  $e_2$  og dermed det resulterende moment  $M = M_0 + N e_2$ . Der vil derfor i det følgende blive opstillet en række tilnærmelsesmetoder til bestemmelse af bæreevnen for bjælkesøjler.

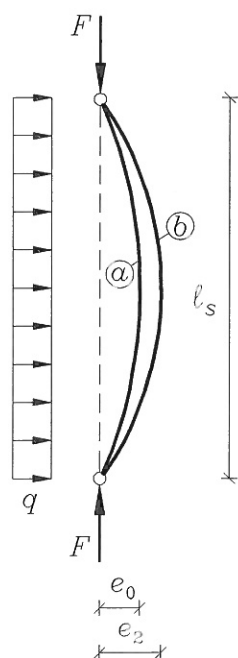
Inden disse tilnærmelsesmetoder opstilles, vil der nedenfor blive foretaget nogle kvalitative betragtninger over bjælkesøjlers virkemåde.

I figur 4.4-12 er vist en simpelt understøttet bjælkesøjle med spændvidden  $l_s$ , der er påvirket af tværlasten  $q$  virkende i søjlens symmetriplan og normalkraften  $N = F$  virkende i søjlens tyngdepunktslinie.

Det dimensionsgivende moment  $M$  bestemmes af (4.4-31), idet  $M_0$  og  $e_2$  her betyder henholdsvis momentet fra tværlasten  $q$  og den resulterende udbøjning ved bjælkesøjls midte.  $e_2$  vil teoretisk kunne beregnes som angivet nedenfor:

- a1. Med kendskab til betonens og armeringens krumme arbejdslinier kan søjletværsnittets bøjningsarbejdslinie svarende til normalkraften  $N = F$  bestemmes. Vedr. bøjningsarbejdslinien henvises til afsnit 4.1.2, hvor bøjningsarbejdslinien svarende til  $N = 0$  er omtalt.
- b1. Skønnes bjælkesøjlels udbøjningslinie fx parabelformet med største udbøjning  $e_2$ , kan momentforløbet i bjælkesøjlen bestemmes.
- c1. Med kendskab til momentforløbet i bjælkesøjlen og søjletværsnittets bøjningsarbejdslinie kan krumningsforløbet i bjælkesøjlen bestemmes.
- d1. Med kendskab til krumningsforløbet i bjælkesøjlen kan søjlens udbøjning bestemmes ved brug af arbejdsligningen eller differentiaalligninger.
- e1. Hvis den beregnede udbøjning ikke stemmer overens med den skønnede udbøjning foretages et nyt skøn, og ovenstående beregningsforløb gentages, indtil der er overensstemmelse mellem den skønnede og den beregnede værdi af udbøjningen.

Denne fremgangsmåde vil være meget tidskrævende med mindre beregningerne udføres ved brug af computer.



Figur 4.4-12 Bjælkesøjle med tværlasten  $q$  og en centralt virkende aksiallast  $F$

Antages den resulterende maksimale krumning  $\kappa_{\max}$  ved bjælkesøjlels midte bestemt, kan den maksimale udbøjning  $e_2$  iht. (5.3-20) bestemmes som

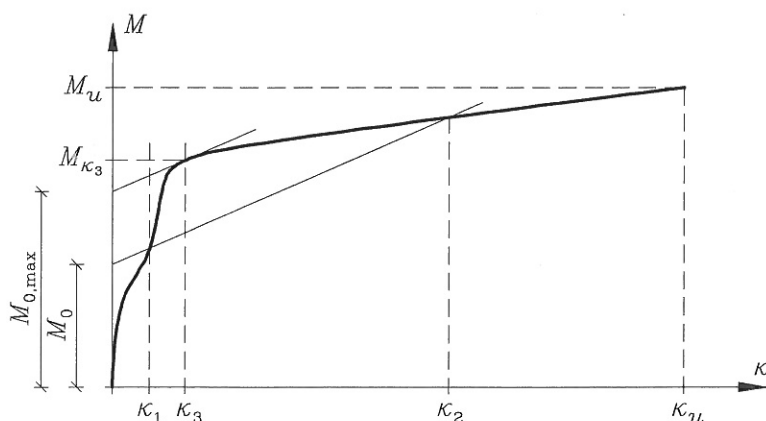
$$e_2 = \frac{1}{k} \kappa_{\max} l_s^2 \quad (4.4-32)$$

hvor divisoren  $k$  for 4 forløb af krumningen  $\kappa$  er vist i figur 5.3-3. Det resulterende dimensionsgivende moment i søjlen kan derfor bestemmes som

$$M_{\max} = M_0 + N e_2 = M_0 + N \frac{1}{k} \kappa_{\max} l_s^2 \quad (4.4-33)$$

Kendes søjletværsnittes bøjningsarbejdslinie samt værdien af  $k$  for en given bjælkesøjle og en given lastkombination, kan bestemmelsen af mulige værdier for den maksimale krumning  $\kappa_{\max}$  og den maksimale udbøjning  $e_2$  foretages grafisk, som forklaret nedenfor.

Figur 4.4-13 viser bøjningsarbejdslinie for tværsnittet i den betragtede bjælkesøjle. Idet  $k$  i (4.4-33) med god tilnærmelse kan regnes konstant, vil (4.4-33), indtegnet i  $\kappa, M$ -koordinatsystemet vist i figur 4.4-13, fremstille en ret linie. Denne rette linie vil for vilkårlige værdier af  $M_0 < M_{0,\max}$  skære bøjningsarbejdslinien i to punkter  $(\kappa_1, M)$  og  $(\kappa_2, M)$ . Disse to skæringspunkter angiver værdier for krumningen  $\kappa$  og dermed  $e_2$  samt  $M$ , for hvilke den betragtede bjælkesøjle vil være i en deformeret ligevægtstilstand. Det bemærkes, at der for  $M_0 < M_{0,\max}$  er to ligevægtstilstande med  $e_{2,2}$  svarende til  $\kappa_2$  større end  $e_{2,1}$  svarende til  $\kappa_1$ .

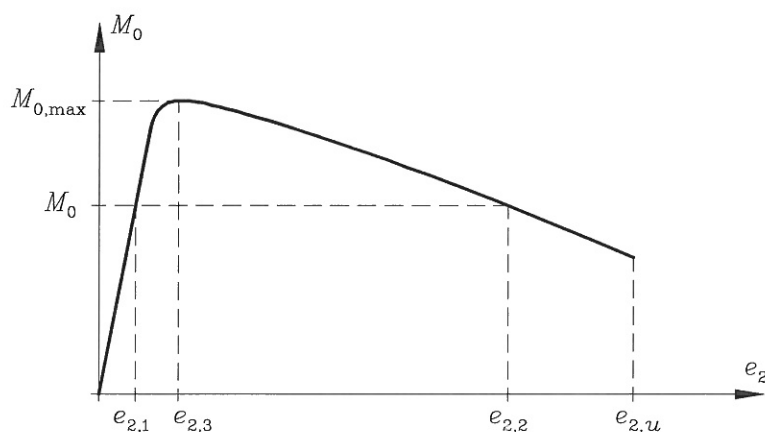


Figur 4.4-13 Bøjningsarbejdslinien svarende til  $N = F$  for et tværsnit i en bjælkesøjle.

Tænker man sig nu, at  $M_0$  forøges, vil momentforøgelsen  $\Delta M = N e_2$  hidrørende fra normal-kraftens bidrag også forøges. Da formen for momentetkurven og dermed krumningskurven over søjlelængden svarende til den ydre belastning er lidt forskellig fra formen for moment- og krumningskurven hidrørende fra udbøjningstillægget, vil divisoren  $k$  ændre sig lidt, men som nævnt ovenfor, vil det være en god tilnærmelse at regne  $k$  konstant. Dette betyder, at hvis  $M_0$  forøges, vil den hertil svarende afbildning af (4.4-33) være en ret linie parallel med linien gennem  $(\kappa_1, M)$  og  $(\kappa_2, M)$ . Af figur 4.4-13 ses det, at  $M_0$  kan forøges indtil den rette linie tangerer bøjningsarbejdslinien i punktet  $(\kappa_3, M_{\kappa_3})$ . Det ses, at det til  $M_{\kappa_3}$  svarende initialmoment  $M_{0,\max}$  er den største værdi, som momentet  $M_0$  fra den ydre last kan antage. Værdier for  $M_0$  større end

$M_{0,\max}$  vil ifølge (4.4-33) og figur 4.4-13 give værdier for det resulterende moment  $M_{\max}$ , der falder uden for bjælkesøjles bøjningsarbejdslinie, hvilket er ensbetydende med brud i bjælkesøjlen.

Beregnes den maksimale udbøjning  $e_2$  svarende til krumningsværdierne for skæringspunkterne mellem den rette linie givet ved (4.4-33) og bøjningsarbejdslinien vist i figur 4.4-13 for forskellige værdier af  $M_0$ , kan relationen mellem  $M_0$  og den resulterende udbøjning  $e_2$  optegnes i en graf. Denne graf er vist i figur 4.4-14, hvor indekset efter kommaet for  $e_2$  refererer til indekset for  $\kappa$  i figur 4.4-13. Af figur 4.4-14 ses, at hvis  $M_0$ -momentet er voksende, og belastningen er af en sådan art, at  $M_0$ -momentet ikke aftager med voksende deformation, efter at  $M_{0,\max}$  er nået, så vil søjlen ikke kunne være i en deformeret ligevægtstilstand for værdier af  $e_2$ , der er større end  $e_{2,3}$  svarende til toppunktet på kurven vist i figur 4.4-14. Ligevægtstilstanden svarende til den nedadgående gren på kurven i figur 4.4-14 er instabil. Hvis søjlen i ligevægtstilstanden ( $e_{2,2}$ ,  $M_0$ ) påføres en lille formindskelse af udbøjningen, vil søjlen gå tilbage til ligevægtstilstanden ( $e_{2,1}$ ,  $M_0$ ). Påføres søjlen en lille forøgelse af udbøjningen vil der forekomme et stabilitetsbrud i søjlen.

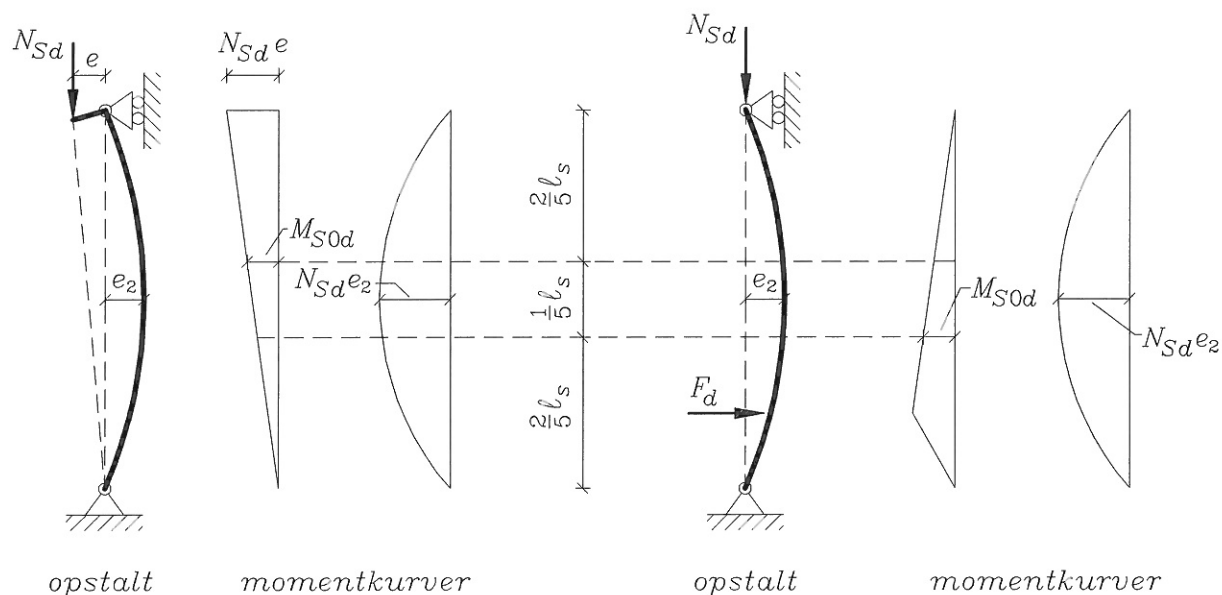


Figur 4.4-14 Relation mellem momentet  $M_0$  hidrørende fra den ydre belastning og den resulterende udbøjning  $e_2$  ved søjlemidten. Indekset efter kommaet ved  $e_2$  refererer til indekset ved  $\kappa$  i figur 4.4-13

Af foranstående kvalitative betragtninger fremgår det, at momentet  $M_0$  hidrørende fra den ydre belastning for voksende værdier af  $\kappa$  i praksis ikke kan antage en større værdi end  $M_{0,\max}$ , der svarer til, at den rette linie givet ved (4.4-33) tangerer punktet  $(\kappa_3, M)$  på bøjningsarbejdslinien vist i figur 4.4-13. Der kan teoretisk set godt forekomme en ligevægtstilstand for en værdi af krumningen  $\kappa$  og dermed udbøjningen  $e_2$ , der er større end  $\kappa_3$ , men det kræver, som det ses af figur 4.4-13, at  $M_0$  så skal formindskes og antage en værdi, der er mindre end  $M_{0,\max}$ . En sådan ligevægtstilstand er ikke praktisk anvendelig, hvorfor værdier for krumningen  $\kappa \geq \kappa_3$ , kun har teoretisk interesse.

Man kan derfor af ovenstående konkludere, at en bjælkesøjles bæreevne kan være udtømt, før søjletværnsnittets brudmoment er nået. Dette fremgår af figur 4.4-13, idet der vil kunne opstå

brud i søjlen for et resulterende moment lidt større end  $M = M_{\kappa_3} < M_u$  og en resulterende krumning  $\kappa = \kappa_3 < \kappa_u$  hvis søjlen er påvirket af normalkraften  $N = F$  og et initialmoment lidt større end  $M_{0,\max}$  hidrørende fra den ydre belastning.



a. bjælkesøjle med excentrisk virkende normalkraft ved øverste understøtning

b. bjælkesøjle påvirket af en vandret tværkraft  $F_d$

Figur 4.4-15 Bjælkesøjler påvirket af henholdsvis excentrisk normalkraft  $N_{Sd}$  og vandret tværkraft  $F_d$

Ovenstående kvalitativt beskrevne beregningsmetode kan ikke benyttes i praksis sammen med de for centralt belastede søjler beskrevne beregningsmetoder, fordi det af en acceptabel beregningsmetode må kræves, at der skal være overensstemmelse i grænseovergangen mellem en centralt belastet søjle og en bjælkesøjle. Da den ovenfor beskrevne beregningsmetode for bjælkesøjler anvender de "korrekte" krumme arbejdslinier for beton og armering, medens de foran beskrevne beregningsmetoder for centralt belastede søjler er baseret på værdier for elasticitetskoefficienter, der er fastlagt som nedre værdier på baggrund af forsøg, kan de to metoder ikke give samme bæreevner i grænsetilfældet  $M_0 = 0$ .

I det følgende skal der beskrives en række simple tilnærmede beregningsmetoder, der gør det muligt på en relativ simpel måde at gennemføre de nødvendige statiske beregninger for bestemmelse af en bjælkesøjles bæreevne. Metoderne, der i overensstemmelse med DS 411 benævnes metode I, II og III, hviler på følgende forudsætninger:

- a2. Bjælkesøjlen har et symmetriplan, som også er symmetriplan for tværlasten og/eller den excentrisk virkende normalkraft

b2. Bjælkesøjlen er simpelt understøttet med spændvidden  $l_s$

c2. Bjælkesøjlen maksimale moment nær midten regnes at være

$$M_{Sd} = M_{S0d} + N_{Sd} ( e_1 + e_2 ) = N_{Sd} ( e_0 + e_1 + e_2 ) \quad (4.4-34)$$

hvor

$M_{S0d}$  er det største moment inden for den midterste femtedel af spændvidden hidrørende fra den regningsmæssige tværlast og/eller excentriske virkende normalkraft. I figur 4.4-15 er vist eksempler på, hvordan  $M_{S0d}$  bestemmes for simpelt understøttede bjælkesøjler. I tilfælde a påvirkes søjlen ved øverste understøtning af en excentrisk virkende regningsmæssig normalkraft  $N_{Sd}$  og i tilfælde b af en vandret regningsmæssig tværkraft  $F_d$

$N_{Sd}$  er den regningsmæssige værdi af normalkraften

$e_0 = M_{S0d} / N_{Sd}$  er den ydre lasts initialexcentricitet

$e_1$  er en excentricitet, der tager hensyn til udførelsesunøjagtigheder

$e_2$  er søjlens resulterende maksimale udbøjning hidrørende fra momentpåvirkningen, inclusive søjlevirkningen (2. ordens bidraget)

d2. Bjælkesøjlen normalkraft må ikke være større end den regningsmæssige bæreevne ved central last og udknækning om den svage akse, hvis konstruktionen ikke er hindret mod udknækning i denne retning. Det skal eftervises, at de regningsmæssige resulterende snitkræfter kan optages i såvel bjælkesøjlen tværsnit med størst påvirkning inden for bjælkesøjlen midterste femtedel som i tværsnittene ved søjlens understøtninger, idet momentet sidstnævnte steder kan være større end det største resulterende moment på bjælkesøjlen midterste femtedel. Dette vil fx. kunne være tilfældet for en simpelt understøttet søjle, der ved søjlens øverste understøtning er påvirket af en excentrisk virkende normalkraft, se figur 4.4-15a.

Beregningsmetoderne I, II og III kan også benyttes for søjler med en anden understøtningsform end forudsat ovenfor, hvis udbøjningen hidrørende fra den regningsmæssige tværlast og/eller excentriske last er af samme form som den centralt belastede konstruktionsdels udbøjningskurve ved kritisk last og udbøjning i tværlastens retning. I sådanne tilfælde benyttes den pågældende søjles fri søjlelængde  $l_s$ , og  $M_{Sd}$  i (4.4-34) betyder det resulterende moment i bjælkesøjlen farligste snit, idet  $e_0 + e_1 + e_2$  er afstanden mellem tryklinien og tværsnittets tyngdepunkt i det farligste snit i bjælkesøjlen deformerede ligevægtstilstand.

Hvis bjælkesøjlen regningsmæssige normalkraft og/eller slankhedsforhold  $\lambda$  er lille, kan der i visse tilfælde ses bort fra udbøjningstillægget  $N_{Sd} e_2$ , fordi størrelsen bliver betydningsløs. DS 411 angiver, at der kan ses bort fra momentforøgelsen  $N_{Sd} e_2$ , når betingelsen i (4.4-35) er opfyldt.

$$\lambda \sqrt{\frac{N_{Sd}}{A_c f_{cd}}} < 20 \quad (4.4-35)$$

### Beregningsmetode I for uarmerede og armerede søjler

Bestemmelsen af en bjælkesøjles bæreevne kan gennemføres efter en formel elasticitetsteori.

I DS 411 er anført en formel elasticitetsteoretisk metode, benævnt metode B, hvorefter spændinger og dermed bæreevnen i brudgrænsetilstanden for armerede og uarmerede tværsnit kan bestemmes.

Metode B baseres på følgende forudsætninger

- a3. Tøjningsfordelingen antages at være plan, dvs. tøjningerne vinkelret på tværsnittet er proportionale med afstanden fra nullinien
- b3. Trækspændingerne i betonen tages ikke i regning
- c3. Beton og armering regnes lineærelastiske. Betonens og armeringens regningsmæssige elasticitetskoefficienter sættes til henholdsvis  $500f_{cd}$  og  $E_{sk}/\gamma_s$ . Forholdet  $\alpha$  mellem armeringens og betonens regningsmæssige elasticitetskoefficienter kan tages fra tabel 5.1-1, der er identisk med tabel V 6.3.1 i DS 411
- d3. Den maksimale betonkantspænding skal opfylde betingelserne

$$\sigma_{cd,max} \leq \begin{cases} 1,25 f_{cd} & \text{ved revnet tværsnit} \\ 1,25 f_{cd} \left( 1 - 0,2 \frac{\sigma_{cd,min}}{f_{cd}} \right) & \text{ved tryk i hele tværsnittet} \end{cases} \quad (4.4-36)$$

hvor  $\sigma_{cd,min}$  er den mindste betontrykspænding. Hvis der ikke er tryk over hele tværsnittet, regnes  $\sigma_{cd,min} = 0$ .

- e3. De maksimale træk- og -trykspændinger i armeringen skal opfylde betingelserne

$$|\sigma_{sd,max}| \leq f_{yd} \quad (4.4-37)$$

$$\sigma_{scd,max} \leq f_{ycd} \quad (4.4-38)$$

- f3. Kraften i trykarmeringen må ikke regnes større end den regningsmæssige kraft svarende til fuld udnyttelse af betontværsnittet til tryk. Hvis trykarmeringen regnes at optage en større kraft end halvdelen af den regningsmæssige kraft svarende til fuld udnyttelse af betontværsnittet, må der ikke benyttes overlappingsstød.

Metode I til beregning af det dimensionsgivende moment for bjælkesøjler er en udbygning af Vianellos metode, der er en tilnærmet metode til bestemmelse af den kritiske last for centralt belastede søjler.

Metoden tager sit udgangspunkt i et skøn af udbøjningsfigurens form og resulterende udbøjning  $e_2$  for bjælkesøjlen, hvor  $e_2$  er summen af initialudbøjningen hidrørende fra den ydre last og tillægsudbøjningen pga. momenttillægget hidrørende fra normalkraftens virkning i den udbøjede ligevægtstilstand.

Med kendskab til det til  $e_2$  svarende resulterende momentforløb givet ved

$M_{Sd} = M_{S0d} + N_{Sd} (e_1 + e_2)$  og det dertil hørende krumningsforløb  $M/(E_{crd} I_{tr})$  i bjælkesøjlen, kan udbøjningen beregnes fx. ved anvendelse af *det virtuelle arbejdes princip* eller *differentialligninger*.  $E_{crd}$  er betonens regningsmæssige elasticitetskoeficient, se (4.4-40), og  $I_{tr}$  er det transformerede tværsnits inertimoment. Den beregnede og den skønnede værdi af  $e_2$  sammenlignes, og der foretages nye skøn med tilhørende omregninger, indtil der er passende overensstemmelse mellem den skønnede værdi og den beregnede værdi af  $e_2$ . I Vianellos metode er det egentlig langs hele den skønnede og den beregnede udbøjningskurve, der skal være overensstemmelse. Men det kan vises, at det giver tilstrækkelig nøjagtighed, hvis der sørges for overensstemmelse mellem den skønnede og den beregnede værdi, hvor disse antager deres største værdier.

Bestemmelse af bæreevnen for en bjælkesøjle ved anvendelse af *metode I* kræver en del mere beregningsarbejde end ved anvendelse af *metode II*, som beskrives nedenfor. Dette skyldes, at man dels skal skønne udbøjningen  $e_2$  for beregning af det resulterende momentforløb og dels skal skønne nulliniedybden  $x$ , hvis fx. beregningsprincippet *transformeret tværsnit* benyttes ved den efterfølgende spændingsbestemmelse. Benyttes beregningsprincippet *ækvivalensbetingelser* ved bestemmelse af spændinger, dvs. opstilling af ækvivalensbetingelser for henholdsvis normalkraft og moment, undgår man at skønne nulliniedybden  $x$ , men det giver normalt et lidt vanskeligere beregningsarbejde. Vedr beregningsprincipperne *transformeret tværsnit* og *ækvivalensbetingelser* henvises til henholdsvis afsnit 5.2.2 og 5.2.3.

Fremgangsmåden ved anvendelse af metode I beskrives nedenfor ved betragtning af en simpelt understøttet søjle med søjlelængden  $l_s$ , der er belastet med en normalkraft  $N_{Sd}$  og en konstant lineær tværlast  $q_d$ . Ved denne beskrivelse antages, at  $e_1 = 0$ .

- a4. Bjælkesøjlels maksimale udbøjning  $e_{2,s1}$  (fx i mm) skønnes, og krumningskurven skønnes fx parabelformet. Index  $s1$  angiver, at det er første skøn af udbøjningen.
- b4. Idet der tages hensyn til den skønnede udbøjning, beregnes det maksimale moment ved søjlemidten som  $M_{Sd} = M_{S0d} + N_{Sd} e_{2,s1}$
- c4. For snitkræfterne  $N_{Sd}$  og  $M_{Sd}$  findes fx ved anvendelse af princippet transformeret tværsnit og en formel elasticitetsteoretisk beregning (metode B, som beskrevet ovenfor) armeringsspændingerne  $\sigma_s$  og  $\sigma_{sc}$  samt den maksimale betonspænding  $\sigma_{c,max}$ . Som nævnt ovenfor, må man her skønne nullinieuhøjden  $x$  og regne om, indtil der er tilstrækkelig overensstemmelse mellem den skønnede og den beregnede værdi af  $x$ . Benyttes princippet ækvivalensbetingelser til spændingsbestemmelsen, er iteration unødvendig.
- d4. Ud fra de fundne spændinger findes krumningen ved bjælkesøjlels midte til

$$\kappa_{\max} = \frac{\varepsilon_{cd,\max} - \varepsilon_{cd,\min}}{\Delta h} = \frac{E_{crd} (\varepsilon_{cd,\max} - \varepsilon_{cd,\min})}{E_{crd} \Delta h} = \frac{\sigma_{cd,\max} - \sigma_{cd,\min}}{E_{crd} \Delta h} \quad (4.4-39)$$

hvor  $\sigma_{cd,\max}$  og  $\sigma_{cd,\min}$  er henholdsvis største og mindste betontrykspænding, og  $\Delta h$  er afstanden mellem de punkter i tværsnittet, hvor disse spændinger optræder.

Ved beregning af krumningen efter (4.4-39) skal der tages hensyn til betonens krumme arbejdslinie, hvilket gøres ved at indføre en variabel og spændingsafhængig elasticitetskoefficient  $E_{crd}$  givet ved (4.4-40) nedenfor.

$E_{crd}$  bestemmes i henhold til DS 411 6.2.5.2 (9) af

$$E_{crd} = \left[ 1 - k \frac{\sigma_{cd,\max}}{f_{cd}} - (1 - k) \frac{\sigma_{cd,\min}}{f_{cd}} \right] E_{0crd} \quad (4.4-40)$$

Vedr.  $k$ , se nedenfor

Hvis påvirkningen bevirker, at der ikke er tryk over hele tværsnittet, dvs. der opstår revner i tværsnittet, idet betonens trækstyrke  $f_{cd}$  regnes lig nul, sættes  $\sigma_{cd,\min} = 0$  og  $\Delta h = x$ , hvor  $x$  er tværsnittets nulliniedybde. Ved revnet tværsnit fås derved ved indsættelse i (4.4-39) og (4.4-40) flg. udtryk for krumningen  $\kappa$  og elasticitetskoefficienten  $E_{crd}$

$$\kappa_{\max} = \frac{\sigma_{cd,\max}}{E_{crd} x} \quad (4.4-41)$$

$$E_{crd} = \left[ 1 - k \frac{\sigma_{cd,\max}}{f_{cd}} \right] E_{0crd} \quad (4.4-42)$$

For at passe i grænseovergangene må der stilles følgende krav til  $E_{crd}$ :

- Når spændingen er nul over hele tværsnittet skal  $E_{crd}$  være lig med  $E_{0crd}$  givet ved (4.4-5).
- Når tværsnittet er påvirket af en konstant trykspænding  $\sigma_{cd}$  svarende til en central påvirkning, skal  $E_{crd}$  bestemmes af  $E_{crd} = E_{0crd} (1 - \sigma_{cd} / f_{cd})$ , se (4.4-7).
- Når tværsnittet er revnet og helt udnyttet i trykzonen, dvs. når  $\sigma_{cd} = 1,25 f_{cd}$ , skal  $E_{crd}$  bestemmes af  $E_{crd} = 500 f_{cd}$ . Herved opnås, at kravet til elasticitetskoefficientens størrelse stemmer overens med kravet til denne størrelse, når metode B i DS 411 benyttes til bestemmelse af et tværsnits bæreevne.

Indsættes  $\sigma_{cd,\max} = \sigma_{cd,\min} = 0$  og  $\sigma_{cd,\max} = \sigma_{cd,\min} = \sigma_{cd}$  i (4.4-40) fås henholdsvis

$E_{crd} = E_{0crd}$  og  $E_{crd} = E_{0crd} (1 - \sigma_{cd} / f_{cd})$ . Heraf ses, at (4.4-40) opfylder kravene A og B.

For at opfylde krav C bestemmes  $k$  af (4.4-40) ved at indsætte  $\sigma_{cd,min} = 0$ ,  $\sigma_{cd,max} = 1,25 f_{cd}$  og  $E_{crd} = 500 f_{cd}$  i (4.4-40), hvilket giver

$$k = 0,8 - 400 \frac{f_{cd}}{E_{0crd}} \quad (4.4-43)$$

Indsættes  $E_{0crd}$  iht. (4.4-5) ses, at  $k$  udelukkende en funktion af  $f_{ck}$ .  $k$  er angivet nedenfor i tabel 4.4-4, der er identisk med tabel V 6.2.5.2 i DS 411

$f_{ck}$ [MPa]	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$k$	0,40	0,40	0,40	0,40	0,35	0,30	0,25	0,19	0,14	0,09	0,04

Tabel 4.4-4 Koefficienten  $k$  i formel (4.4-40) og (4.4-42) som funktion af  $f_{ck}$

e.4 I henhold til DS 411 afsnit 6.2.5.2 (8) kan  $e_{2,b1}$  herefter beregnes af

$$e_{2,b1} = \frac{1}{10} \kappa l_s^2 = \begin{cases} \frac{1}{10} \frac{\sigma_{cd,max} - \sigma_{cd,min}}{E_{crd} \Delta h} l_s^2 & \text{for urevnet tværsnit} \\ \frac{1}{10} \frac{\sigma_{cd,max}}{E_{crd} \kappa} l_s^2 & \text{for revnet tværsnit} \end{cases} \quad (4.4-44)$$

Index  $b1$  angiver, at det er den første værdi af den beregnede udbøjning  $e_{2,b1}$ . Denne værdi skal sammenlignes med den første skønnede værdi af udbøjningen  $e_{2,s1}$

Hvis man vil regne mere nøjagtigt, kan man afhængig af krumningskurvens form i stedet for faktoren  $1/10$  benytte de i figur 5.3-3 angivne faktorer.

Ved at regne som angivet ovenfor, har man på den sikre side regnet med, at tværsnittene i hele bjælkesøjlen længde vil være revnet med samme revnedybde som ved tværsnittets midte. Da momentet er aftagende ud mod understøtningerne, vil tværsnittene nærmest understøtningerne være urevnede, og bjælkesøjlen vil derfor på disse strækninger have en større stivhed end på strækningerne omkring søjlemidten.

f4. Den beregnede udbøjning  $e_{2,b1}$  sammenlignes med den skønnede udbøjning  $e_{2,s1}$ . Hvis der er en rimelig god overensstemmelse, hvilket skønnes ved at vurdere størrelsen af  $N(|e_{2,s1} - e_{2,b1}|)$  i forhold til det resulterende moment, bestemmes de dimensionsgivende snitkræfter som  $N_{sd}$  og  $M_{sd} = M_{s0d} + N_{sd} e_{2,b1}$ .

## 4.4-32

- g4. Hvis der ikke er tilstrækkelig god overensstemmelse, skønnes en ny udbøjning  $e_{2,s2}$ , og beregningerne gentages fra punkt b4. Omregningerne fortsættes, indtil der er opnået tilstrækkelig god overensstemmelse mellem den skønnede værdi  $e_{2,sn}$  og den beregnede værdi  $e_{2,bn}$ .
- h4. Når der er opnået tilstrækkelig god overensstemmelse, bestemmes beton og armeringsspændingerne. Disse spændinger skal opfylde kravene givet i (4.4-36), (4.4-37) og (4.4-38).
- i4. Ved spændingsbestemmelsen regnes beton og armering som lineærelastiske materialer med elasticitetskoefficienterne henholdsvis

$$E_{cd} = 500f_{cd} \quad \text{og} \quad E_{sd} = \frac{2 \cdot 10^5}{\gamma_s} \quad \text{samt} \quad \alpha = \frac{E_{sd}}{E_{cd}} = \frac{400}{f_{cd} \gamma_s} \quad (4.4-45)$$

Elasticitetskoefficienten  $E_{crd}$  givet ved (4.4-40) benyttes kun ved bestemmelsen af bjælkesøjleens udbøjning  $e_2$  iht (4.4-44)

Det fremgår af ovenstående, at det kræver et stort beregningsarbejde at benytte metode I. Denne metode benyttes derfor normalt kun, når størrelsen af udbøjningstillægget  $N_{sd} e_2$  er betydelig i forhold til initialmomentet  $M_{s0d}$ .

### *Beregningsmetode Ia for søjler med tryk over hele tværsnittet*

Når der er tryk over hele tværsnittet, kan omregninger undgås, idet der i dette tilfælde, som vist nedenfor, kan angives en simpel tilnærmelsesformel til bestemmelse af det dimensionsgivende moment  $M_{sd}$  ved anvendelse af en såkaldt *momentforøgelsesfaktor*  $k_m$ , der kan bestemmes direkte.

Som tidligere kan det dimensionsgivende moment  $M_{sd}$  bestemmes af

$$M_{sd} = M_{s0d} + N_{sd} e_2 = k_m M_{s0d} \quad (4.4-46)$$

For udbøjningen  $e_2$  benyttes tilnærmelsen

$$e_2 = 0,1 \cdot \kappa_{\max} l_s^2 \quad (4.4-47)$$

hvor

$$\kappa_{\max} = \frac{M_{sd}}{E_{crd} I_c} \quad (4.4-48)$$

og

$$E_{crd} = E_{0crd} \left( 1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} \right) \quad \text{hvor} \quad \sigma_{cnd} = \frac{N_{Sd}}{A_c} \quad (4.4-49)$$

For bl.a. dobbelt symmetriske rektangulære tværsnit kan det vises, at anvendelsen af  $E_{crd}$  efter (4.4-49) er på den sikre side.

Indsættes (4.4-47) og (4.4-48) i (4.4-46) og løses ligningen med hensyn til  $M_{Sd}$  fås

$$M_{Sd} = M_{S0d} + N_{Sd} \cdot 0,1 \cdot \frac{M_{Sd}}{E_{crd} I_c} l_s^2 \quad (4.4-50)$$

Tværsnitskonstanterne  $A_c$  og  $I_c$  bestemmes for rektangulære tværsnit som  $A_c = bh$  og  $I_c = bh^3/12$ , hvor  $h$  er den sidelængde i tværsnittet, der er parallel med udbøjningsretningen.

$$M_{Sd} = \frac{M_{S0d}}{1 - \frac{0,1 N_{Sd} l_s^2}{E_{crd} I_c}} = \frac{M_{S0d}}{1 - \frac{0,1 N_{Sd} l_s^2}{E_{0crd} \left( 1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} \right) I_c}} \quad (4.4-51)$$

idet (4.4-49) er indsat. Multipliceres i tæller og nævner med  $(1 - \sigma_{cnd}/f_{cd})$  samt indsættes  $N_{Sd}/A_c = \sigma_{cnd}$  og  $I_c/A_c = i^2$  fås

$$M_{Sd} = \frac{\left( 1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} \right) M_{S0d}}{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} - \frac{0,1 N_{Sd} l_s^2}{E_{0crd} I_c}} = \frac{\left( 1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} \right) M_{S0d}}{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} - \frac{0,1 \frac{N_{Sd}}{A_c} l_s^2}{E_{0crd} \frac{I_c}{A_c}}} \quad (4.4-52)$$

$$M_{Sd} = \frac{\left( 1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} \right) M_{S0d}}{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}} \left( 1 + \frac{0,1 \left( \frac{l_s}{i} \right)^2 f_{cd}}{E_{0crd}} \right)} = \frac{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}}}{1 - \frac{\frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}}}{1 + \frac{f_{cd}}{10 E_{0crd}} \left( \frac{l_s}{i} \right)^2}} M_{S0d} \quad (4.4-53)$$

Betragtes divisoren til  $\sigma_{cnd}$  i nævneren i (4.4-53) kan denne omskrives som vist nedenfor, idet

4.4-34

(4.4-14),  $l_s/i = \lambda$  og  $10 \sim \pi^2$  er benyttet

$$\frac{f_{cd}}{1 + \frac{f_{cd}}{10 E_{0crd}} \left(\frac{l_s}{i}\right)^2} \sim \frac{f_{cd}}{1 + \frac{f_{cd}}{\pi^2 E_{0crd}} \lambda^2} = \sigma_{crd} \quad (4.4-54)$$

Indsættes (4.4-54) i (4.4-53) fås flg. udtryk til bestemmelse af det dimensionsgivende moment

$$M_{Sd} = \frac{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}}}{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{\sigma_{crd}}} M_{S0d} = k_m M_{S0d} \quad (4.4-55)$$

hvor momentforøgelsesfaktoren  $k_m$  bestemmes af

$$k_m = \frac{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{f_{cd}}}{1 - \frac{\sigma_{cnd}}{\sigma_{crd}}} \quad (4.4-56)$$

Første del af formlen (4.4-55) svarer til formlen 6.2.5.2 (13) i DS 411. Momentforøgelsesfaktoren  $k_m$  kan uden omregninger direkte beregnes af (4.4-56), når man kender bjælkesøjlels tværsnit, de indgående materialeparametre og normalkraften  $N_{Sd}$ .

Spændingerne i armering og beton svarende til de resulterende regningsmæssige snitkræfter  $N_{Sd}$  og  $M_{Sd}$  skal som ovenfor opfylde kravene i (4.4-36), (4.4-37) og (4.4-38).

### *Beregningsmetode II for revnede, armerede bjælkesøjler*

For en simpelt understøttet, armeret og revnet bjælkesøjle kan udbøjningen  $e_2$  ved bjælkesøjlels midte på den sikre side bestemmes af

$$e_2 = \frac{1}{10} \kappa_{\max} l_s^2 = \frac{1}{10} \frac{\epsilon_{cu} + \epsilon_y}{d} l_s^2 \quad (4.4-57)$$

hvor  $d$  er tværsnittets nyttehøjde  
 $\epsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3}$  er betonens brudtøjning  
 $\epsilon_y = f_{yk}/E_{sk} = f_{yk}/2 \cdot 10^5$  er armeringens tøjning ved begyndende flydning

Bestemmes bjælkesøjlels udbøjning ved (4.4-57) er det tilstrækkeligt at eftervise, at tværsnittets regningsmæssige brudmoment  $M_{ud} = M_{Rd}$  svarende til bjælkesøjlels normalkraft  $N_{Sd}$  er større end det resulterende snitmoment, dvs.  $M_{Rd} \geq M_{S0d} + N_d e_2$ . Det regningsmæssige brudmoment  $M_{ud} = M_{Rd}$  beregnes i henhold til teorien beskrevet i kapitel 4.1.

Hvis man ved bestemmelse af tværsnittets brudmoment finder, at  $\epsilon_s < \epsilon_y$ , kan  $\epsilon_s$  indsættes i (4.4-57) i stedet for  $\epsilon_y$ , hvorved der fås en mindre værdi for  $e_2$  og dermed en mindre værdi for tillægsmomentet. Finder man ved tværsnitsundersøgelsen, at  $\epsilon_s > \epsilon_y$ , behøver man ikke at indsatte denne større værdi for  $\epsilon_s$  i stedet for  $\epsilon_y$ . Det kan vises, at  $e_2$  bestemt efter (4.4-57) med  $\epsilon_s = \epsilon_y$  er på den sikre side, selv om  $\epsilon_s$  ved tværsnitsundersøgelsen er fundet større end  $\epsilon_y$ .

Bestemmelsen af  $e_2$  ved brug af (4.4-57) vil ofte være urimelig meget på den sikre side, men hvis udbøjningstillægget  $\Delta M_{Sd} = N_{Sd} e_2$  er lille sammenlignet med det resulterende moment, kan "overdimensioneringen" være uden betydning, og metode II kan med fordel benyttes i stedet for metode I, som normalt kræver et meget større beregningsarbejde.

### *Beregningsmetode III for uarmerede, excentrisk belastede søjler*

For en uarmeret excentrisk belastet bjælkesøjle med rektangulært tværsnit angiver DS 411, at den regningsmæssige bæreevne kan bestemmes af nedenstående empiriske tilnærmelsesformel

$$\frac{N_{crd}}{A_c f_{cd}} = \frac{(1 - 2 \frac{e}{h})^p}{1 + 12 \cdot 10^{-4} (\frac{l_s}{h})^2} \quad (4.4-58)$$

hvor  $A_c$  er tværsnitsarealet  
 $h$  er rektanglets mindste sidelinie  
 $e$  er normalkraftens excentricitet  
 $l_s$  er den frie søjlelængde.

Exponenten  $p$  kan bestemmes af

$$p = 1 - \frac{l_s}{25h} \quad (4.4-59)$$

#### Eksempel 4.4-2

Den i figur 4.4-16 viste søjle med den frie søjlelængde  $l_s = 5,0$  m er påvirket af en normalkraft  $N_{Sd}$ , der ved søjlens top angriber med en excentricitet på 100 mm målt i  $y$ -aksens positive retning, se figur 4.4-16. Desuden påvirkes søjlen af en vandret kraft  $F_{hd} = 55$  kN i en højde af 2,0 m over søjlens nederste understøtning, hvor søjlen regnes fast, simpelt understøttet i punktet  $(y, z_1) = (0, 0)$ . Lasterne er angivet ved deres regningsmæssige værdier, og søjlens egenvægt er medregnet i  $N_{Sd}$ .

Origo for  $x, y, z_1$ -koordinatsystemet ligger i tværsnitsdiagonalernes skæringspunkt. Aksebetegnelsen  $z$  uden indeks

#### 4.4-36

reserveres til den akse parallel med  $z_1$ -aksen, der går gennem det transformerede tværsnits tyngdepunkt

Søjlen udføres i normal kontrolklasse, i normal sikkerhedsklasse og i passiv miljøklasse af en beton med den karakteristiske trykstyrke  $f_{ck} = 30$  MPa.

Søjlen armeres med ribbestål med en karakteristisk træk- og trykstyrke på  $f_{yk} = f_{yck} = 550$  MPa. Længdearmeringen består af 4 stk  $\varnothing 25$  mm. Længdearmeringen stødes ved søjlens nederste understøtning. Bøjlerne udføres med diameteren  $\varnothing 6$  mm.

Det ønskes undersøgt, om søjlens bæreevne er tilstrækkelig til at modstå den angivne belastning, idet både metode I og metode II benyttes.

*Materialeparametre:*

*beton:*

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa} \quad f_{cd} = 30/1,65 = 18,2 \text{ MPa} \quad f_{ctk} = 1,7 \text{ MPa} \quad f_{ctd} = 1,7/1,65 = 1,03 \text{ MPa}$$

$$1,25 f_{cd} = 1,25 \cdot 18,2 = 22,8 \text{ MPa}$$

$$E_{ok} = 51000 \cdot 30 / (30 + 13) = 35,58 \cdot 10^3 \text{ MPa} \quad , \text{ se (4.4-4)}$$

$$\text{For } f_{ck} = 30 \text{ MPa} \quad \text{fås } E_{0crd} = 0,75 \cdot 51000 \cdot 18,2 / (30 + 13) = 16,19 \cdot 10^3 \text{ MPa} \quad , \text{ se (4.4-5)}$$

$$E_{csd} = 500 f_{cd} = 500 \cdot 18,2 = 9,1 \cdot 10^3 \text{ MPa} \quad , \text{ (benyttes kun ved spændingsbestemmelser og dermed ved bestemmelse af } \alpha)$$

$$\alpha = E_{sd} / (500 f_{cd}) = 1,54 \cdot 10^5 / (500 \cdot 18,2) = 16,9$$

*armering:*

$$f_{yk} = 550 \text{ MPa} \quad f_{yd} = 550/1,3 = 423 \text{ MPa}$$

$$E_{sk} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad E_{sd} = 2 \cdot 10^5 / 1,3 = 1,54 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad \epsilon_y = f_{yk} / E_{sk} = 550 / 2 \cdot 10^5 = 2,75 \cdot 10^{-3}$$

*Tværsnitskonstanter:*

$$A_c = 250 \cdot 350 = 87,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \quad W_{c,min} = 350 \cdot 250^2 / 6 = 3,65 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \quad W_{c,max} = 250 \cdot 350^2 / 6 = 5,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$I_{c,min} = 350 \cdot 250^3 / 12 = 455,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{c,max} = 250 \cdot 350^3 / 12 = 893,2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$i_{min} = I_{c,min} / A_c = 455,7 \cdot 10^6 / 87,5 \cdot 10^3 = 72,2 \text{ mm} \quad i_{max} = I_{c,max} / A_c = 893,2 \cdot 10^6 / 87,5 \cdot 10^3 = 101,0 \text{ mm}$$

$$\lambda_{max} = l_s / i_{min} = 5000 / 72,2 = 69,3 \quad \lambda_{min} = l_s / i_{max} = 5000 / 101,0 = 49,5$$

$$A_s + A_{sc} = 2 \cdot 491 + 2 \cdot 491 = 982 + 982 = 1964 \text{ mm}^2$$

hvor  $A_s$  og  $A_{sc}$  benyttes som symbol for henholdsvis træk- og trykarmering i det momentpåvirkede tværsnit i bjælkesøjlen.

a. *Bjælkesøjlen bæreevne beregnet som centralt belastet søjle med udbøjning om den svage akse (y-aksen)*

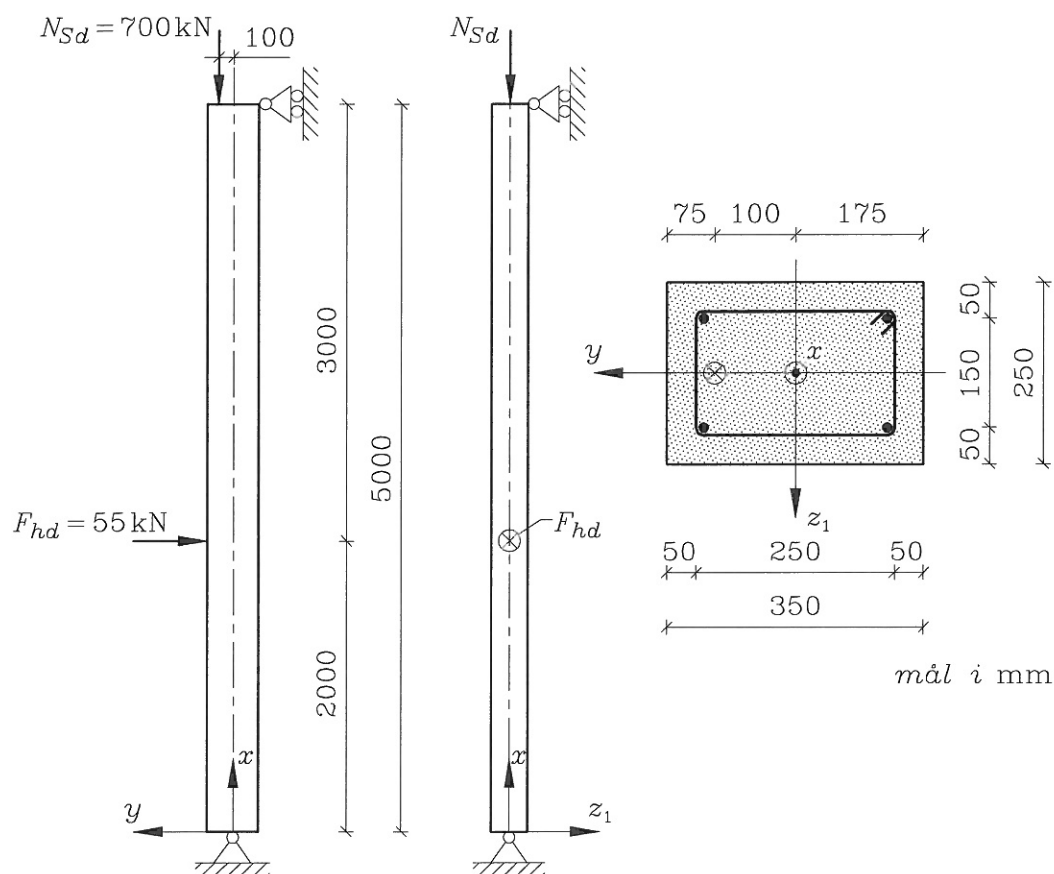
Idet faktoren til  $\lambda^2$  tages fra tabel 4.4-1 bestemmes den regningsmæssige kritiske betonspænding  $\sigma_{crd}$  af (4.4-14)

$$\sigma_{crd} = \frac{18,2}{1 + 1,1 \cdot 10^{-4} \cdot 69,3^2} = 11,9 \text{ MPa}$$

armeringsforholdet  $\rho$  bestemmes af  $\rho = (A_s + A_{sc}) / A_c = 1964 / 87,5 \cdot 10^3 = 2,24 \cdot 10^{-2}$

Idet bjælkesøjlen for udbøjning om den svage akse (y-aksen) beregnes som en centralt belastet søjle, bestemmes den dertil svarende regningsmæssige bæreevne af (4.4-23), dvs. som den mindste af de nedenfor beregnede værdier

$$N_{\text{Rerd}} = \begin{cases} 11,9 \cdot 87,5 \cdot 10^3 (1 + 16,9 \cdot 2,24 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^{-3} = 1.435 \text{ kN} \\ (11,9 \cdot 87,5 \cdot 10^3 + 423 \cdot 4 \cdot 491) \cdot 10^{-3} = 1.872 \text{ kN} \\ 2 \cdot 11,9 \cdot 87,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 2.083 \text{ kN} \end{cases}$$



Figur 4.4-16 Statisk model af bjælkesøjle samt opstalt og tværsnit.

Det ses, at bjælkesøjle's regningsmæssige bæreevne bestemt som bæreevnen for en centralt belastet søjle er tilstrækkelig, idet  $N_{\text{Rerd}} = 1.435 \text{ kN} > N_{\text{Sd}} = 700 \text{ kN}$ .

Minimums armeringen bestemmes af (4.4-28)

$$(A_s + A_{\text{sc}})_{\text{min}} = 0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 700000 / 11,9 = 441 \text{ mm}^2 < (A_s + A_{\text{sc}}) = 1964 \text{ mm}^2, \\ \text{dvs kravet til minimumsarmering er opfyldt.}$$

b. Beregning af snitkræfterne  $M_{\text{Sod}}$ ,  $N_{\text{Sd}}$  og  $V_{\text{Sd}}$  i søjlens udeformerede tilstand

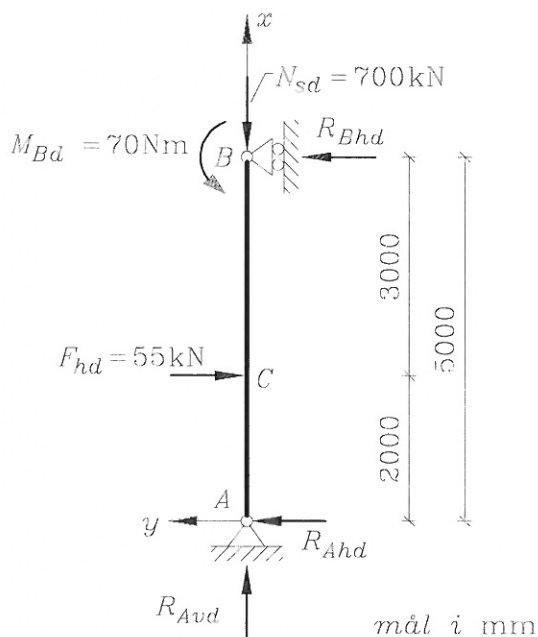
$$M_{\text{B0d}} = M_{\text{Bd}} = 700 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 70 \text{ kNm}$$

$$\text{Moment om pkt B giver : } R_{\text{Ahd}} \cdot 5 - 55 \cdot 3 - 70 = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\text{Ahd}} = 47 \text{ kN}$$

$$\text{lodret projektion giver : } R_{\text{Avd}} - 700 = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\text{Avd}} = 700 \text{ kN}$$

## 4.4-38

$$\begin{array}{llll}
 0 \leq x \leq 2,0 \text{ m:} & N_{sd} = 700 \text{ kN} & V_{sd} = 47 \text{ kN} & M_{s0xd} = 47 x & M_{s0cd} = 47 \cdot 2 = 94 \text{ kNm} \\
 2,0 \leq x \leq 5,0 \text{ m:} & N_{sd} = 700 \text{ kN} & V_{sd} = 47 - 55 = -8 \text{ kN} & M_{s0d} = 47 x - 55 (x-2) = 110 - 8 x & M_{s0bd} = 70 \text{ kNm}
 \end{array}$$



Figur 4.4-17 Bjælkesøjles statiske system med påført belastning.

d. Bjælkesøjlen beregnet efter metode II i DS 411.

Ifølge metode II i DS 411 kan den resulterende udbøjning ved søjlemidten i en revnet armeret bjælkesøjle tilnærmes og på den sikre side bestemmes af (4.4-57)

$$e_{2,\max II} = 0,1 \frac{(3,5 + 2,75) \cdot 10^{-3}}{300} \cdot 5000^2 = 52 \text{ mm}$$

Idet momenttillægget ved søjlemidten hidrørende fra udbøjningen adderes til det maksimale  $M_0$ -moment ved punkt C kan søjletværsnittets maksimale regningsmæssige påvirkning tilnærmes og på den sikre side sættes til

$$\begin{array}{ll}
 N_{sd} = & 700,0 \text{ kN} \\
 M_{sd} = M_{s0cd} + N_{sd} \cdot e_{2,\max II} = 94 + 700 \cdot 52 \cdot 10^{-3} = & 130,4 \text{ kNm}
 \end{array}$$

$M_{s0cd}$  er det største moment  $M_0$ -moment inden for bjælkesøjles midterste femtedel.

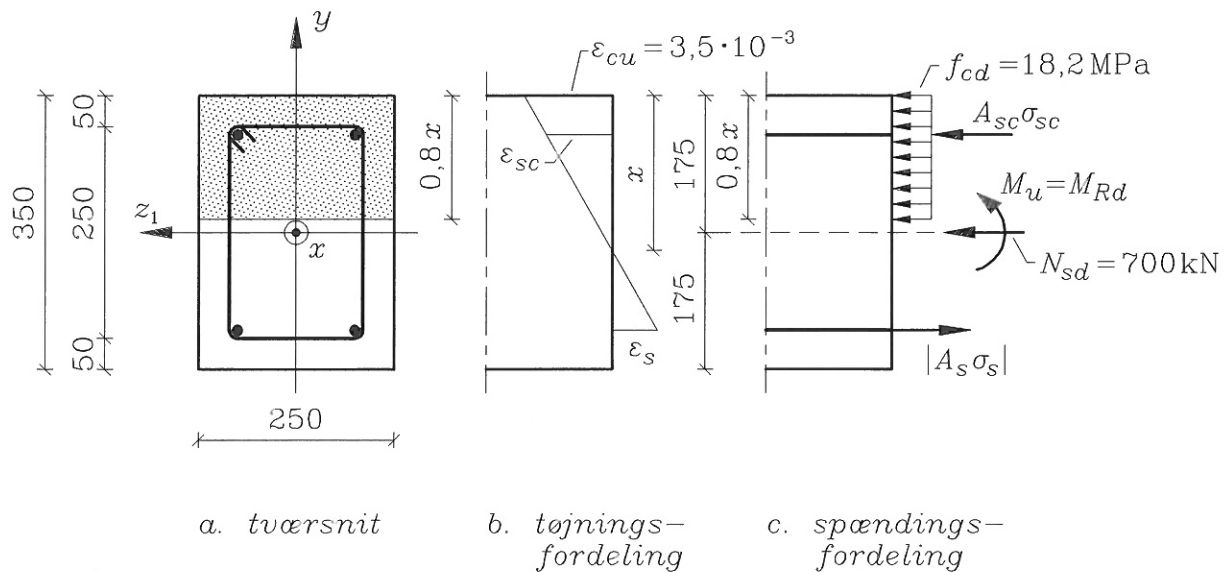
#### Bestemmelse af tværsnittets brudmoment

Idet det skønnes, at tøjningen i både træk- og trykarmeringen er numerisk mindre end flydetøjningen, dvs.  $|\epsilon_s| < \epsilon_y$  og  $\epsilon_{sc} < \epsilon_y$ , fås ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen for projektion på x-aksen

$$N_{sd} = 0,8 x b f_{cd} + A_{sc} E_{sd} \epsilon_{sc} + A_s E_{sd} \epsilon_s$$

indsættes  $\epsilon_{sc}$  og  $\epsilon_s$  i henhold til (4.1-8) og (4.1-9), idet der dog skiftes fortegn i formlerne pga. fortegnregningen i afsnit 4.4, fås

$$N_{sd} = 700 \cdot 10^3 = 0,8 \cdot x \cdot 250 \cdot 18,2 + 2 \cdot 491 \cdot 1,54 \cdot 10^5 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} \left( \frac{(x-50)}{x} - \frac{(300-x)}{x} \right) \rightarrow x = 181,7 \text{ mm}$$



Figur 4.4-18 Tværsnit i bjælkesøjle, tøjnings- og spændingsfordeling samt påvirkende snitkræfter i forbindelse med beregninger efter metode II

Kontrol af tøjningsforudsætningerne  $|\epsilon_s| < \epsilon_y$  og  $\epsilon_{sc} < \epsilon_{yc} = \epsilon_y$

Iht. (4.1-8) og (4.1-9) fås

$$\epsilon_{sc} = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot (181,7 - 50) / 181,7 = 2,53 \cdot 10^{-3} < \epsilon_{yc} = 2,75 \cdot 10^{-3}$$

$$|\epsilon_s| = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot (300 - 181,7) / 181,7 = 2,27 \cdot 10^{-3} < \epsilon_y = 2,75 \cdot 10^{-3}$$

Da  $|\epsilon_s| < \epsilon_y$  kan den beregnede værdi  $e_{2,maxII}$  og det regningsmæssige snitmoment reduceres til

$$e_{2,maxII} = 0,1 \frac{(3,5 + 2,27) \cdot 10^{-3}}{300} \cdot 5000^2 = 48 \text{ mm}$$

$$M_{sd} \approx 94 + 700 \cdot 48 \cdot 10^{-3} = 127,6 \text{ kNm}$$

Ved anvendelse af ækvivalensbetingelsen for moment omkring  $z_1$ -aksen fås bjælkesøjlels momentbæreevne  $M_{Rd,II}$

$$M_{ud} = M_{Rd,II} = [0,8 \cdot 181,7 \cdot 250 \cdot 18,2 \cdot (175 - 0,4 \cdot 181,7) + 2 \cdot 491 \cdot 1,54 \cdot 10^5 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 125 \cdot \left( \frac{(181,7 - 50)}{181,7} + \frac{(300 - 181,7)}{181,7} \right)] \cdot 10^{-6} = 158,7 \text{ kNm}$$

Da  $M_{Rd,II} = 158,7 \text{ kNm} > M_{sd} = 127,6 \text{ kNm}$  er bjælkesøjlels bæreevne tilstrækkelig iht. beregning efter metode II.

#### 4.4-40

e. Bjælkesøjlen beregnet efter metode I i DS 411:

Bjælkesøjlen udbøjningskurve skønnes tilnærmet parabelformet med en skønnet maksimal udbøjning  $e_{2,maxI,sI} = 30$  mm ved bjælkesøjlen midte. Bemærk, at  $e_{2,maxI,sI} = 30$  mm er skønnet en del mindre end  $e_{2,maxII} = 48$  mm.

Det regningsmæssige største moment regnes tilnærmet og på den sikre side som

$$M_{Sd} \approx M_{SOcd} + N_{Sd} e_{2,maxI} = 94 + 700 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 115 \text{ kNm}$$

Det skal eftervises, at spændingerne i bjælkesøjlen tværsnit opfylder kravene i (4.4-36), (4.4-37) og (4.4-38) samt, at den af (4.4-44) beregnede udbøjning  $e_{2,maxI,b}$  er i passende overensstemmelse med den skønnede udbøjning  $e_{2,maxI,sI}$ .

Beton og armeringsspændinger beregnes ved anvendelse af *beregningsprincippet transformeret tværsnit*, der indledes med at skønne en nulliniedybde  $x$ .

Skøn af nulliniedybde :  $x_{sI} = 180$  mm

Indeks s1 står for, at det er det første skøn. Ved spændingsberegningen anvendes  $\alpha = 16,9$ , se under materialekonstanter.

Arealet af det transformerede revnede tværsnit  $A_{r,tr}$  beregnes som

$$A_{r,tr} = 250 \cdot 180 + 2 \cdot 491 \cdot (16,9 - 1) + 2 \cdot 491 \cdot 16,9 = 10^3 \cdot (45,00 + 15,61 + 16,60) = 77,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Ved statisk moment om en linie gennem tværsnittets overkant fås

$$S_{ok} = 72,2 \cdot 10^3 \cdot \eta_G = 10^3 \cdot (45 \cdot 90 + 15,61 \cdot 50 + 16,60 \cdot 300) \quad \rightarrow \quad \eta_G = 127,1 \text{ mm}$$

hvor  $\eta_G$  er afstanden fra det transformerede tværsnits tyngdepunktsakse (z-aksen) til tværsnittets overkant.

Inertimomentet  $I_{z,tr}$  for det transformerede revnede tværsnit mht det transformerede revnede tværsnits tyngdepunktsakse beregnes som

$$I_{z,tr} = 250 \cdot 180^3 / 12 + 45 \cdot 10^3 \cdot (127,1 - 90)^2 + 15,61 \cdot 10^3 \cdot (127,1 - 50)^2 + 16,6 \cdot 10^3 \cdot (300 - 127,1)^2 = 772,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Henføres snitkræfterne til det transformerede tværsnits tyngdepunkt fås

$$N_{Sd} = 700 \text{ kN} \quad M_{Sd,tr} = M_{Sd} - N_{Sd} \cdot (0,5h - \eta_G) = 115 - 700 \cdot (175 - 127,1) \cdot 10^{-3} = 81,47 \text{ kNm}$$

Spændingerne i tværsnittet kan herefter beregnes ved brug af Naviers formel, se formlerne (5.2-31), (5.2-32), (5.2-33) og det transformerede tværsnits tværsnitskonstanter.

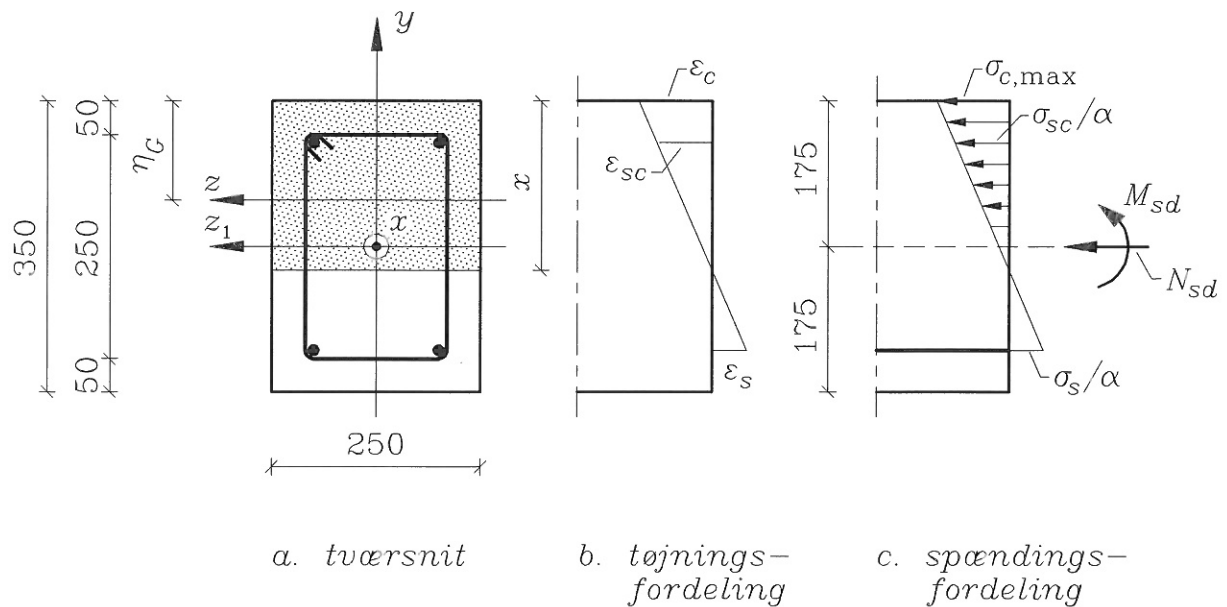
$$\sigma_{cd,max} = \frac{700 \cdot 10^3}{77,2 \cdot 10^3} + \frac{81,47 \cdot 10^6 \cdot 127,1}{772,5 \cdot 10^6} = 9,07 + 13,39 = 22,5 \text{ MPa} < 1,25 \cdot 18,2 = 22,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{scd} = 16,9 \cdot \frac{700 \cdot 10^3}{77,2 \cdot 10^3} + \frac{81,47 \cdot 10^6 \cdot (127,1 - 50)}{772,5 \cdot 10^6} = 291 \text{ MPa} < 423 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{\alpha} |\sigma_{sd}| = \left| \frac{700 \cdot 10^3}{77,2 \cdot 10^3} - \frac{81,47 \cdot 10^6 \cdot (300 - 127,1)}{772,5 \cdot 10^6} \right| = 9,17 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{sd}| = 16,9 \cdot 9,17 =$$

$$155 \text{ MPa} < 423 \text{ MPa}$$



Figur 4.4-19 Tværsnit i bjælkesøjle, tøjnings- og spændingsfordeling samt påvirkende snitkræfter i forbindelse med beregninger efter metode I.

Kontrol af den skønnede nulliniedybde  $x_{s1} = 180 \text{ mm}$

Den til de beregnede spændinger svarende nulliniedybde  $x_{b1}$  findes ved betragtning af ensvinklede trekanter i spændingsfiguren i figur 4.4-19

$$\frac{\sigma_{cd,max}}{x_{b1}} = \frac{-\frac{\sigma_{sd}}{\alpha}}{d - x_{b1}} \quad \rightarrow \quad x_{b1} = \frac{\sigma_{cd,max}}{\sigma_{cd,max} - \frac{\sigma_{sd}}{\alpha}} \cdot d$$

Indsættes de beregnede værdier for spændingen fås

$$x_{b1} = \frac{22,5}{22,5 + 9,17} \cdot 300 = 213 \text{ mm} > \text{den skønnede værdi } x_{s1} = 180 \text{ mm}$$

Ved omregninger indtil  $x_{sn} = x_{bn}$  i hele mm fås følgende værdier

$$\begin{aligned} x_{sn} = x_{bn} &= 211 \text{ mm} & \eta_G &= 133,5 \text{ mm} & A_{r,tr} &= 85,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 & I_{zr,tr} &= 808,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ \sigma_{cd,max} &= 22,4 \text{ MPa} < 22,8 \text{ MPa} & \sigma_{scd} &= 289 \text{ MPa} < 423 \text{ MPa} & |\sigma_{sd}| &= 161 \text{ MPa} < 423 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Det fremgår heraf, at spændingerne overholder kravene angivet i (4.4-36), (4.4-37) og (4.4-38), samt at beton og armeringsspændinger ved omregning med ny værdi af nulliniedybden kun ændre sig med henholdsvis  $\Delta \sigma_{cd,max} = -0,1 \text{ MPa} \sim 0,4 \%$  og  $\Delta |\sigma_{sd}| = 6 \text{ MPa} \sim 3,9 \%$ , dvs. meget beskedne ændringer i spændingernes størrelse.

#### 4.4-42

Kontrol af den skønnede maksimale udbøjning  $e_{2,maxI,sI} = 30 \text{ mm}$ .

For at se betydningen af forskellen på de "korrekte" værdier af spændingerne og de til det første skøn  $x_{sI}$  hørende spændinger, beregnes udbøjningen svarende til sidstnævnte spændinger og den dertil svarende værdi af nulliniedybden  $x_{bI} = 213 \text{ mm}$

$e_{2,maxI,bI}$  bestemmes af (4.4-44), hvor  $E_{crd}$  bestemmes af (4.4-42).  $E_{0crd}$  og  $k$ , der indgår i (4.4-42), bestemmes af henholdsvis (4.4-5) og (4.4-43)

$$E_{0crd} = 38.250 \frac{18,2}{30 + 13} = 16.190 \text{ MPa}$$

$$k = 0,8 - 400 \frac{18,2}{16.190} = 0,35$$

$$E_{crd} = \left( 1 - 0,35 \frac{22,5}{18,2} \right) \cdot 16.190 = 9.185 \text{ MPa}$$

$$e_{2,maxI,bI} = 0,1 \frac{22,5}{9.185 \cdot 213} \cdot 5000^2 = 28,8 \text{ mm} < e_{2,maxI,sI} = 30 \text{ mm}$$

Der ses at være god overensstemmelse mellem den skønnede og den beregnede værdi af  $e_{2,maxI}$ , og man vil på baggrund af de udførte beregninger kunne erklære, at bæreevnen for den betragtede bjælkesøjle er tilstrækkelig.

Foretages der en iterativ beregning, der fortsættes, indtil der i hele mm er overensstemmelse mellem de skønnede og de beregnede værdier af nulliniedybden  $e_{2,maxI}$ , dvs. indtil  $x_{sn} = x_{bn}$  og  $e_{2,maxI,sn} = e_{2,maxI,bn}$  får man følgende værdier:

$$e_{2,maxI,sn} = e_{2,maxI,bn} = 28 \text{ mm} \quad x_{sn} = x_{bn} = 212 \text{ mm}$$

$$\sigma_{cd,max} = 22,2 \text{ MPa} < 22,8 \text{ MPa} \quad \sigma_{scd} = 287 \text{ MPa} < 423 \text{ MPa} \quad |\sigma_{sd}| = 157 \text{ MPa} < 423 \text{ MPa}$$

Det ses, at spændingerne beregnet ud fra det første skøn af  $x$  kun ændres lidt ved at regne om, indtil  $x_s = x_b$ , selv om  $x_{sI} = 180 \text{ mm}$  afviger en del fra  $x_{sn} = x_{bn} = 212 \text{ mm}$ . Det ses ligeledes, at hvis værdien af den skønnede udbøjning  $e_{2,maxI,sI}$  ligger tæt ved værdien af den "korrekte" udbøjning  $e_{2,maxI,sn} = e_{2,maxI,bn}$ , ændres spændingerne ikke meget fra første til sidste gennemregning.

Det skal i hvert enkelt tilfælde vurderes, hvor langt det er nødvendigt at fortsætte den iterative beregning for at få tilfredsstillende resultater.

Af ovenstående kan det konstateres, at bjælkesøjlen bæreevne er tilstrækkelig efter begge beregningsmetoder.

Benyttes beregningsmetode II ses det, at  $e_{2,maxII,b} = 48 \text{ mm}$  er en del større end  $e_{2,maxI,bn} = 28 \text{ mm}$ , hvilket bekræfter, at beregning af udbøjningen ved brug af (4.4-57) som regel er en del på den sikre side.

Til gengæld er brudmomentet  $M_{Rd,II} = 158,7 \text{ kNm}$  beregnet efter metode II for normalkraften  $N_{sd} = 700 \text{ kN}$  virkende på det betragtede tværsnit, medens brudmomentet efter metode I kun er ca.  $M_{Rd,I} = 115 \text{ kNm}$ . Brudmomentet  $M_{Rd,I}$  er lidt større end  $115 \text{ kNm}$ , idet betonspændingerne ikke er helt udnyttet for momentet  $M = 115 \text{ kNm}$ .

I det betragtede tilfælde vil bjælkesøjlen kunne påvirkes af en større tværlast, når beregningerne foretages efter metode II, end hvis bæreevnebestemmelsen foretages efter metode I.

#### 4.4.4 Bærende betonvægge.

Vægge i bygningskonstruktioner har normalt én eller flere funktioner afhængig af den last, der skal optages.

- a. lasten, der kan stamme fra overliggende dæk og vægge, kan være lodret og virke i væggens plan. Væggen kan i så fald beregnes efter samme principper som en centralt- eller excentrisk belastet søjle, afhængig af om lasten virker centralt eller excentrisk.
- b. lasten kan stamme fra overliggende dæk og vægge virkende i væggens plan samt fra fx. jord- eller vindtryk virkende vinkelret på væggens plan. Væggen kan i så fald beregnes efter samme principper som en excentrisk belastet søjle eller som et bjælketværsnit med normalkraft, afhængig af hvor dominerende normalkraften eller momentet er.
- c. hvis væggen virker som afstivende konstruktionsdel i byggeriet, vil lasten normalt stamme fra vindpåvirkningen og overføres fra vandrette etagedæk til væggen. Lasten regnes i dette tilfælde virkende i væggens plan, og føres normalt gennem væggen til væggens fundament. Afhængig af væggens geometriske dimensioner vil væggen i dette tilfælde kunne beregnes ved brug af bjælke- eller skiveteori.

Dette afsnit behandler kun vægge beskrevet under punkt a.

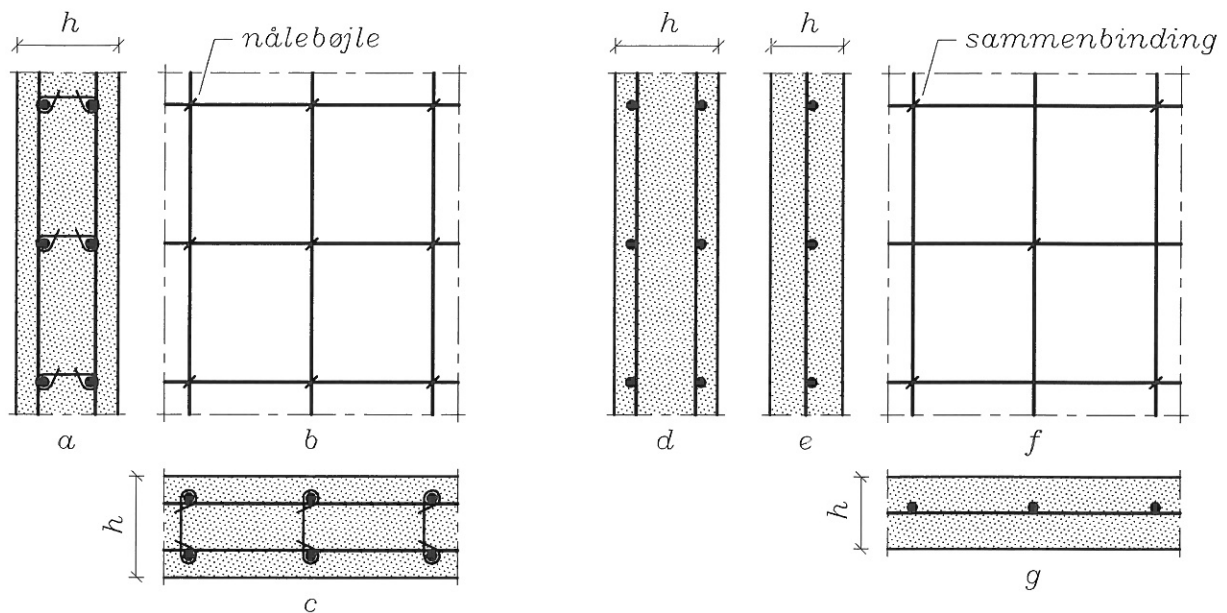
Hvis såvel længde- som tværarmering i vægge opfylder de til søjlekonstruktioner stillede krav, se afsnit 4.4.2 og 4.4.3, kan væggene dimensioneres efter samme metoder, som angivet for centralt- og excentrisk belastede søjler.

Armerede vægge, der kan beregnes som centralt belastede, skal være forsynet med en længdearmering, der uanset armeringens kvalitet mindst udgør 0,75 % af det nødvendige betontværsnit beregnet som  $N_{Sd}/\sigma_{crd}$ .

I praksis er det besværligt at fastholde alle lodrette armeringsstænger med tværarmering. Hvis det ønskes, kan tværarmeringen udføres som såkaldte *nålebøjler*, som vist i figur 4.4-20 a, b og c. Kravene til nålebøjlernes diameter og afstand er som for bøjler i søjler.

Armerede betonvægge udføres normalt med 2 armeringsnet, som vist i figur 4.4-20 d og f. Hvis væggens tykkelse er mindre end 150 mm, kan væggen udføres med ét net, der placeres i væggens midterplan, se figur 4.4-20 e, f og g. Vægge udføres normalt ikke med vægtykkelser  $h < 120$  mm, idet en mindre vægtykkelse vil vanskeliggøre en tilfredsstillende udstøbning.

Armerede betonvægge, der kan beregnes som centralt belastede, kan, hvis væggens bredde målt mellem eventuelle åbninger mindst er 5 gange væggens tykkelse  $h$ , tillades udført uden opfyldelse af kravene til armeringen i søjler, hvis de armeres med en netarmering, der opfylder nedenstående krav. I så fald medregnes armeringens bidrag ikke til væggens bæreevne, men betonens regningsmæssige styrke kan fastlægges som den regningsmæssige styrke for armeret beton.



*a, b og c viser henholdsvis lodret snit, opstalt og vandret snit i en tosidet armeret betonvæg med tværarmering i form af nålebøjler, der fastholder den lodrette armering mod udknækning vinkelret på væggens plan.*

*d og f viser henholdsvis lodret snit og opstalt i en tosidet armeret betonvæg uden tværarmering, der fastholder den lodrette armering mod udknækning vinkelret på væggens plan.*

*e og g viser henholdsvis lodret og vandret snit i en betonvæg armeret med ét net.*

Figur 4.4-20 Armering i vægge.

Ovennævnte krav til armeringen er

- armeringsnettets maskevidde må højst være 250 mm
- armeringen på tværs af lastretningen skal uanset armeringens kvalitet mindst udgøre 0,25 % af betonarealet
- armeringen i lastretningen skal uanset armeringens kvalitet udgøre mindst 0,5 % af det nødvendige betontværsnit, men må dog ikke være mindre end armeringen på tværs af lastretningen
- armeringsstængerne skal sammenbindes med bindetråd i hvert andet krydsningspunkt. Armeringsstængerne i lasten retning kræves således ikke fastholdt af nålebøjler vinkelret på væggens plan
- armeringen skal bestå af et armeringsnet i begge sider, dog kræves der i vægge med en tykkelse  $h \leq 150$  mm kun ét armeringsnet, der da placeres i væggens midterplan.

De vandrette stænger i netarmeringen har til formål at begrænse revner parallelle med lastretningen, dvs. reducere revnevidden og modvirke revnernes udbredelse. Disse revner kan bl.a.

opstå på grund af svind- og temperaturpåvirkninger.

I vægge, fx ydervægge, hvor der kan forekomme betydelige svind- eller temperaturspændinger bør ovenstående minimumsarmering vinkelret på lastretningen forøges.

## **4.6 Forankring og stødning af armeringsstænger**

## 4.6 Forankring og stødning af armeringsstænger.

### 4.6.1 Forankrings- og stødlængder.

I en armeret betonkonstruktion overføres aksiale kræfter mellem armering og beton.

Dette kan illustreres ved at betragte en simpelt understøttet bjælke belastet med jævnt fordelt, nedadrettet, lodret last. Ved bjælkens endetværsnit vil trækkræften i længdearmeringen i bjælkens underside være lig nul. Ved bjælkemidten vil trækkræften have sin maksimale værdi, idet momentet har sit maksimum her. På en strækning fra enden af bjælken og ind til bjælkens midte stiger trækkræften således fra nul til sin maksimale værdi. Denne ændring af trækkræften sker via en kraftoverførelse mellem beton og armering.

Ved kraftoverførelsen vil der optræde forskydningskræfter i kontaktfladen mellem de to materialer. Størrelsen af disse forskydningskræfter pr. længdeenhed er således lig med ændringen af kraften i armeringen pr længdeenhed (armeringskraftens gradient). Hvis disse forskydningskræfter bliver for store, vil der opstå brud mellem armering og beton. Dette brud kan forenklet beskrives ved, at en jævnt fordelt forskydningssspænding  $= \tau_{cs}$  langs kontaktfladen når forskydningsbrudsspændingen  $\tau_{csu}$ . Hvis en bestemt forskydningskraft skal overføres mellem armering og beton, skal der således et bestemt areal eller en bestemt længde til for at den jævnt fordelte forskydningssspænding  $\tau_{cs}$  lige netop ikke overskrider  $\tau_{csu}$ . Denne længde benævnes forankringslængde. Se figur 4.6-1.

I DS411 defineres en *forankrings- eller stødlængde* som afstanden fra en armeringsstangs frie ende i betonen til det punkt, hvorfra armeringen kan bære fuld last ved indstøbning.

Stød i armering forekommer, hvor der er brug for at forlænge en armeringsstang ud over dens faktiske længde. Dette gøres ved at placere en ny armeringsstang i konstruktionen, således at de to stænger ligger tæt sammen og overlapper hinanden på en strækning. Den nødvendige længde af denne strækning benævnes stødlængden. På stødlængden vil kraften fra den ene stang via forskydningspændinger i betonen føres over i den anden stang, se figur 4.6-2. Normalt vil stødlængden være lig med forankringslængden. Der er dog få afvigelser som vil blive omtalt i det følgende.

Det viser sig, at forankringslængden er afhængig af følgende parametre:

1. armeringens flydespænding/0.2-spænding
  2. betonens trykstyrke
  3. armeringsoverfladens beskaffenhed (kamme, glat armering)
  4. armeringens diameter
- og det viser sig også, at følgende forhold reducerer forankringslængderne:
5. trykspændinger vinkelret på armeringen i forankringsområdet
  6. tværarmering i betonen i forankringsområdet
  7. store armeringsafstande til frie betonoverflader

#### 4.6-2

Punkterne 5, 6 og 7 har alle noget at gøre med spændingsforholdene omkring armeringen i forankringsområdet.

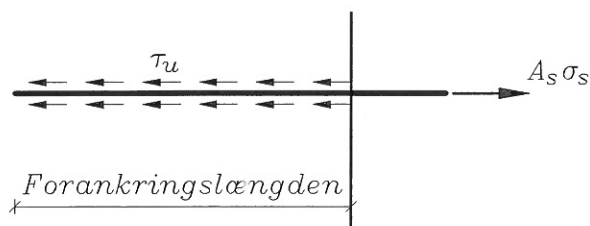
Ved bestemmelse af forankringslængder i henhold til DS411 er der kun angivet anvisninger om tværarmeringens indflydelse på forankringslængderne. Forankringslængderne angivet i DS411 tager udgangspunkt i en bestemt mængde tværarmering, se formel (4.6-5). Hvis der ilægges mere tværarmering reduceres forankringslængden, og hvis der ilægges mindre forøges forankringslængden.

Trykspændingernes gunstige virkning må i henhold til DS411 godt medregnes, hvis den dokumenteres. Normalt vælger man at se bort fra denne mulighed, idet den er besværlig at dokumentere. EC2 indeholder dog regler, der delvis tager højde for spændingerne i forankringszonen.

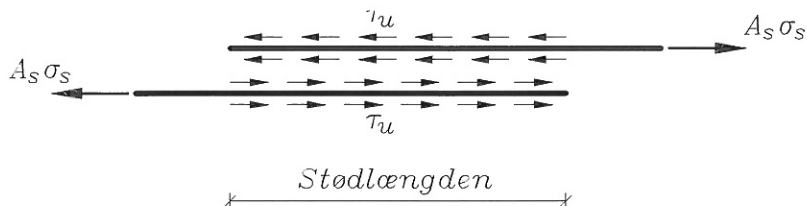
Virkingen af store armeringsafstande til frie kanter ses der normalt også bort fra. Gevinsten ved at forøge afstanden til frie kanter viser sig også at være begrænset. Omvendt må man sørge for, at forankringer ikke må ske for tæt på frie betonoverflader. Ved normalt forekommende armeringsdæklag giver det dog ingen problemer.

I DS411 bruges betegnelsen forankringslængde om flere forskellige størrelser, der er forskellige fra definitionen nævnt ovenfor. Derfor vil der i det følgende blive brugt betegnelsen basisforankringslængden om forankringslængden ved fuld last og tværarmering i henhold til "55-reglen", som omtales i det følgende. Udfra denne basisforankringslængde kan man bestemme den forankringslængde, der er nødvendig ved den aktuelle trækraft i armeringen og den aktuelle tværarmering. Basisforankringslængden er således kun afhængig af følgende parametre:

1. armeringens flydespænding/0.2-spænding
2. betonens trykstyrke
3. armeringsoverfladens beskaffenhed (kamme, glat armering)
4. armeringens diameter



Figur 4.6-1, Forankringslængde



Figur 4.6-2, Stødlængde

### 4.6.2 Forankringsstyrke.

Ved et forankringsbrud kan der forekomme forskydningsbrud langs kontaktfladen mellem armering og beton eller i betonen langs en cylinderflade, der tangerer eller ligger lidt udenfor armeringen. Svarende til disse 2 brudmåder kan der tales om 2 forskellige forskydningsbrudstyrker. Forankringsstyrken kan defineres som den mindste af disse forskydningsbrudstyrker.

De spændinger og styrker, der omtales i det følgende er nominelle værdier, idet de refererer til en cylinderflade, der har samme diameter som armeringsstangen.

Svarende til brud i kontaktfladen mellem beton og armering kan der regnes med forskydningsbrudstyrken  $\tau_{csu}$ :

$$\tau_{csu} = a - \mu \sigma \quad (4.6-1)$$

hvor  $a$  er lig adhæsionen mellem beton og armering  
 $\mu$  er friktionskoefficienten mellem beton og armering  
 $\sigma$  er normalspændingen vinkelret på kontaktfladen mellem beton og armering

Denne forskydningsbrudstyrke benævnes ofte glidningsstyrken.

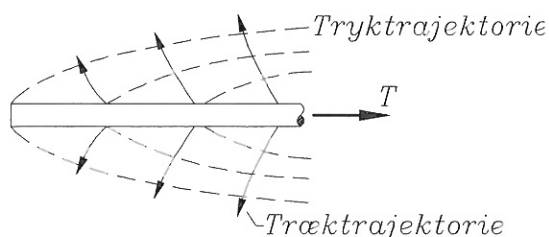
Adhæsionen  $a$  er afhængig af armeringsoverfladens beskaffenhed. Tilstedeværelse af fedt og olie på armeringen reducerer adhæsionen meget. Fedt og olie skal derfor fjernes fra armeringen inden støbning. Fastsiddende rust forøger adhæsionen betragteligt.

Friktionskoefficienten  $\mu$  afhænger af overfladens ruhed. Kammene på forkammet armering forøger friktionskoefficienten.

Svarende til brud i betonen langs en cylinderflade umiddelbart udenfor armeringen kan der regnes med forskydningsbrudstyrken  $\tau_{cu}$ :

$$\tau_{cu} = c - \mu_i \sigma \quad (4.6-2)$$

hvor  $c$  er betonens kohæsion ( $c$  kan sættes til  $0,25 \sigma_c$ )  
 $\mu_i$  er den indre friktionskoefficient i betonen ( $\mu_i$  kan sættes til  $0,75$ )  
 $\sigma$  er normalspændingen vinkelret på kontaktfladen mellem beton og armering



Figur 4.6-3 Spændinger i betonen omkring en armeringsstang i forankringszone

#### 4.6-4

I figur 4.6-3 er normalspændingerne i urevnet beton omkring armeringen i et forankringsområde vist. Der vil optræde tryk parallelt med tryktrajektorierne og trækspændinger vinkelret herpå langs træktrajektorierne. Disse trækspændinger vil, hvis de overskrider betonens trækstyrke, få betonen til at revne (spalte). Man taler således om *spaltekræfter* i forankringsområder. Ved forkammet armering er disse spaltekræfter kombineret med andre komplicerede spændingsforhold omkring kammene ved et forankringsbrud specielt udtalte (se figur 2.2-2). Man taler her om forkammet armerings *sprængende virkning*. Ved forankringsbrud vil der oftest kunne ses revner i betonoverfladen langs armeringen.

Armering på tværs af den armering, der skal forankres, kan anvendes til at optage nogle af spaltekræfterne. Denne armering kaldes *tværarmering*.

Svarende til at betonen påvirkes af spaltende kræfter, påvirkes armeringen af tryk vinkelret på overfladen. Samtidigt vil der omkring armeringen være spaltekræfter, der reducerer dette tryk. Der tegner sig altså et noget uoverskueligt billede af størrelsen af normalspændingerne på en armeringsstang i et forankringsområde. Endvidere vil der ofte være sket forskydningsbrud langs en del af forankringslængden før resten af forankringslængden bliver aktiv. Hvor der er sket forskydningsbrud, kan man kun regne med friktionsbidraget ( $\mu\sigma$  eller  $\mu_1\sigma$ ) ved bestemmelse af forankringsstyrken.

Ovenstående model giver en kvalitativ beskrivelse af forankringsproblemet, men forankringslængden kan ikke kvantitativt bestemmes ud fra en forankringsstyrke som angivet i (4.6-1) og (4.6-2). Man fastsætter derfor i praksis forankringslængderne ud fra empiriske regler, der er fastsat på grundlag af forsøg.

Man kan dog konkludere, at forankringsstyrken er afhængig af følgende forhold:

- små kantafstande reducerer forankringsstyrken, idet betonen ikke kan optage så store spaltekræfter (forholdet viser sig uden større betydning ved almindeligt forekommende dæklag)
- lille betontrækstyrke reducerer forankringsstyrken (samme begrundelse som ovenfor)
- tværarmering forøger forankringsstyrken, idet tværarmeringen forhindrer spaltning af betonen og/eller forøger trykspændingerne vinkelret på armeringsoverfladen
- tryk vinkelret på armeringen (fx. vederlagstryk) forøger forankringsstyrken
- ru eller forkammet overflade forøger forankringsstyrken, idet friktionskoefficienten  $\mu$  er større. Armeringsoverfladens beskaffenhed udtrykkes ved forankringsfaktoren, som omtales i afsnit 4.6.3.

Endvidere viser det sig, at forankringsstyrken er mindre i betonområder med revner. Denne situation forekommer ofte - f. eks. i undersiden af en bjælke.

Forankringsstyrkerne, der ligger til grund for bestemmelse af forankringslængder i.h.t. DS411, er fastlagt på grundlag af forsøg med stød i armering i undersiden af bjælker. Disse forsøg giver forankringsstyrker af størrelsesordenen  $\tau_{csu} = 2,2f_{ct}$  for forkammet armering, hvor  $f_{ct}$  er betonens trækstyrke.

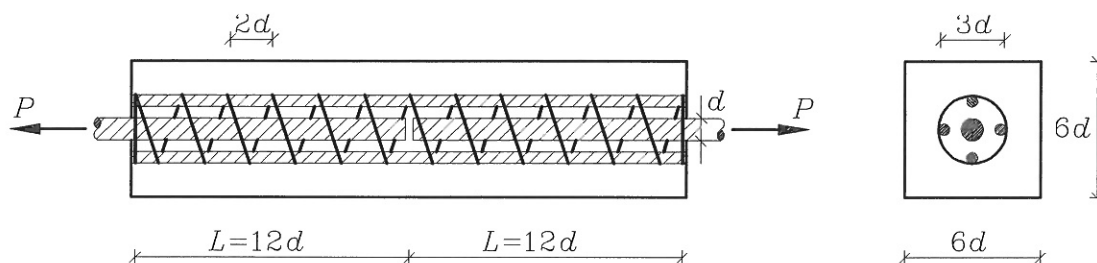
### 4.6.3 Forankringsfaktorer.

Forankringsstyrken er bl.a. afhængig af udformningen af armeringens overflade. En glat armeringsstang har således meget mindre forankringsstyrke end en armeringsstang med forkammet overflade. For forskellige armeringstyper kan man ved forsøg i henhold til DS 2082 bestemme *forankringsfaktorer*, der angiver dette. Disse forankringsfaktorer vil senere i dette afsnit indgå i empiriske udtryk til bestemmelse af nødvendige forankringslængder.

I.h.t. DS 2082 bestemmes forankringsfaktorer ved anvendelse af et prøvelegeme som vist i figur 4.6-4, idet udtrækningskraften for en armeringsstang måles. Ved en tilsvarende forsøgsopstilling måles udtrækningskraften for en gevindstang med samme vægt pr. m. (~ samme diameter). Armeringstangens forankringsfaktor bestemmes herefter som forholdet mellem udtrækningskræfterne for armeringsstang og gevindstang.

Man finder normalt forankringsfaktorer  $\zeta = \text{ca. } 0,3$  for glatte armeringsjern og  $\zeta = 0,8 - 0,9$  for ribbestål.

Forankringsfaktorernes størrelse oplyses af armeringsleverandøren.



Figur 4.6-4 Prøvelegeme, der anvendes ved bestemmelse af forankringsfaktoren

### 4.6.4 Bestemmelse af forankringslængder i henhold til DS411.

I det følgende vil der blive anvendt betegnelsen *basisforankringslængde*  $l_b$  om den forankringslængde, der skal til for at forankre en trækraft, der er lig med armeringens flydekraft  $= A_s f_{yk}$  under normale forhold. I det følgende er der tale om trækforankringslængder, når der er skrevet forankringslængder. Trykforankringslængder omtales særskilt.

I DS411 fastsættes basisforankringslængderne som angivet i tabel 4.6-1.

I tabel 4.6-2 er talværdier svarende til udtrykkene i tabel 4.6-1 vist for de oftest forekommende armeringstyper og standardbetonstyrkerne. Nogle af de viste dimensioner er normalt ikke lagervare.

Ved svejste net med  $\zeta \geq 0,6$  er talværdierne angivet i tabel 4.6-3. Svejste net med  $\zeta < 0,6$  skal forankres og stødes som ikke-svejst armering.

## 4.6-6

$\zeta$	$\varphi$ i mm	$f_{yk}/f_{ctk}$	$l_b$ i mm
$\zeta < 0,6$	$\varphi \leq 10$ uden krog	$f_{yk}/f_{ctk} \leq 208$	$50 \varphi$
		$f_{yk}/f_{ctk} > 208$	$0,24 \varphi f_{yk}/f_{ctk}$
	$10 < \varphi \leq 32$ med krog	$f_{yk}/f_{ctk} \leq 194$	$35 \varphi$
		$f_{yk}/f_{ctk} > 194$	$0,18 \varphi f_{yk}/f_{ctk}$
$\zeta \geq 0,6$	$\varphi \leq 32$	$f_{yk}/f_{ctk} \leq 333$	$30 \varphi/\zeta$
		$f_{yk}/f_{ctk} > 333$	$0,09 \varphi f_{yk}/(f_{ctk} \zeta)$
Svejste net med $\zeta \geq 0,6$ i enkeltspænd- te plader	$\varphi \leq 10$	$f_{yk}/f_{ctk} \leq 429$	$30 \varphi/\zeta$
		$f_{yk}/f_{ctk} > 429$	$0,07 \varphi f_{yk}/(f_{ctk} \zeta)$
	$10 < \varphi \leq 20$	$f_{yk}/f_{ctk} \leq 30000/(20+5\varphi)$	$30 \varphi/\zeta$
		$f_{yk}/f_{ctk} > 30000/(20+5\varphi)$	$(20+5 \varphi) \varphi f_{yk}/(1000 f_{ctk} \zeta)$

Tabel 4.6-1 Generelle udtryk for basisforankringslængder i henhold til DS411

$\varphi$ mm	$\zeta < 0,6$ $f_{yk} = 235/225$ MPa $f_{ck}$ i MPa:		$\zeta = 0,8$ $f_{yk} = 500$ MPa $f_{ck}$ i MPa:				$\zeta = 0,8$ $f_{yk} = 550$ MPa $f_{ck}$ i MPa:				
	12	$\geq 16$	12	16	20	$\geq 25$	12	16	20	25	$\geq 30$
5	257	250	257	222	199	188	282	245	219	196	188
6	309	300	308	267	239	225	339	293	263	235	225
7	360	350	359	311	278	263	395	342	306	274	263
8	412	400	411	356	318	300	452	391	350	313	300
10	515	500	513	445	398	375	565	489	438	391	375
12	463 (krog)	420 (krog)	616	534	477	450	678	587	525	470	450
14	541 (krog)	490 (krog)	719	623	557	525	791	685	613	548	525
16	618 (krog)	560 (krog)	822	712	636	600	904	783	700	626	600
18	665 (krog)	630 (krog)	924	800	716	675	1017	880	788	704	675
20	739 (krog)	700 (krog)	1027	889	795	750	1130	978	875	783	750
22	813 (krog)	770 (krog)	1130	978	875	825	1243	1076	963	861	825
24	887 (krog)	840 (krog)	1232	1067	955	900	1356	1174	1050	939	900
25	924 (krog)	875 (krog)	1284	1112	994	938	1412	1223	1094	978	938
30	1109 (krog)	1050 (krog)	1540	1334	1193	1125	1695	1467	1313	1174	1125
32	1183 (krog)	1120 (krog)	1643	1423	1273	1200	1807	1565	1400	1252	1200

Tabel 4.6-2 Basisforankringslængder (i mm) i henhold til DS411

$\varphi$ mm	$\zeta = 0,8$ $f_{yk} = 500$ MPa $f_{ck}$ i MPa:					$\zeta = 0,8$ $f_{yk} = 550$ MPa $f_{ck}$ i MPa:				
	12	16	20	25	$\geq 30$	12	16	20	25	$\geq 30$
5	200	188	188	188	188	220	190	188	188	188
6	240	225	225	225	225	264	228	225	225	225
7	280	263	263	263	263	308	266	263	263	263
8	320	300	300	300	300	351	304	300	300	300
10	399	375	375	375	375	439	380	375	375	375
12	548	474	450	450	450	602	522	467	450	450
14	719	623	557	525	525	791	685	613	548	525
16	913	791	707	632	600	1004	870	778	696	635
18	1130	978	875	783	714	1243	1076	963	861	786
20	1369	1186	1061	949	866	1506	1304	1167	1044	953

Tabel 4.6-3 Basisforankringslængder (i mm) for svejste net med  $\zeta \geq 0,6$  i henhold til DS411

Ved forankring af armeringsstænger, der har  $\zeta < 0,6$  og  $\varphi \geq 12$  mm, skal armeringsenderne bukket om, således at de danner kroge. Vedr. udførelse af krogene henvises til DS411.

Ved tryk i armeringen bestemmes en basisforankringslængde  $l_b$  i henhold til DS411:

$$l_b = 30 \varphi \quad (4.6-3)$$

Hvis der optræder trækspændinger i betonen vinkelret på armeringens længderetning vil forankringslængderne være større end dem, der er angivet ovenfor. Derfor skal man sørge for, at forankring af armering foretages i områder af betonen, hvor disse trækspændinger ikke forekommer. Omvendt gælder det også, at der kan regnes med kortere forankringslængder, hvis der i forankringsområderne forekommer trykspændinger vinkelret på armeringen. Dette er f.eks. tilfældet ved bjælkeunderstøtninger.

Reglerne ovenfor forudsætter tilstedeværelse af tværarmering, hvis armeringen forankres i en betonkonstruktions randzoner. Dette er oftest tilfældet ved bjælker og søjler, hvor hovedarmeringen normalt er placeret langs overfladen af betonen. I bjælker og søjler kan bøjler, der er regnet udnyttet som forskydningsarmering også udnyttes som tværarmering.

Hvis tværarmeringen forøges udover en minimumsarmering, kan ovenstående forankringslængder reduceres, se afsnit 4.6.5.

4.6-8

#### 4.6.5 Bestemmelse af nødvendig forankringslængde og tværarmering.

Nødvendig forankringslængde:

Hvis armeringen ikke udnyttes helt kan forankringslængden reduceres svarende hertil. Mængden af tværarmering har også indflydelse på forankringslængdens størrelse. Den nødvendige forankringslængde  $l_{nødv}$  kan således udtrykkes ved

$$l_{nødv} = c \frac{\sigma_s}{f_y} l_b \quad (4.6-4)$$

hvor  $\sigma_s$  er den aktuelle spænding i armeringen, der skal forankres.  
 $c$  er en faktor, der er afhængig af mængden af tværarmering

I henhold til DS411 er  $c = 1$  ved en tværarmeringsmængde bestemt af (4.6-5). Betegnelsen  $s_{55}$  refererer til, at reglen ofte benævnes "55-reglen".

$$s_{55} = 55 \frac{\varphi_t^2}{\varphi} \quad (4.6-5)$$

hvor  $s_{55}$  er afstanden mellem tværarmering svarende til "55-reglen"  
 $\varphi$  er diameteren for armeringen, der skal forankres  
 $\varphi_t$  er tværarmeringens diameter

Hvis afstanden  $s$  mellem tværarmeringen vælges større end  $s_{55}$  skal forankringslængden forøges proportionalt med afstanden  $s$ .

Forankringslængderne kan reduceres, hvis mængden af tværarmering øges i forhold til "55-reglen". Der kan regnes med, at en tredobling af tværarmeringen medfører, at forankringslængden kan nedsættes med 25 %. For mellemliggende værdier af tværarmeringsmængden kan der interpoleres retlinet.

Herved kan  $c$  bestemmes som angivet nedenfor:

$$s \geq s_{55} : c = \frac{s}{s_{55}} \quad (4.6-6)$$

$$\frac{1}{3} s_{55} < s < s_{55} : c = \frac{3s}{8s_{55}} + \frac{5}{8} \quad (4.6-7)$$

$$s \leq \frac{1}{3} s_{55} : c = 0,75 \quad (4.6-8)$$

Når  $c$  kendes kan den nødvendige forankringslængde bestemmes i henhold til (4.6-4).

Bestemmelse af maksimal afstand mellem tværarmering ved en aktuel forankringslængde:  
Svarende til en aktuel forankringslængde  $l_{akt}$ , kan en tilsvarende aktuel  $c$ -værdi bestemmes ved (4.6-6), som fremkommer ved omskrivning af (4.6-4):

$$c_{akt} = \frac{f_y}{\sigma_s} \frac{l_{akt}}{l_b} \quad (4.6-9)$$

Svarende til disse aktuelle  $c$ -værdier kan maksimale tværarmeringsafstande bestemmes:

$$0,75 \leq c_{akt} \leq 1 : s \leq \frac{(8 c_{akt} - 5) s_{55}}{3} \quad (4.6-10)$$

$$c_{akt} \geq 1 : s \leq c_{akt} s_{55} \quad (4.6-11)$$

Hvis  $c_{akt} < 0,75$  er den aktuelle forankringslængde  $l_{akt}$  for lille. Forankringen vil ikke kunne foregå, uanset hvor tæt man indlægger tværarmering.

Minimale stødlængder:

I henhold til DS411 må der ikke anvendes mindre stødlængder end  $15\phi$  eller 250 mm uanset udnyttelsesgraden og mængden af tværarmering. Ved stød forstås overlappingsstød, som er omtalt i afsnit 4.6.1.

Stød indenfor samme stødlængde:

I plader må højst halvdelen, i bjælker og skiver højst en tredjedel af stængerne stødes indenfor samme stødlængde, medmindre armeringens regningsmæssige styrke nedsættes med 20% eller stødlængden forøges med 50%.

Betydning af større afstande mellem 2 armeringsstænger, der stødes:

Hvis der forekommer store afstande mellem 2 armeringsstænger, der stødes, skal stødlængden forøges, idet trykspredningen i betonen fra trækket i den ene armeringsstang "bruger" noget af stødlængden før den når den anden armeringsstang. I henhold til DS411 skal man forøge stødlængden med afstanden mellem de 2 stænger, der stødes, når den indbyrdes afstand er større end 4 gange den mindste armeringsdiameter.

Eksempel 4.6-1.

I længdearmeringen i undersiden af en bjælke skal der udføres et stød.

I situation 1 bestemmes den nødvendige tværarmeringsmængde ved en aktuel forankringslængde.

I situation 2 bestemmes den nødvendige forankringslængde ved et aktuelt tværarmeringsarrangement.

#### 4.6-10

I henhold til (4.2-34) bestemmes den største regningsmæssige trækraft, der forekommer i armeringen over stødlængden til  $F_{s,d} = 170$  kN.

Beregningsforudsætninger:

Normal sikkerhedsklasse, normal kontrolklasse og passiv miljøklasse.

Materialedata:

Betonen har karakteristisk trykstyrke  $f_{ck} = 20$  MPa.

Længdearmeringen i undersiden af bjælken består af 3 Y20 (B550,  $\zeta = 0,8$ ).

3 Y20 har  $A_s = 942$  mm<sup>2</sup>

I tabel 4.6-2 aflæses basisforankringslængden  $l_b = 875$  mm ved  $\varphi = 20$  mm,  $\zeta = 0,8$  og  $f_{ck} = 20$  MPa,

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{550}{1,3} = 423 \text{ MPa}$$

Som forskydningsarmering/tværarmering anvendes Y6-bøjler (B550).

I henhold til (4.6-7) bestemmes:

$$s_{55} = 55 \frac{\varphi_t^2}{\varphi} = 55 \frac{6^2}{20} = 99 \text{ mm}$$

Den aktuelle armeringsspænding bestemmes:

$$\sigma_{sd} = \frac{F_{sd}}{A_s} = \frac{170 \cdot 10^3}{942} = 180 \text{ MPa}$$

1. situation:

Alle 3 armeringsstænger stødes indenfor samme stødlængde, der er 600 mm lang.

I det følgende skal det eftervises, at stødlængden er tilstrækkelig, og den maksimale, tilladelige afstand mellem tværarmering skal bestemmes.

I henhold til (4.6-9) er

$$c_{akt} = \frac{f_{yd}}{\sigma_s} \frac{l_{akt}}{l_b} = \frac{423}{180} \frac{600}{1,5 \cdot 875} = 1,07$$

Basisforankringslængden er forøget med 50%, idet armeringen stødes indenfor samme stødlængde.

Da  $c_{akt} \geq 0,75$  er det muligt at forankre armeringen ved den aktuelle stødlængde.

Idet  $c_{akt} \geq 1$  kan den største afstand mellem tværarmeringen bestemmes i henhold til (4.6-11):

$$s \leq c_{akt} s_{55} = 1,07 \cdot 99 = 106 \text{ mm}$$

På stødlængden skal der således mindst være

$$\frac{l_{akt}}{s} = \frac{600}{106} = 5,7 \sim 6 \text{ bøjler}$$

2. situation:

Den aktuelle afstand mellem tværarmeringen er  $s = 200$  mm.

Alle 3 armeringsstænger stødes også i denne situation indenfor samme stødlængde.

I det følgende skal den nødvendige forankringslængde bestemmes.

Idet  $s = 200$  mm er større end  $s_{55} = 99$  mm kan  $c$  bestemmes ved (4.6-6):

$$c = \frac{s}{s_{55}} = \frac{200}{99} = 2,02$$

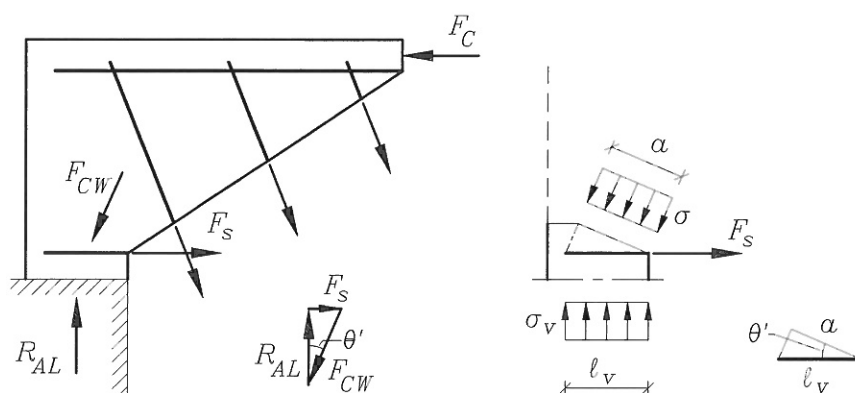
I henhold til (4.6-4) er

$$l_{nødv} = c \frac{\sigma_s}{f_y} l_b = 2,02 \cdot \frac{180}{423} \cdot 1,5 \cdot 875 = 1128 \text{ mm}$$

I begge situationer er stødlængderne større end kravene til minimale stødlængder  $15 \phi = 15 \cdot 20 = 300$  mm og 250 mm.

#### 4.6.6 Forankring af armering ved endeunderstøtninger for bjælker.

Ved bjælkers endeunderstøtninger forekommer der et specielt forankringsproblem, idet skrårevneeffekten er årsag til et betydeligt træk i længdearmeringen her.



Figur 4.6-5 Udsnit af bjælke ved understøtning

I figur 4.6-5 er den venstre del af en bjælke vist. Bjælkevederlagets dybde  $l_v$  bestemmes som den længde, længdearmeringen går ind over vederlagskanten.

På hele vederlagets dybde regnes reaktionen  $R_{AL}$  at være jævnt fordelt. Dette tryk forplanter sig gennem betonen lodret op til armeringen, hvor det bøjes af mod højre pga. trækket  $F_s$  i armeringen. Over armeringen spredes trykket ud op mod bjælkens overside. Dette tryk modsvares af det skrå betontryk fra forskydningspåvirkningen og eventuel last på bjælkens overside. Trykket, der spredes sig ud, svarer til kraften  $F_{CW}$ . Dette er en simplificeret model. De komplicerede spændingstilstande, som forekommer i virkeligheden, vil ikke blive omtalt nærmere her.

I henhold til (4.2-35) gælder:

$$F_s = \frac{M}{z} + \frac{1}{2} V(\cot\theta - \cot\alpha) + \frac{1}{2} q z \cot\theta \cot\alpha \quad (4.6-12)$$

4.6-12

Midt i vederlaget er  $M = 0$  og  $V = R_{AL}$ . Idet variationen i  $M$  og  $V$  er lille på den korte strækning fra midten af vederlaget til vederlagskanten regnes der tilnærmet med værdierne ved midten af vederlaget:

$$F_s = \frac{1}{2} R_{AL}(\cot\theta - \cot\alpha) + \frac{1}{2} q z \cot\theta \cot\alpha \quad (4.6-13)$$

Ved lodrette bøjler, hvor  $\cot\alpha = 0$ :

$$F_s = \frac{1}{2} R_{AL} \cot\theta \quad (4.6-14)$$

Idet kræfterne  $R_{AL}$ ,  $F_s$  og  $F_{CW}$  skal være i ligevægt med hinanden gælder:

$$F_{CW} = \sqrt{R_{AL}^2 + F_s^2} \quad (4.6-15)$$

Kraften  $F_{CW}$  forudsættes i det flg. optaget i en tryklamel med konstant bredde som vist i figur 4.6-5. Tryklamellens bredde  $a$  kan bestemmes ved at betragte de lignedannede trekanter vist på figur 4.6-5:

$$a = l_v \frac{R_{AL}}{F_{CW}} \quad (4.6-16)$$

Trykspændingen i den skrå tryklamel kan udtrykkes:

$$\sigma_c = \frac{F_{CW}}{a b_w} \quad (4.6-17)$$

hvor  $b_w$  er bjælkekroppens bredde.

Indsættes (4.6-16) i (4.6-17) fås

$$\sigma_c = \frac{F_{CW}}{a b_w} = \frac{F_{CW}^2}{l_v R_{AL} b_w} \quad (4.6-18)$$

For at undgå trykbrud i betonen stilles kravet:

$$\sigma_c \leq v f_{cd} \quad (4.6-19)$$

hvor  $v$  er en effektivitetsfaktor tilsvarende den, der er anvendt i (4.2-21), hvor der er tale om overførsel af skråt betontryk til forskydningsbøjler og længdearmring. Her er der tale om overførsel af skråt betontryk til vederlag og længdearmring, og derfor har  $v$  en anden værdi her.

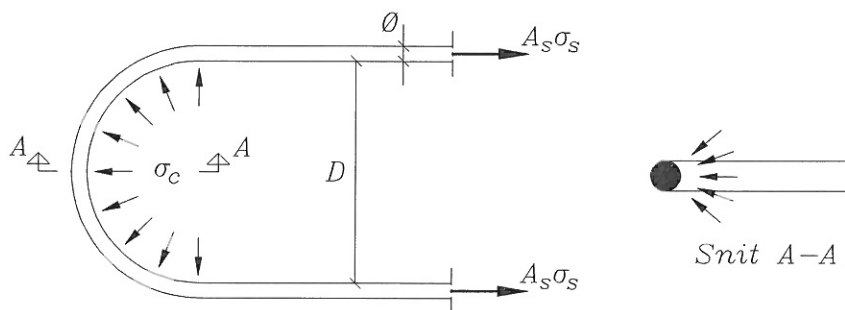
I henhold til [4.6-3] kan der regnes med  $v = 0,8$  for bjælker, der ikke er slanke. For slanke bjælker kan der regnes med  $v = 0,6$ . Slanke bjælker kan defineres som bjælker, der har en højde større end 4 gange kropsbredden.

På strækningen  $l_v$  skal kraften  $F_s$  forankres i betonen. Idet  $F_s$  ikke er ubetydelig og  $l_v$  er forholdsvis kort, vil der ofte være problemer med at klare forankringen. Hvis dette er tilfældet kan man forbedre forankringen på flere måder:

- Ved ilægning af ekstra tværarmring (bøjler) over vederlaget
- Ved ilægning af ekstra længdearmring lokalt ved understøtningen, hvorved  $l_{nødv}$  reduceres iht. (4.6-4). Den ekstra længdearmring bør gå en basisforankringslængde ind i bjælken for at sikre, at de bliver ligeså effektive som den almindelige længdearmring.
- Ved langs bjælkens undersidearmring at ilægge vandrette u-bøjler, der vender de 2 frie ender væk fra understøtningen, se figur 4.6-6. Anvendelse af U-bøjler omtales nærmere nedenfor.
- Ved mekanisk fastgørelse af længdearmringen til stålbeslag, der indstøbes i bunden af bjælken ved vederlaget.

Størrelsen af den kraft en U-bøjle kan forankre er begrænset af, at der ikke må kunne optræde trykbrud i betonen under krumningen, og at der ikke må optræde flydning i armeringen.

På figur 4.6-6 er der vist en trækpåvirket U-bøjle, der kun regnes fastholdt af betontrykket i rundingen.



Figur 4.6-6 Kræfter og spændinger ved U-bøjle anvendt som forankring

I krumningen kan der tilnæret regnes med betonspændingen

$$\sigma_c = \frac{2 A_s \sigma_s}{D \varphi} = 1,57 \frac{\varphi \sigma_s}{D} \quad (4.6-20)$$

## File Contains Data for PostScript Printers Only

Figur 4.6-7 Trykspredning ved en U-bjl. i undersiden af en bjælke

Omkring U-bøjlen optræder der 3-aksede spændingstilstande i krumningen som vist på figur 4.6-7. Ringspændingen giver således en spændingstilstand, der forudsættes at være som koncentreret tryk på lejeflader.

## 4.6-14

For at undgå lokalt trykbrud ved koncentreret last skal trykspændingerne i henhold til DS411-afsnit 6.2.4 opfylde kravet:

$$\sigma_c \leq c_1 f_c \quad (4.6-21)$$

hvor

$$c_1 = \sqrt{0,5 \frac{A}{A_1}} \quad (4.6-22)$$

A er det areal som trykket kan regnes fordelt ud på i betonen iht. betingelserne angivet i DS411. Arealet fastsættes så stort som muligt. Dette opnås ved at sætte højden af arealet lig med  $2h$  og bredden af arealet lig bjælkebredden ved symmetrisk placering af U-bøjlen. Bredden af arealet er dog begrænset af betingelsen " $d_b + d_1 \leq 4b_1$ ", der ved  $h \leq 4,5\phi$  medfører en maksimal bredde på  $D + 9\phi - 2h$ .

$A_1$  er det areal hvorpå trykket påføres betonen. Her vil det svare til  $D \phi$

I forankringsområdet over et vederlag forekommer der trykspændinger vinkelret på armeringen fra vederlagstrykket. Disse trykspændinger vil forøge forankringsevnen både for længdearmering og U-bøjler i forhold til det, der er beskrevet ovenfor. Virkningen af disse trykspændinger må i henhold til DS411 medtages, hvis virkningen kan dokumenteres.

Eksempel 4.6-2.

Ved en bjælke med endeunderstøtning og tværsnit som vist i figur 4.6-8 skal forankringen af længdearmeringen undersøges og tværarmeringsbehov bestemmes.

Betonen har  $f_{ck} = 30$  MPa og  $f_{cd} = 18,2$  MPa .

Armeringen har  $f_{yk} = 550$  MPa og  $f_{yd} = 423$  MPa .

Længdearmeringen i bjælkens underside består af 4 Y20 (B550,  $\zeta = 0,8$ ), som har  $A_s = 1257$  mm<sup>2</sup>

Der er regnet med  $\cot\theta = 2$  ved bestemmelsen af forskydningsarmeringen.

$R_{AL} = 108$  kN

Bestemmelse af kræfter og betontrykspændinger:

Trækket i armeringen

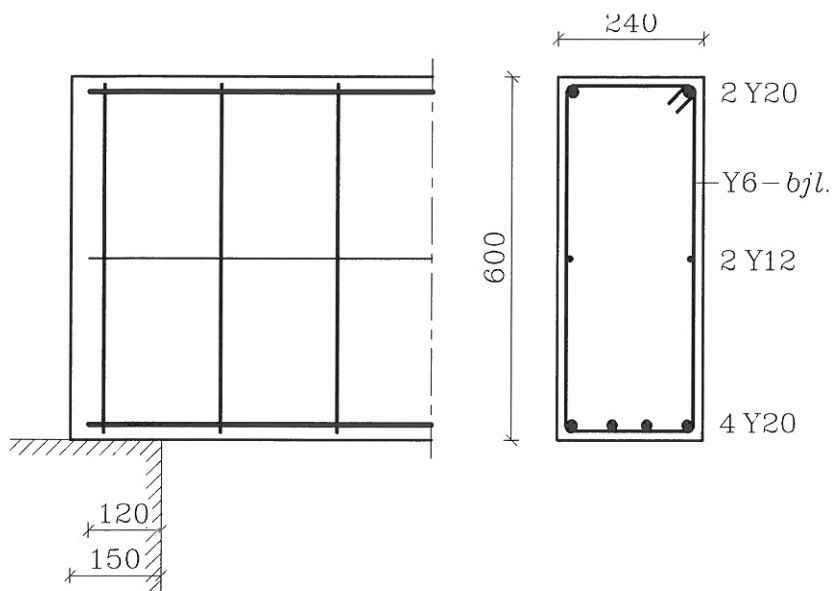
$$F_s = \frac{1}{2} V \cot\theta = \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot 2 = 108 \text{ kN}$$

Det skrå betontryk

$$F_{CW} = \sqrt{V^2 + F_s^2} = \sqrt{108^2 + 108^2} = 153 \text{ kN}$$

Den skrå betontrykspænding

$$\sigma_c = \frac{F_{CW}^2}{l_v R_{AL} b_w} = \frac{(153 \cdot 10^3)^2}{120 \cdot 108 \cdot 10^3 \cdot 240} = 7,5 \text{ MPa}$$



Figur 4.6-8 Endeunderstøtning og tværsnit for en armeret bjælke

Den skrå betontrykspænding  $\sigma_c \leq v f_{cd} = 0,8 \cdot 18,2 = 14,5$  MPa og dermed er det eftervist at betontrykspændingerne kan optages.

Beregning af forankringen:

Trækspændingen i armeringen

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{108 \cdot 10^3}{1257} = 85,9 \text{ MPa}$$

Basisforankringslængden  $l_b = 750$  mm bestemmes i tabel 4.6-2

I henhold til (4.6-9) bestemmes

$$c_{akt} = \frac{f_y}{\sigma_s} \cdot \frac{l_{akt}}{l_b} = \frac{423}{85,9} \cdot \frac{120}{750} = 0,79$$

I henhold til (4.6-5) bestemmes

$$s_{55} = 55 \frac{\phi_t^2}{\phi} = 55 \cdot \frac{6^2}{20} = 99 \text{ mm}$$

Idet  $0,75 \leq c_{akt} \leq 1$  gælder det i henhold til (4.6-10), at afstanden mellem tværarmeringen

$$s \leq \frac{(8 c_{akt} - 5) s_{55}}{3} = \frac{(8 \cdot 0,79 - 5) \cdot 99}{3} = 43 \text{ mm}$$

Over vederlaget skal bjælken således være forsynet med Y6 bjl. pr maks. 43 mm. Det svarer til  $120/43 = 2,8 \sim 3$  Y6 bjl.

#### 4.6-16

Alternativ forankring hvor der ilægges en vandret Y16 U-bjæl:

Bestemmelse af U-bøjleens forankringsevne:

Indvendig bukkediameter bestemmes til 168 mm.

Afstanden fra bjælkens underside til midten af U-bøjlen bestemmes til  $h = 48$  mm.

Idet  $h \leq 4,5\phi = 4,5 \cdot 16 = 72$  mm, må bredden af det areal, som trykket regnes fordelt ud på, ikke være større end  $D + 9\phi - 2h = 168 + 9 \cdot 16 - 2 \cdot 48 = 216$  mm.

Herved opnås  $A = 2 \cdot 48 \cdot 216 = 20736$  mm<sup>2</sup>.

I henhold til (4.6-22) bestemmes:

$$c_1 = \sqrt{0,5 \cdot \frac{A}{A_1}} = \sqrt{0,5 \cdot \frac{20736}{16 \cdot 168}} = 1,96$$

I henhold til (4.6-21):

$$\sigma_c \leq c_1 f_c = 1,96 \cdot 18,18 = 35,7 \text{ MPa}$$

Y16 U-bøjlen kan ikke optage en trækraft større end  $A_s f_{yd} = 402 \cdot 423 \cdot 10^{-3} = 170$  kN

Der kan ikke overføres et tryk til betonen, der er større end  $D \phi c_1 f_{cd} = 168 \cdot 16 \cdot 35,7 \cdot 10^{-3} = 96$  kN

Y16 U-bøjlen kan således forankre en kraft = 96 kN.

Længdearmeringen (4 Y20) skal forankre den del af kraften, som U-bøjlen ikke kan optage.  $108 - 96 = 12$  kN skal således forankres af længdearmeringen. Idet længdearmeringen ved tværarmering pr. 43 mm kan forankre 107 kN, vil der ikke være problemer med at optage disse resterende 12 kN ved en enkelt bøjle over vederlaget.

## Litteraturliste:

- [4.6-1] M. P. Nielsen: Beton 1, del 1, DTU Lyngby, 1993
- [4.6-2] Anker Stæhr-Jørgensen: Konstruktionslære - betonkonstruktioner, Danmarks Ingeniørakademi · Bygningsafdelingen · Lyngby
- [4.6-3] Bent Feddersen: Brudberegning (Artikel i Dansk Beton nr. 3 1987 udgivet af Dansk Beton Industriforening, Betonelement-Foreningen, Dansk Betonforening og Dansk Fabrikbetonforening)

## **4.7 Bjælkers og enkeltspændte pladers bøjningsbæreevne**

## 4.7 Bjælkers og enkeltspændte pladers bøjningsbæreevne.

### 4.7.1 Bøjningsbæreevne.

I dette afsnit behandles bjælkers og enkeltspændte pladers bøjningsbæreevne, der kan fastlægges som den maksimale last, konstruktionen kan påføres. Bæreevnen afhænger af belastningens sammensætning og placering.

I praksis bestemmes bøjningsbæreevnen dog som den momentkapacitet for hele bjælken, der sikrer, at den numeriske værdi af snitmomenterne overalt i bjælken er mindre end bjælkens momentkapacitet.

I det følgende vil bjælkens bøjningsbæreevne blive bestemt som bjælkens momentkapacitet.

Enkeltspændte plader og bjælker vil under ét blive omtalt som bjælker. De fleste forhold, der omtales for bjælker gælder også for enkeltspændte plader.

Ved bestemmelse af bjælkens momentkapacitet skal der tages hensyn til skråvneeffekten, der bevirker, at der i et snit i en bjælke skal kunne optages et større moment end det beregnede snitmoment eller sagt på en anden måde: Armeringen i det betragtede snit skal kunne optage en større kraft end svarende til

$$F_s = \frac{M}{z} \quad (4.7-1)$$

Vedr. skråvneeffekten se afsnit 4.2.5 og 4.7.3.

I dette afsnit vil skråvneeffekten kun blive omtalt for lodrette bøjler.

I statisk ubestemte fågangspåvirkede konstruktioner bestemmes snitkræfterne normalt ved anvendelse af plasticitetsteoriens nedreværdisætning.

Ved svingningspåvirkede konstruktioner eller konstruktioner, der skal være tætte, f.eks. væskebeholdere, bestemmes snitkræfterne normalt ved anvendelse af elasticitetsteori.

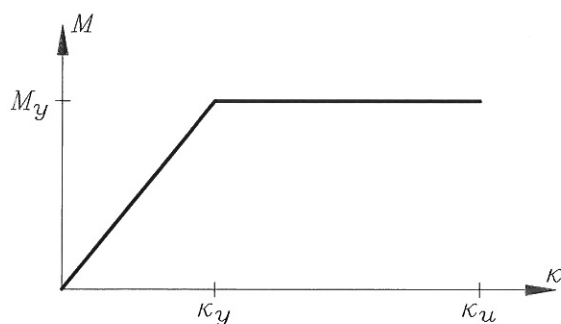
For bjælker, der er påvirket af vridningsmoment, vil dette vridningsmoment give anledning til kræfter i længdearmeringen, der skal adderes til de kræfter, der stammer fra bøjningspåvirkningen. I dette afsnit behandles ikke vridningspåvirkede konstruktioner.

En eftervisning af, at en bjælke ved en bestemt belastning har tilstrækkelig bøjningsbæreevne, kan bestå af følgende punkter:

- bestemmelse af momentfordelingen i bjælken
- bestemmelse af flydemomenterne i bjælken
- bestemmelse af krav til flydemomenterne, når der tages hensyn til skråvneeffekten
- eftervisning af, at flydemomenterne kan overholde disse krav

## 4.7.2 Bestemmelse af flydemomenterne i en bjælke.

I det følgende forudsættes armeringens arbejdslinie at være lineærelastisk-idealplastisk, og bøjningsarbejdslinien forudsættes at have et idealiseret bilineært foløb som vist i figur 4.7-1. Betegnelsen flydemoment,  $M_y$ , vil blive anvendt for brudmomentet  $M_u$ , fordi brudmomentet som nævnt bliver regnet konstant for  $\epsilon_s \geq \epsilon_y$ .



Figur 4.7-1 Idealiseret bøjningsarbejdslinie for et armeret tværsnit

Flydemomentet kan i henhold til afsnit 4.1 udtrykkes som

$$M_u = A_s f_y z \quad (4.7-2)$$

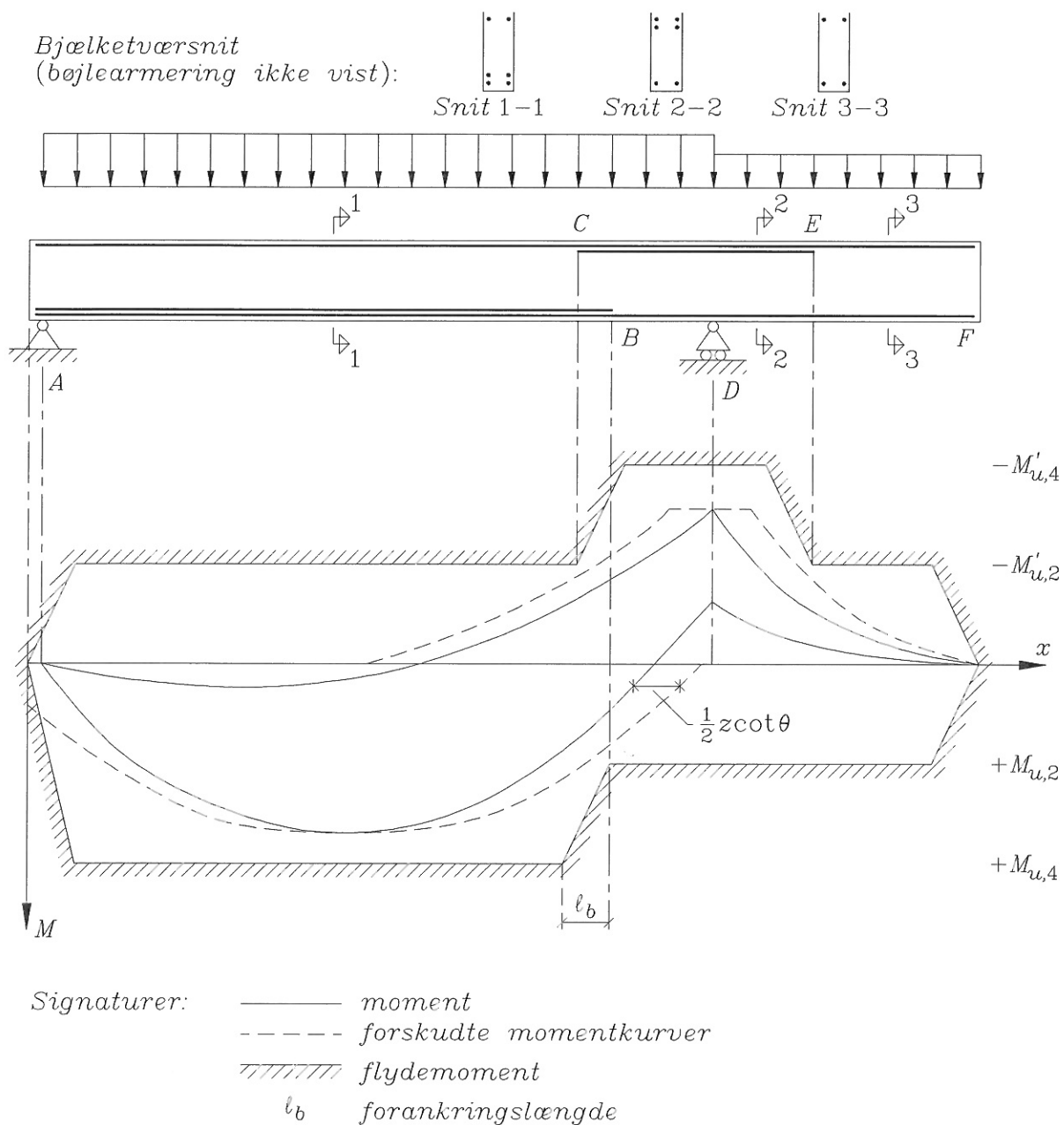
Flydemomentets størrelse afhænger i følge (4.7-2) af:

- Armeringens tværsnitsareal  $A_s$ , som kan variere, hvis ikke alle armeringsstænger er gennemgående i hele bjælkens længde. Dette forhold, der benævnes *afkortet armering* omtales senere i dette afsnit.
- Armeringens flydespænding  $f_y$ .
- Den indre momentarm  $z$ , som kan variere i forhold til udformningen af tværsnittet samt armeringens mængde og placering.

Der må kun regnes med trækflydekraften  $A_s f_y$  i armeringen, når denne er tilstrækkelig forankret. Hvis forankringsforholdene er tilstrækkelige, kan trækflydekraften i en armeringsstang regnes at være til stede i en afstand lig forankringslængden  $l_b$  fra stangenden. Fra enden af en armeringsstang og ind over en forankringslængde antages kraften i armeringen og dermed også flydemomentet at vokse lineært.

En kurve, der viser flydemomenternes variation i bjælken, benævnes i det følgende *flydemomentkurven*, se figur 4.7-2. Flydemomentkurven vil i et område, hvor armeringen er tilstrækkelig forankret, og hvor  $z$  er konstant, være en vandret linie. I et område, hvor armeringen forankres, vil flydemomentkurven være en skrå ret linie, der forbinder de 2 vandrette liniestykker, der angiver flydemomentkurven i områderne udenfor forankringsområdet. Den vandrette udstrækning af det skrå liniestykke har en længde, der er lig med en forankringslængde. Vedr. bestemmelse af forankringslængder henvises til afsnit 4.6.

I figur 4.7-2 er der vist en bjælke, der er forsynet med 2 gennemgående armeringsstænger både i underside og overside. Udover dette er der 2 ekstra armeringsstænger i undersiden på strækningen AB, og 2 ekstra armeringsstænger i oversiden mellem C og E.



Figur 4.7-2 Opstalt af bjælke samt kurver for snitmomentet, det forskudte snitmoment og flydemomentet.

#### 4.7-4

I undersiden er der mellem A og B i alt 4 stænger, som giver bjælken det positive flydemoment  $M_{u,4}$ , hvor alle stængerne er fuldt forankrede. Mellem B og F, hvor der kun er 2 stænger, kan der regnes med det hertil svarende positive flydemoment  $M_{u,2}$ . Tilsvarende kan der regnes med de negative flydemomenter  $M'_{u,4}$  og  $M'_{u,2}$ , hvor der er hhv. 4 og 2 fuldt forankrede armeringsstænger i oversiden.

Hvor armeringen er fuldt forankret, kan der optegnes vandrette kurvestykker svarende til disse flydemomenter. I forankringsområderne ved A, B, C, E og F afbildes flydemomentet ved skrå liniestykker som omtalt ovenfor.

Kurverne optegnes med positive værdier nedad og negative værdier opad.

#### 4.7.3 Krav til flydemomenternes størrelse.

I henhold til udtrykket (4.2-35) kan kravet til flydemoment (længdearmering) ved bjælker med lodret bøjlearmering udtrykkes ved:

$$M(x) \geq M(x) + \frac{1}{2} V(x) z \cot \theta, \quad (4.7-3)$$

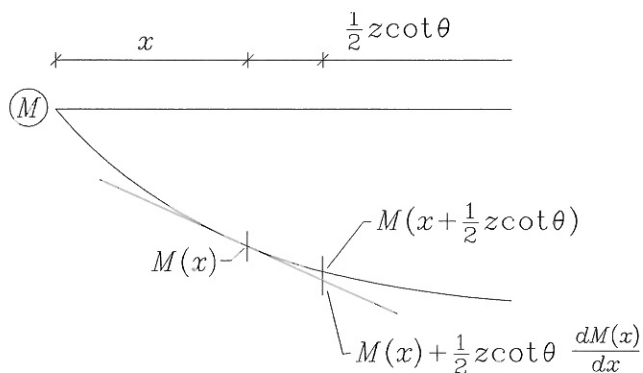
hvor  $x$  er en længdeparameter målt langs bjælken.

Der ses, at skrårevneeffekten giver tillægget  $\frac{1}{2} V(x) z \cot \theta$  til snitmomentet.

Udtrykket (4.7-3) er kun gyldigt, hvor både  $V$  og  $M$  er positive.

Udtrykket (4.7-3) kan omskrives til:

$$M_u(x) \geq M(x) + \frac{1}{2} \frac{dM(x)}{dx} z \cot(\theta) \quad (4.7-4)$$



Figur 4.7-3 Udsnit af momentkurve

I figur 4.7-3 kan man se, at behovet for flydemoment kan afbildes som snitmomentet plus et tillæg, der svarer til at følge tangenten den vandrette afstand  $\frac{1}{2} z \cot\theta$ .

I henhold til EC2 og DS411 kan man i stedet for (4.7-4), som en tilnærmelse, stille følgende krav til flydemomentet:

$$M_u(x) = M(x + \frac{1}{2} z \cot \theta) \quad (4.7-5)$$

hvilket svarer til, at flydemomentet  $M_u(x)$  i snittet med abscissen  $x$  skal være større end momentet i et snit med abscissen  $x + \frac{1}{2} z \cot\theta$ . Denne tilnærmelse er på den usikre side.

Ved en bjælke over et fag, belastet med jævnt fordelt last, vil tilnærmelsen være ca. 4% af  $M_{maks}$ , når der regnes med  $z = 0,1 \cdot \text{spændvidden}$  og  $\cot\theta = 2$ .

I det betragtede tilfælde, hvor både momenter og forskydningskræfter er positive, betyder dette, at det nødvendige flydemoment tilnærmet kan afbildes som den kurve, der fremkommer ved, at den oprindelige momentkurve forskydes stykket  $\frac{1}{2} z \cot\theta$  parallelt med bjælkeaksen mod venstre. Det ses heraf, at skrårevneeffekten er årsag til et større krav til flydemomentet end  $M_u(x) \geq M(x)$ , nemlig  $M_u(x) \geq M(x + \frac{1}{2} z \cot\theta)$ , og er dermed årsag til et større længdearmeringsbehov.

Disse konklusioner og udtrykkene (4.7-3), (4.7-4) og (4.7-5) gælder i det betragtede tilfælde dvs. for  $M \geq 0$  og  $V \geq 0$ . For andre bjælkeområder kan der udledes tilsvarende, hvilket fører frem til følgende generelle formulering:

*Kravet til flydemoment kan tilnærmet afbildes som kurver, der fremkommer ved, at de oprindelige momentkurver forskydes stykket  $\frac{1}{2} z \cot\theta$  parallelt med bjælkeaksen væk fra momentekstremalene.*

I figur 4.7-2 er de forskudte momentkurver vist. Hvor flydemomentkurven ligger udenfor de forskudte momentkurver, er bøjningsbæreevnen tilstrækkelig. Dette er tilfældet - undtagen lokalt ved understøtning A. Her har man et forankringsproblem, der fx kan løses ved at forlænge bjælken ud over understøtning A eller ved at indlægge en specialarmering til optagelse af forankringskræfterne i længdearmeringen. Vedr. forankring af armering henvises til afsnit 4.6. Armeringen skal forankres i bjælken bag understøtningen ( $x < 0$ ) på en sådan måde, at den ved punkt A i henhold til ovenstående kan optage kraften  $F_s = M(\frac{1}{2} \cot\theta) / z$  eller mere korrekt i henhold til (4.2.-37)  $F_s = \frac{1}{2} V \cot\theta$ , idet der her kun behandles tilfældet med lodrette bøjler, hvorfor  $\cot\alpha = 0$ .

#### 4.7.4 Nedreværdiløsninger for bøjningsbæreevne.

En nedreværdi for bjælkers bøjningsbæreevne (brudlast) kan bestemmes i henhold til nedreværdisætningen, som i denne sammenhæng kan formuleres:

Hvis en statisk tilladelig og sikker momentfordeling kan bestemmes for en bjælke, vil den tilhørende last være mindre end eller lig med bjælkens brudlast (idet der kan være mulighed for at vælge en mere hensigtsmæssig momentfordeling).

#### 4.7-6

En sikker momentfordeling er en momentfordeling, der med tillæg for skrårevneeffekt, ikke er større end flydemomentet noget sted på bjælken.

I praksis vil man sjældent bestemme bæreevnen som den last, der hører til en given statisk tilladelig momentfordeling for den betragtede bjælke. Man vil i stedet bestemme bjælkets tværsnittets dimensioner og armering således, at den tilsvarende flydemomentkurve overalt ligger "udenfor" den forskudte statisk tilladelig momentkurve. Herved er momentfordelingen både statisk tilladelig og sikker, og den betragtede bjælkes bæreevne er ifølge nedreværdisætningen tilstrækkelig.

Nedreværdiløsninger er på den sikre side.

#### 4.7.5 Momentfordeling i statisk bestemte bjælker.

Ved en statisk bestemt bjælke kan der ved en given last kun bestemmes én statisk korrekt momentfordeling.

Den armerede betonbjælke, der er vist på fig. 4.7-2 er statisk bestemt. Bjælken er belastet med de jævnt fordelte laster  $q_1$  og  $q_2$  på strækningerne AD og DF. Svarende til  $q_{1,\text{maks}}$  og  $q_{2,\text{min}}$  kan den snitmmentkurve, der har de største positive momenter, optegnes. Tilsvarende kan den snitmmentkurve, der har de numerisk største negative momenter, optegnes for  $q_{1,\text{min}}$  og  $q_{2,\text{maks}}$ .

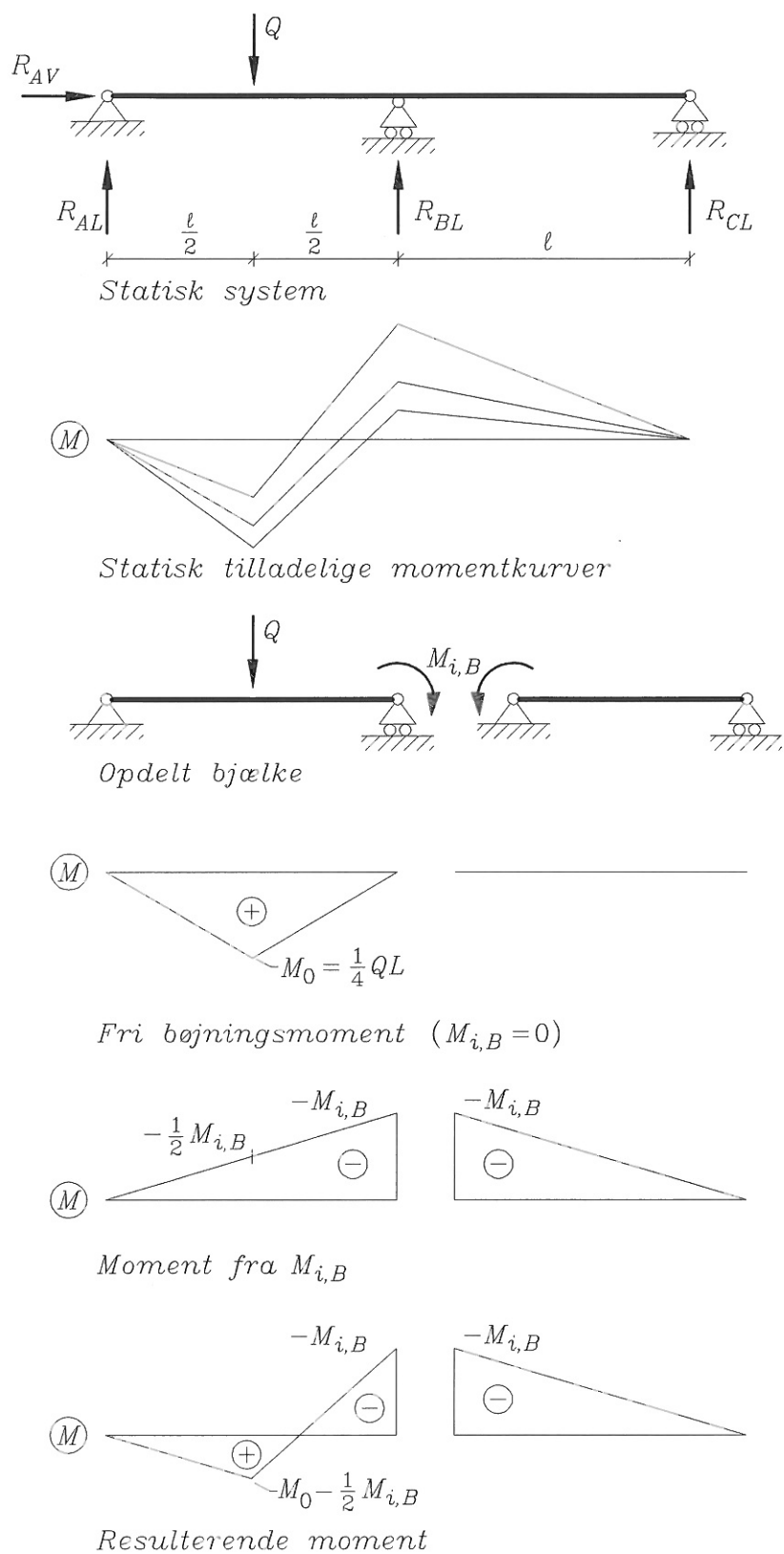
Disse 2 momentkurver er vist med fuldt optrukken streg på figur 4.7-2.

#### 4.7.6 Momentfordelingen i statisk ubestemte bjælker bestemt ved plastisk beregning.

Ved statisk ubestemte bjælker kan der vha. plasticitetsteori bestemmes uendelig mange statisk tilladelige momentfordelinger for given last.

En af disse løsninger er den *elasticitetsteoretiske løsning*. Anvendes den elasticitetsteoretiske løsning kan snitkræfterne f.eks. bestemmes ved hjælp af kraftmetoden, elementmetoden eller ved opslag i Teknisk Ståbi. Armerede bjælker kan kun forudsættes at have konstant stivhed ved urevnede tværsnit, der er symmetriske om en vandret akse. Idet armerede betonbjælker praktisk talt altid er revnede i brudtilstanden, er den elasticitetsteoretiske momentfordeling kun en statisk tilladelig løsning, som principielt ikke er bedre end de fleste andre.

På figur 4.7-4 er der vist en kontinuert bjælke, der spænder over 2 fag, belastet med en enkeltkraft midt på det ene fag. For samme størrelse af enkeltkraften er der også vist 3 momentfordelinger, der alle er statisk tilladelige. For alle valg af indspændingsmoment  $M_{i,B}$  vil der kunne bestemmes sammenhørende værdier for reaktionerne i A, B og C samt snitmmenter ved hjælp af ligevægtsligningerne.



Figur 4.7-4 Bjælke over 2 fag med punktlast  $Q$  midt på det ene fag.

#### 4.7-8

Hvis man skal bestemme den statisk tilladelige momentkurve, der fører til den største bæreevne svarende til den største nedreværdi for P, kan fremgangsmåden for bjælken i figur 4.7-4 være som angivet nedenfor:

- Bjælken betragtes som 2 enkeltbjælker
- Indspændingsmomenter ( $M_{i,B}$ ) påsættes begge bjælker ved understøtning B som erstatning for momentsammenhængen mellem de 2 enkeltbjælker
- Momentkurver for Q og  $M_{i,B}$  'erne optegnes for begge bjælker
- Momentkurverne summeres
- Alle statisk tilladelige momentfordelinger kan nu beskrives ved hjælp af Q og  $M_{i,B}$ :  

$$M_B = - M_{i,B}$$

$$M_Q = \frac{1}{4} Ql - \frac{1}{2} M_{i,B}$$
- Q kan udtrykkes ved de parametre, der indgår:  

$$Q = (4 M_Q + 2 M_{i,B}) / l$$
- Det ses umiddelbart, at Q har sin maksimale værdi, når snitmomenterne ved lasten og understøtningen er lig flydemomentet de pågældende steder.  

$$Q = (4 M_u + 2 M'_u) / l$$

Idet bøjningsarbejdslinien (se figur 4.1.5) har et langt vandret forløb før bøjningsbrud indtræffer, kan plasticitetsteorien anvendes til snitkraftbestemmelsen.

Danske normer beskriver helt tilbage til 1913 en plasticitetsteoretisk metode, som går under betegnelsen "delvis indspænding". I EC2 er metoden også med. Her har den betegnelsen "plastisk beregning". Det følgende vil hovedsageligt dreje sig om denne metode.

I figur 4.7-5 er snitmomentkurverne for en kontinuert bjælke over 2 fag ved forskellige størrelser af den jævnt fordelte last. Flydemomenterne for både positive og negative momenter er også afbildet.

Det forudsættes, at bøjningsarbejdslinien for bjælkens tværsnit er vandret for værdier af armeringstøjninger  $\epsilon_s$ , der er større end flydetøjningen  $\epsilon_y$ . Bjælken har rektangulært tværsnit og er forsynet med det samme armeringsareal i over- og undersiden. Herved opnås, at flydemomentet for negative momenter  $M_u'$  og flydemomentet for positive momenter  $M_u$ , er lige store.

Nedenfor omtales snitmomentudviklingen ved en jævnt fordelt last q, der vokser.

1. fase: Krumningerne overalt i bjælken er proportionale med snitmomenterne.

Snitmomenterne kan beregnes i henhold til elasticitetsteorien:

$$M_B = - 0,125 ql^2 \text{ og det største feltmoment } M_{AB} = 0,070 ql^2.$$

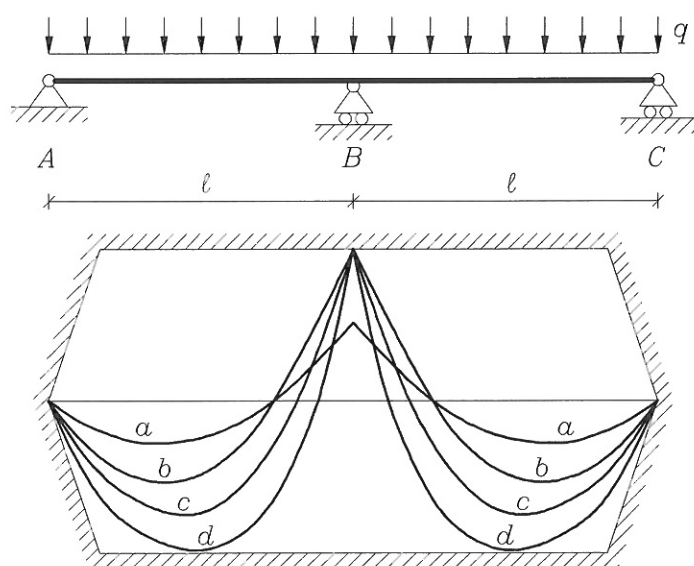
Momentkurve a svarer til denne situation.

1. fase kan fortsætte, indtil det numerisk største moment  $M_B = - 0,125 ql^2$  er lig med flydemomentet  $M_u'$ . Dette svarer til momentkurve b.

2. fase: Ved fortsat øgning af lasten  $q$  vil momentet i B være konstant lig med flydemomentet, mens den numeriske værdi af krumningen  $\kappa_B$  stadig vil vokse. Dette er ikke kritisk, såfremt bjælken har tilstrækkelig *rotationskapacitet* ved B - svarende til at den numeriske værdi af krumningen  $\kappa_B$  er mindre end brudkrumningen  $\kappa_u$ . Momentkurve c svarer til denne fase.

2. fase kan fortsætte indtil det største moment  $M_{AB}$  i faget når op på  $M_u$ . Momentkurve d svarer til denne situation. Når dette er sket vil der også forekomme flydeled midt i faget og der vil være dannet en mekanisme, der vil få bjælken til at kollapse ved yderligere forøgelse af lasten. 2. fase kan dog også være begrænset af kravet  $|\kappa_B| < \kappa_u$  (utilstrækkelig rotationskapacitet).

I 1. og 2. fase regnes der med henholdsvis en elasticitetsteoretisk og en plasticitetsteoretisk momentfordeling. Ved den plasticitetsteoretiske beregningsmåde (med flydeled) får man, som det fremgår af ovenstående, større bæreevner end efter elasticitetsteorien.



Figur 4.7-5 Statisk system, kurver for snitmomenter og flydemomentet for en statisk ubestemt bjælke.

#### 4.7.7 Forudsætninger for plastisk beregning i henhold til DS411 og EC2.

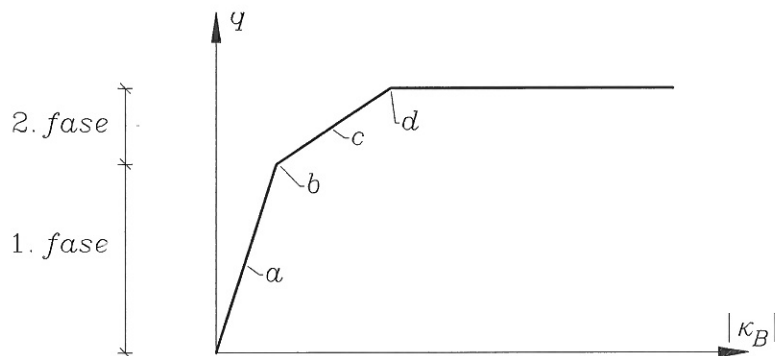
For at en plastisk beregning kan gennemføres skal følgende 2 forudsætninger være opfyldt:

- alle dimensionsgivende tværsnit i bjælken skal have en bøjningsarbejdslinie med et langt flydeområde
- der må ikke være risiko for, at der vil optræde krumninger større end brudkrumningen noget sted i bjælken (bjælken skal have tilstrækkelig rotationskapacitet).

Den første forudsætning anses i DS411 for opfyldt, hvis alle bjælketværsnit er normaltarmerede. Ved anvendelse af armeringsstål med  $f_{yk} = 550$  MPa vil et bjælketværsnit være normaltarmet ved  $x/d \leq 0,56$ .

## 4.7-10

I EC2 er man mere restriktiv, idet man her forlanger:  $x/d \leq 0,25$ , hvilket medfører, at der ikke må ilægges så meget armering i bjælkens overside ved punkt B og dermed ikke regnes med så store indspændingsmomenter.



Figur 4.7-6 Afbildning af sammenhæng mellem størrelserne af krumning i pkt. B og last q.

Den anden forudsætning er mere problematisk, idet krumningerne i flydeleddene kan være svære at bestemme. I et flydeled forekommer en vis vinkeldrejning og den tilhørende krumning vil derfor være stor, hvis flydeleddet har en lille udstrækning svarende til, at armeringen flyder meget på en kort strækning. Herved vil der være risiko for, at  $\epsilon_s > \epsilon_u$  og dermed  $|\kappa| > \kappa_u$ , d.v.s. utilstrækkelig rotationskapacitet. Desværre har man ingen pålidelige metoder til at bestemme længden af flydeleddene, hvorfor man må anvende bestemmelser, der erfaringsmæssigt sikrer tilstrækkelig rotationskapacitet i flydeleddene.

For kontinuerte bjælker med tilnærmelsesvis lige store fag primært belastet med jævnt fordelt last, opstilles der i DS411 og EC2 summariske regler, der skal sikre tilstrækkelig rotationskapacitet. For at sikre denne kræves, at snitkraftfordelingen ikke afviger for stærkt fra den elasticitetsteoretiske snitkraftfordeling, hvilket kan regnes opfyldt, når nedenstående krav er opfyldt:

$$\text{DS411: } \frac{1}{3} \cdot M_{\text{maks,maks}} \leq M_i \leq 2 \cdot M_{\text{maks,min}} \quad (4.7-6)$$

$$\text{EC2: } \frac{1}{2} \cdot M_{\text{maks,maks}} \leq M_i \leq 2 \cdot M_{\text{maks,min}} \quad (4.7-7)$$

hvor

$M_i$  er den numeriske værdi af snitmomentet ved en mellemunderstøtning  
 $M_{\text{maks,maks}}$  er det største af de positive dimensionsgivende snitmomenter i de 2 bjælkefag, der støder op til mellemunderstøtningen  
 $M_{\text{maks,min}}$  er det mindste af de positive dimensionsgivende snitmomenter i de 2 bjælkefag, der støder op til mellemunderstøtningen

Her er EC2 igen mere restriktiv.

I Danmark har den plasticitetsteoretiske løsning været anvendt siden 1913, hvor den for første gang var med i en dansk norm for betonkonstruktioner. Metoden benævnes “*delvis indspænding*”.

#### 4.7.8 Beregningsmetoder i henhold til EC2.

I henhold til EC2 - afsnit 2.5.3.2.2 kan der anvendes 4 forskellige metoder til fastsættelse af momentfordelinger:

1. Lineær beregning: Momentfordeling bestemt ved elasticitetsteori, hvor krumningerne holder sig under proportionalitetsgrænsen og regnes proportionale med snitmomenterne.
2. Lineær beregning med omfordeling, dvs. en reduktion af den numeriske værdi af momenterne over understøtningerne. EC2 angiver grænser for, hvor meget disse momenter må reduceres i forhold til værdierne beregnet efter elasticitetsteorien.
3. Ikke lineær beregning: En metode der tager hensyn til det ikke lineære forløb af materialernes arbejdslinier.
4. Plastisk beregning, som omtalt i afsnit 4.7.7.

Sidstnævnte metode er, bortset fra ovennævnte krav til forholdet  $x/d$  og grænserne for de valgte indspændingsmomenter, identisk med metoden, der i DS411 benævnes delvis indspænding. Vedr. de ovenfor nævnte EC2-metoder 1, 2 og 3 skal der henvises til EC2, idet de ikke vil blive nærmere behandlet her.

Den plastiske beregning er økonomisk i materialeforbrug og den projekterende ingeniør slipper nemt om ved snitkraftbestemmelsen, som ved de 3 andre metoder godt kan være temmelig besværlig - specielt ved kontinuerte bjælker, der spænder over mange fag.

#### 4.7.9 Plastisk beregning af en statisk ubestemt bjælke påvirket til ren bøjning.

Følgende fremgangsmåde kan anvendes:

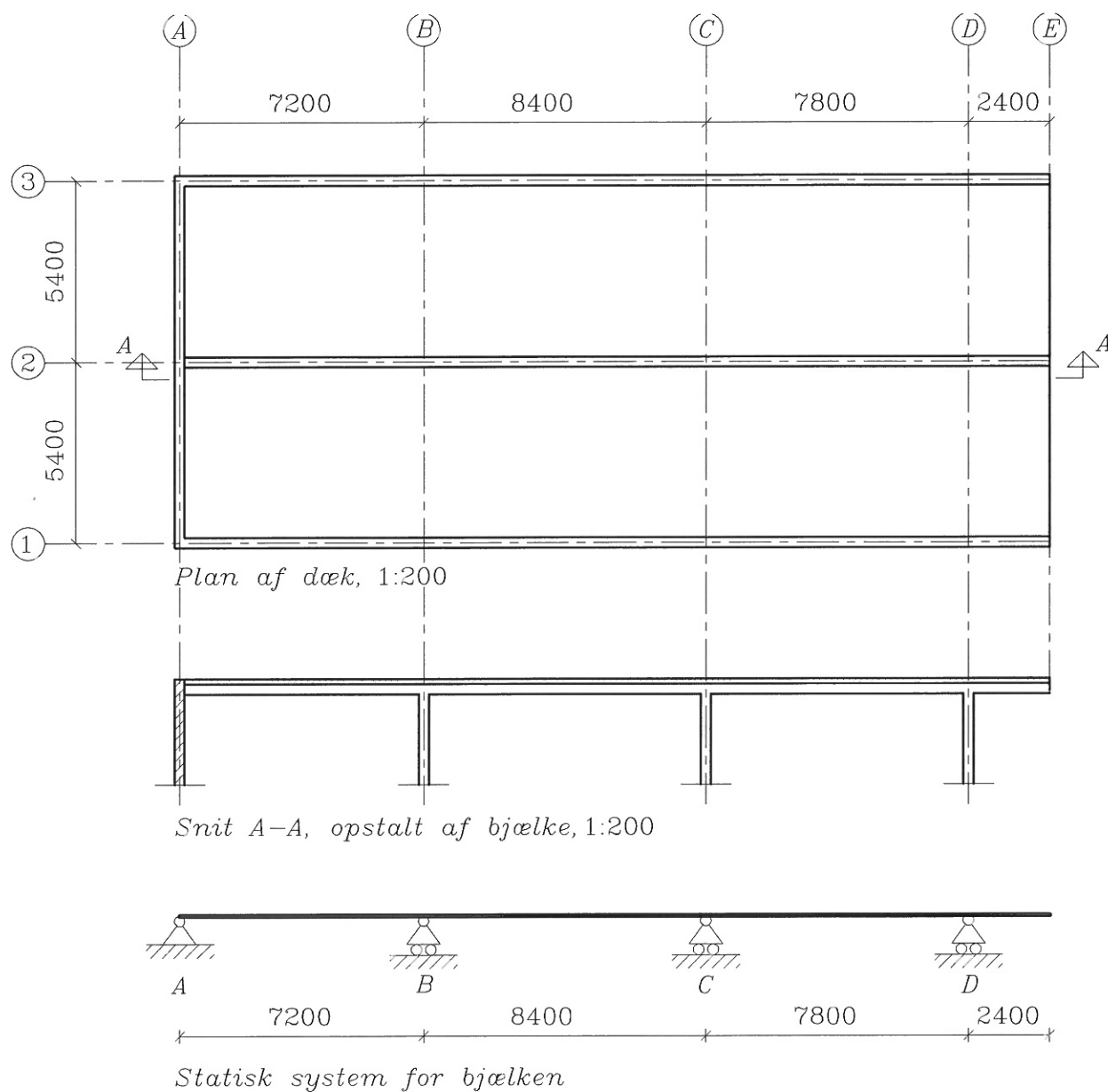
1. Indspændingsmomenterne  $M_i = \gamma \cdot M_{\max}$  over mellemunderstøtningerne skønnes ( $M_{\max}$  er det maksimale moment i de tilstødende fag). DS411-kravet:  $0,33 \leq \gamma \leq 2$  eller EC2-kravet:  $0,50 \leq \gamma \leq 2$  skal overholdes.  
Ved understøtninger med udkragede bjælker sættes  $M_i$  lig med indspændingsmomentet svarende til minimumslasten på den udkragede bjælke, når armeringsbehovet i bjælkens underside skal bestemmes.  
Når armeringsbehovet i bjælkens overside skal bestemmes, sættes  $M_i$  lig med indspændingsmomentet for maksimumslasten på den udkragede bjælke.
2. En passende armering over mellemunderstøtningerne fastlægges, således at den hertil svarende værdi af flydemomentet  $M_{i,u}$  ligger i nærheden af den skønnede værdi af  $M_i$ .  
Ved udkragede bjælkeender skal  $M_{i,u} \geq$  det største  $M_i$ .
3. Herefter kan momentfordelingerne svarende til mellemunderstøtningsindspændingsmomenter  $M_i = M_{i,u}$  bestemmes for henholdsvis maksimal- og minimallast i alle fag.  
DS411-kravet:  $0,33 \leq \gamma \leq 2$  eller EC2-kravet:  $0,50 \leq \gamma \leq 2$  skal stadig overholdes.  
Snitmomentkurver og de forskudte snitmomentkurver optegnes.

#### 4.7-12

4. Længdearmeringen vælges, flydemomentkurverne bestemmes og optegnes således, at de forskudte momentkurver overalt er omsluttet af flydemomentkurverne. Den nødvendige udstrækning af eventuel afkortet armering fastlægges.
5. Hvis DS411 er dimensioneringsgrundlaget skal det eftervises, at alle tværsnit er normaltarmerede.  
Hvis EC2 er dimensioneringsgrundlaget, skal det eftervises at  $x/d \leq 0,25$  for alle bjælketværsnit.
6. Den valgte armeringsmængde skal være større end minimumsarmeringen. Vedr. minimumsarmering se afsnit 4.1. Strengt taget stiller normerne ikke krav om anvendelse af minimumsarmering for optagelse af indspændingsmomenterne i statisk ubestemte konstruktioner, men af hensyn til revneviddernes størrelse er det normal praksis, at der mindst indlægges en armering svarende til minimumsarmeringen.

## Eksempel 4.7.10.

Dette eksempel omhandler dimensionering af længdearmring i en bjælke over 3 fag.



Figur 4.7-7 Plan, opstalt og statisk system for bjælke over 3 fag

På figur 4.7-7 er der vist en plan af et dæk over en kælder. Dækpladen udføres som en pladsstøbt plade sammenstøbt med en underliggende ribbe placeret i linie 2. Ribben udgør sammen med tilstødende plade en bjælke med T-formet tværsnit. Dækpladen understøttes således af denne bjælke og kældervæggene i linierne A, 1 og 3.

Bjælken forudsættes understøttet i linie A af kældervæggen og i linierne B, C og D af søjler. Herved kan man regne med et statisk system for bjælken som vist i figur 4.7-7.

#### 4.7-14

Beregningsforudsætninger:

Beregningerne gennemføres i den regningsmæssige brudgrænsetilstand i henhold til DS411.

Normal sikkerhedsklasse, normal kontrolklasse og passiv miljøklasse.

Der anvendes beton med karakteristisk trykstyrke  $f_{ck} = 30$  MPa og største stenstørrelse  $d_g = 16$  mm.

Armeringen (B550) har karakteristiske trækflydespænding  $f_{yk} = 550$  MPa.

Belastning på bjælken:

Bjælken belastes af last fra dækpladen og egenvægt. En del af belastningen fra dækpladen er variabel. Det forudsættes her, at bjælkens regningsmæssige last kan variere mellem en minimumlast  $q_{\min} = 34$  kN/m og en maksimumlast  $q_{\max} = 75$  kN/m. Der regnes med, at bjælken modtager samme last ved linie A, som på resten af bjælken, selvom pladen afleverer mindre last til bjælken ved linie A, idet pladen fører en del af sin last direkte ned i kældervæggen i linie A.

Tværsnitsudformning:

På fig. 4.7-8 er bjælkens tværsnit vist.

Tværsnittets højde er lille i forhold til bjælkens spændvidder og belastning. Normalt vil man vælge større tværsnitshøjder.

Bestemmelse af brudmomenter:

I henhold til afsnit 4.1.1 kan der for forskellige armeringsarrangementer bestemmes brudmomenter som angivet i tabellerne 4.7-1 og 4.7-2, hvor følgende parametre indgår:

Armeringsarealet  $A_s = n \cdot \pi \cdot \varnothing^2 / 4$ , hvor  $n$  og  $\varnothing$  er hhv. armeringsstængernes antal og diameter

$d$  = afstanden fra armeringens tyngdepunkt til den trykkede kant

$b$  = den effektive flangebredde ved beregning af  $M_{ud}$  (se nedenfor)

$b$  = kropsbredden  $b_w$  ved beregning af  $M'_{ud}$

Armeringens regningsmæssige trækflydespænding  $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 550 / 1,25 = 440$  MPa

Betonens regningsmæssige trykstyrke  $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 30 / 1,65 = 18,2$  MPa

Nulliniedybden  $x = 1,25 \cdot A_s \cdot f_{yd} / (b \cdot f_{cd})$

Armeringstøjningen  $\epsilon_s = \epsilon_{cu} \cdot (d-x) / x$

Den indre momentarm  $z = d - 0,4 \cdot x$

Det regningsmæssige brudmoment  $M_{ud} = A_s \cdot f_{yd} \cdot z$

Effektiv flangebredde:

Ved bestemmelsen af  $M_{ud}$  kan man medregne en del af pladen til begge sider som flanger i et T-formet tværsnit, idet trykspændingerne fordeler sig ud på en større bredde end kropsbredden. Den største bredde, hvorpå man kan regne med trykspændingen =  $f_{c,d}$  ved bestemmelse af  $M_{ud}$ , benævnes den effektive flangebredde. Idet pålidelige metoder til bestemmelsen af den effektive flangebredde ikke findes, anvendes empiriske udtryk, der erfaringsmæssigt giver passende værdier. Når plasticitetsteorien anvendes ved snitkraftbestemmelsen må man i henhold til DS411 ved et symmetrisk T-tværsnit med flangetykkelsen  $h_f$  maksimalt regne med en effektiv flangebredde =  $b_w + 2 \cdot 8 \cdot h_f = 260 + 2 \cdot 8 \cdot 150 = 2660$  mm.

1. betingelse for anvendelse af plastisk beregning:

I henhold til DS411 skal alle dimensionerende tværsnit være normalarmerede. Idet  $\epsilon_s$  er større end  $\epsilon_y = f_{yk} / E_{sk} = 550 / 0,2 \cdot 10^6 = 2,75$  ‰ er dette tilfældet.

Hvis dimensioneringsgrundlaget er EC2 skal  $x/d \leq 0,25$ . Dette krav overholdes ikke ved anvendelse af 6 Y20 - armeringsstænger i oversiden svarende til  $x/d = 109,7 / 420 = 0,26$ . I henhold til EC2 vil anvendelse af plasticitetsteori således ikke kunne accepteres ved anvendelse af 3 eller flere Y20 - armeringsstænger i oversiden.

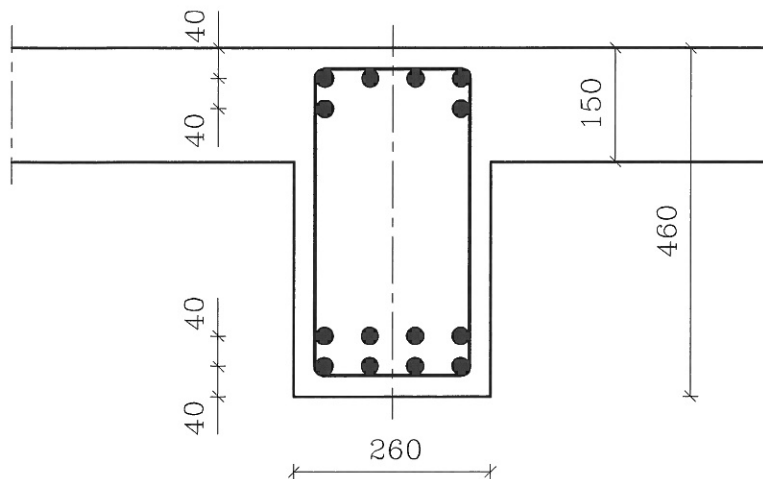


Fig. 4.7-8 Bjælketsværsnit

Antal arm. stænger n	4	7	8
I nederste lag	4	4	4
I næstnederste lag	0	3	4
$A_s$ i mm <sup>2</sup>	1257	2199	2513
d i mm	420	403	400
b i mm	2660	2660	2660
x i mm	14,3	25,0	28,6
$\epsilon_s$ i ‰	99,4	52,9	45,5
z i mm	414,3	392,9	388,6
$M_{ud}$ i kNm	229,1	380,1	429,7

Tabel 4.7-1 Bestemmelse af regningsmæssige positive brudmomenter  $M_{ud}$ 

Antal arm. stænger n	2	6
I øverste lag	2	4
I næstøverste lag	0	2
$A_s$ i mm <sup>2</sup>	628	1885
d i mm	420	407
b i mm	260	260
x i mm	73,1	219,3
$\epsilon_s$ i ‰	16,6	3,0
z i mm	390,8	318,9
$M_{ud}$ i kNm	108,0	264,5

Tabel 4.7-2 Bestemmelse af regningsmæssige negative brudmomenter  $M'_{ud}$

#### 4.7-16

Bestemmelse af momentfordeling:

Momentfordelingen i den kontinuerte bjælke bestemmes på basis af plasticitetsteorien ved at eftervise, at hvert fag kan optage påvirkningerne svarende til maksimal last på hele faget og minimal last på hele faget, når der i begge tilfælde regnes med de fulde værdier af de valgte indspændingsmomenter over understøtningerne B og C. Ved A regnes bjælken simpelt understøttet. For bjælkedelen CDE bestemmes 2 momentkurver. Den ene momentkurve bestemmes for  $q_{\text{maks}}$  over CD og  $q_{\text{min}}$  over DE. Den anden momentkurve bestemmes for  $q_{\text{min}}$  over CD og  $q_{\text{maks}}$  over DE. Ved begge momentkurver regnes med det valgte indspændingsmoment over understøtning C.

Da bjælken har T-formet tværsnit med flangen i bjælkeoversiden, er dette tværsnit bedre egnet til at optage positive momenter end negative momenter. Indspændingsmomenterne over understøtningerne B og C vælges derfor således, at de numerisk bliver mindre end de maksimale momenter i de tilstødende fag.

Antages  $M_i/M_{\text{maks}} \sim -0,7$  (anden størrelse kunne vælges ud fra erfaring) fås ved betragtning af fag AB følgende, idet  $M_{\text{maks}} \sim M_{\text{midt}}$ :

$$M_{\text{midt}} = 1/8 q L^2 - 1/2 M_i = 1/8 q L^2 - 1/2 \cdot 0,7 \cdot M_{\text{midt}}$$

$$M_{\text{midt}} = 0,74 \cdot 1/8 q L^2 = 0,74 \cdot 1/8 \cdot 75 \cdot 7,2^2 = 360 \text{ kNm}$$

$$M_i \sim -0,7 \cdot 360 \sim -252 \text{ kNm}$$

Af tabel 4.7-2 og figur 4.7-8 ses, at T-tværsnittet med 6 stk. Y20 i oversiden giver  $M'_{\text{ud}} = 264,5 \text{ kNm}$ . Denne armering vælges, og dermed kan indspændingsmomenterne over understøtning B og C vælges til

$$M_{i,B} = M_{i,C} = -264,5 \text{ kNm}$$

Bestemmelse af armeringsbehovet:

På baggrund af ovenstående forudsætninger bestemmes og optegnes snitmomentkurverne for henholdsvis maksimal og minimal last. Idet der skal tages hensyn til skrårevneeffekten, optegnes ligeledes den forskudte momentkurve ved at forskyde snitmomentkurverne stykket  $0,5 z \cot\theta = 0,5 \cdot 414,3 \cdot 2 = 414 \text{ mm}$  parallelt med bjælkeaksen, som omtalt tidligere i dette afsnit. Som værdi for  $z$  anvendes på den sikre side den største værdi i henhold til resultaterne angivet i tabel 4.7-1, og da der anvendes afkortet armering, sættes  $\cot\theta = 2$ . Forankringslængden for Y20 fastsættes til 750 mm i henhold til afsnit 4.6.4.

Fag AB:

For fag AB er statisk system og de momentkurver, der bliver bestemt i det følgende, vist i figur 4.7-9.

Bestemmelse af reaktioner og momenter:

$$R_{AL} = 1/2 \cdot q \cdot l - M_i/l$$

$$R_{BL,V} = 1/2 \cdot q \cdot l + M_i/l$$

$$V = R_{AL} - q \cdot x$$

$$M = R_{AL} \cdot x - 1/2 \cdot q \cdot x^2$$

$$M = M_{\text{maks}} \text{ hvor } V = 0$$

$$V = 0 \text{ for } R_{AL} - q \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = R_{AL}/q$$

$$M = M_{\text{maks}} \text{ for } x = R_{AL}/q \Leftrightarrow M_{\text{maks}} = R_{AL} \cdot R_{AL}/q - 1/2 \cdot q \cdot (R_{AL}/q)^2 = R_{AL}^2/(2q)$$

$$l = 7,2 \text{ m}$$

$$M_i = 264,5 \text{ kNm}$$

		$q_{\text{min}} = 34 \text{ kN/m:}$	$q_{\text{maks}} = 75 \text{ kN/m:}$
$R_{AL}$	85,7 kN	233,3 kN	
$R_{BL,V}$	159,1 kN		306,7 kN
$x = R_{AL}/q$	2,520 m		3,110 m
$M_{\text{maks}}$	107,9 kNm		362,7 kNm

Undersidearmering:

7 Y20 er tilstrækkelig ved det hårdest påvirkede område af fag AB ( $M_{ud} = 380,1 \text{ kNm} > 362,7 \text{ kNm}$ ).

Det område, hvor det er tilstrækkeligt med 4 Y20 ( $M_{ud} = 229,1 \text{ kNm}$ ) bestemmes:

Uden skrårevneeffekt:

$$M \leq M_{ud} \Rightarrow R_{AL} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q_{maks} \cdot x^2 \leq M_{ud} \Rightarrow 233,3 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot x^2 \leq 229,1 \Rightarrow$$

$$x \leq 1,223 \text{ m} \quad \vee \quad x \geq 4,998 \text{ m}$$

Med skrårevneeffekt:

$$x \leq 1,223 - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot\theta = 1,223 - 0,414 = 0,809 \text{ m} \quad \vee$$

$$x \geq 4,998 + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot\theta = 4,998 + 0,414 = 5,412 \text{ m}$$

Oversidearmering:

6 Y20 udnyttes helt i det hårdest påvirkede område ved B. ( $M'_{ud} = 264,5 \text{ kNm} = -M_{i,B}$ )

Det område, hvor det er tilstrækkeligt med 2 Y20 ( $M'_{ud} = 108,0 \text{ kNm}$ ) bestemmes:

Uden skrårevneeffekt:

$$-M \leq M'_{ud} \Rightarrow -R_{AL} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot q_{maks} \cdot x^2 \leq M'_{ud} \Rightarrow -85,7 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot x^2 \leq 108,0 \Rightarrow$$

$$x \leq 6,085 \text{ m}$$

Med skrårevneeffekt:  $x \leq 6,085 - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \cot\theta = 6,085 - 0,414 = 5,671 \text{ m}$

Fag BC:

For fag BC er statisk system og momentkurver vist i figur 4.7-10.

Bestemmelse af reaktioner og momenter:

$$R_{BL,H} = R_{CL,V} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l$$

$$V = R_{BL,H} - q \cdot x \quad V = 0 \text{ for } R_{BL,H} - q \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot l$$

$$M = -M_i + R_{BL,H} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 \quad M = M_{maks} \text{ for } x = \frac{1}{2} \cdot l \Rightarrow M_{maks} = -M_i + \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot (\frac{1}{2} \cdot l)^2 = -M_i + \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$$

$$l = 8,4 \text{ m}$$

$$M_i = 264,5 \text{ kNm}$$

	$q_{min} = 34 \text{ kN/m}$ :	$q_{maks} = 75 \text{ kN/m}$ :
$R_{BL,H} = R_{CL,V}$	142,8 kN	315,0 kN
$M_{maks}$	35,4 kNm	397,0 kNm

Undersidearmering:

8 Y20 er tilstrækkelig ved det hårdest påvirkede område af fag BC ( $M_{ud} = 429,7 \text{ kNm} > 397,0 \text{ kNm}$ ).

Det område, hvor det er tilstrækkeligt med 4Y20 ( $M_{ud} = 229,1 \text{ kNm}$ ) bestemmes:

Uden skrårevneeffekt:

$$M \leq M_{ud} \Rightarrow -M_i + R_{BL,H} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 \leq M_{ud} \Rightarrow -264,5 + 315,0 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot x^2 \leq 229,1 \Rightarrow$$

$$x \leq 2,084 \text{ m} \quad \vee \quad x \geq 6,316 \text{ m}$$

Med skrårevneeffekt:  $x \leq 2,084 - 0,414 = 1,670 \text{ m} \quad \vee \quad x \geq 6,316 + 0,414 = 6,730 \text{ m}$

Oversidearmering:

6 Y20 udnyttes helt i de hårdest påvirkede områder ved B og C ( $M'_{ud} = 264,5 \text{ kNm} = M_{i,C}$ ).

Det område, hvor det er tilstrækkeligt med 2 Y20 ( $M'_{ud} = 108,0 \text{ kNm}$ ) bestemmes:

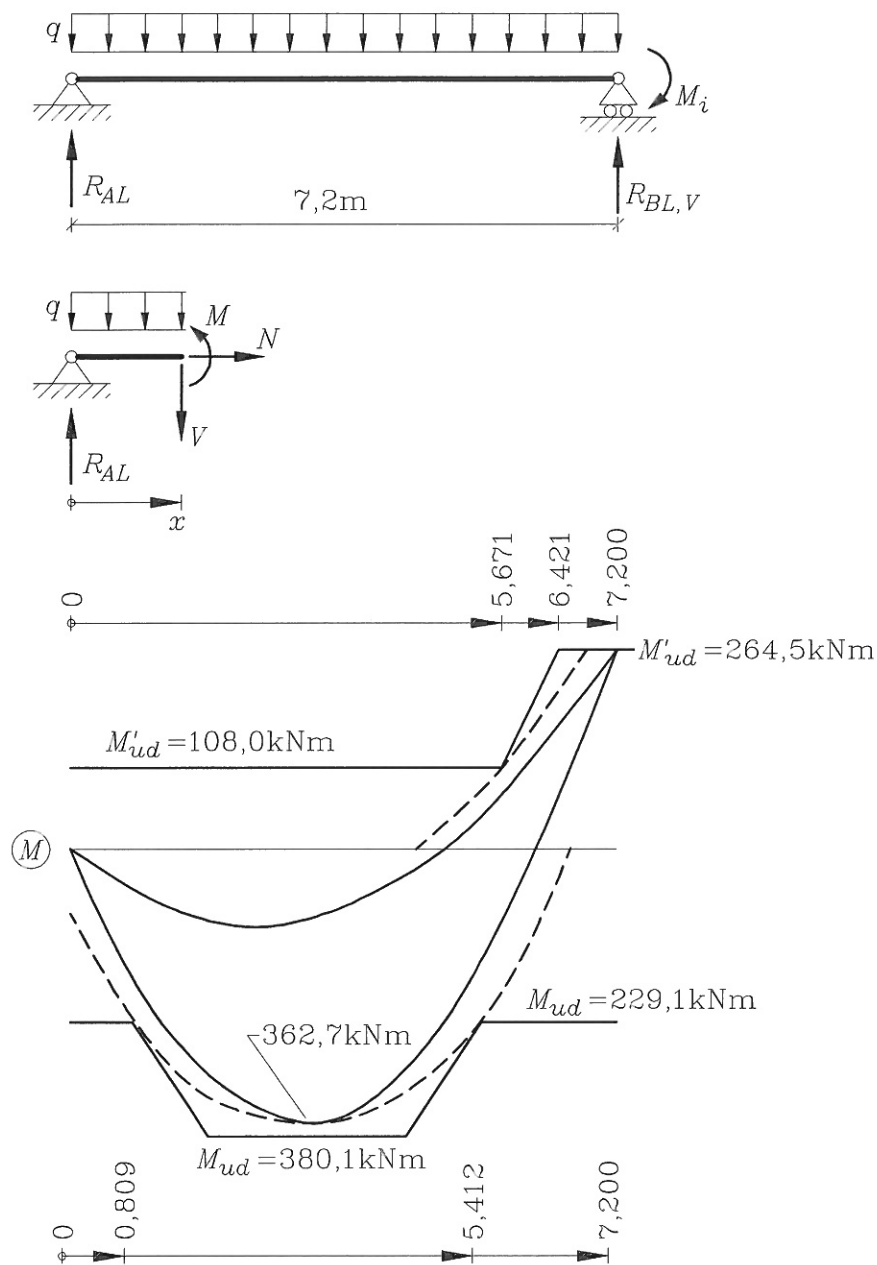
Uden skrårevneeffekt:

$$-M \leq M'_{ud} \Rightarrow M_i - R_{BL,H} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 \leq M'_{ud} \Rightarrow$$

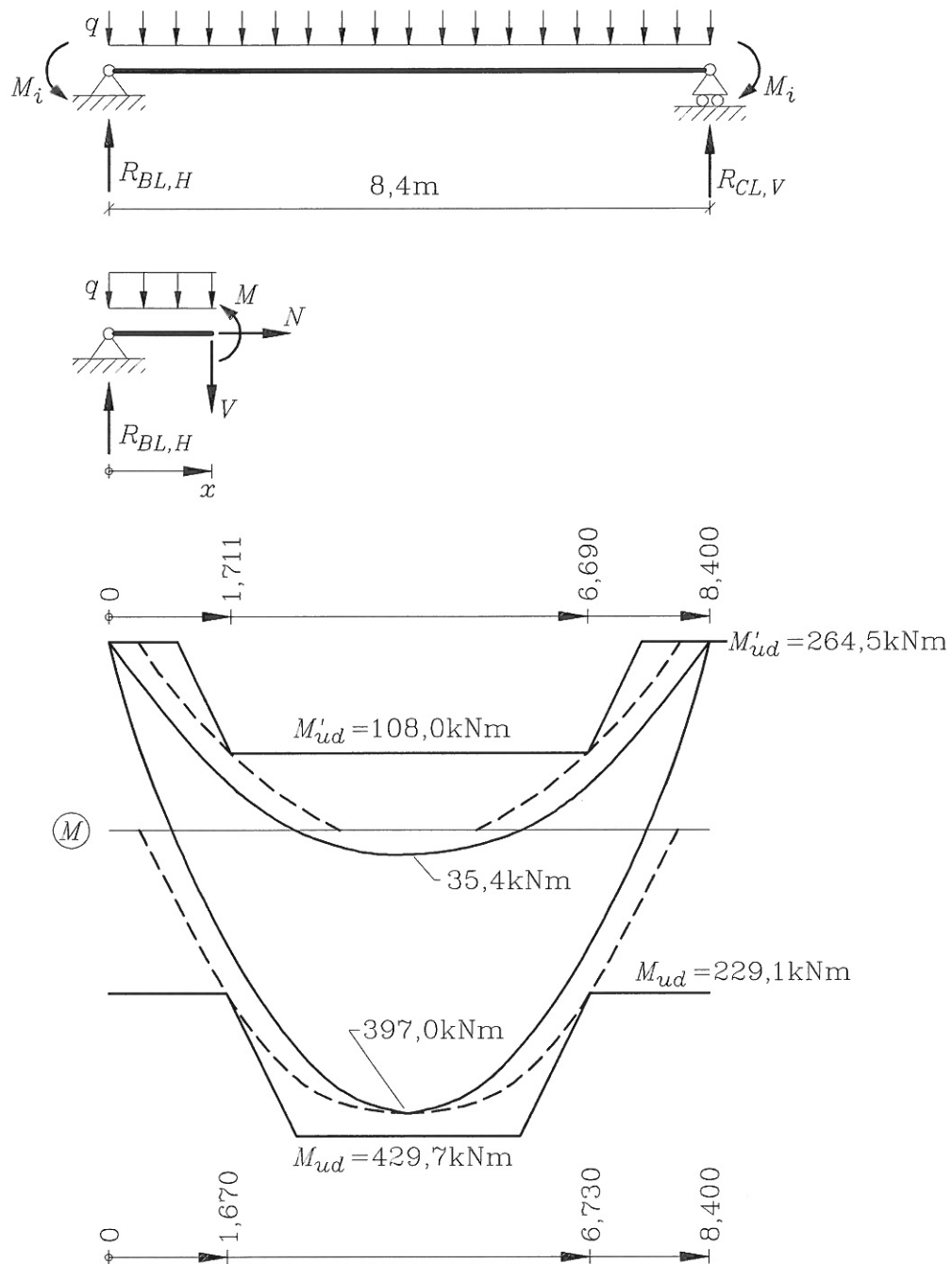
$$264,5 - 142,8 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot x^2 \leq 108,0 \Rightarrow 1,297 \text{ m} \leq x \leq 7,104 \text{ m}$$

Med skrårevneeffekt:  $1,297 + 0,414 \leq x \leq 7,104 - 0,414 \Rightarrow 1,711 \text{ m} \leq x \leq 6,690 \text{ m}$

4.7-18



Figur 4.7-9 Statisk system, momentkurve, forskudt momentkurve og brudmomentkurve for fag AB



Figur 4.7-10 Statisk system, momentkurve, forskudt momentkurve og brudmomentkurve for fag BC

## 4.7-20

Fag CDE:

For fag CDE er statisk system og de momentkurver, der bliver bestemt i det følgende, vist i figur 4.7-11.

Undersidearmering:

Lastkombination I på figur 4.7 - 11 er dimensionsgivende for undersidearmeringen.

$$M_i = 264,5 \text{ kNm}$$

$$M_D = -\frac{1}{2} \cdot q_{\min} \cdot 2,4^2 = -\frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 2,4^2 = -97,9 \text{ kNm}$$

$$R_{CL,H} = \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot 7,8 + M_i/7,8 + M_D/7,8 = \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 7,8 + 264,5/7,8 - 97,9/7,8 = 313,9 \text{ kN}$$

$$R_{DL} = 7,8 \cdot q_{\max} + 2,4 \cdot q_{\min} - R_{CL,H} = 7,8 \cdot 75 + 2,4 \cdot 34 - 313,9 = 352,7 \text{ kN}$$

Mellem C og D:

$$V = R_{CL,H} - q \cdot x = 313,9 - 75 \cdot x$$

$$V = 0 \text{ for } 313,9 - 75 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 4,185 \text{ m}$$

$$M = -M_i + R_{CL,H} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot x^2 = -264,5 + 313,9 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot x^2$$

$$M_{\max} = -264,5 + 313,9 \cdot 4,185 - \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 4,185^2 = 392,4 \text{ kNm}$$

8 Y20 er tilstrækkelig ved det hårdest påvirkede område af fag CD ( $M_{ud} = 429,7 \text{ kNm} > 392,4 \text{ kNm}$ ).

Udstrækningen af det område, hvor det er tilstrækkeligt med 4 Y20 ( $M_{ud} = 229,1 \text{ kNm}$ ) bestemmes:

Uden skrårevneeffekt:

$$M \leq M_{ud} \Rightarrow -264,5 + 313,9 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot x^2 \leq 229,1 \Rightarrow x \leq 2,099 \text{ m} \vee x \geq 6,272 \text{ m}$$

$$\text{Med skrårevneeffekt: } x \leq 2,099 - 0,414 = 1,685 \text{ m} \vee x \geq 6,272 + 0,414 = 6,686 \text{ m}$$

Oversidearmering:

Lastkombination II på figur 4.7 - 9 er dimensionsgivende for oversidearmeringen.

$$M_i = 264,5 \text{ kNm}$$

$$M_D = -\frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot 2,4^2 = -\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 2,4^2 = -216 \text{ kNm}$$

$$R_{CL,H} = \frac{1}{2} \cdot q_{\min} \cdot 7,8 + M_i/7,8 + M_D/7,8 = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 7,8 + 264,5/7,8 - 216/7,8 = 138,8 \text{ kN}$$

$$R_{DL} = 7,8 \cdot q_{\min} + 2,4 \cdot q_{\max} - R_{CL,H} = 7,8 \cdot 34 + 2,4 \cdot 75 - 138,8 = 306,4 \text{ kN}$$

Mellem C og D:

$$V = R_{CL,H} - q_{\min} \cdot x = 138,8 - 34 \cdot x$$

$$V = 0 \text{ for } 138,8 - 34 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 4,083 \text{ m}$$

$$M = -M_i + R_{CL,H} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot x^2 = -264,5 + 138,8 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot x^2$$

$$M_{\max} = -264,5 + 138,8 \cdot 4,083 - \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 4,083^2 = 15,48 \text{ kNm}$$

6 Y20 udnyttes helt i det hårdest påvirkede område ved C. Ved D ilægges kun 5 Y20, idet tværsnittet så opnår et brudmoment  $M'_{ud} = 228,7 \text{ kNm} > -M_D = 216 \text{ kNm}$ .

Udstrækningen af det område, hvor det er tilstrækkeligt med 2 Y20 ( $M'_{ud} = 108,0 \text{ kNm}$ ) bestemmes:

Uden skrårevneeffekt:

$$-M \leq M'_{ud} \Rightarrow 264,5 - 138,8 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot x^2 \leq 108 \Rightarrow 1,351 \text{ m} \leq x \leq 6,814 \text{ m}$$

$$\text{Med skrårevneeffekt: } 1,351 + 0,414 \leq x \leq 6,814 - 0,414 \Rightarrow 1,765 \text{ m} \leq x \leq 6,400 \text{ m}$$

Mellem D og E:

$$M = -\frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot y^2 = -\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot y^2, \text{ hvor } y\text{-aksen er en vandret akse mod venstre med nulpunkt i E.}$$

$$y = 2,4 \text{ m} \Rightarrow M = -\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 2,4^2 = -216 \text{ kNm}$$

Udstrækningen af det område, hvor det er tilstrækkeligt med 2 Y20 ( $M'_{ud} = 108,0 \text{ kNm}$ ) bestemmes:

Uden skrårevneeffekt:

$$-M \leq M'_{ud} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot y^2 \leq 108 \Rightarrow y \leq 1,697 \text{ m}$$

$$\text{Med skrårevneeffekt: } y \leq 1,697 - 0,414 = 1,283 \text{ m} \Rightarrow x \geq 10,200 - 1,283 = 8,917 \text{ m}$$

2. betingelse for anvendelse af plastisk beregning:

I henhold til DS411 og formel 4.7-5 skal følgende krav også være overholdt:

$$\frac{1}{3} \cdot M_{\text{maks,maks}} \leq M_i \leq 2 \cdot M_{\text{maks,min}}$$

Det skal være overholdt for  $M_i = -M_B = 264,5 \text{ kNm}$  i forhold til  $M_{\text{maks,maks}} = 397,0 \text{ kNm}$  (fag BC) og  $M_{\text{maks,min}} = 362,7 \text{ kNm}$  (fag AB):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot M_{\text{maks,maks}} &\leq M_i \leq 2 \cdot M_{\text{maks,min}} : \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 397,0 \text{ kNm} &\leq 264,5 \text{ kNm} \leq 2 \cdot 362,7 \text{ kNm} \\ \Rightarrow 132 \text{ kNm} &\leq 264,5 \text{ kNm} \leq 725 \text{ kNm} \\ \Rightarrow \text{kravet er opfyldt} \end{aligned}$$

Det skal være også være overholdt for  $M_i = -M_C = 264,5 \text{ kNm}$  i forhold til  $M_{\text{maks,maks}} = 397,0 \text{ kNm}$  (fag BC) og  $M_{\text{maks,min}} = 392,4 \text{ kNm}$  (fag CD):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot M_{\text{maks,maks}} &\leq M_i \leq 2 \cdot M_{\text{maks,min}} : \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 397,0 \text{ kNm} &\leq 264,5 \text{ kNm} \leq 2 \cdot 392,4 \text{ kNm} \\ \Rightarrow 132 \text{ kNm} &\leq 264,5 \text{ kNm} \leq 785 \text{ kNm} \\ \Rightarrow \text{kravet er opfyldt} \end{aligned}$$

Afrunding af mål:

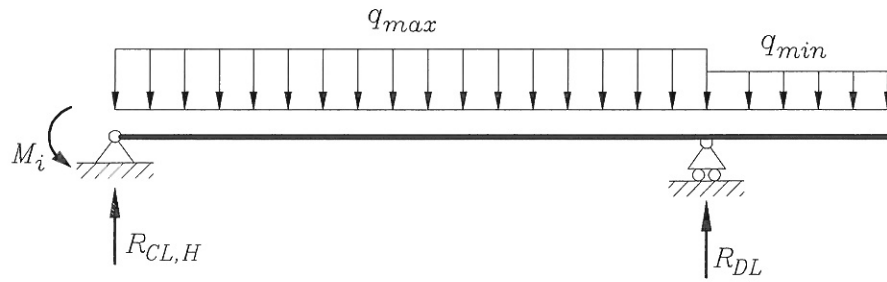
I figur 4.7-12 er alle momentkurverne for hele bjælken optegnet og udstrækning af de afkortede armeringsstænger vist. Mange af målene er noget "skæve". Målene vil i praksis blive afrundet.

Vedr. revnedannelse ved afkortning af flere armeringsstænger på samme sted:

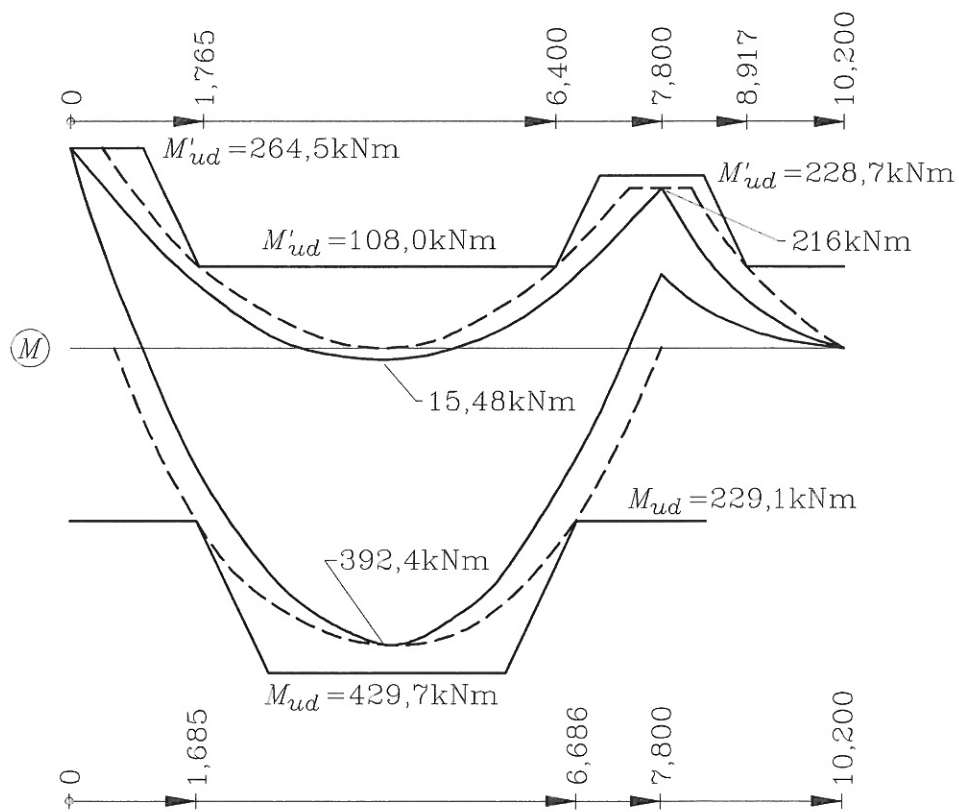
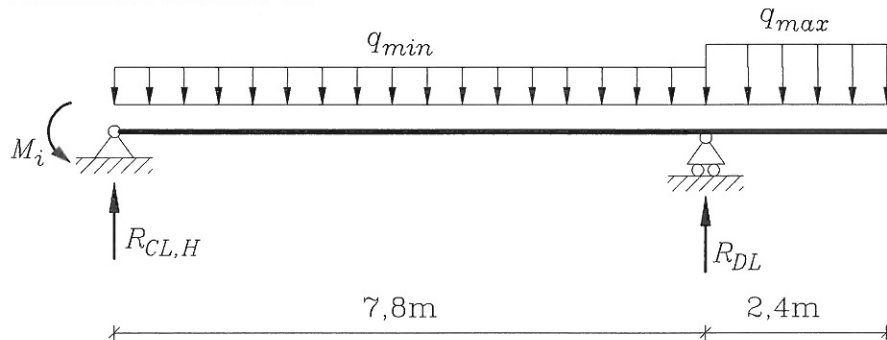
Hvor der afkortes armeringsstænger, vil der ofte forekomme større revner. Denne revnedannelse er værre, hvis der afkortes mange armeringsstænger på samme sted. Afkortning af armering bør derfor foregå gradvist og ikke som vist for undersidearmeringen, hvor man går fra 8 til 4 stænger på samme sted. Man kunne forskyde afkortningen af 2 stænger ved forøgelse af længderne for disse 2 stænger.

4.7-22

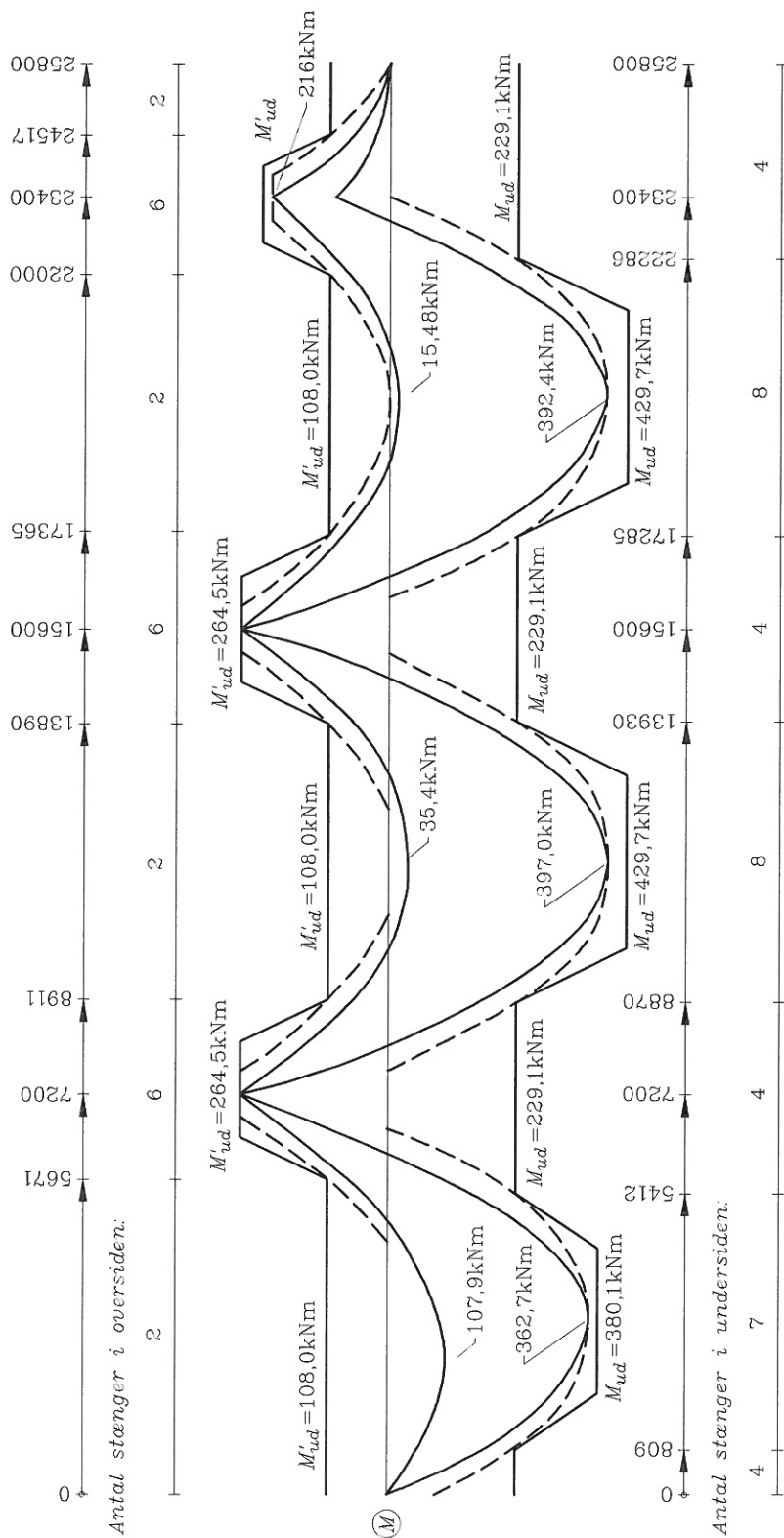
Lastkombination I:



Lastkombination II:



Figur 4.7 - 11 Statisk system, momentkurve, forskudt momentkurve og brudmomentkurve for fag CDE.



Figur 4.7 -12 Momentkurve, forskudt momentkurve og brudmomentkurve.

4.7-24

Litteraturliste:

- [4.7-1] M. P. Nielsen og Finn Bach: *Beregning af forskydningsarmering efter diagonaltrykmetoden*. Bygningsstatistiske meddelelser, Vol. 51, No. 3-4, 1980
- [4.7-2] Knud Christiansen: *Armerede betonkonstruktioner*, Danmarks Ingeniørakademi · Bygningsafdelingen · Lyngby, december 1983

## **5 Beregning af armerede betonkonstruktioner i anvendelsesgrænsetilstanden**

## 5. Beregning af armerede betonkonstruktioner i anvendelsesgrænsetilstanden

### 5.1 Indledning

Ved undersøgelser i anvendelsesgrænsetilstanden er man interesseret i at vurdere, hvordan konstruktionen opfører sig under anvendelsen. Værdier for laster og materialeparametre anvendes derfor normalt med partialkoefficienten 1,0, d.v.s det er de karakteristiske værdier, der anvendes. Dette begrundes med, at det er de virkeligt forekommende værdier for de beregnede størrelser, man er interesseret i at bestemme.

De størrelser, der normalt undersøges i anvendelsesgrænsetilstanden er

- spændinger
- flytninger
- revnevidder

Betonens og armeringens arbejdslinier regnes lineærelastiske, som angivet i kapitel 2 og 3, idet spændingernes størrelse i anvendelsesgrænsetilstanden normalt vil antage så relativt små værdier,  $\sigma_s < f_{yk}$  og  $\sigma_c \leq 0,7 f_{ck}$ , at arbejdslinierne med god tilnærmelse kan regnes retlinede. Spændingerne kan derfor bestemmes ved anvendelse af elasticitetsteorien. Er  $\sigma_s \geq f_{yk}$  og  $\sigma_c > 0,7 f_{ck}$  må andre metoder tages i brug. Disse metoder vil ikke blive behandlet i dette kapitel.

I den efterfølgende teoretiske præsentation af metoder til beregninger i anvendelsesgrænsetilstanden skelnes der ikke mellem regningsmæssige og karakteristiske værdier for laster, snitkræfter og materialeparametre, idet symbolerne for disse benyttes uden de til de regningsmæssige og karakteristiske værdier hørende indekser d og k. Ved beregninger i praksis i anvendelsesgrænsetilstanden skal der, hvor andet ikke nævnes, anvendes karakteristiske værdi for laster og materialeparametre

Armeringens og betonens elasticitetskoefficienter kan med tilstrækkelig nøjagtighed ved korttidspåvirkninger sættes til henholdsvis 1,0 og 0,7 gange den karakteristiske værdi af begyndelseselasticitetskoefficienten, d.v.s

$$E_s = E_{0s} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \quad (5.1-1)$$

$$E_c = 0,7 E_{0c} = 0,7 \cdot 51000 \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13} = 35700 \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13} \quad (5.1-2)$$

hvor

- $E_s$  er armeringens elasticitetskoefficient
- $E_{0s}$  er armeringens begyndelseselasticitetskoefficient
- $E_c$  er betonens elasticitetskoefficient
- $E_{0c}$  er betonens begyndelseselasticitetskoefficient

For langtidspåvirkning kan der tages hensyn til betonens krybning ved en passende reduktion af den for korttidspåvirkning benyttede værdi af betonens elasticitetskoefficient. Under hensyntagen til betonens krybning kan der således regnes med en effektiv elasticitetskoefficient bestemt ved  $E_{c,ef} = 0,7E_{0c} / (1 + \varphi)$ , hvor  $\varphi$  er krybetallet. Vejledende værdier af forholdet  $\alpha$  mellem armeringens og betonens elasticitetskoefficienter for henholdsvis korttidspåvirkning og langtidspåvirkning er givet i tabel 5.1-1. Vedr. værdier for  $\varphi$  se afsnit 5.3.2.

$f_{ck}$ i MPa	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$\alpha$ for korttidslast	12	10	9	9	8	8	7	7	7	7	7
$\alpha$ for langtidslast	48	41	35	33	30	27	25	25	25	25	25

Tabel 5.1-1 værdier for  $\alpha$  ved spændings- og deformationsbestemmelser

I afsnit 5.2.2 , 5.2.3 og 5.2.4 vises, hvordan spændingerne i beton og armering bestemmes ved anvendelse af henholdsvis princippet *transformeret tværsnit, ækvivalensbetingelser og  $\alpha\rho$ -metoden*. Afsnit 5.3 og 5.4 omhandler henholdsvis bestemmelse af flytninger og revnevidder i armerede betonkonstruktioner.

Se også behandlingen af emner vedr. anvendelsesgrænsetilstanden i kapitel 3 *Sikkerhedsbestemmelser for betonkonstruktioner*.

## 5.2 Spændingsbestemmelse

### 5.2.1 Indledning

Som nævnt ovenfor er beton- og armeringsspændingerne i anvendelsesgrænsetilstanden normalt så små, at spændingerne med god tilnærmelse kan bestemmes ved brug af elasticitetsteorien, idet materialernes arbejdslinier regnes lineærelastiske med de ovenfor angivne elasticitetskoefficienter.

Når trækspændingen i bjælken bliver lig bøjningstrækstyrken, d.v.s. når  $\sigma_{ct} = f_{ct,fl}$  vil betonen revne. Der skelnes derfor i det følgende mellem urevnet og revnet tværsnit.

Spændinger regnes positive som træk.

Til bestemmelse af spændinger i et tværsnit anvendes *de geometriske, statiske og fysiske betingelser*, hvor

- de geometriske betingelser udtrykkes ved Bernoullis forudsætninger for den tekniske bøjningsteori:
  - plan tøjningsfordeling (plane tværsnit forbliver plane)
  - flytningsgradienterne, d.v.s. tøjninger og vinkelændringer, er små
  - længdeændringerne i tværsnittet vinkelret på bjælkens længdeakse er nul
- de statiske betingelser udtrykkes ved N og M's ækvivalens med tværsnittets spændinger
- de fysiske betingelser, også kaldet de konstitutive betingelser, udtrykkes ved Hooke's lov, d.v.s.  $\sigma_c = E_c \epsilon_x$  og  $\sigma_s = E_s \epsilon_x$ .

Udover ovennævnte forudsætninger forudsættes det, at betonen og armeringen fuldstændig "følges ad" under deformationen, således at der ikke sker nogen glidning mellem beton og armering. Denne forudsætning er ikke særlig godt opfyldt i umiddelbar nærhed af en trækrevne, men forsøg har vist, at anvendelsen af forudsætningen i forbindelse med spændingsberegninger alligevel giver tilfredsstillende resultater.

### 5.2.2 Spændingsbestemmelse ved anvendelse af princippet *transformeret tværsnit*

#### *Urevnet tværsnit*

For at vise hvordan spændingerne beregnes efter princippet *transformeret tværsnit* for et urevnet tværsnit betragtes en bjælke med et prismatisk enkeltsymmetrisk tværsnit, som vist i figur 5.2-1. Armeringen kan være placeret i flere lag og afstanden fra en vilkårlig akse z gennem punktet 0, aksesystemets origo, til tyngdepunktet for det n'te armeringslag benævnes  $y_n$ .

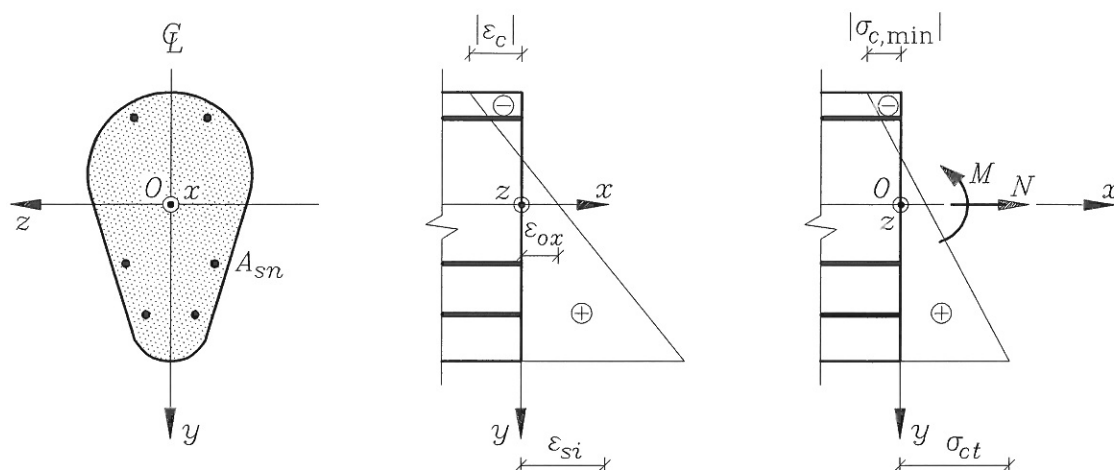
Bjælken antages påvirket af en normalkraft N og et moment M henført til det viste aksesystems origo. N og M regnes med fortegn, som vist i figur 5.2-1

Forudsætningen om plan tøjningsfordeling bevirker, at tøjningen i et vilkårligt punkt i tværsnittet kan udtrykkes ved

$$\epsilon_x = \epsilon_{0x} + \kappa y \quad (5.2-1)$$

hvor  $\epsilon_x$  og  $\epsilon_{0x}$  er tøjningen i x-aksens retning henholdsvis i et vilkårligt punkt i tværsnittet og i aksesystemets origo.

Spændingen i betonen og armeringen et vilkårligt sted i tværsnittet bestemmes ifølge de fysiske betingelser af henholdsvis



Figur 5.2-1 Armeret urevnet tværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_x \quad (5.2-2)$$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_x \quad (5.2-3)$$

Normalt kan en armeringsstangs diameter regnes lille i forhold til tværsnittets øvrige dimensioner, således at spændingen med god tilnærmelse kan regnes konstant over armeringstværsnittet lig med spændingen i armeringsstangens tyngdepunkt.

Spændingen i betonen og en vilkårlig armeringsstang kan derfor bestemmes som

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_x = E_c (\varepsilon_{0x} + \varkappa y) \quad (5.2-4)$$

og

$$\sigma_{sn} = E_s \varepsilon_x = E_s (\varepsilon_{0x} + \varkappa y_{sn}) = \frac{E_s}{E_c} E_c (\varepsilon_{0x} + \varkappa y_{sn}) = \alpha \sigma_{cn} \quad (5.2-5)$$

- hvor
- $y$  er afstanden fra det betragtede punkt til z-aksen
  - $y_{sn}$  er afstanden fra det n'te armeringslags tyngdepunkt til z-aksen
  - $\sigma_{cn}$  er betonspændingen i samme niveau som det n'te armeringslag, d.v.s. i samme afstand fra z-aksen som det n'te armeringslags tyngdepunkt. Altså en tænkt betonspænding på armeringsstangens plads
  - $\sigma_{sn}$  er armeringsspændingen i det n'te armeringslag
  - $\varkappa$  er bjælkeaksens krumning i det betragtede snit

og

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} \quad (5.2-6)$$

er forholdet mellem armeringens og betonens elasticitetskoefficienter.

Det ses af (5.2-5), at armeringsspændingen  $\sigma_{sn}$  er  $\alpha$  gange så stor som betonspændingen  $\sigma_c$  i samme niveau.

Udtrykkes ækvivalensen mellem normalkraften  $N$  og tværsnittets spændinger, fås

$$N = \int_{A_t} \sigma_x dA = \int_{A_c} \sigma_c dA + \sum \sigma_{sn} A_{sn} \quad (5.2-7)$$

idet betonspændingerne integreres over den del af tværsnitarealet  $A_c$ , der udgøres af beton, d.v.s. det totale tværsnitsareal  $A_t$  minus armeringsarealet, og produktet  $\sigma_{sn} A_{sn}$  summeres over arealet af samtlige armeringsstænger.  $A_{sn}$  er arealet af armeringsstængerne i armeringslag nr.  $n$ .

For et armeret rektangulært tværsnit med bredden  $b$  og højden  $h$  er det totale tværsnitsareal  $A_t = b h$ .

Indsættes (5.2-4) og (5.2-5) i (5.2-7) fås

$$N = \int_{A_c} E_c (\epsilon_{0x} + \kappa y) dA + \sum E_s (\epsilon_{0x} + \kappa y_{sn}) A_{sn} \quad (5.2-8)$$

der kan omskrives til

$$N = E_c \epsilon_{0x} \int_{A_c} dA + E_c \kappa \int_{A_c} y dA + E_s \epsilon_{0x} \sum A_{sn} + E_s \kappa \sum A_{sn} y_{sn} \quad (5.2-9)$$

eller

$$\begin{aligned} N &= E_c \epsilon_{0x} A_c + E_s \epsilon_{0x} A_{st} + E_c \kappa S_{zc} + E_s \kappa S_{zs} \\ &= E_c \epsilon_{0x} \left( A_c + \frac{E_s}{E_c} A_{st} \right) + E_c \kappa \left( S_{zc} + \frac{E_s}{E_c} S_{zs} \right) \end{aligned} \quad (5.2-10)$$

hvor

5-6

$A_{st} = \sum A_{sn}$	er tværsnittets totale armeringsareal
$A_{sn}$	er arealet af armeringsstængerne i armeringslag nr. n
$S_{zc} = \int_{AC} y dA$	er statisk moment om z-aksen for den del af tværsnittet, der udgøres af beton
$S_{zs} = \sum A_{sn} y_{sn}$	er statisk moment om z-aksen for armeringsarealet
$y_{sn}$	er afstanden fra det n'te armeringslags tyngdepunkt til z-aksen.

Indsættes (5.2-6) i (5.2-10) fås

$$N = E_c \epsilon_{0x} (A_c + \alpha A_{st}) + E_c \kappa (S_{zc} + \alpha S_{zs}) \quad (5.2-11)$$

eller

$$N = E_c \epsilon_{0x} (A_t + (\alpha - 1) A_{st}) + E_c \kappa (S_{zt} + (\alpha - 1) S_{zs}) \quad (5.2-12)$$

$$N = E_c \epsilon_{0x} A_{ur,tr} + E_c \kappa S_{zur,tr} \quad (5.2-13)$$

hvor

$A_t$	$= A_c + A_{st}$	er det totale tværsnitsareal
$A_{ur,tr}$	$= A_t + (\alpha - 1) A_{st}$	er det transformerede urevnedede tværsnitareal
$S_{zt}$	$= S_{zc} + S_{zs}$	er statisk moment om z-aksen for det totale tværsnitsareal
$S_{zur,tr}$	$= S_{zt} + (\alpha - 1) S_{zs}$	er statisk moment om z-aksen for det transformerede urevnedede tværsnit.

Det totale tværsnitsareal  $A_t$  er indført af følgende grunde

- det er hurtigere at bestemme  $A_t$  og  $S_{zt}$  for det totale tværsnit end  $A_c$  og  $A_{zc}$  for den del af tværsnittet, der udgøres af beton alene
- det er lettere at bestemme tyngdepunktets beliggenhed for det totale tværsnitsareal  $A_t$  end for betonarealet  $A_c = A_t - A_s$ . Tyngdepunktets beliggenhed skal benyttes i det følgende.

Udtrykkes herefter ækvivalensen mellem snitmomentet  $M$  og tværsnittets spændinger, fås

$$M = \int_{A_t} y \sigma_x dA = \int_{A_c} y \sigma_c dA + \sum y_{sn} \sigma_{sn} A_{sn} \quad (5.2-14)$$

Indsættes (5.2-4) og (5.2-5) i (5.2-14) fås

$$M = \int_{A_c} y E_c (\epsilon_{0x} + \kappa y) dA + \sum y_{sn} E_s (\epsilon_{0x} + \kappa y_{sn}) A_{sn} \quad (5.2-15)$$

der kan omskrives til

$$M = E_c \epsilon_{0x} \int_{A_c} y dA + E_c \kappa \int_{A_c} y^2 dA + E_s \epsilon_{0x} \sum y_{sn} A_{sn} + E_s \kappa \sum y_{sn}^2 A_{sn} \quad (5.2-16)$$

eller

$$\begin{aligned} M &= (E_c \epsilon_{0x} S_{zc} + E_s \epsilon_{0x} S_{zs}) + (E_c \kappa I_{zc} + E_s \kappa I_{zs}) \\ &= E_c \epsilon_{0x} \left( S_{zc} + \frac{E_s}{E_c} S_{zs} \right) + E_c \kappa \left( I_{zc} + \frac{E_s}{E_c} I_{zs} \right) \end{aligned} \quad (5.2-17)$$

hvor

$I_{zc}$  er inertimomentet om z-aksen for den del af tværsnittet, der udgøres af urevnet beton  
 $I_{zs}$  er armeringsarealets inertimomentet om z-aksen.

Indsættes (5.2-6) i (5.2-17) fås

$$M = E_c \epsilon_{0x} (S_{zc} + \alpha S_{zs}) + E_c \kappa (I_{zc} + \alpha I_{zs}) \quad (5.2-18)$$

eller

$$M = E_c \epsilon_{0x} (S_{zt} + (\alpha - 1) S_{zs}) + E_c \kappa (I_{zt} + (\alpha - 1) I_{zs}) \quad (5.2-19)$$

hvor  $S_{zt} = S_{zc} + S_{zs}$  og  $I_{zt} = I_{zc} + I_{zs}$  er henholdsvis det totale tværsnits statiske moment og inertimoment om z-aksen.

Indføres det transformerende urevnede tværsnits statiske moment  $S_{zur,tr}$  og inertimoment  $I_{zur,tr}$  om z-aksen fås

$$M = E_c \epsilon_{0x} S_{zur,tr} + E_c \kappa I_{zur,tr} \quad (5.2-20)$$

hvor

$I_{zur,tr} = I_{zt} + (\alpha - 1) I_{zs}$  er det urevnede transformerende tværsnits inertimoment om z-aksen.

Bemærk, at ved beregning af  $A_{ur,tr}$ ,  $S_{zur,tr}$  og  $I_{zur,tr}$  multipliceres armeringens bidrag med  $(\alpha - 1)$ . Dette skyldes, at beregningerne af de nævnte størrelser udføres som det totale tværsnits bidrag + armeringens bidrag. Fx er det totale tværsnit  $A_t = b \cdot h$  for rektangulære tværsnit. Ved at multiplicere med  $(\alpha - 1)$  undgås, at det effektive betontværsnit på armeringens plads regnes med to gange. I praksis tages der ofte ikke hensyn til dette, idet faktoren  $\alpha$  benyttes tilnærmet i stedet for  $(\alpha - 1)$ . I eksempel 5.2-3 er for et revnet tværsnit vist et eksempel på, at ovennævnte tilnærmelse kun har en lille betydning for de beregnede spændingers størrelse, under 1 %. Med voksende trykarmeringsprocent vil afvigelsen vokse en smule. For et urevnet tværsnit vil betydningen normalt være endnu mindre end for et revnet tværsnit.

I nærværende afsnit om *Spændingsbestemmelse ved anvendelse af princippet transformeret tværsnit* benyttes faktorerne  $(\alpha - 1)$  og  $\alpha$  i forbindelse med armeringsarealer placeret i henholdsvis den urevnede og den revnede del af betontværsnittet. I afsnittene 5.2.3 *Spændingsbestemmelse ved anvendelse af ækvivalensbetingelser* og 5.2.4 *Spændingsbestemmelse ved  $\alpha\varrho$ -metoden* anvendes som en tilnærmelse faktoren  $\alpha$  for al armering, hvilket er ensbetydende med, at spændingen i armering placeret i urevnet tværsnit regnes til  $\sigma_{scj} (1+1/\alpha)$  i stedet for den korrekte spænding  $\sigma_{scj}$ .

Antages at z-aksen går gennem det transformerede tværsnits tyngdepunkt, er  $S_{zur,tr} = 0$ .

Indsættes dette i (5.2-13) og (5.2-20) kan  $\varepsilon_{0x}$  og  $\varkappa$  bestemmes af

$$\varepsilon_{0x} = \frac{N}{E_c A_{ur,tr}} \quad (5.2-21)$$

$$\varkappa = \frac{M}{E_c I_{zur,tr}} \quad (5.2-22)$$

Indsættes (5.2-21) og (5.2-22) i (5.2-4) og (5.2-5) fås

$$\sigma_c = \frac{N}{A_{ur,tr}} + \frac{M}{I_{zur,tr}} y \quad (5.2-23)$$

$$\sigma_{sn} = \frac{E_s}{E_c} \left( \frac{N}{A_{ur,tr}} + \frac{M}{I_{zur,tr}} y_{sn} \right) = \alpha \sigma_{cn} \quad (5.2-24)$$

Det ses, at (5.2-23) og (5.2-24) har samme form som Navier's formel for spændinger i bjælker

fremstillet af homogent materiale, idet den eneste forskel er, at det er tværsnitskonstanterne  $A_{ur,tr}$  og  $I_{zur,tr}$  for det transformerede tværsnit, der anvendes.

Det er vigtigt at bemærke, at ovenstående formler forudsætter, at snitkræfterne  $N$  og  $M$  er henført til tyngdepunktet for det transformerede tværsnit, og at  $y$  regnes fra det transformerede tværsnits tyngdepunktsakse.

### *Beregning af det transformerede urevnede tværsnits tværsnitskonstanter*

Beregningerne indledes med at bestemme det transformerede tværsnitsareal

$$A_{ur,tr} = A_t + (\alpha - 1) \sum A_{sn} \quad (5.2-25)$$

Dernæst bestemmes tyngdepunktsliniens beliggenhed  $fx$  ved at udtrykke, at statisk moment om en vilkårlig akse,  $fx$  en akse  $z_1$ , der tangerer tværsnittets overside og er parallel med tyngdepunktsaksen  $z$ , kan beregnes på 2 måder, nemlig som

- de enkelte transformerede delarealers statiske moment om  $z_1$ -aksen og som
- det totale transformerede urevnede tværsnitsareal multipliceret med afstanden  $\eta_g$  mellem  $z_1$ -aksen og det transformerede urevnede tværsnits tyngdepunktsakse

d.v.s

$$S_{z1} = A_t y_{1t,G} + (\alpha - 1) \sum A_{sn} y_{1sn} = (A_t + (\alpha - 1) \sum A_{sn}) \eta_G \quad (5.2-26)$$

hvor

- $y_{1t,G}$  er afstanden fra det totale tværsnits tyngdepunkt til  $z_1$ -aksen
- $y_{1sn}$  er afstanden fra det  $n$ 'te armeringslags tyngdepunkt til  $z_1$ -aksen
- $\eta_G$  er afstanden fra det totale transformerede tværsnits tyngdepunkt til  $z_1$ -aksen

$\eta_G$  bestemmes af (5.2-26)

$$\eta_G = \frac{A_t y_{1t,G} + (\alpha - 1) \sum A_{sn} y_{1sn}}{A_t + (\alpha - 1) \sum A_{sn}} \quad (5.2-27)$$

Med kendt beliggenhed af tyngdepunktsaksen  $z$  for det transformerede urevnede tværsnit kan det hertil svarende inertimoment  $I_{zur,tr}$  beregnes ved anvendelse af Königs sætning

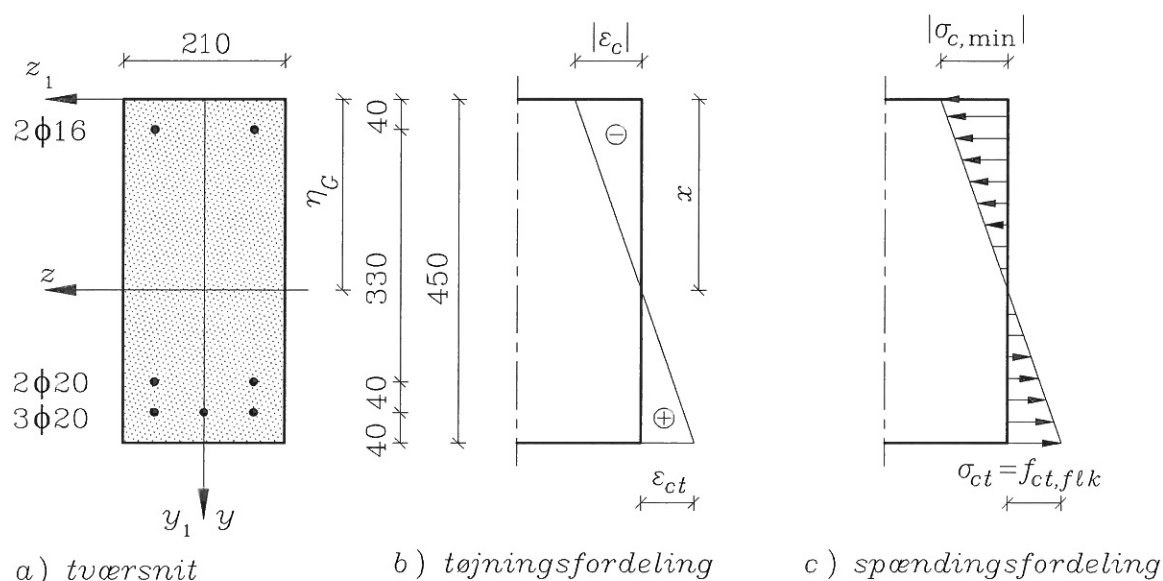
$$I_{zur,tr} = \int_{A_t} y^2 dA + (\alpha - 1) \sum A_{sn} y_{sn}^2 \quad (5.2-28)$$

hvor  $y$  er afstanden fra arealelementet  $dA$ 's tyngdepunkt til tyngdepunktsaksen  $z$  for det transformerede urevne tværsnit  $A_{ur,tr}$   
 $y_{sn}$  er afstanden fra det  $n$ 'te armeringslags tyngdepunkt til tyngdepunktsaksen  $z$  for det transformerede urevne tværsnit  $A_{ur,tr}$ .

Egentlig skulle der ifølge Königs sætning til højresiden i (5.2-28) adderes størrelsen  $n \pi \varphi^4/64$ , hvor  $n$  er antallet af armeringsstænger,  $\varphi$  er armeringsstængerens diameter, og  $\pi \varphi^4/64$  er inertimomentet om en diameter for den enkelte armeringsstang. Denne størrelse er dog så lille i forhold til størrelsen af de øvrige led, at den ikke medtages.

### Eksempel 5.1-1

Idet de karakteristiske værdier for materialeparametrene anvendes, ønskes det nedenfor beskrevne tværsnits revnemoment  $M_R$  for  $N=0$  bestemt ved anvendelse af princippet *transformeret tværsnit*. Revnemomentet bestemmes både med og uden hensyntagen til trykarmeringen i bjælketværsnittets overside.



Figur 5.2-2 Armeret rektangulært betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling

Det rektangulære tværsnit,  $b \times h = 210 \times 450$  mm, er som vist i figur 5.2-2 armeret med ribbestål i både over- og underside. I undersiden er armeringsdiametern  $\varphi = 20$  mm, og armeringen er placeret i 2 lag med 3 stænger i nederste lag og 2 stænger i øverste lag. I bjælkens overside er armeringsdiametern  $\varphi = 16$  mm. Bjælkens bøjlearmering er ikke vist.

#### Materialedata:

#### Armering:

Ribbestål med  $f_{yk} = 550$  MPa og  $E_{sk} = 2 \cdot 10^5$  MPa

Stænger med  $\varphi = 20$  mm og  $\varphi = 16$  mm har henholdsvis tværsnitsarealerne  $A_{s,20} = 314$  mm<sup>2</sup> og  $A_{s,16} = 201$  mm<sup>2</sup>.

Beton:

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa} \quad f_{ctk} = \sqrt{0,1 \cdot 30} = 1,73 \text{ MPa} \quad f_{ct,flk} = 2 \cdot f_{ctk} = 3,46 \text{ MPa}$$

$$E_c = 35700 \frac{30}{30 + 13} = 24907 \text{ MPa} \quad \text{se (5.1-2)}$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 10^5}{24907} = 8 \quad (\alpha - 1) = 7$$

Bestemmelse af revnemomentet  $M_R$  med hensyntagen til bjælketværsnittets trykarmring:

$$A_{tr} = 210 \cdot 450 + (8 - 1) (5 \cdot 314 + 2 \cdot 201) = 108,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Statisk moment om en vandret akse  $z_1$  gennem tværsnittets overside giver

$$108,3 \cdot 10^3 \cdot \eta_G = 210 \cdot 450 \cdot 225 + 7 [314 (3 \cdot 410 + 2 \cdot 370) + 2 \cdot 201 \cdot 40]$$

$$\eta_G = 237,4 \text{ mm}$$

hvor  $\eta_G$  er afstanden fra  $z_1$ -aksen til tyngdepunktsaksen  $z$ .

$$I_{zur,tr} = \frac{1}{12} \cdot 210 \cdot 450^3 + 210 \cdot 450 (237,4 - 225)^2 + 7 [314 (3(410 - 237,4)^2 + 2(370 - 237,4)^2) + 201 \cdot 2(237,4 - 40)^2]$$

$$I_{zur,tr} = 1992,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Revnemomentet  $M_R$  svarer til det moment, der i tværsnittets underside giver betonspændingen  $\sigma_{ct} = f_{ct,flk}$ . Idet denne trækspænding bestemmes af

$$\sigma_{ct} = f_{ct,flk} = \frac{N}{A_{ur,tr}} + \frac{M}{I_{zur,tr}} (h - \eta_G)$$

kan revnemomentet  $M_R$ , idet  $N = 0$ , bestemmes af

$$M_R = \frac{f_{ct,flk} I_{zur,tr}}{h - \eta_G} = \frac{3,46 \cdot 1992,6 \cdot 10^6}{450 - 237,4} \cdot 10^{-6} = 32,4 \text{ kNm}$$

5-12

Bestemmelse af  $M_R$  uden hensyntagen til trykarmeringen:

$$A_{ur,tr} = 210 \cdot 450 + 7 \cdot 5 \cdot 314 = 105,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Statisk moment om  $z_1$ -aksen giver

$$105,5 \cdot 10^3 \cdot \eta_G = 210 \cdot 450 \cdot 225 + 7 \cdot 314 (3 \cdot 410 + 2 \cdot 370)$$

$$\eta_G = 242,6 \text{ mm}$$

$$I_{zur,tr} = 1/12 \cdot 210 \cdot 450^3 + 210 \cdot 450 (242,6 - 225)^2 + 7 \cdot 314 [3(410 - 242,6)^2 + 2(370 - 242,6)^2]$$

$$I_{zur,tr} = 1880,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Herefter kan  $M_R$  bestemmes som ovenfor af

$$M_R = \frac{3,46 \cdot 1880,1 \cdot 10^6}{450 - 242,6} \cdot 10^{-6} = 31,4 \text{ kNm}$$

Heraf ses, at hensyntagen til trykarmeringen kun øger revnemomentet med ca. 3 %.

Tages der slet ikke hensyn til armeringen i tværsnittet ved bestemmelsen af revnemomentet fås flg.:

$$I_z = 1/12 \cdot 210 \cdot 450^3 = 1594,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M_R = \frac{3,46 \cdot 1594,7 \cdot 10^6}{450 - 225} \cdot 10^{-6} = 24,5 \text{ kNm}$$

altså ca. 76 % af værdien af det revnemoment, der fås, når al længdearmering tages i regning.

### Eksempel 5.2-2

Idet de karakteristiske værdier for materialeparametrene anvendes, ønskes det nedenfor beskrevne trapezformede tværsnits revnemoment  $M_R$  for  $N = 0$  bestemt ved anvendelse af princippet *transformeret tværsnit*.

Det trapezformede tværsnit, med største og mindste bredde henholdsvis 390 og 210 mm samt højden  $h = 450$  mm, er som vist i figur 5.2-3 armeret med ribbestål med diameteren  $\phi = 20$  mm i undersiden. Armeringen er placeret i 2 lag med 3 stænger i nederste lag og 2 stænger i øverste lag. Bjælkens bøjlearmering er ikke vist.

Materialedata:

Armering:

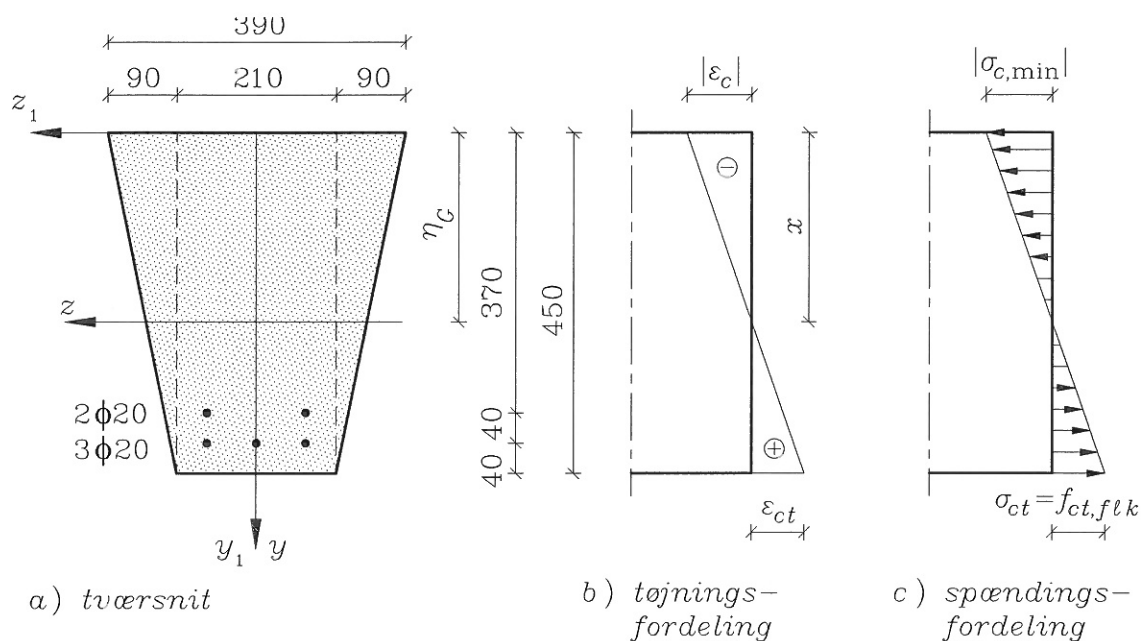
Ribbestål med  $f_{yk} = 550$  MPa og  $E_{sk} = 2 \cdot 10^5$  MPa  
Stænger med  $\phi = 20$  mm har tværsnitsarealet  $A_{s,20} = 314$  mm<sup>2</sup>

Beton:

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa} \quad f_{ctk} = \sqrt{0,1 \cdot 30} = 1,73 \text{ MPa} \quad f_{ct,flk} \approx 2 \cdot f_{ctk} = 3,46 \text{ MPa}$$

$$E_c = 24907 \text{ MPa} \quad \text{se eksempel 5.2-1}$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 10^5}{24907} = 8 \quad (\alpha - 1) = 7$$



Figur 5.2-3 Armeret trapezformet betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling

Af regnetekniske grunde tænkes det trapezformede tværsnit opdelt i et rektangulært og to trekantformede deltværsnit, som vist i figur 5.2-3.

$$A_{ur,tr} = 210 \cdot 450 + 2 \cdot 0,5 \cdot 90 \cdot 450 + 7 \cdot 5 \cdot 314 = 146,0 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Statisk moment om  $z_1$ -aksen giver

$$146,0 \cdot 10^3 \cdot \eta_G = 210 \cdot 450 \cdot 225 + 2 \cdot 0,5 \cdot 90 \cdot 450 \cdot 450/3 + 7 \cdot 314 (3 \cdot 410 + 2 \cdot 370)$$

$$\eta_G = 216,9 \text{ mm}$$

$$I_{zur,tr} = 1/12 \cdot 210 \cdot 450^3 + 210 \cdot 450 (225 - 216,9)^2 + 2 [ 1/36 \cdot 90 \cdot 450^3 + 1/2 \cdot 90 \cdot 450 (216,9 - 450/3)^2 ] + 7 \cdot 314 [ 3(410 - 216,9)^2 + 2(370 - 216,9)^2 ]$$

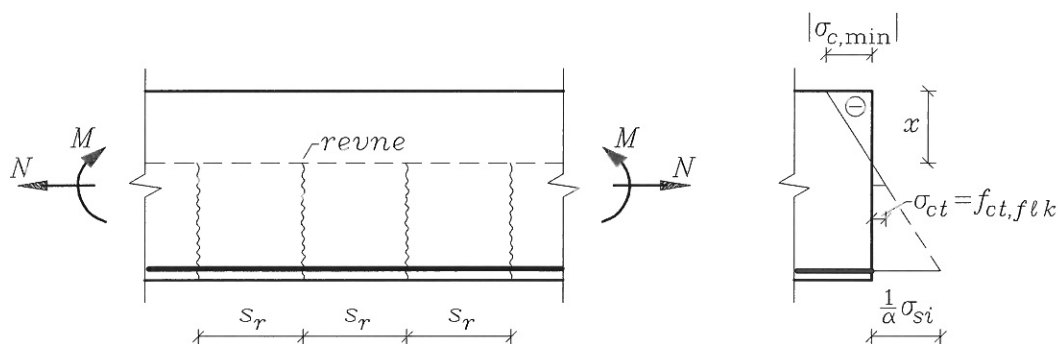
$$I_{\text{zur,tr}} = 2586,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M_R = \frac{3,46 \cdot 2586,7 \cdot 10^6}{450 - 216,9} \cdot 10^{-6} = 38,4 \text{ kNm}$$

### Revnet tværsnit

IDS 411 og EC 2 angives, at for armerede betonkonstruktioner skal bæreevnen bestemmes under forudsætning af, at betonens trækstyrke regnes lig nul, hvilket skyldes, at trækstyrken er lille og temmelig upålidelig. Der kan fx på grund af svind opstå spændinger i betonen, der er større end trækstyrken, allerede inden betonkonstruktionen påføres nogen ydre last.

Eksempelvis vil trækspændingerne i undersiden af en simpelt understøttet bjælke med en lodret nedadrettet voksende last vokse, indtil de største trækspændinger  $\sigma_{ct}$  i bjælkens underside når bøjningstrækstyrken  $f_{ct,fl}$ . Betonen vil herefter revne med én eller nogle få revner omkring det sted på bjælken, hvor det største moment og dermed de første revner vil forekomme. Ved forøgelse af lasten udover revnelasten vil revnelængden vokse, og der vil opstå flere revner med nogenlunde samme afstand hen mod bjælkens understøtninger. På et tidspunkt vil revnelængden ikke vokse mere, hvorefter nullinien for et fuldt revnet tværsnit vil ligge fast, men revnevidden vil fortsat vokse ved forøgelse af lasten. Der er da opstået et revne- og spændingsbillede som vist idealiseret i figur 5.2-4.



Figur 5.2-4 Revnefordeling i bjælke krop med revneafstand  $s_r$  samt spændingsfordeling

Da bøjningstrækstyrken er af størrelsesordenen  $f_{ct,fl} \approx 3,4 \text{ MPa}$  for en beton med  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , og armeringens flydespænding ofte er ca.  $f_{yk} = 550 \text{ MPa}$  ses ved betragtning af figur 5.2-4, at den resulterende kraft hidrørende fra betonens trækspændinger er lille i forhold til de resulterende kræfter hidrørende fra henholdsvis trykspændingerne i betonen og trækspændingerne i armeringen. Ved moment om trykresultanten ses, at momentarmen for resultanten af betonens trækspændinger

er væsentlig mindre end for armeringsspændingernes resultant, hvilket viser, at betontrækspændingernes bidrag til bøjningsbæreevnen er minimal.

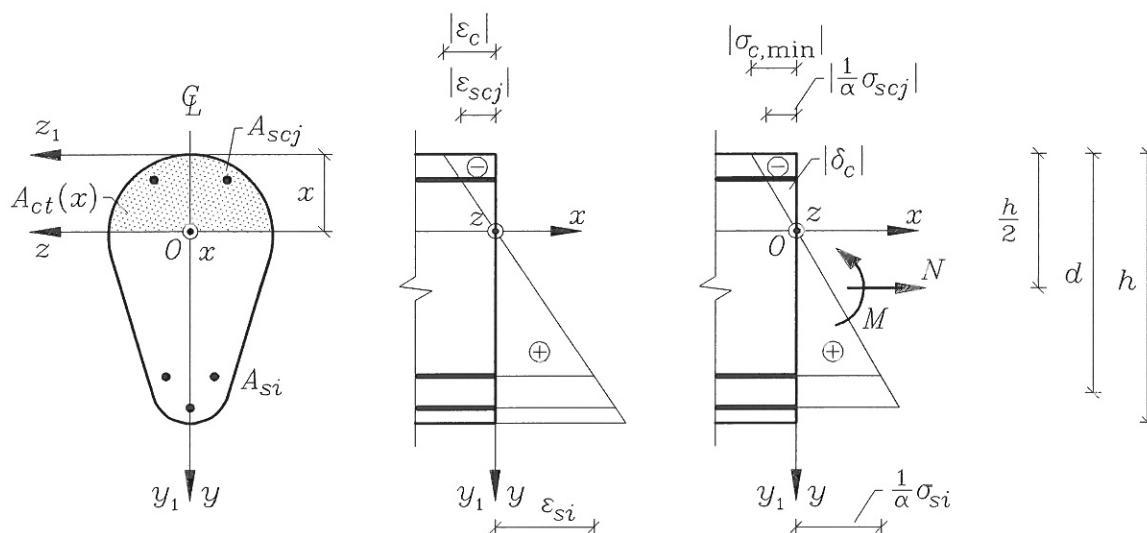
I betonen, der grænser op til revnen, er trækspændingerne nul eller meget nær nul, men imellem revnerne forekommer der trækspændinger i betonen voksende fra nul ved revnen til en øvre grænse lig bøjningstrækstyrken  $f_{ct,fl}$  midt mellem revnerne i bjælkens underside. Spændingstilstanden i betonen i bjælkens trækzone er man ikke på rimelig simpel vis i stand til at gøre rede for, men forsøg viser, at man på trods af de meget komplicerede tøjnings- og spændingsforhold med gode resultater stadig kan benytte forudsætningen om plan tøjningsfordeling. Man kan derfor benytte samme udtryk (5.2-1) for tøjningsfordelingen ved undersøgelse af revnet tværsnit, som der blev benyttet ved undersøgelsen af det urevnede tværsnit.

Når trækstyrken  $f_{ct}$  og dermed bøjningstrækstyrken  $f_{ct,fl}$  regnes lig nul, har man flg. udtryk for betonspændingerne over tværsnittet

$$\sigma_c = E_c (\varepsilon_{0x} + \kappa y) \quad \text{for} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + \kappa y \leq 0 \quad (5.2-29)$$

$$\sigma_c = 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + \kappa y \geq 0 \quad (5.2-30)$$

Armeringsspændingerne udtrykkes som foran ved (5.2-5)



Figur 5.2-5 Armeret revnet betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling.

Betragtes figur 5.2-5, og opstilles på tilsvarende måde som for det urevnede tværsnit de statiske betingelser i form af ækvivalensbetingelserne for normalkraft og moment, og indføres de geometriske betingelser (5.2-1), samt de fysiske betingelser (5.2-29), (5.2-30) og (5.2-5), fås ved en analog fremgangsmåde samme udtryk for beton- og armeringsspændinger som ved det

urevnede tværsnit, nemlig

$$\sigma_c = \frac{N}{A_{r,tr}} + \frac{M}{I_{zr,tr}} y \quad (5.2-31)$$

$$\sigma_{si} = \alpha \sigma_{ci} = \alpha \left( \frac{N}{A_{r,tr}} + \frac{M}{I_{zr,tr}} y_{si} \right) \quad (5.2-32)$$

$$\sigma_{scj} = \alpha \sigma_{cj} = \alpha \left( \frac{N}{A_{r,tr}} + \frac{M}{I_{zr,tr}} y_{scj} \right) \quad (5.2-33)$$

blot er det nu det transformerede revnede tværsnits tværsnitskonstanter  $A_{r,tr}$  og  $I_{zr,tr}$ , der benyttes.

Det skal pointeres, at z-aksen er det transformerede revnede tværsnits tyngdepunktsakse, samt at armeringsspændingen  $\sigma_{si}$  i trækzonen fås ved at multiplicere  $\sigma_c$ -værdien for samme  $y_{si}$  med  $\alpha$ , og armeringsspændingen  $\sigma_{scj}$  i trykzonen fås af betonspændingen for samme  $y_{scj}$  ved multiplikation med  $\alpha$ .  $y_{si}$  og  $y_{scj}$  angiver afstanden fra det transformerede tværsnits tyngdepunkt til henholdsvis træk- og trykarmeringen i det i'te og j'te armeringslag.

### *Beregning af det transformerede revnede tværsnits tværsnitskonstanter*

Da kun den del af betontværsnittet, der ligger i trykzonen, regnes effektiv, skal nulliniens beliggenhed bestemmes, inden tværsnitskonstanterne kan bestemmes. Se figur 5.2-5.

Bemærk, at der nedenfor skelnes mellem den armering  $A_{si}$ , der er placeret i trækzonen, og den armering  $A_{scj}$ , der er placeret i trykzonen

For  $N = 0$  ses af (5.2-31), at  $\sigma_c = 0$  for  $y = 0$ , d.v.s. nullinien og tyngdepunktslinien falder sammen. Dette kan benyttes til bestemmelse af nulliniens beliggenhed  $x$  ved som for urevnet tværsnit at opstille udtrykket for statisk moment om en akse  $z_1$ , der er parallel med tyngdepunktsaksen  $z$  (nullinien) og tangerer tværsnittets overside.

$$\begin{aligned} S_{z_1,tr} &= A_{ct}(x) y_{lct,g}(x) + (\alpha - 1) \sum A_{scj} y_{lscj} + \alpha \sum A_{si} y_{lsi} = \\ & (A_{ct}(x) + (\alpha - 1) \sum A_{scj} + \alpha \sum A_{si}) x = A_{r,tr} x \end{aligned} \quad (5.2-34)$$

hvor

- $A_{ct}(x)$  er det totale tværsnitsareal beliggende i trykzonen.  $A_{ct}(x) = bx$  for tværsnit med konstant trykzonebredde  $b$ . Bemærk  $A_{ct}$  er en funktion af nulliniedybden  $x$   
 $A_{si}$  er arealet af det  $i$ 'te armeringslag beliggende i trækzonen  
 $A_{scj}$  er arealet af det  $j$ 'te armeringslag beliggende i trykzonen  
 $A_{r,tr} = (A_{ct}(x) + (\alpha - 1) \sum A_{scj} + \alpha \sum A_{si})$  er det transformerede revnede tværsnit.  
 $y_{1ct,g}(x)$  er afstanden fra tyngdepunktet for tværsnitsarealet beliggende i trykzonen til  $z_1$ -aksen (for et tværsnit med konstant trykzonebredde er  $y_{1ct,g}(x) = 0,5x$ )  
 $y_{1scj}$  er afstanden fra tyngdepunktet i det  $j$ 'te armeringslag i trykzonen til  $z_1$ -aksen  
 $y_{1si}$  er afstanden fra tyngdepunktet i den  $i$ 'te armeringslag i trækzonen til  $z_1$ -aksen.

Med de til det transformerede revnede tværsnit hørende tværsnitskonstanter  $A_{r,tr}$  og  $I_{zr,tr}$  kan beregningerne udføres, som om materialet er homogent med betonens materialeegenskaber.

Nulliniedybden  $x$  kan bestemmes af (5.2-34), idet  $x$  er eneste ubekendte i denne ligning.

Med kendt nulliniedybde og dermed kendt beliggenhed for tyngdepunktsaksen  $z$  kan tværsnitskonstanterne  $A_{r,tr}$  og  $I_{zr,tr}$  bestemmes.

$$A_{r,tr} = \int_{A_{ct}} dA + (\alpha - 1) \sum A_{scj} + \alpha \sum A_{si} \quad (5.2-35)$$

$$I_{zr,tr} = \int_{A_{ct}} y^2 dA + (\alpha - 1) \sum A_{scj} y_{scj}^2 + \alpha \sum A_{si} y_{si}^2 \quad (5.2-36)$$

Hvis det armerede tværsnit har konstant trykzonebredde  $b$ , som fx et rektangulært tværsnit eller et T-formet tværsnit med tyk plade, se figur (5.2-6), kan (5.2-34) skrives som

$$S_{z1,tr} = b x \cdot \frac{1}{2} x + (\alpha - 1) \sum A_{scj} y_{1scj} + \alpha \sum A_{si} y_{1si} = (bx + (\alpha - 1) \sum A_{scj} + \alpha \sum A_{si}) x = A_{r,tr} x \quad (5.2-37)$$

hvorefter nulliniedybden kan bestemmes af 2. gradsligningen

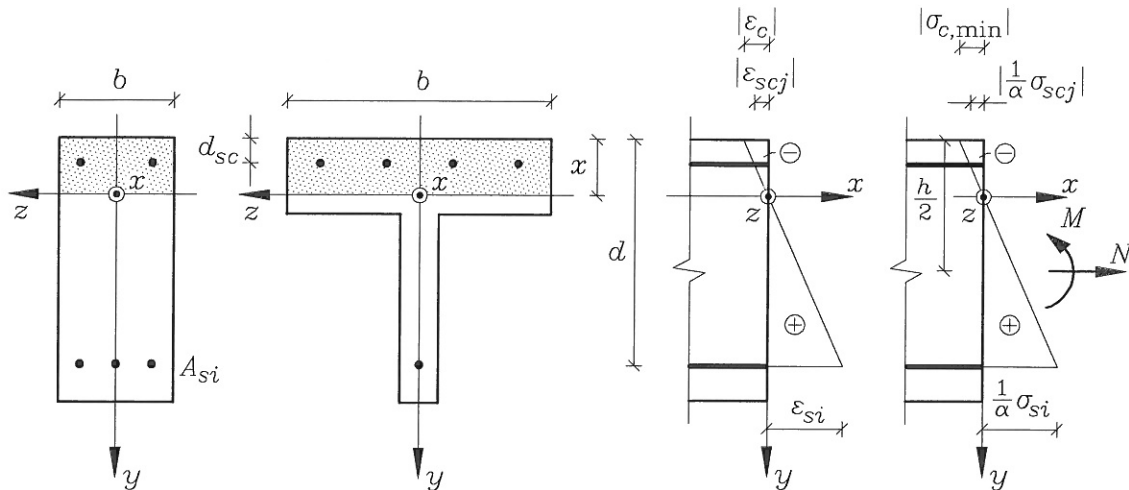
$$\frac{1}{2} bx^2 + ((\alpha - 1) \sum A_{scj} + \alpha \sum A_{si}) x - ((\alpha - 1) \sum A_{scj} y_{1scj} + \alpha \sum A_{si} y_{1si}) = 0 \quad (5.1-38)$$

Når  $x$  er bestemt kan  $A_{r,tr}$  og  $I_{zr,tr}$  bestemmes af

$$A_{r,tr} = b x + (\alpha - 1) \sum A_{scj} + \alpha \sum A_{si} \quad (5.1-39)$$

$$I_{zr,tr} = \frac{1}{3} b x^3 + (\alpha - 1) \sum A_{scj} (x - y_{1scj})^2 + \alpha \sum A_{si} (y_{1si} - x)^2 \quad (5.1-40)$$

Bemærk, at armeringsarealet i træk- og trykzonen multipliceres med henholdsvis  $\alpha$  og  $(\alpha-1)$ . At armeringsarealet i trykzonen multipliceres med  $(\alpha - 1)$  og ikke  $\alpha$  skyldes, at arealet svarende til  $A_{scj}$  allerede er medregnet én gang som betonareal i  $A_{ct}$ .



Figur 5.2-6 Armeret betontværsnit med konstant trykzonebredde, eksempelvis rektangulært eller T-formet tværsnit, med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling

### Eksempel 5.2-3

For det i figur 5.2-7 viste armerede rektangulære betontværsnit ønskes nulliniens beliggenhed samt spændingerne i beton og armering bestemt, når tværsnittet påvirkes af et bøjende moment  $M = 155 \text{ kNm}$ . Under beregningen ønskes princippet *transformeret tværsnit* benyttet. Ved beregning af de ønskede spændinger benyttes (5.2-31), (5.2-32) og (5.2-33).

Det rektangulært tværsnit,  $b \times h = 210 \times 450$ , er som vist i figur 5.2-7 armeret med ribbestål i både over- og underside. I undersiden er armeringsdiametern  $\varphi = 20 \text{ mm}$ , og armeringen er placeret i 2 lag med 3 stænger i nederste lag og 2 stænger i øverste lag. I bjælkens overside er armeringsdiametern  $\varphi = 16 \text{ mm}$ . Bjælkens bøjlearmering er ikke vist. Tværsnittet er identisk med det i eksempel 5.2-1 betragtede

#### Materialedata:

#### Armering:

Ribbestål med  $f_{yk} = f_{yck} = 550 \text{ MPa}$  og  $E_{sk} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

Stænger med  $\varphi = 20 \text{ mm}$  og  $\varphi = 16 \text{ mm}$  har tværsnitsarealerne henholdsvis  $A_{s,20} = 314 \text{ mm}^2$  og  $A_{s,16} = 201 \text{ mm}^2$ .

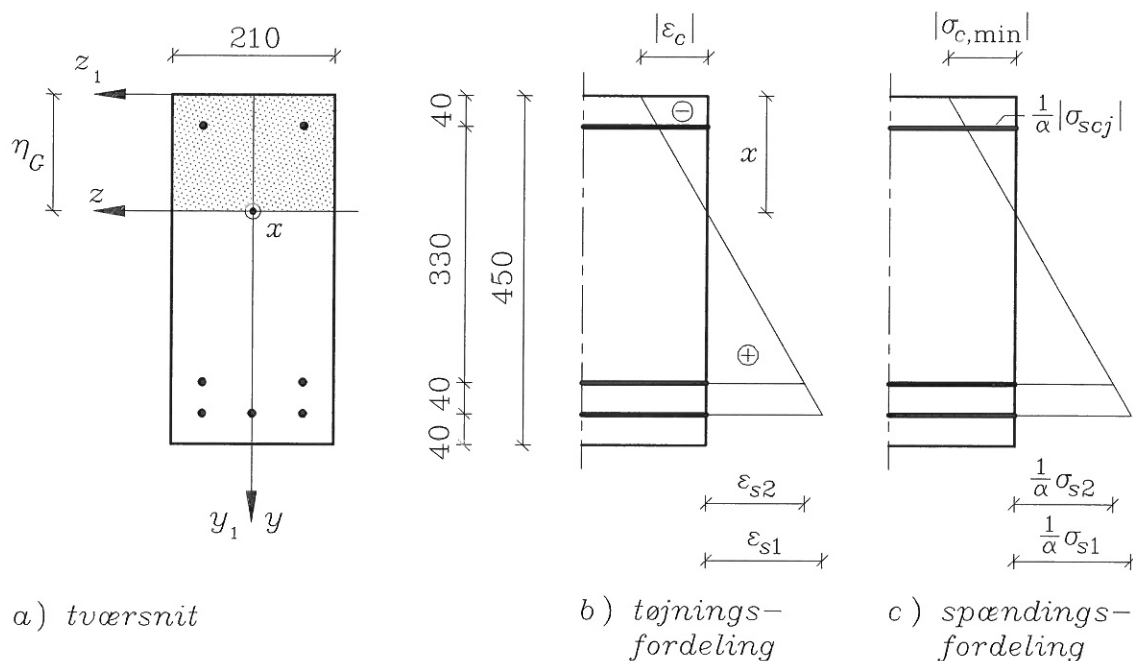
#### Beton:

Der regnes med samme materialekonstanter som i eksempel 5.1-1, dvs.

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa} \quad \text{og} \quad E_{ck} = 24907 \text{ MPa}$$

Betonens trækstyrke regnes lig nul.

$$\alpha = \frac{2 \cdot 10^5}{24907} = 8 \quad (\alpha - 1) = 7$$



Figur 5.2-7 Armeret rektangulært betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling

Af (5.2-31) ses, at når  $N = 0$ , er nullinien og tyngdepunktslinien sammenfaldende. Dette udnyttes ved bestemmelsen af tyngdepunktets- og dermed nulliniens beliggenhed, idet det statiske moment om det transformerede tværsnits tyngdepunktsakse er lig nul:

$$S_{z, tr} = 0 = \{8 \cdot 314 [3 (410 - x) + 2 (370 - x)] - 7 \cdot 201 \cdot 2 (x - 40) - 210 \cdot x \cdot 0,5x\}$$

$$105 x^2 + 15374 x - 5061200 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 158 \text{ mm}$$

d.v.s nullinien og tyngdepunktslinien er beliggende 158 mm under tværsnittets overside.

$$I_{z, tr} = 1/12 \cdot 210 \cdot 158^3 + 210 \cdot 158^3 \cdot 0,25 + 7 \cdot 201 \cdot 2 (158 - 40)^2 + 8 \cdot 314 [3 (410 - 158)^2 + 2 (370 - 158)^2]$$

$$I_{z, tr} = 1019,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{155 \cdot 10^6}{1019,6 \cdot 10^6} (-158) = -24,0 \text{ MPa}$$

5-20

$$\sigma_{s1} = 8 \frac{155 \cdot 10^6}{1019,6 \cdot 10^6} (410 - 158) = 306 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s2} = 8 \frac{155 \cdot 10^6}{1019,6 \cdot 10^6} (370 - 158) = 258 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{scj} = 8 \frac{155 \cdot 10^6}{1019,6 \cdot 10^6} (40 - 158) = -143 \text{ MPa}$$

Hvis det transformerede trykarmeringsareal beregnes som  $\alpha \cdot 2 \cdot 201 = 8 \cdot 402 = 3216 \text{ mm}^2$  i stedet for som ovenfor med  $(\alpha-1) \cdot 2 \cdot 201 = 7 \cdot 402 = 2814 \text{ mm}^2$  fås følgende resultater

$$I_{z, tr} = 1025,2 \text{ mm}^4 \quad \Rightarrow \quad x = 158 \text{ mm} \quad \sigma_c = -23,9 \text{ MPa} \quad \sigma_{s1} = 305 \text{ MPa}$$

Hvis trykarmeringen ikke tages i regning fås

$$I_z = 977,9 \text{ mm}^4 \quad \Rightarrow \quad x = 165 \text{ mm} \quad \sigma_c = -26,2 \text{ MPa} \quad \sigma_{s1} = 310 \text{ MPa}$$

Af ovenstående resultater ses, at for dette tværsnit er der kun en ubetydelig forskel i værdierne for de beregnede spændinger, når de transformerede armeringsarealer beregnes ved, at alle armeringsarealer multipliceres med  $\alpha = 8$  sammenlignet med de værdier, der beregnes ved, at trykarmeringens areal multipliceres med  $(\alpha-1) = 7$ .

Det ses ligeledes, at ved slet ikke at tage trykarmeringen i regning øges de numeriske værdier af beton- og armeringsspændingerne med henholdsvis ca. 9 og 1 %.

#### Eksempel 5.2-4

For det i figur 5.2-8 viste armerede T-formede betontværsnit ønskes nulliniens beliggenhed samt spændingerne i beton og armering bestemt, når tværsnittet påvirkes af et bøjende moment  $M = 600 \text{ kNm}$ . Under beregningen ønskes princippet *transformeret tværsnit* benyttet. Ved beregning af de ønskede spændinger benyttes (5.2-31) og (5.2-32).

Det T-formede betontværsnit har flangebredden  $b = 700 \text{ mm}$ , kropbredden  $b_w = 250 \text{ mm}$ , flangetykkelsen  $t = 80 \text{ mm}$  og tværsnitshøjden  $h = 700 \text{ mm}$ . Tværsnittet er armeret med ribbestål med diameteren  $\varphi = 25 \text{ mm}$ . Armeringen er anbragt i 3 lag med 3 stænger i hvert lag. Bjælkens bøjlearmering er ikke vist.

Materialedata:

Armering:

Ribbestål med  $f_{yk} = 550 \text{ MPa}$  og  $E_{sk} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$   
Stænger med  $\varphi = 25 \text{ mm}$  har tværsnitsarealet  $A_{s,25} = 491 \text{ mm}^2$ .

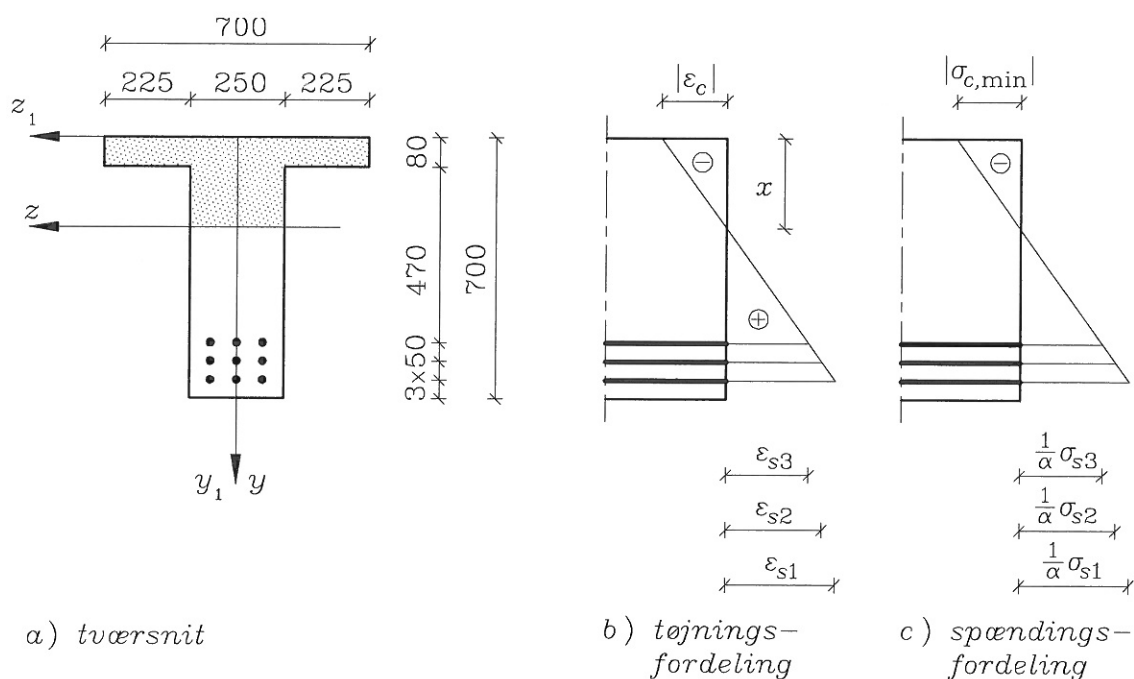
Beton:

Der regnes med samme materialekonstanter som i eksempel 5.2-1, dvs.

$$f_{ck} = 30 \text{ MPa} \quad \text{og} \quad E_{ck} = 24907 \text{ MPa}$$

betonens trækstyrke regnes lig nul

$$\alpha = \frac{2 \cdot 10^5}{24907} = 8 \quad (\alpha - 1) = 7$$



Figur 5.2-8 Armeret T-formet betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling

Af (5.2-31) ses, at når  $N=0$ , er nullinien og tyngdepunktslinien sammenfaldende. Dette udnyttes ved bestemmelsen af tyngdepunktets- og dermed nulliniens beliggenhed, idet det udtrykkes, at det statiske moment om det transformerede tværsnits tyngdepunktsakse er lig nul. Det skønnes, at  $x > 80$  mm.

$$S_z = 0 = 8 \cdot 3 \cdot 491 [(650-x) + (600-x) + (550-x)] - 700 \cdot 80 (x-40) - 250 (x-80)^2 \cdot 0,5$$

$$125 x^2 + 71.352 x - 22.651.200 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 227,1 \text{ mm}$$

$$I_{z, \text{tr}} = \frac{1}{12} (700 \cdot 80^3 + 250(227,1-80)^3) + 700 \cdot 80(227,1-40)^2 + 250(227,1-80) \cdot (0,5(227,1-80))^2 + 8 \cdot 3 \cdot 491 [(650-227,1)^2 + (600-227,1)^2 + (550-227,1)^2]$$

$$I_{z, \text{tr}} = 7230,2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{c,\min} = \frac{600 \cdot 10^6}{7230,2 \cdot 10^6} (-227,1) = -18,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s1} = 8 \frac{600 \cdot 10^6}{7230,2 \cdot 10^6} (650 - 227,1) = 0,664 (650 - 227,1) = 281 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s2} = 0,664 (600 - 227,1) = 248 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s3} = 0,664 (550 - 227,1) = 214 \text{ MPa}$$

Hvis  $N$  er forskellig fra nul, ses det af (5.2-31), at nullinie og tyngdepunktslinie ikke falder sammen, og nulliniens beliggenhed kan derfor ikke bestemmes umiddelbart, som vist ovenfor. Hvis man i dette tilfælde vil benytte princippet *transformeret tværsnit* til en spændingsbestemmelse for et moment- og normalkraftpåvirket tværsnit, kan nulliniehøjden  $x$  bestemmes ved iteration.

Beregningerne indledes med at skønne en værdi for nulliniedybden  $x = x_{\text{skøn},1}$ , hvorefter  $A_{\text{tr}}$  og  $I_{z,\text{tr}}$  svarende til denne  $x$ -værdi bestemmes. De til den skønnede værdi af  $x$  svarende spændinger  $\sigma_{c,\min}$  og  $1/\alpha \sigma_{si}$  bestemmes af (5.2-31) og (5.2-32). Ved betragtning af de ensvinklede trekanter i spændingsfiguren i figur 5.2-5 kan  $x_{\text{bereg}}$  bestemmes af

$$x_{\text{bereg}} = (y_{1si} - x_{\text{bereg}}) \frac{-\sigma_{c,\min}}{\frac{1}{\alpha} \sigma_{si}} \quad (5.2-41)$$

Hvis der ikke er tilstrækkelig god overensstemmelse mellem  $x_{\text{skøn},1}$  og  $x_{\text{bereg}}$ , skønnes en ny værdi  $x_{\text{skøn},2}$ , og beregningen ovenfor gentages, indtil der er tilstrækkelig god overensstemmelse mellem den skønnede og den beregnede værdi af  $x$ .

#### eksempel 5.2-5

I dette eksempel betragtes samme tværsnit som i eksempel 5.2-4, se figur 5.2-8. Tværsnittet belastes ligeledes af momentet  $M = 600 \text{ kNm}$  men nu tillige af normalkraften  $N = -450 \text{ kN}$ , der angriber i afstanden  $350 \text{ mm}$  fra tværsnittets overside. Beton- og armeringsspændingerne ønskes bestemt ved anvendelse af princippet *transformeret tværsnit*.

Da  $N \neq 0$  falder tyngdepunktslinien og nullinien ikke sammen. Anvendes princippet *transformeret tværsnit*, er det derfor nødvendigt at skønne nulliniens beliggenhed.

1. skøn :  $x_{\text{skøn},1} = 280 \text{ mm}$ .

$$A_{\text{tr}} = 700 \cdot 80 + 250 (280 - 80) + 8 \cdot 9 \cdot 491 = 141,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

Statisk moment om  $\xi$ -aksen giver

$$S_{\xi} = 141,4 \cdot 10^3 \eta_G = 700 \cdot 80 \cdot 40 + 250 (280 - 80) (100 + 80) + 8 \cdot 9 \cdot 491 \cdot 600 \Rightarrow \eta_G = 229,5 \text{ mm}$$

$$I_z = 1/12 [700 \cdot 80^3 + 250 (280 - 80)^3] + 700 \cdot 80 (229,5 - 40)^2 + 250 \cdot 200 (229,5 - 180)^2 + 8 \cdot 3 \cdot 491 [(650 - 229,5)^2 + (600 - 229,5)^2 + (550 - 229,5)^2]$$

$$I_z = 7241,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

For at bestemme spændingerne af (5.1-31) og (5.1-32) skal de værdier for M og N, der indsættes i formlerne, svare til det ækvivalente kraftsystem henført til det transformerede revnede tværsnits tyngdepunkt. Ved flytning af snitkræfterne fås

$$N = -450 \text{ kN} \quad M = 600 - 450(350 - 229,5) \cdot 10^{-3} = 545,8 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{\text{c,min}} = - \frac{450 \cdot 10^3}{141,4 \cdot 10^3} + \frac{545,8 \cdot 10^6}{7241,7 \cdot 10^6} (-229,5) = -20,5 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \sigma_{s1} = - \frac{450 \cdot 10^3}{141,4 \cdot 10^3} + \frac{545,8 \cdot 10^6}{7241,7 \cdot 10^6} (650 - 229,5) = 28,5 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{s1} = 8 \cdot 28,5 = 228 \text{ MPa}$$

Den til den beregnede spændingstilstand hørende beliggenhed af nullinien angivet ved x kan beregnes ved brug af ensvinklede trekanter i tøjningsfiguren i figur 5.2-8

$$\frac{x}{|\sigma_{\text{c,min}}|} = \frac{650 - x}{\frac{1}{\alpha} \cdot \sigma_{s1}} \Rightarrow \frac{x}{20,5} = \frac{650 - x}{28,5}$$

$$x = 271,9 \text{ mm} \neq x_{\text{skøn},1} = 280 \text{ mm}$$

Forskellen mellem det beregnede og det skønnede x er her så lille, at man i praksis ikke vil foretage nogen omregning, da et mere korrekt skøn af værdien x ikke vil give anledning til ændringer af betydning i spændingerne.

For at vise dette er der her foretaget beregninger i lighed med ovenstående for et nyt skøn af x, nemlig  $x = 272 \text{ mm}$ . Ved disse beregninger er nedenstående værdier fundet:

$$A_c = 139,4 \text{ mm}^2 \quad \eta_G = 228,8 \text{ mm} \quad I_z = 7237,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

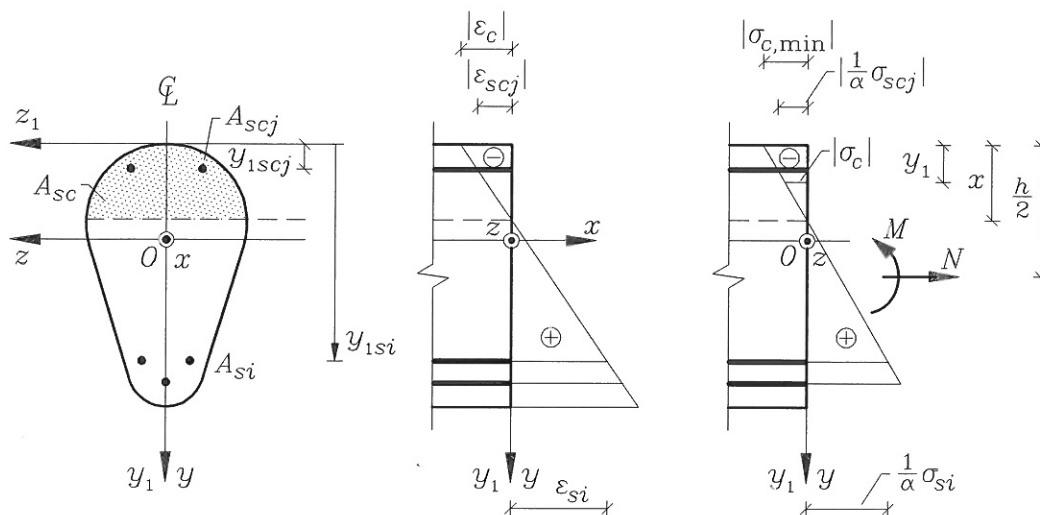
$$\sigma_{\text{c,min}} = -20,5 \text{ MPa} \quad 1/\alpha \sigma_{s1} = 28,5 \text{ MPa} \quad \sigma_{s1} = 228 \text{ MPa} \quad \sigma_{s2} = 198 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s3} = 168 \text{ MPa} \quad x = 271,9 \text{ mm} \sim x_{\text{skøn},2} = 272 \text{ mm}$$

hvoraf det ses, at den beregnede værdi af x er meget nær lig den skønnede, og at med den benyttede nøjagtighed i angivelsen af spændingernes størrelse ændres disse ikke ved omregningen.

### 5.2.3 Spændingsbestemmelse ved anvendelse af ækvivalensbetingelser

Spændingerne i et revnet tværsnit kan også bestemmes ved opstilling af ækvivalensbetingelser, der udtrykker ækvivalens mellem spændingerne over tværsnittet og tværsnittets normalkraft og moment. Som nævnt i afsnit 5.2.2 benyttes i dette afsnit tilnærmelsen  $(\alpha - 1) \sim \alpha$



Figur 5.2-9 Armeret revnet betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling

Ved betragtning af figur 5.2-9 fås

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{c,\min}} = \frac{x - y_1}{x} \quad \rightarrow \quad \sigma_c = \sigma_{c,\min} \left( 1 - \frac{y_1}{x} \right) \quad (5.2-42)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} \sigma_{si}}{-\sigma_{c,\min}} = \frac{y_{1si} - x}{x} \quad \rightarrow \quad \sigma_{si} = -\alpha \sigma_{c,\min} \left( \frac{y_{1si}}{x} - 1 \right) \quad (5.2-43)$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} \sigma_{scj}}{\sigma_{c,\min}} = \frac{x - y_{1scj}}{x} \quad \rightarrow \quad \sigma_{scj} = \alpha \sigma_{c,\min} \frac{x - y_{1scj}}{x} \quad (5.2-44)$$

hvor

$\sigma_c$	er betonspændingen i et vilkårligt punkt med ordinaten $y_1$
$\sigma_{c,\min}$	er den mindste betonspænding i tværsnittet (maksimale betontrykspænding)
$\sigma_{si}$	er armeringsspændingen i trækarmingslaget $A_{si}$
$\sigma_{scj}$	er armeringsspændingen i trykarmeringslaget $A_{scj}$
$y_1$	angiver ordinaten til det vilkårlige punkt i $z_1, y_1$ -koordinatsystemet
$y_{1si}$	angiver ordinaten til trækarmingslaget $A_{si}$ i $z_1, y_1$ -koordinatsystemet
$y_{1scj}$	angiver ordinaten til trykarmeringslaget $A_{scj}$ i $z_1, y_1$ -koordinatsystemet

Ækvivalensbetingelsen for normalkraften  $N$  giver ved projektion på vandret

$$N = \int_0^x \sigma_c b(x) dy_1 + \sum A_{scj} \sigma_{scj} + \sum A_{si} \sigma_{si} \quad (5.2-45)$$

Indsættes (5.2-42), (5.2-43) og (5.2-44) i (5.2-45) fås

$$N = \sigma_{c,\min} \int_0^x \left(1 - \frac{y_1}{x}\right) b(x) dy_1 + \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{scj} \frac{x - y_{1scj}}{x} - \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{si} \left(\frac{y_{1si}}{x} - 1\right) \quad (5.2-46)$$

Bemærk, at nullniedybden  $x$  og den maksimale betonspænding  $\sigma_{c,\min}$  i denne opstilling er konstanter, samt at  $\sigma_{c,\min}$  i en beregning vil have en negativ værdi.

Ækvivalensbetingelsen for momentet  $M$  giver ved moment om  $z_1$ -aksen

$$M + \frac{1}{2} h N = \sigma_{c,\min} \int_0^x \left(1 - \frac{y_1}{x}\right) b(x) y_1 dy_1 + \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{scj} \frac{x - y_{1scj}}{x} y_{1scj} - \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{si} \left(\frac{y_{1si}}{x} - 1\right) y_{1si} \quad (5.2-47)$$

Nulliniedybden  $x$  og den maksimale betontrykspænding  $\sigma_{c,\min}$  kan herefter bestemmes af (5.2-46) og (5.2-47), idet man her har 2 ligninger med 2 ubekendte, nemlig  $x$  og  $\sigma_{c,\min}$ . Med kendte værdier for  $x$  og  $\sigma_{c,\min}$  kan  $\sigma_{si}$  og  $\sigma_{scj}$  bestemmes af henholdsvis (5.2-43) og (5.2-44).

Hvis  $N = 0$  indgår størrelsen  $\sigma_{c,\min}$  som faktor i alle led i (5.2-46), og  $x$  kan derfor findes af (5.2-46) alene, hvorefter  $\sigma_{c,\min}$  kan bestemmes af (5.2-47).

Betragtes et tværsnit med konstant trykzonebredde  $b$  kan (5.2-46) og (5.2-47) skrives som

$$N = \frac{1}{2} \sigma_{c,\min} b x + \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{scj} \frac{x - y_{1scj}}{x} - \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{si} \left( \frac{y_{1si}}{x} - 1 \right) \quad (5.2-48)$$

$$M + \frac{1}{2} N h = \frac{1}{6} \sigma_{c,\min} b x^2 + \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{scj} \frac{x - y_{1scj}}{x} y_{1scj} - \alpha \sigma_{c,\min} \sum A_{si} \left( \frac{y_{1si}}{x} - 1 \right) y_{1si} \quad (5.2-49)$$

#### Eksempel 5.2-6.

Ved anvendelse af ækvivalensbetingelser ønskes spændingstilstanden bestemt for det i eksempel 5.2-3 betragtede tværsnit påvirket af momentet  $M = 155$  kNm og normalkraften  $N = 0$  (se figur 5.2-7).

Armeringsspændingerne  $\sigma_{s1}$   $\sigma_{s2}$   $\sigma_{scj}$  bestemmes af (5.2-43) og (5.2-44) som

$$\sigma_{s1} = - 8 \sigma_{c,\min} \left( \frac{410}{x} - 1 \right)$$

$$\sigma_{s2} = - 8 \sigma_{c,\min} \left( \frac{370}{x} - 1 \right)$$

$$\sigma_{scj} = 8 \sigma_{c,\min} \frac{x - 40}{x}$$

Indsættes disse udtryk i (5.2-48) fås

$$N = 0 = \frac{1}{2} \sigma_{c,\min} \cdot 210 x + 8 \sigma_{c,\min} \frac{x-40}{x} \cdot 201 \cdot 2 - 8 \sigma_{c,\min} \cdot 314 \left[ 3 \left( \frac{410}{x} - 1 \right) + 2 \cdot \left( \frac{370}{x} - 1 \right) \right]$$

$$0 = \sigma_{c,\min} \left( 105 x - \frac{5.077.280}{x} + 15.776 \right)$$

Denne ligning er opfyldt for  $105 x^2 + 15.776 x - 5.077.280 = 0 \Rightarrow x = 157,3 \text{ mm}$

Indsættes  $x = 157,3 \text{ mm}$  i (5.2-47) kan  $\sigma_{c,\min}$  bestemmes af denne ligning

$$M = 155 \cdot 10^6 = \frac{1}{2} \sigma_{c,\min} \cdot 210 \cdot 157,3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 157,3 + 8 \sigma_{c,\min} \frac{157,3 - 40}{157,3} \cdot 40 \cdot 2 \cdot 201 \\ - 8 \sigma_{c,\min} \left[ \left( \frac{410}{157,3} - 1 \right) \cdot 410 \cdot 3 \cdot 314 + \left( \frac{370}{157,3} - 1 \right) \cdot 370 \cdot 2 \cdot 314 \right]$$

$$\sigma_{c,\min} = -23,8 \text{ MPa}$$

Armeringsspændingerne kan herefter bestemmes af

$$\sigma_{s1} = -8 (-23,8) \left( \frac{410}{157,3} - 1 \right) = 306 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s2} = -8 (-23,8) \left( \frac{370}{157,3} - 1 \right) = 257 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{scj} = 8 (-24,0) \frac{157,3 - 40}{157,3} = -143 \text{ MPa}$$

Det ses, at denne beregning giver omtrent samme resultater som ved anvendelse af princippet transformeret tværsnit. Forskellen skyldes afrundingsfejl. Det ses ligeledes, at hvis  $N \neq 0$  vil ovenstående beregning blive af væsentlig større omfang, idet det da bliver nødvendigt at finde  $\sigma_{c,\min}$  og  $x$  ved at løse 2 ligninger med 2 ubekendte nemlig (5.2-46) og (5.2-47)

#### 5.2.4 Spændingsbestemmelse ved anvendelse af $\alpha_Q$ -metoden

For ikke trykarmerede tværsnit med konstant trykzonebredde, f.eks. rektangulære eller T-formede tværsnit, påvirket til ren bøjning kan spændingsbestemmelsen simplificeres, idet der kan opstilles simple formler til bestemmelse af beton- og armeringsspændingerne, hvor de faktorer, udover trykzonens bredde  $b$  og den effektive højde  $d$ , der indgår i formlerne, kun er funktioner af forholdet mellem elasticitetsmodulerne  $\alpha = E_s / E_c$  og armeringsforholdet for længdearmeringen  $\rho = A_s / (b d)$ .

I figur (5.2-10) er vist et rektangulært tværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling. Da spændingsfordelingen er vist som betonspændinger, er betonspændingen i armeringsniveau ifølge (5.2-32) lig  $1/\alpha \sigma_s$

Af spændingsfiguren i figur (5.2-10) fås

$$\frac{\frac{1}{\alpha} \sigma_s}{-\sigma_{c,\min}} = \frac{d-x}{x} \quad (5.2-50)$$

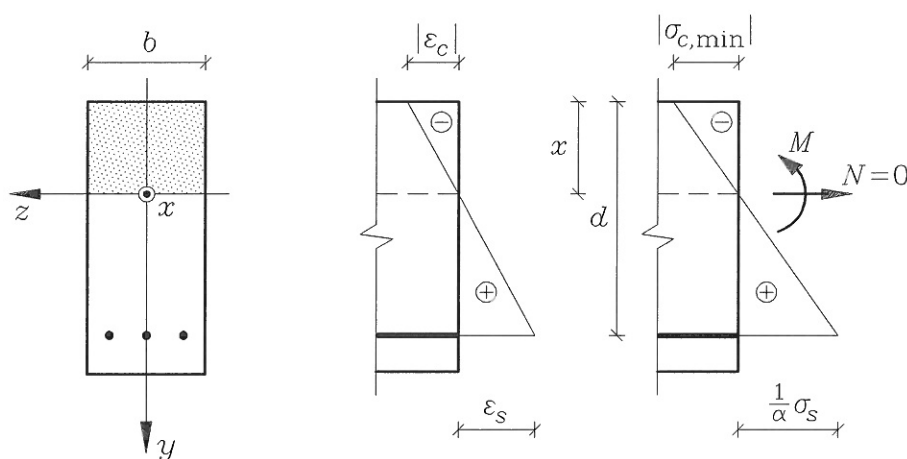
eller

$$\frac{\sigma_s}{-\sigma_{c,\min}} = \alpha \frac{1 - \frac{x}{d}}{\frac{x}{d}} = \alpha \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (5.2-51)$$

hvor

$$\beta = \frac{x}{d} \quad (5.2-52)$$

er indført.



Figur 5.2-10 Armeret, rektangulært, revnet betontværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling.

Idet  $N = 0$  fås af ækvivalensbetingelsen for projektion på bjælkeaksen

$$N = 0 = \sigma_s A_s + \frac{1}{2} b x \sigma_{c,\min} \quad (5.2-53)$$

Af (5.2-53) fås forholdet mellem spændingerne i armeringen og betonen

$$\frac{\sigma_s}{-\sigma_{c,\min}} = \frac{1/2 b x}{A_s} = 1/2 \frac{\frac{x}{d}}{\frac{A_s}{bd}} = \frac{1/2 \beta}{\rho} \quad (5.2-54)$$

Indsættes (5.2-54) i (5.2-51) fås

$$\frac{1/2 \beta}{\rho} = \alpha \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (5.2-55)$$

der kan omskrives til

$$\beta^2 + 2 \alpha \rho \beta - 2 \alpha \rho = 0 \quad (5.2-56)$$

med løsningen

$$\beta = \frac{x}{d} = -\alpha \rho + \sqrt{(\alpha \rho)^2 + 2 \alpha \rho} = \alpha \rho \left( \sqrt{\frac{2}{\alpha \rho} + 1} - 1 \right) \quad (5.2-57)$$

Benyttes ækvivalensbetingelsen for moment omkring armeringens tyngdepunkt fås

$$\begin{aligned} M &= -1/2 b x \sigma_{c,\min} \left( d - \frac{x}{3} \right) = -1/2 b d^2 \sigma_{c,\min} \beta \left( 1 - \frac{\beta}{3} \right) \\ &= -\rho_b b d^2 \sigma_{c,\min} \end{aligned} \quad (5.2-58)$$

idet

$$\beta = \frac{x}{d} \quad \text{og} \quad \rho_b = \frac{1}{6} \beta (3 - \beta) \quad (5.2-59)$$

er indført.

Af (5.2-58) og (5.2-51) fås

$$\sigma_{c,\min} = -\frac{M}{\rho_b b d^2} \quad (5.2-60)$$

5-30

$$\sigma_s = -\sigma_{c,\min} \alpha \frac{1 - \beta}{\beta} = -\sigma_{c,\min} \alpha \gamma \quad (5.2-61)$$

hvor

$$\gamma = \frac{1 - \beta}{\beta} \quad (5.2-62)$$

er indført.

Af ovenstående ses, at når

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c}, \quad \varrho = \frac{A_s}{b d} \quad \text{og} \quad \alpha\varrho = \frac{E_s}{E_c} \frac{A_s}{b d}$$

er beregnet, kan  $\beta$  og dermed  $\varrho_b$  og  $\gamma$ , der alene er funktioner af produktet  $\alpha\varrho$ , bestemmes, hvorefter  $\sigma_{c,\min}$ ,  $\sigma_s$  og  $x$  kan bestemmes af henholdsvis (5.2-60), (5.2-61) og (5.2-52).

$\beta$ ,  $\varrho_b$  og  $\gamma$  kan tabelleres som funktioner af  $\alpha\varrho$  som vist i tabel 5.2-1.

#### Eksempel 5.2-6.

Ved anvendelse af  $\alpha\varrho$ -metoden ønskes spændingstilstanden bestemt for det i eksempel 5.2-3 betragtede tværsnit påvirket af momentet  $M = 155 \text{ kNm}$  (se figur 5.2-7). Trykarmeringen tages ikke i regning.

$$d = 450 - (3 \cdot 40 + 2 \cdot 80)/5 = 394 \text{ mm}$$

$$\alpha = 2 \cdot \frac{10^5}{24907} = 8 \quad \varrho = \frac{5 \cdot 314}{210 \cdot 394} = 0,019 \quad \alpha\varrho = 8 \cdot 0,019 = 0,152$$

$$\beta = 0,152 \left( \sqrt{\frac{2}{0,152} + 1} - 1 \right) = 0,42$$

$$x = 0,42 \cdot 394 = 166 \text{ mm} \quad \varrho_b = 1/6 \cdot 0,42 (3 - 0,42) = 0,181 \quad \gamma = (1 - 0,42)/0,42 = 1,381$$

$$\sigma_{c,\min} = -\frac{155 \cdot 10^6}{0,181 \cdot 210 \cdot 394^2} = -26,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s,d} = -8 \cdot 1,381 \cdot (-26,3) = 291 \text{ MPa}$$

Bestemmelse af $q_b$ , $\gamma$ og $\beta$ som funktion af $\alpha q$											
$\alpha q$	$q_b$	$\gamma$	$\beta$	$\alpha q$	$q_b$	$\gamma$	$\beta$	$\alpha q$	$q_b$	$\gamma$	$\beta$
0,01	0,063	6,589	0,132	0,41	0,235	0,712	0,584	0,81	0,268	0,431	0,699
0,02	0,085	4,525	0,181	0,42	0,236	0,700	0,588	0,82	0,269	0,427	0,701
0,03	0,101	3,613	0,217	0,43	0,238	0,689	0,592	0,83	0,269	0,423	0,703
0,04	0,113	3,071	0,246	0,44	0,239	0,677	0,596	0,84	0,270	0,419	0,705
0,05	0,123	2,702	0,270	0,45	0,240	0,667	0,600	0,85	0,270	0,416	0,706
0,06	0,132	2,430	0,292	0,46	0,241	0,656	0,604	0,86	0,271	0,412	0,708
0,07	0,139	2,219	0,311	0,47	0,242	0,646	0,607	0,87	0,271	0,408	0,710
0,08	0,146	2,050	0,328	0,48	0,243	0,637	0,611	0,88	0,272	0,405	0,712
0,09	0,152	1,909	0,344	0,49	0,244	0,627	0,615	0,89	0,272	0,401	0,714
0,10	0,158	1,791	0,358	0,50	0,245	0,618	0,618	0,90	0,272	0,398	0,716
0,11	0,163	1,690	0,372	0,51	0,246	0,609	0,621	0,91	0,273	0,394	0,717
0,12	0,168	1,602	0,384	0,52	0,247	0,601	0,625	0,92	0,273	0,391	0,719
0,13	0,172	1,524	0,396	0,53	0,248	0,592	0,628	0,93	0,274	0,387	0,721
0,14	0,176	1,455	0,407	0,54	0,259	0,584	0,631	0,94	0,274	0,384	0,722
0,15	0,180	1,393	0,418	0,55	0,250	0,577	0,634	0,95	0,275	0,381	0,724
0,16	0,183	1,337	0,428	0,56	0,251	0,569	0,637	0,96	0,275	0,378	0,726
0,17	0,187	1,286	0,437	0,57	0,252	0,562	0,640	0,97	0,275	0,375	0,727
0,18	0,190	1,240	0,446	0,58	0,253	0,555	0,643	0,98	0,276	0,372	0,729
0,19	0,193	1,198	0,455	0,59	0,253	0,548	0,646	0,99	0,276	0,369	0,730
0,20	0,196	1,158	0,463	0,60	0,254	0,541	0,649	1,00	0,277	0,366	0,732
0,21	0,199	1,122	0,471	0,61	0,255	0,534	0,652	1,05	0,279	0,352	0,740
0,22	0,201	1,088	0,479	0,62	0,256	0,528	0,655	1,10	0,280	0,339	0,747
0,23	0,204	1,057	0,486	0,63	0,257	0,522	0,657	1,15	0,282	0,328	0,753
0,24	0,206	1,028	0,493	0,64	0,257	0,516	0,660	1,20	0,284	0,316	0,760
0,25	0,208	1,000	0,500	0,65	0,258	0,510	0,662	1,25	0,285	0,306	0,766
0,26	0,211	0,974	0,507	0,66	0,259	0,504	0,665	1,30	0,286	0,297	0,771
0,27	0,213	0,950	0,513	0,67	0,259	0,498	0,667	1,35	0,288	0,288	0,777
0,28	0,215	0,927	0,519	0,68	0,260	0,493	0,670	1,40	0,289	0,279	0,782
0,29	0,217	0,905	0,525	0,69	0,261	0,487	0,672	1,45	0,290	0,271	0,787
0,30	0,218	0,884	0,531	0,70	0,261	0,482	0,675	1,50	0,291	0,264	0,791
0,31	0,220	0,865	0,536	0,71	0,262	0,477	0,677	1,55	0,292	0,257	0,796
0,32	0,222	0,846	0,542	0,72	0,263	0,472	0,679	1,60	0,293	0,250	0,800
0,33	0,224	0,829	0,547	0,73	0,263	0,467	0,682	1,65	0,294	0,244	0,804
0,34	0,225	0,812	0,552	0,74	0,264	0,462	0,684	1,70	0,295	0,238	0,808
0,35	0,227	0,796	0,557	0,75	0,265	0,457	0,686	1,75	0,296	0,232	0,812
0,36	0,228	0,780	0,562	0,76	0,265	0,453	0,688	1,80	0,297	0,226	0,815
0,37	0,230	0,765	0,566	0,77	0,266	0,448	0,690	1,85	0,298	0,221	0,819
0,38	0,231	0,751	0,571	0,78	0,266	0,444	0,693	1,90	0,298	0,216	0,822
0,39	0,233	0,738	0,575	0,79	0,267	0,440	0,695	1,95	0,299	0,212	0,825
0,40	0,234	0,725	0,580	0,80	0,267	0,435	0,697	2,00	0,300	0,207	0,828

Tabel 5.2-1 Værdier af  $q_b$ ,  $\gamma$  og  $\beta$  som funktion af  $\alpha q$

Den beregnede værdi for  $\sigma_{sd}$  svarer til armeringsspændingen i tyngdepunktet for det anvendte armeringsarrangement. Armeringsspændingen i centerlinien for nederste armeringslag bestemmes af

$$\sigma_{s1} = \sigma_{s,d} \frac{y_{1s1} - x}{d - x} = 291 \frac{410 - 166}{394 - 166} = 311 \text{ MPa}$$

Det ses, at  $\alpha\phi$ -metoden giver omtrent samme resultater som spændinger beregnet ved brug af princippet *transformeret tværsnit*. Forskellen skyldes afrundingsfejl.

## 5.3 Bestemmelse af flytninger

### 5.3.1 Indledning

En bærende konstruktion skal dimensioneres således, at der ikke forekommer skadelige eller uønskede deformationer i anvendelsesgrænsetilstanden. Konstruktionens deformation kan påvirke konstruktionens udseende, men kan også indvirke direkte skadelig på tilstødende konstruktioner eller bygningsdele, ligesom konstruktionens funktion kan blive forstyrret ved for store deformationer.

Der stilles normalt ikke direkte normkrav til konstruktionens maksimale flytninger, hvorimod der ofte angives vejledende grænser. Disse grænser er afhængige af konstruktionens art og de funktionelle krav, der stilles til konstruktionen.

De vejledende grænser udtrykkes ved, at de maksimale flytninger skal være mindre end  $L/n$ , hvor  $n$  ligger i intervallet  $250 \leq n \leq 500$ .  $L$  er konstruktionselementets spændvidde.

Flytningsbestemmelse i en betonkonstruktion er behæftet med en del usikkerheder, hvorfor beregningerne kun kan føre til værdier, der må betragtes som tilnærmede værdier for den virkelig forekommende flytning. Som eksempler på faktorer, der bidrager til den nævnte usikkerhed, kan nævnes

- den armerede betons inhomogenitet
- materialernes ikke-lineære arbejdslinier
- revner i betonen
- varierende trækspændinger i betonen mellem revnerne

I dette kapitel behandles emnet *flytningsbestemmelse* som bestemmelse af den maksimale nedbøjning hidrørende fra momentpåvirkningen for en simpelt understøttet, armeret betonbjælke. Normal- og forskydningskræfternes bidrag til flytningerne er ved almindeligt forekommende bjælker normalt små sammenlignet med bøjningsmomentets bidrag. Den generelle flytningsbestemmelse for plader, bjælker og rammekonstruktioner af armeret beton kan foregå efter de samme principper, idet bestemmelse af flytninger  $f_x$  kan foretages ved brug af arbejdsligningen eller ved løsning af tilhørende differentiaalligninger, når krumningsfordelingen over konstruktionen er kendt. Der findes en del færdige computerprogrammer, der kan benyttes ved bestemmelse af flytninger i konstruktioner.

Der skal skelnes mellem konstruktioners korttids- og langtidsdeformationer, se også afsnit 5.1

### 5.3.2 Bestemmelse af den maksimale nedbøjning for en simpelt understøttet, armeret betonbjælke

Ved bestemmelsen af en bjælkes *korttidsnedbøjning* vil de nedenfor angivne forudsætninger blive benyttet.

- tøjningsfordelingen antages at være plan
- Arbejdslinierne for beton og armering regnes lineærelastiske-idealplastiske med bilineære arbejdslinier, som vist i figur 5.3-1. De skrå linier har hældningskoefficienter svarende til elasticitetskoefficienterne  $E_c$  og  $E_s$ , og de vandrette linier bestemmes af  $|\sigma_c| = f_c$  og  $\sigma_s = f_y$  for henholdsvis beton og armering.  
På grund af betonens krumme arbejdslinie regnes der med en reduceret elasticitetskoefficient for betonen, nemlig  $E_c = 0,7 E_{0c}$ , hvor  $E_{0c}$  er betonens begyndelseselasticitetskoefficient, d.v.s

$$E_c = 0,7 \cdot 51000 \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13} = 35700 \frac{f_{ck}}{f_{ck} + 13} \quad (5.3-1)$$

Armeringens elasticitetskoefficient regnes lig begyndelseselasticitetskoefficienten, d.v.s.

$$E_s = E_{0s} \quad (5.3-2)$$

Ved urevnede tværsnit bestemmes betonens bøjningstrækstyrke  $f_{ct,fl}$  af

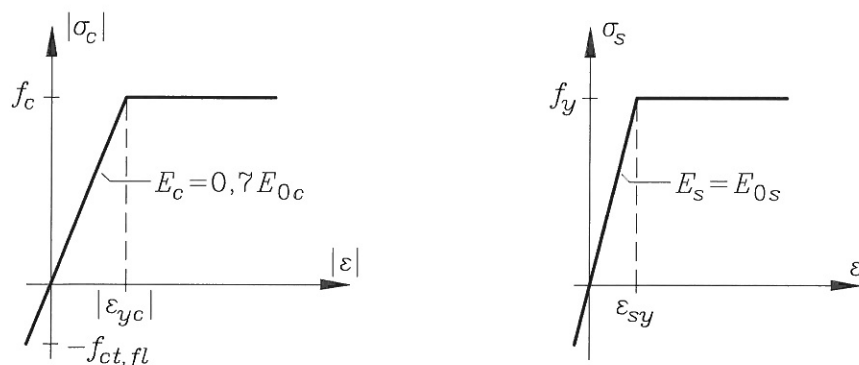
$$f_{ct,fl} \sim 1,6 \sqrt{0,1 f_c} \quad (5.3-3)$$

Ved beregninger af nedbøjninger i praksis antages betonens trækstyrke normalt at være nul, d.v.s. betonens trækspændinger tages normalt ikke i regning, og bjælken regnes revnet over hele længden.

- Hvis betonens trækstyrke medregnes, sker det kun for krumninger i intervallet  $0 \leq \kappa \leq \kappa_R$ , hvor  $\kappa_R$  er krumningen svarende til revnemomentet, se figur 5.3-2, d.v.s det moment der bevirker, at største trækspænding er lig  $f_{ct,fl}$ . Der kan tages hensyn til revneforekomsterne i den belastede betonbjælker ved følgende betragtninger:

Der er stor forskel på bøjningsstivheden for den revnede og den urevnede bjælke. Overgangen sker dog ikke brat. Revnedybden vil kun udvikle sig gradvis til sin fulde længde, og bjælken vil ikke revne i sin fulde længde, når det maksimale moment antager revnemomentet  $M_R$ 's

størrelse. Desuden vil der stadig være en bøjningsstivhed tilstede mellem revnerne svarende til bøjningsstivheden for det urevnede tværsnit. Det sidstnævnte benævnes ofte *tension stiffening*.



a) betonens arbejdslinie

b) armeringens trækarbejdslinie

Figur 5.3-1 Idealiserede arbejdslinier for beton og armering til brug ved beregning af flytninger og spændinger i armerede betonkonstruktioner.

I anvendelsesgrænsetilstanden vil delstrækninger af betragtede bjælker ofte befinde sig i det ovenfor omtalte overgangsområde mellem delvis revnet og fuldt revnet tilstand. I henhold til *CEB (Comité Européen du Béton): Recommendations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton, 2. udgave 1970* kan der i krumningsintervallet  $0 \leq \kappa \leq \kappa_y$  benyttes den i figur 5.3-2 viste sammenhæng mellem krumningen  $\kappa$  og momentet  $M$ .  $\kappa_y$  er krumningen svarende til netop indtruffet flydning i armeringen, d.v.s.  $\epsilon_s = \epsilon_{sy}$ .

De rette linier mærket UR og R i figur 5.3-2 angiver bøjningsarbejdslinierne svarende til henholdsvis urevnet og revnet tværsnit.

Det analytiske udtryk for den rette linie UR er givet ved

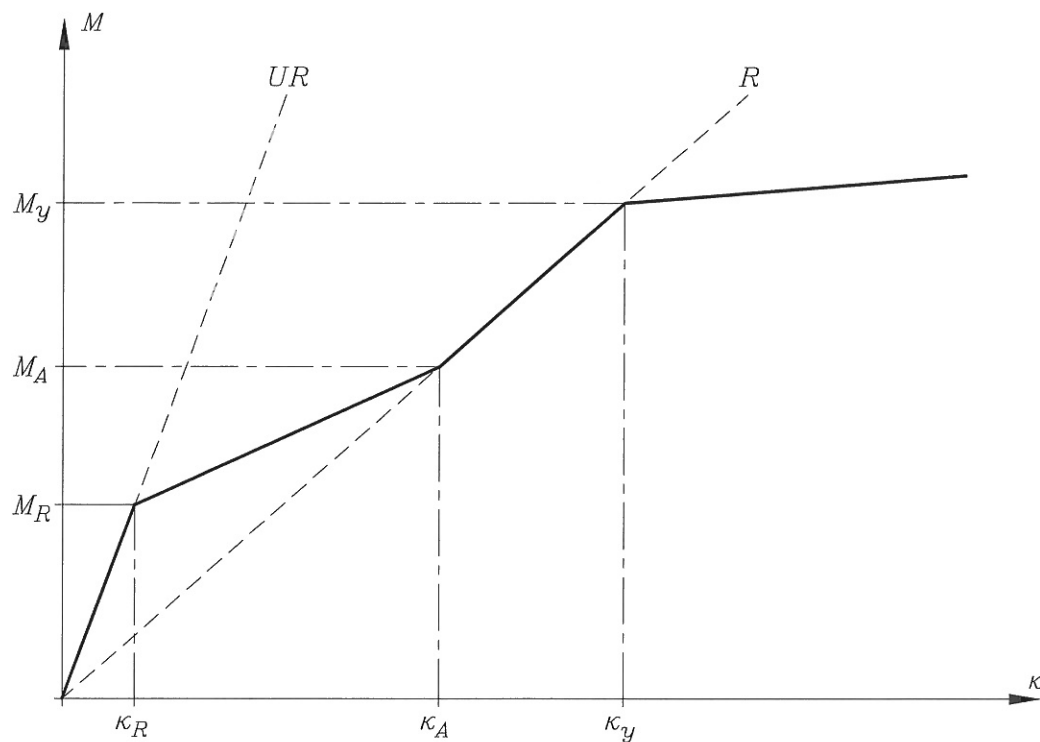
$$M = E_c I_{zur,tr} \kappa \quad (5.3-4)$$

hvor  $I_{zur,tr}$  er det transformerende urevnede tværsnits inertimoment om det urevnede tværsnits tyngdepunktsakse.

Sammenhængen mellem krumningen  $\kappa$  og momentet  $M$  i overgangsområdet  $\kappa_R \leq \kappa \leq \kappa_A$  bestemmes ved

$$\kappa = \frac{M_R}{E_c I_{zur,tr}} + \frac{4}{3} \frac{M - M_R}{E_c I_{zr,tr}} \quad (5.3-5)$$

hvor  $M_R$  er revnemomentet svarende til, at spændingen i betonens trækside er lig bøjnings-trækstyrken  $f_{ct,fl}$   
 $I_{zr,tr}$  er det transformerede revnede tværsnits inertimoment om det revnede tværsnits tyngdepunktsakse



Figur 5.3-2 Bøjningsarbejdslinie til anvendelse ved beregning af armerede betonbjælkens nedbøjning.

Revnemomentet  $M_R$  og den hertil svarende krumning  $\kappa_R$  bestemmes af

$$M_R = f_{ct,fl} \frac{I_{zur,tr}}{y_u} \quad (5.3-6)$$

$$\kappa_R = \frac{f_{ct,fl}}{E_c} \frac{1}{y_u} = \frac{|\sigma_c|}{E_c} \frac{1}{y_o} = \frac{M_R}{E_c I_{zur,tr}} \quad (5.3-7)$$

hvor  $y_u$  og  $y_o$  er afstanden fra det transformerede tværsnits tyngdepunktsakse til henholdsvis tværsnittets træk- og trykside  
 $\sigma_c$  er den største trykspænding i betonen svarende til  $M = M_R$

Ved omredigering af (5.3-5) fås flg. analytiske udtryk for bøjningsarbejdslinien i intervallet  $\kappa_R \leq \kappa \leq \kappa_A$

$$M = M_R \left(1 - \frac{3}{4} \frac{I_{zr,tr}}{I_{zur,tr}}\right) + \frac{3}{4} E_c I_{zr,tr} \kappa \quad (5.3-8)$$

Det analytiske udtryk for den rette linie R er givet ved

$$M = E_c I_{zr,tr} \kappa \quad (5.3-9)$$

$M_A$  og  $\kappa_A$  er defineret som momentet og krumningen svarende til skæringspunktet mellem den teoretiske arbejdslinie for det revnede tværsnit R og den teoretiske arbejdslinie i intervallet  $\kappa_R \leq \kappa \leq \kappa_A$ . Krumningen  $\kappa_A$  kan derfor bestemmes ved at indsætte (5.3-9) i (5.3-8) og løse den derved fremkomne ligning med hensyn til  $\kappa$ . Herved fås

$$\kappa_A = \frac{4 M_R}{E_c I_{zr,tr}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{I_{zr,tr}}{I_{zur,tr}}\right) \quad (5.3-10)$$

$M_A$  findes herefter ved at indsætte (5.3-10) i (5.3-9)

$$M_A = \kappa_A E_c I_{zr,tr} = 4 M_R \left(1 - \frac{3}{4} \frac{I_{zr,tr}}{I_{zur,tr}}\right) \quad (5.3-11)$$

Når der netop forekommer flydning i armeringen, d.v.s. når  $\epsilon_s = \epsilon_y$ , kan (5.2-32) med  $N = 0$  benyttes til bestemmelse af momentet  $M_y$ , idet  $\sigma_{si} = f_y$  indsættes, dvs.

$$M_y = f_y \frac{I_{zr,tr}}{y_s} \frac{1}{\alpha} \quad (5.3-12)$$

hvor  $\alpha = E_s/E_c$   
 $y_s$  er afstanden fra det transformerede revnede tværsnits tyngdepunkt til armeringsstangen med den største trækspænding.

Den hertil svarende krumning  $\kappa_y$  kan bestemmes af

$$\kappa_y = \frac{M_y}{E_c I_{zr,tr}} = \frac{\varepsilon_{sy}}{y_s} \quad (5.3-13)$$

For en given bjælke med kendt momentfordeling kan  $M_R$  og  $M_y$  bestemmes, og dermed kan nedenstående analytiske udtryk for krumningsfordelingen over hele bjælkelængden opstilles

$$\kappa_{ur} = \frac{M}{E_c I_{zur,tr}} \quad \text{for } 0 \leq \kappa \leq \kappa_R \quad (5.3-14)$$

$$\kappa_{ur/r} = \frac{M_R}{E_c I_{zur,tr}} + \frac{4}{3} \frac{M - M_R}{E_c I_{zr,tr}} \quad \text{for } \kappa_R \leq \kappa \leq \kappa_A \quad (5.3-15)$$

$$\kappa_r = \frac{M}{E_c I_{zr,tr}} \quad \text{for } \kappa_A \leq \kappa \leq \kappa_y \quad (5.3-16)$$

Bjælkens nedbøjning kan herefter bestemmes fx ved brug af arbejdslikningen

$$w_y = \int_{L_{ur}} M_1 \kappa_{ur} dx + \int_{L_{ur,r}} M_1 \kappa_{ur/r} dx + \int_{L_r} M_1 \kappa_r dx \quad (5.3-17)$$

- hvor  $M_1$  er momentet hidrørende fra en enkeltkraft lig 1 angibende i det punkt på bjælken, hvor flytningen ønskes bestemt, og orienteret i flytningens retning
- $L_{ur}$  angiver den eller de længder på bjælken, hvor tværsnittet er urevnet
- $L_{ur,r}$  angiver den eller de længder på bjælken, hvor tværsnittet er i overgangszonen mellem urevnet og fuldt revnet
- $L_r$  angiver den eller de længder på bjælken, hvor tværsnittet er fuldt revnet
- $\kappa_{ur}$  angiver krumningen på den eller de strækninger, hvor bjælken er urevnet, se formel (5.3-14)
- $\kappa_{ur/r}$  angiver krumningen på den eller de strækninger, hvor bjælken er i overgangszonen, se formel (5.3-15)
- $\kappa_r$  angiver krumningen på den eller de strækninger, hvor bjælken er fuldt revnet, se formel (5.3-16).

Bjælkens nedbøjning kan også bestemmes ved løsning af differentiallyigningen

$$\frac{d^2 w_y}{dx^2} = -\kappa \quad (5.3-18)$$

hvor der opstilles differentiallyigninger for hver af de bjælkestrækninger, hvor bjælketværsnittene er henholdsvis urevnede, i overgangszonen mellem urevnede og revnede samt revnede. De ved løsning af differentiallyigningerne fremkomne integrationskonstanter bestemmes ved anvendelse af randbetingelserne dels ved understøtningerne og dels ved overgangene fra ét integrationsområde til et andet.

I praksis regnes bjælken ofte på den sikre side fuldt revnet i hele bjælkelængden. De ovennævnte beregninger til bestemmelse af nedbøjningen simplificeres derved stærkt, idet bjælken da ikke skal deles op i de nævnte delstrækninger, og krumningsfordelingen repræsenteres ved en kurve, der er affin med bjælkens momentkurve. Krumningen kan beregnes på flere forskellige måder, som angivet nedenfor

$$\kappa = \frac{M}{E_c I_{zr,tr}} = \frac{|\epsilon_c|}{x} = \frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{|\sigma_c|}{E_c x} = \frac{\sigma_s}{E_s (d-x)} \quad (5.3-19)$$

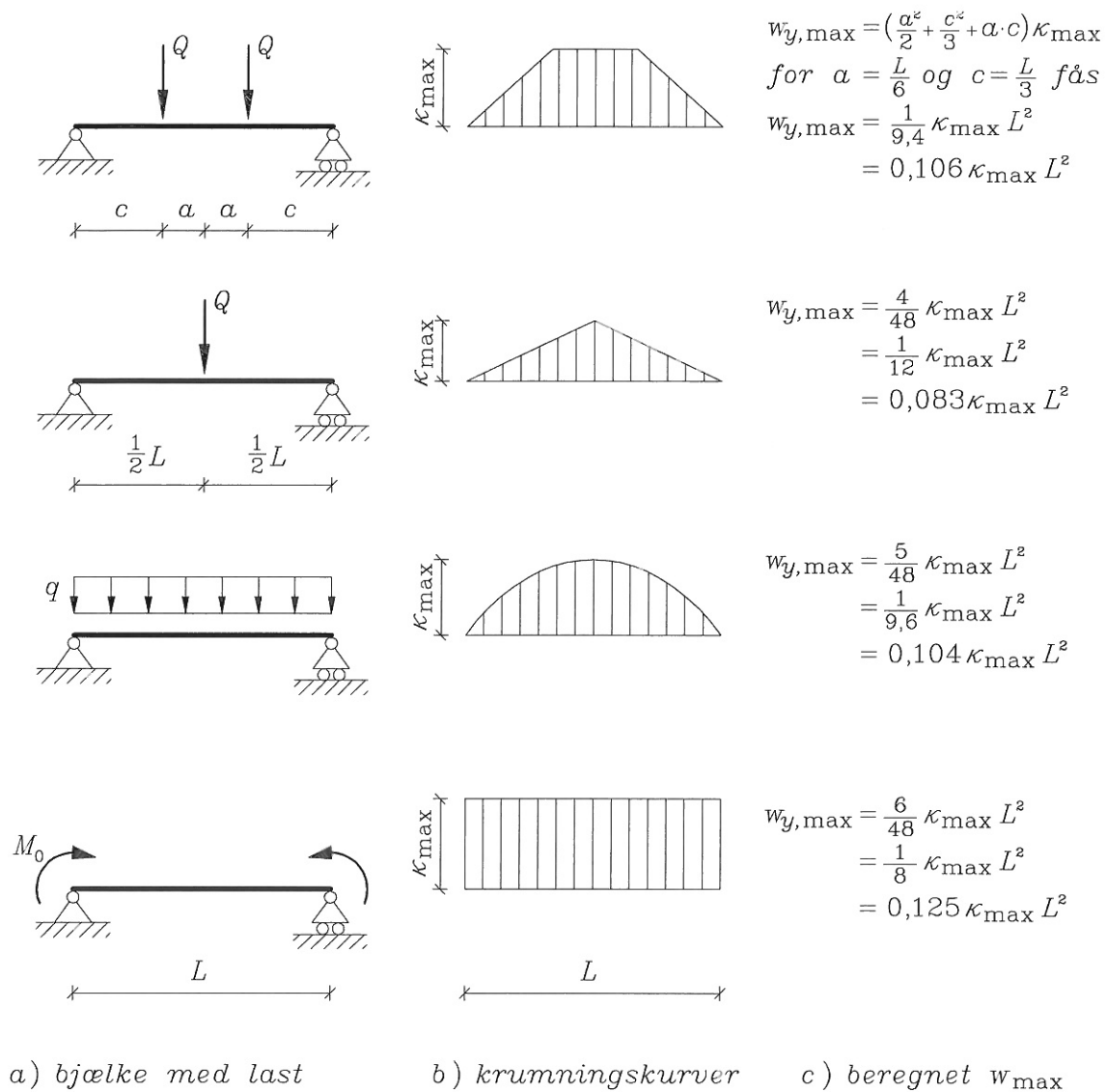
De sidste fire udtryk for krumningen i (5.3-19) findes ved betragtning af ensvinklede trekanter i henholdsvis tøjnings- og spændingsfiguren. Udtrykkene for krumningen, der indeholder  $M$  og  $\sigma$  gælder kun for spændingstilstande, hvor  $\sigma_c < f_c$  og  $\sigma_s < f_y$ .

I figur 5.3-3 er vist eksempler på hyppigt forekommende momentfordelinger og dermed krumningsfordelinger for en simpelt understøttet bjælke, når der regnes med fuldt revnet tværsnit i hele bjælkens længde. Den maksimale udbøjning ved bjælkemidten er angivet som en funktion af den maksimale krumning, og det ses, at

$$w_{y,max} = \frac{1}{k} \kappa_{max} L^2 \cong \frac{1}{10} \kappa_{max} L^2 \quad (5.3-20)$$

hvor  $k$  ligger i intervallet  $8 \leq k \leq 12$ , se figur 5.3-3

I DS 411 angives (5.3-20) med  $k = 10$  som en tilnærmet værdi for den maksimale nedbøjning for en simpelt understøttet bjælke.



Figur 5.3-3 Bjælkeopstalter, krumningskurver og maksimale nedbøjninger for simpelt understøttede bjælker, der regnes fuldt revnet over hele spændvidden  $L$

Når beton udsættes for en langtidslast, forøges deformationerne en del på grund af betonens krybning. Dette kan tages i regning ved for langtidselasticitetskoefficienten for beton at benytte en reduceret værdi af korttidselasticitetskoefficienten. Langtidselasticitetskoefficienten kan beregnes af

$$E_{c,l} = \frac{0,7 E_{0k}}{1 + \varphi} \quad (5.3-21)$$

hvor  $\varphi$  er krybetallet.

Betonens krybning følger Boltsmanns princip, se [5.3-2], dvs. krybningens størrelse er proportional med påvirkningens størrelse og varighed. Ved kombineret påvirkning af korttids- og langtidslast kan de enkelte krybningers størrelser adderes. I det følgende er størrelser, der anvendes ved beregning af deformationer ved langtidslast angivet ved karakteristiske værdier for materialeparametre og laster.

For påvirkninger, der giver fuld udnyttelse af betonspændingerne ligger krybetallet i intervallet  $2,6 \leq \varphi \leq 3,2$  for betoner med  $f_{ck}$  i intervallet  $12 \leq f_{ck} \leq 60$  MPa med højeste grænse for  $\varphi$  svarende til laveste grænse for  $f_{ck}$ . Disse værdier for  $\varphi$  giver anledning til de i DS 411 og i tabel 5.1-1 angivne værdier for  $\alpha$  gældende for henholdsvis korttids- og langtidslast.

Af ovenstående følger, at hvis en armeret betonbjælke belastes med en korttidslast  $q$  efter i lang tid at have været påvirket af en langtidslast  $g$ , vil den maksimale nedbøjning kunne beregnes som

$$w_{y,g+q} = w_{y,g} + w_{y,q} \quad (5.3-22)$$

idet  $\alpha$ -værdien for langtidslast og  $\alpha$ -værdien for korttidslast benyttes ved beregning af henholdsvis første og andet led på højre side af lighedstegnet i (5.3-22). Det angivne udtryk (5.3-22) er en tilnærmelse, da nulliniens placering for korttidslast ikke er uafhængig af langtidslastens størrelse.

### 5.3.3 Bestemmelser vedr. nedbøjninger i EC 2

I EC2 afsnit 4.4.3 angives, at det ved normalt forekommende konstruktioner almindeligvis ikke er nødvendigt med en eksplicit bestemmelse af den maksimale flytning, hvis de i tabel 5.3-1 angivne værdier med tilhørende reduktionsfaktorer for forholdet  $L_{eff}/d$  mellem den effektive spændvidden  $L_{eff}$  og den effektive højde  $d$  ikke overskrides. De i tabel 5.3-1 angivne værdier er grundværdier for konstruktionsdele påvirket til ren bøjning. Disse grundværdier kan i nedenstående tilfælde reduceres med de angivne faktorer:

- for T-tværsnit hvor forholdet mellem flangebredden og kropsbredden overstiger 3, kan de angivne værdier multipliceres med 0,8
- for spændvidder over 7 m, undtagen for paddehattedæk der bærer skillevægge, der kan ødelægges ved relativt store deformationer, skal de angivne værdier multipliceres med  $7/L_{eff}$ , hvor  $L_{eff}$  er den effektive spændvidde målt i m.
- for paddehattedæk, hvor den største spændvidde overstiger 8,5 m, skal de angivne tal multipliceres med  $8,5/L_{eff}$ , hvor  $L_{eff}$  er den effektive spændvidde målt i m.

Værdierne i tabel 5.3-1 gælder, når armeringsspændingerne i det hårdest påvirkede tværsnit i bjælke-/plademidten og/eller over understøtningen i en kontinuert bjælke eller plade er

$\sigma_s = 250$  MPa. Hvis spændingerne er forskellig fra 250 MPa kan værdierne i tabel 5.3-1 korrigeres ved multiplikation med  $250/\sigma_s$ .

Konstruktionstype	$L_{\text{eff}}/d$ ved høje betonspændinger	$L_{\text{eff}}/d$ ved lave betonspændinger
Simpelt understøttede bjælker, enkeltspændte eller dobbeltspændte simpelt understøttede plader. For dobbeltspændte plader benyttes den mindste spændvidde.	18	25
Yderfag i kontinuerte bjælker, enkeltspændte plader og dobbeltspændte plader, der er kontinuerte over den lange understøtning	23	32
Mellemfag i kontinuerte bjælker, enkelt og dobbeltspændte plader	25	35
Paddehattedæk. Den længste spændvidde benyttes.	21	30
Udkraget bjælke eller plade	7	10

Tabel 5.3-1 Grundværdier for maksimumsværdier for forholdet  $L_{\text{eff}}/d$  mellem effektiv spændvidde  $L_{\text{eff}}$  og den effektive højde  $d$ .

For de specielle tilfælde, hvor det skønnes nødvendigt at udføre en beregning, angives i EC2's appendix 4 en metode til beregning af krumninger, hvori der tages hensyn til revnet-/urevnet tværsnit, armeringsspændinger, armeringens forankringsevne, krybning m.m. Med kendskab til krumningen kan flytningen derefter bestemmes ved brug af arbejdsligningen eller løsning af tilhørende differentiaalligninger, som angivet foran. Vedr. fremgangsmåden henvises til EC2 appendiks 4.

## 5.4 Revner i armerede betonkonstruktioner

### 5.4.1 Indledning

Når en betonkonstruktion påvirkes af bøjningsmomenter og/eller normalkræfter vil en del af betontværsnittet normalt blive påvirket af trækspændinger, og betonen vil revne. Da betons trækstyrke er relativ lav, er det nødvendigt at indstøbe armering i betonen for at opnå en tilfredsstillende bæreevne. Når en konstruktion belastes svarende til en rimelig udnyttelse af armeringen, dvs.  $\sigma_s \approx f_{yd}$ , vil der, som det skal vises senere, langt før disse armeringsspændinger nås, være opstået så store trækspændinger i betonen, at der dannes revner. Disse revner kaldes lastfremkaldte revner.

Andre forhold som f.eks. svind og temperaturpåvirkninger kan ligeledes bevirke, at der udvikles revner i en betonkonstruktion. I det følgende vil kun lastfremkaldte revner blive behandlet.

Store revner i betonkonstruktioner virker uæstetiske og kan give indtryk af manglende bæreevne. Det sidste behøver dog ikke at være tilfældet for konstruktioner i passivt miljø. Men er betonkonstruktionen anbragt i et miljø, hvor korrosion er muligt, vil korrosionen angribe armeringen i revnerne og vil med tiden bevirke, at konstruktionens bæreevne forringes.

Praksis viser dog, at ved små revnevidder vil der ikke opstå korrosion i armeringen, hvilket tilskrives, at armering indstøbt i beton befinder sig i et så basisk miljø, at dette ved små revnevidder er i stand til at forhindre en igangsættelse eller udvikling af korrosion i armeringen.

Der kan endnu ikke angives en klar sammenhæng mellem revnevidder og korrosionsfaren. Det ser ud til, at korrosionsfaren er mere afhængig af betonens tæthed end af revnevidden. Men for betonkonstruktioner, for hvilke revnevidder kan have betydning for holdbarheden tilråder DS 411, at de beregnede maksimale revnevidder  $w_k$  i konstruktioner armeret med slap armering er mindre end de nedenfor anførte.

<u>Miljøklasse</u>	$w_k \leq$
ekstra aggressiv	0,2 mm
aggressiv	0,3 mm
moderat	0,4 mm

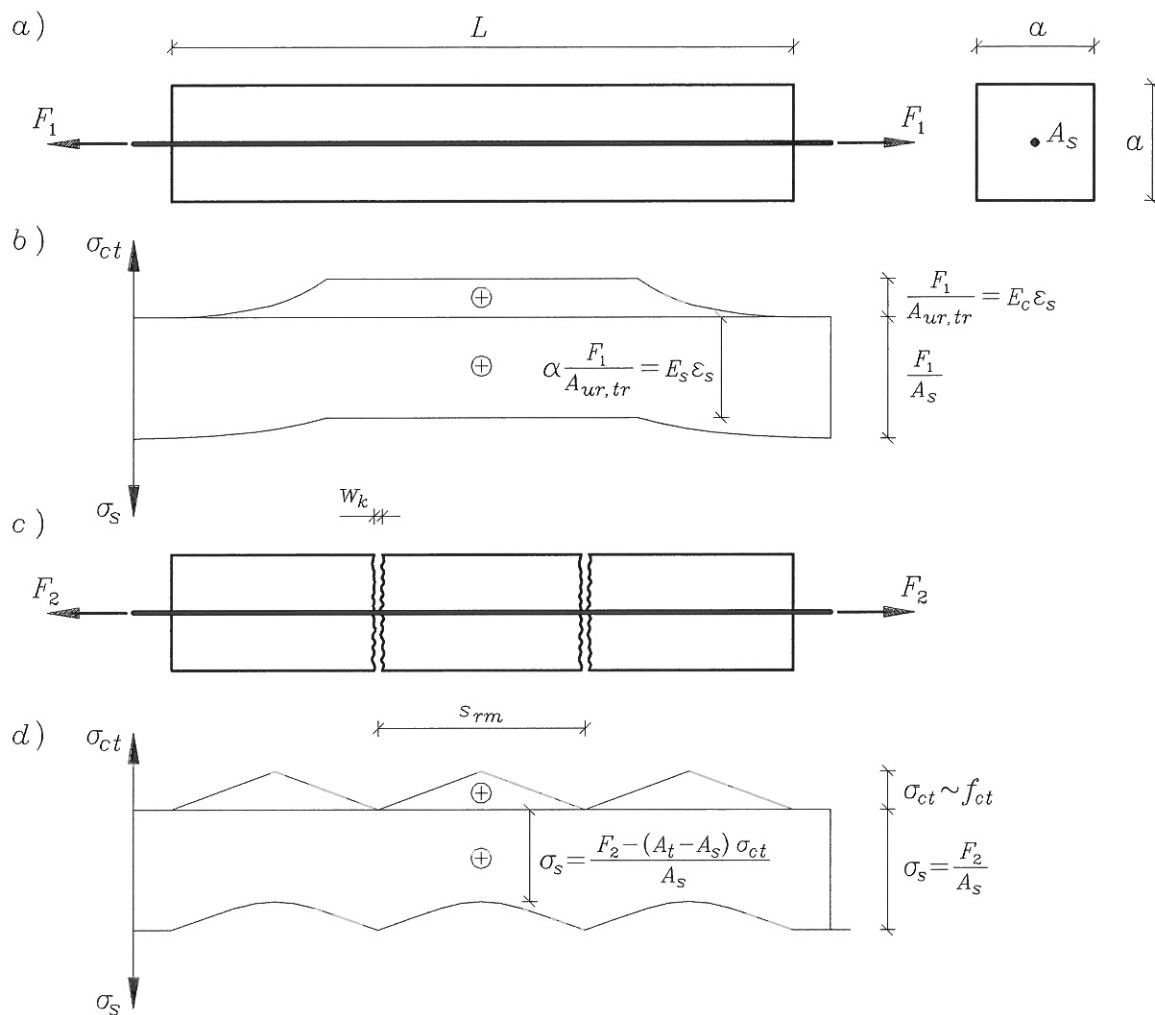
Revnevidden  $w_k$  er afhængig af størrelsen af spændingerne i armeringen, men den er derudover også afhængig af armeringsarrangementet. Armeres en konstruktion således med få armeringsstænger med store diametre, vil der alt andet lige optræde større revnevidder, end hvis samme konstruktion armeres med samme armeringsareal bestående af mange armeringsstænger med små diametre.

Der skal gøres opmærksom på, at uanset størrelsen af den beregnede armering stammende fra revneviddekravene skal armeringen i en konstruktion altid være større end eller lig med minimumsarmeringen gældende for den pågældende konstruktionsdel.

For at få en forståelse af dannelsen af revner med tilhørende revnevidder vil der nedenfor blive gennemført nogle teoretiske betragtninger over revnedannelsen i en armeret betonstang påvirket af en trækraft.

#### 5.4.2 Revnedannelse og -udvikling i en trækraftpåvirket armeret betonstang

I figur 5.4-1 er vist en trækraftpåvirket armeret betonstang. Det antages, at den anvendte armering er ribbestål. Trækraften påføres armeringsstangen uden for betonen.



Figur 5.4-1 Armeret trækstang med tilhørende spændingstilstande

Først tænkes den urevnede trækstang påført en trækraft  $F_1$  af en sådan størrelse, at den største spænding i betonen er mindre end men meget nær lig betonens enaksede trækstyrke  $f_{ct}$ , dvs. en lille lastforøgelse vil fremkalde de første revner.

Når kraften vokser fra nul til  $F_1$ , vil der forekomme forlængelser i armeringsstangen, hvilket bevirker, at der overføres kræfter fra armeringen til den omgivende beton, således at armering og beton som vist i figur 5.4-1 over en vis strækning får samme tøjning. Kraftoverføringen mellem armeringsstangen og den omgivende beton foregår primært via en overføring som tryk mellem armeringsstangens kamme og betonen, men der sker også en kraftoverføring via adhæsion mellem armering og beton. I det følgende antages, at kraftoverføringen foregår alene via en formel forskydningsspænding  $\tau_{cs}$  mellem beton og armering. Denne formelle forskydningsspænding

antages at være jævnt fordelt over armeringsoverfladen.

I en afstand fra betonstangens endetværsnit, der ca. er lig længden af betontværsnittets sidelinie  $a$ , vil tøjningerne  $\epsilon_s$  i armeringen og  $\epsilon_{ct}$  i betonen have samme størrelse.

Det antages som en tilnærmelse, at tøjningen i betonen er konstant over hele tværsnitsarealet i det område, hvor  $\epsilon_{ct} = \epsilon_s$ .

Spændingen i beton og armering vil variere i stangens længderetning som vist i figur 5.4-1b, idet spændingen i betonen vokser fra spændingen 0 til  $\sigma_{ct} = F_1 / A_{ur,tr}$ , og i armeringen reduceres fra  $\sigma_s = F_1 / A_s$  til  $\sigma_s = \alpha F_1 / A_{ur,tr}$ , hvor

$$\begin{aligned} A_{ur,tr} &= A_t + A_s (\alpha - 1) && \text{er det transformerede tværsnitsareal} \\ A_s & && \text{er armeringsarealet} \\ A_t &= a^2 && \text{er det totale tværsnitsareal} \\ \alpha &= E_s / E_c && \text{er forholdet mellem armeringens og betonens elasticitetskoefficienter } E_s \text{ og } E_c . \end{aligned}$$

Forøges kraften til  $F_2$ , vil betonens trækspænding forøges til trækstyrken, hvorefter betonen vil revne, som vist i figur 5.3-1c. Betonen revner i det øjeblik tøjningen er lig betonens trækbrudtøjning  $\epsilon_{ctu}$ , der er af størrelsesordenen 0,01 %. Da armeringen og betonen før revnedannelsen har samme tøjning, kan spændingen i armeringen, umiddelbart før den første revne dannes, beregnes af  $\sigma_s = E_s \epsilon_{ctu} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 20 \text{ MPa}$ .

Da meget af den armering, der anvendes, har en flyde- eller 0,2 %-spænding på  $f_{ck} = 550 \text{ MPa}$  eller derover ses, at armeringen ikke er særlig godt udnyttet, før betonen revner.

De første revner, der dannes, har revnevidder af størrelsesordenen 0,01 mm. De vil ikke kunne ses med det blotte øje. Forøges trækraften  $F$ , vil revnevidden  $w_k$  forøges, men der vil også dannes flere revner hen langs trækstangen, indtil armeringstøjningen bliver af størrelsesorden 0,1 pct svarende til en armeringsspænding  $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$ .

Forøges kraften  $F$  yderligere, viser forsøg, at der stort set ikke dannes flere revner, men revnevidden forøges nogenlunde proportionalt med armeringstøjningen. Foretages der aflastning og genbelastning, eller holdes belastningen konstant i længere tid, vil kun revnevidden øges men ikke revneantallet. D.v.s. revneafstanden  $s_r$  forbliver nogenlunde konstant, og størrelsesordenen for  $s_r$  vil være 100 - 300 mm. Der er dog stor spredning på de forsøgsresultater, der viser dette.

I nedenstående teoretiske betragtninger antages det, at revneafstanden  $s_r$  holder sig konstant.

Betragtes en armeret betonstang påvirket principielt som vist i figur 5.4-1 vil summen af alle revnevidderne udgøre en længde, som er lig forskellen mellem armeringens og betonens forlængelse på strækningen  $L$ . Divideres den samlede revnevidde  $\sum w_k$  med antallet af revner, fås en middelrevnevidde  $w_{km}$ , der kan udtrykkes ved

$$w_{km} = s_{rm} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{ctm}) \quad (5.4-1)$$

hvor

$w_{km}$	er middelrevnevidden
$s_{rm}$	er middelrevneafstanden
$\varepsilon_{sm}$	er middeltøjningen i armeringen
$\varepsilon_{ctm}$	er middeltøjningen i betonen

Hvis betonens middeltøjning  $\varepsilon_{ctm}$  tilnærmet sættes lig nul, d.v.s.  $\varepsilon_{ctm} = 0$  fås af (5.4-1) en øvre grænse  $w_{km0}$  for middelrevnevidden givet ved

$$w_{km0} = s_{rm} \varepsilon_{sm} \quad (5.4-2)$$

Betragtes figur 5.4-1 ses, at betonspændingerne vokser fra nul til en maksimalværdi midt mellem 2 revner. På denne strækning  $\frac{1}{2}s_{rm}$ , overføres der en kraft mellem armering og beton, der bestemmes af

$$\Delta F = \tau_{cs} \pi \varphi \frac{1}{2} s_{rm} \quad (5.4-3)$$

hvor

$\tau_{cs}$	er en konstant formel forskydningsspændingen mellem armering og beton
$\varphi$	er armeringsdiameteren

Den maksimale betonspænding midt mellem 2 revner kan derfor tilnærmet bestemmes af

$$\sigma_{ct} = \frac{\Delta F}{A_{c,eff}} = \frac{\tau_{cs} \pi \varphi s_{rm}}{2A_{c,eff}} \quad (5.4-4)$$

hvor  $A_{c,eff}$  tilnærmet er regnet som stangens tværsnitsareal, d.v.s.  $A_{c,eff} = a^2$ . Det ville være mere korrekt at dividere med  $(a^2 - A_s)$ .

En ny revne vil opstå, når denne betonspænding bliver lig betonens enaksede trækstyrke  $f_{ct}$ . Middelaafstanden mellem revnerne kan derfor bestemmes af (5.4-4) ved at sætte  $\sigma_{ct} = f_{ct}$ , hvoraf fås

$$s_{rm} = \frac{2 f_{ct} A_{c,eff}}{\pi \tau_{cs} \varphi} \quad (5.4-5)$$

Da forsøg har vist, at der ikke kommer nye revner, når trækspændingen i armeringen er over en vis størrelse, ca. 200 MPa, kan dette tyde på, at den formelle forskydningsspænding  $\tau_{cs}$  har en øvre størrelse  $\tau_{csu}$ , som er bestemmende for størrelsen af den maksimale revneafstand, d.v.s.

$$s_{r,\max} = \frac{2}{\pi} \frac{f_{tc}}{\tau_{csu}} \frac{A_{c,eff}}{\varphi} = \frac{2}{\pi} \frac{f_{tc}}{\tau_{csu}} a_w \quad (5.4-6)$$

hvor

$$a_w = \frac{A_{c,eff}}{\varphi} \quad (5.4-7)$$

Forsøg viser ligeledes, at hvis den armerede betonstang i stedet for én stang indeholder flere stænger med omkredsen  $\pi \sum \varphi$  bestemmes  $a_w$  af

$$a_w = \frac{A_{c,eff}}{\sum \varphi} \quad (5.4-8)$$

Hvis armeringsstængerne har samme diameter  $\varphi$  er  $\sum \varphi = n \varphi$ , hvor  $n$  er antallet af armeringsstænger.

Antages at forholdet mellem middel- og maksimal revneafstand  $k_1 = s_{rm}/s_{r,\max}$  samt forholdet mellem  $f_{ct}$  og  $\tau_{csu}$  er konstant, fås ved benyttelse af (5.4-6)

$$s_{rm} = k_1 s_{r,\max} = 2 \frac{k_1}{\pi} \frac{f_{ct}}{\tau_{csu}} a_w = k a_w \quad (5.4-9)$$

som indsat i (5.4-2) giver en øvre grænse  $w_{km\emptyset}$  for middelrevnevidden

$$w_{km\emptyset} = k \varepsilon_{sm} a_w \quad (5.4-10)$$

Med de anførte antagelser ses middelrevneafstanden  $s_{rm}$  og dermed den øvre grænse for middelrevnevidden  $w_{km\emptyset}$  at være proportional med størrelsen  $a_w$ , der benævnes revneparameteren.

Der er udført talrige forsøg med måling af revnevidder for verificering af de mange forslag til revneviddeformler, der indtil nu er opstillet af forskellige forskere. Forsøgene viser, at i de formler, hvori revneparameteren  $a_w$  indgår, stemmer forsøgsresultaterne bedre overens med de teoretiske resultater, hvis man i stedet for  $a_w$  benytter kvadratroden af  $a_w$ . Formlerne gælder kun for  $a_w < 2000$  mm.

I DS 411 anvendes nedenstående revneviddeformel (5.4-11), der minder en del om (5.4-10), til bestemmelse af revnevidden for lastfremkaldte revner

$$w_k = 10 \varepsilon_s \sqrt{a_w} = 5 \cdot 10^{-5} \sigma_s \sqrt{a_w} \quad (5.4-11)$$

idet faktoren

$$k = 2 \frac{k_1}{\pi} \frac{f_{ct}}{\tau_{csu}} \quad \text{i (5.4-9) sættes lig } 10, \sqrt{a_w} \text{ anvendes i stedet for } a_w$$

og Hookes lov  $\sigma_s = E_s \varepsilon_s = 2 \cdot 10^5 \cdot \varepsilon_s$  er anvendt. Faktoren  $k = 10$  er bestemt ved forsøg. Forsøg viser ligeledes, at forsøgsresultaterne stemmer bedre overens med teorien, når  $a_w^{1/2}$  anvendes i stedet for  $a_w$ .

I (5.4-11) regnes  $w_k$  og  $a_w$  i mm og  $\sigma_s$  i MPa.

Revneviddeformlen (5.4-11) gælder for ribbestål med forankringsfaktor  $\zeta \geq 0,6$ . Anvendes armering med  $\zeta < 0,6$  kan revneviddeformlen (5.4-11) stadig benyttes, men  $a_w$  skal da indsættes som 2 gange den ved (5.4-8) bestemte værdi for  $a_w$ , og armeringsspændingerne bør ikke være større end  $360 \text{ N/mm}^2$ .

I DS 411 skelnes der i trækpåvirkede betonarealer mellem to revnesystemer, nemlig *det fine revnesystem* og *det grove revnesystem*.

Det fine revnesystem optræder i betonarealet lokalt ved armeringen, idet et armeringsjern regnes at kunne styre revnevidderne indenfor en afstand af ca.  $7\phi$  fra armeringsjernet, hvor  $\phi$  er armeringsjernets diameter.

Det grove revnesystem dækker hele det trækpåvirkede betonareal.

Revneviddeformlen (5.4-11) gælder for det fine revnesystem, men samme formel kan benyttes for det grove revnesystem, såfremt højresiden multipliceres med  $1/2$ .

Spændingen  $\sigma_s$  i revneformlen (5.4-11) bestemmes som spændingstilvæksten i armeringen regnet fra det lasttrin, hvor spændingen i den omgivende beton er nul. For ikke forspændt beton svarer dette til den til det betragtede lasttilfælde beregnede armeringsspænding.

Da revnevidden kun er interessant i anvendelsesgrænsetilstanden, beregnes armeringsspændingen efter en elasticitetsteoretisk metode, se afsnit 5.2.

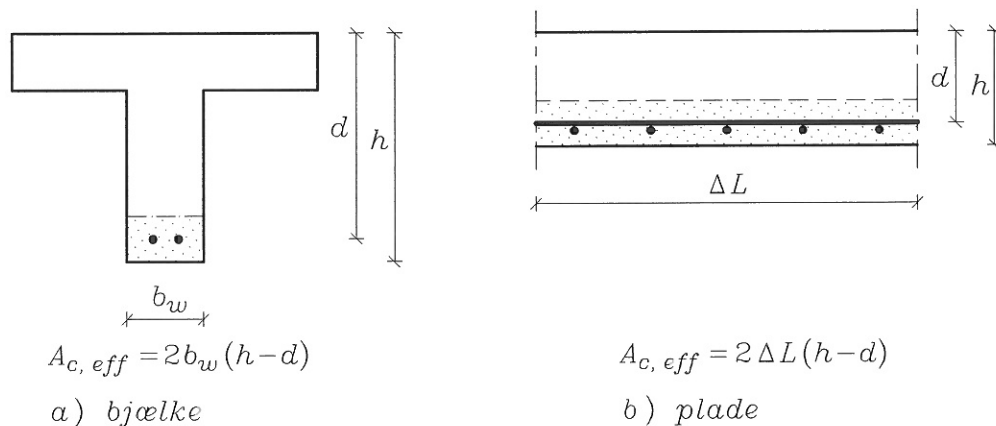
DS 411 angiver, at for konstruktioner, hvor det er af afgørende betydning, at et bestemt revneviddekrav ikke må overskrides, f.eks. i vandtætte konstruktioner, bør der som et minimum i de konstruktionsdele, der kan være udsat for træk, ilægges et armeringsforhold givet ved

$$\rho \geq \sqrt{\frac{\varphi f_{ct,eff}}{4 E_{sk} w_k}} \quad (5.4-12)$$

hvor  $\varphi$  er diameteren af de anvendte armeringsstænger,  $f_{ct,eff}$  er betonens effektive trækstyrke, der kan sættes lig  $0,5f_{ctk}$ , og  $w_k$  er den maksimalt tilladelige revnevidde. Formlen gælder for ribbestål ( $\zeta \geq 0,6$ ). Såfremt der anvendes anden armering multipliceres udtrykket med  $2^{1/2}$ . Den angivne formel gælder for det det fine revnesystem. For det grove revnesystem kan den samme formel benyttes, såfremt udtrykket multipliceres med  $2^{-1/2}$ .

Nedenfor angives hvordan  $A_{c,eff}$  beregnes for forskellige konstruktionselementer.

*Bestemmelse af  $A_{c,eff}$  for konstruktionselementer påvirket af normalkraft og bøjende moment*



Figur 5.4-2 Det fine revnesystem. Effektive trækarealer for bjælker og plader påvirket af bøjningsmoment og normalkraft

For bøjningspåvirkede bjælker og plader bestemmes revnevidderne i det fine revnesystem ved brug af det effektive trækareal  $A_{c,eff}$  bestemt ved henholdsvis

$$A_{c,eff} = 2 b_w (h - d) \quad A_{c,eff} = 2 \Delta L (h - d) \quad (5.4-13)$$

hvor  $A_{c,eff}$  er det største betonareal, der har fælles tyngdepunkt med trækarmeringen, se figur 5.4-2, hvor det effektive trækareal  $A_{c,eff}$  er vist med raster.

*Bestemmelse af  $A_{c,eff}$  for konstruktionslementer påvirket af en træknormalkraft*

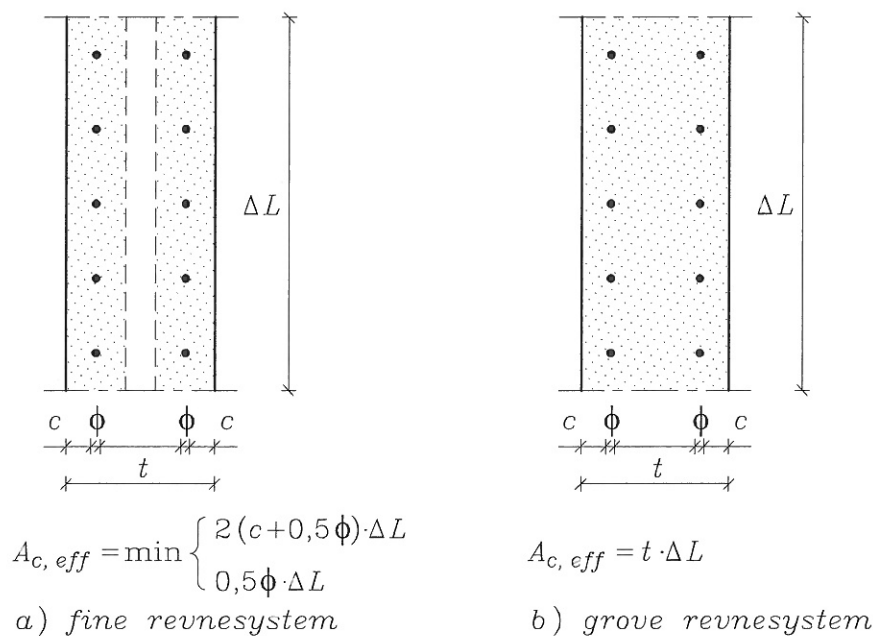
For trækpåvirkede stænger, skiver og vægge bestemmes revnevidderne i både det fine og det grove revnesystem ved brug af det effektive trækareal  $A_{c,eff}$  bestemt af henholdsvis

$$A_{c,eff} = \min \begin{cases} 2(c + 0,5\phi) \Delta L \\ 0,5t \Delta L \end{cases} \quad \text{gældende for det fine revnesystem} \quad (5.4-14)$$

$$A_{c,eff} = t \Delta L \quad \text{gældende for det grove revnesystem} \quad (5.4-15)$$

hvor  $t$  er skive- eller vægtykkelsen  
 $\Delta L$  er en dellængde af skiven eller væggen

De effektive trækarealer er vist med raster i figur 5.4-3.



Figur 5.4-3 Effektive trækarealer for konstruktionslementer påvirket af en trækraft.

### 5.4.3 Revneviddebestemmelse i henhold til EC 2

Under forudsætning af at kravene til minimumsarmering overalt er opfyldt, samt at armeringsarrangementet overholder de krav, der stilles i EC 2 afsnit 5, foreskriver EC2 to metoder, hvorved man kan sikre sig mod for store revnevidder, nemlig

- a. styring af revnevidder uden direkte statistisk beregning af revnevidder
- b. bestemmelse af revnevidder ved beregning

#### a. Styring af revnevidder uden direkte statistisk beregning af revnevidder

Hvis der ikke foretages direkte beregninger af revnevidder, anbefaler EC 2, at der til givne størrelser for armeringsspændingerne stilles de i tabel 5.4-1 og 5.4-2 angivne krav til maksimale værdier for armeringsdiametre og armeringsafstande, der anvendes i armerede betonkonstruktioner. Tabellen gælder kun for armering med en forankringsevne, der i EC 2 karakteriseres som "high bond bars". Kravene til "high bond bars" er angivet i EN 10080, og svarer nogenlunde til armeringsstænger med en forankringsfaktor  $\zeta \geq 0,6$ .

spænding i armeringen i MPa	Maksimal stangdiameter $\varphi_s^*$ i mm	
	slap armering	forspændt armering
160	32	25
200	25	16
240	20	12
280	16	8
320	12	6
360	10	5
400	8	4
450	6	

Tabel 5.4-1: Maksimal stangdiameter  $\varphi_s^*$  for "high bond" armering

For konstruktioner armeret med blød armering kan den maksimale stangdiameter modificeres som angivet nedenfor.

For revner i konstruktioner opstået på grund af hindrede flytninger beregnes den modificerede diameter  $\varphi_s$  af

$$\varphi_s = \frac{\varphi_s^* f_{ctm}}{2,5} \frac{h}{10 (h - d)} \quad (5.4-16)$$

idet  $\varphi_s$  dog skal være større end

$$\varphi_s = \frac{\varphi_s^* f_{ctm}}{2,5} \quad (5.4-17)$$

For lastfremkaldte revner bestemmes den modificerede diameter  $\varphi_s$  af

$$\varphi_s = \varphi_s^* \frac{h}{10 (h - d)} \quad (5.4-18)$$

idet  $\varphi_s$  dog skal vælges større end eller lig med  $\varphi_s^*$ .

I ovenstående formler er

- $\varphi_s$  den modificerede maksimale stangdiameter
- $\varphi_s^*$  den maksimale stangdiameter angivet i tabel 5.4-1
- $h$  tværsnittets totalhøjde
- $f_{ctm}$  middelværdi af betonens énaksede trækstyrke

spænding i armeringen i MPa	maksimal afstand mellem armeringsstænger i mm		
	ren bøjning	rent træk	forspændte tværsnit (ren bøjning)
160	300	200	200
200	250	150	150
240	200	125	100
280	150	75	50
320	100	-	-
360	50	-	-

Tabel 5.4-2: Maksimal afstand mellem armeringsstænger for “high bond bars”

De i tabel 5.4-1 og 5.4-2 angivne armeringsspændinger skal for slapt armerede konstruktioner være spændingerne svarende til en last, der vil påvirke konstruktionen i en meget stor del af dens levetid (quasi-permanent load), medens det for forspændte konstruktioner er spændinger svarende til en ofte forekommende maksimal last (frequent load). For yderligere oplysninger henvises til EC2.

### *Bestemmelse af revnevidder ved beregning i henhold til EC 2*

I henhold til EC 2 kan den beregnede revnevidde  $w_k$  bestemmes af

$$w_k = \beta s_{rm} \varepsilon_{sm} \quad (5.4-19)$$

- hvor  $s_{rm}$  er middelfstanden mellem revnerne, se (5.4-21)  
 $\varepsilon_{sm}$  er middeltøjningen ved det relevante lasttilfælde under hensyntagen til effekten fra svind, tension-stiffening osv., se (5.4-20)  
 $\beta$  er en koefficient, der omregner middelvevidden til den beregnede revnevidde  $w_k$ , hvor  
 $\beta=1,7$  for lastfremkaldte revner og for revner fremkaldt af deformationshindringer i tværsnit med en mindste dimension, der er større end 800 mm  
 $\beta=1,3$  for revner fremkaldt af deformationshindringer i tværsnit med mindste dimension mindre end 300 mm  
 ved værdier for mindste dimension mellem de nævnte kan der interpoleres retlinet.

$\varepsilon_{sm}$  kan beregnes af

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left( 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right) \quad (5.4-20)$$

- hvor  $\sigma_s$  er den største spænding i trækarmingen beregnet ved revnet tværsnit for den aktuelle last  
 $\sigma_{sr}$  er største spænding i trækarmingen beregnet ved revnet tværsnit for lasten svarende til dannelsen af den første revne, dvs. ved revnemomentet.  
 $\beta_1$  er en koefficient, der tager hensyn til armeringens forankringsegenskaber  
 $\beta_1 = 1,0$  for "high bond" armeringsstænger, dvs. forkammet armering med forankringsfaktoren  $\zeta \geq 0,6$   
 $\beta_1 = 0,5$  for glatte armeringsstænger  
 $\beta_2$  er en koefficient, der tager hensyn til lastens varighed og variationer i lastens størrelse  
 $\beta_2 = 1,0$  for en "engangs" korttidslast, dvs. ikke cyklisk gentagne lastpåvirkninger  
 $\beta_2 = 0,5$  for langtidslast eller ofte gentagne cykliske lastpåvirkninger.

Middelveafstanden  $s_{rm}$  målt i mm for konstruktionselementer hovedsagelig belastet til bøjning eller træk kan beregnes af

$$s_{rm} = 50 + 0,25 k_1 k_2 \frac{\varphi}{\rho_r} \quad (5.4-21)$$

- hvor  $k_1$  er en koefficient, der tager hensyn til armeringens forankringsegenskaber.  
 $k_1 = 0,8$  for "high bond" armeringsstænger  
 $k_1 = 1,6$  for glatte armeringsstænger  
 $k_2$  er en koefficient, der tager hensyn til tøjningsfordelingen

$k_2 = 0,5$  for bøjning

$k_2 = 1,0$  for rent træk

for lasttilfældet excentrisk træk kan mellemliggende værdier for  $k_2$  beregnes af

$$k_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2\varepsilon_1$$

hvor  $\varepsilon_1$  og  $\varepsilon_2$  er henholdsvis største og mindste træktøjning ved det betragtede tværsnits rande bestemt for det revnede tværsnit.

$\rho_r$  er det effektive armeringsforhold  $A_s / A_{c,eff}$ , hvor  $A_s$  er armeringsarealet inden for det effektive trækareal  $A_{c,eff}$ .

$A_{c,eff}$  regnes normalt som det betonareal i træksiden, hvis udstrækning i retningen vinkelret på nullinien bestemmes ved at multiplicere afstanden fra tværsnittets trækpåvirkede kant til armeringens tyngdepunkt med 2,5. For plader hvor tækzonens højde kan være lille, bør højden af det effektive trækareal ikke regnes større end  $(h-x) / 3$

### Litteraturhenvisning

- [5.3-1] CEB (Comité Européen du Béton): Recommendations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton, 2. udgave 1970 (på engelsk)
- [5.3-2] Ervin Poulsen: Ren Mekanik 4, rheologi" Polyteknisk forlag Kbhvn. 1967
- [5.3-3] EC2 : Eurocode No.2: Design of concrete structures-Part 1:General rules and rules for buildings, december 1991.

## 6 Konstruktionsudformning

## 6 Konstruktionsudformning

### 6.1 Indledning

For at fuldføre en dimensionering af en betonkonstruktion er det, udover at udføre styrkeberegninger der er omtalt i de foregående kapitler, nødvendig at give konstruktionerne en hensigtsmæssig geometrisk udformning samt at anordne et rationelt armeringsarrangement.

Den geometriske udformning spiller en stor rolle for betonkonstruktioners bæreevne og holdbarhed. For udendørs konstruktioner kan denne være afgørende for konstruktionens levetid. Her gælder det om at udføre konstruktionsdelen, så denne er uden risiko for begyndende nedbrydning. Disse forholdsregler starter på tegnebordet, hvor der skal tages hensyn til geometrien, således at konstruktionen kan støbes med så få støbeskel som muligt, og helst uden. Ligeledes vælges udformningen, ligesom betonstyrken, efter det miljø som konstruktionen skal virke under.

I normerne kræves, at et projekts konstruktive udformning skal svare til de forudsætninger, som sikkerhedsvurderingen er baseret på. Ved udformning af de konstruktive detaljer skal armeringens forløb arrangeres med en rimelig kontinuitet, dvs. armeringen udføres med så få bukninger og stød som muligt, samt at denne let skal kunne placeres i støbeformen. Der skal i den geometriske udformning træffes de nødvendige forholdsregler til sikring af holdbarheden. Ud over de nedennævnte forholdsregler gælder også at udformningen tager hensyn til den fremtidige vedligeholdelse på konstruktionen. Således skal især lejer og vederlag nemt kunne inspiceres og evt. vedligeholdes.

Sikring af holdbarhed gennem geometrisk udformning kan ske ved vandafvisende detaljer. Her gælder reglen med de 6 v'er: *vand vises væk - vand volder vanskeligheder*. Alle vandafvisende overflader, kanter, drypnæser m.v. skal være veldefinerede. Navnlig skal støbeskel, hårdt belastede tværsnit, lejer og vederlag være placeret således, at disse ikke kan blive udsat for fugtpåvirkning. Fugeplacering og fagedetaljer bør ligeledes udformes ud fra holdbarhedshensyn hvor disse er nemme at vedligeholde.

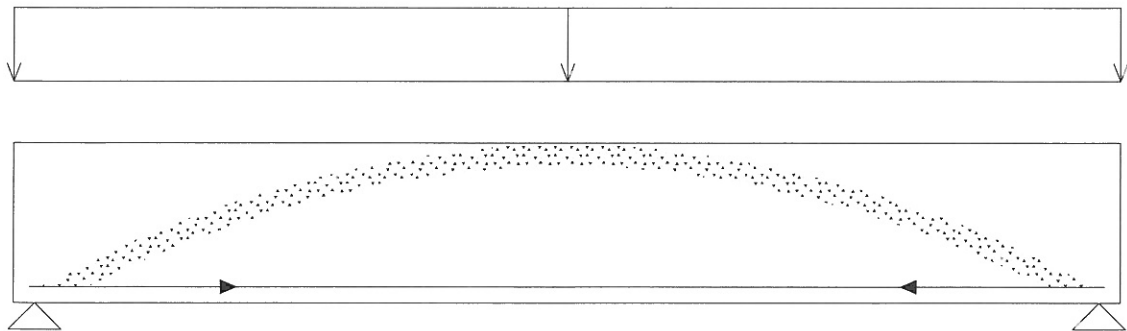
Vedr. krav til dæklag, miljøklasser m.v. er disse omtalt i afsnit 3.1.1.1.

Udformningen af armeringen i betonkonstruktioner er ikke en veldefineret opgave med kun én løsning. Armeringsudformning er noget af en kunst, hvor erfaringen spiller en stor rolle.

For anordning af et rationelt armeringsarrangement er det nødvendig at have indsigt i de indre kræfters forløb i en armeret betonkonstruktion. Som en god tilnærmelse hertil kan benyttes en gittermodel, hvor betonen optager kræfterne i *trykstringere*, og armeringen optager kræfterne i *trækstringere*. Nedreværdiløsningen som tidligere beskrevet, kan anvendes til at belyse de indre kræfter, ved at finde en snitkraftfordeling, som både er statisk tilladelig og opfylder flydebetingelserne.

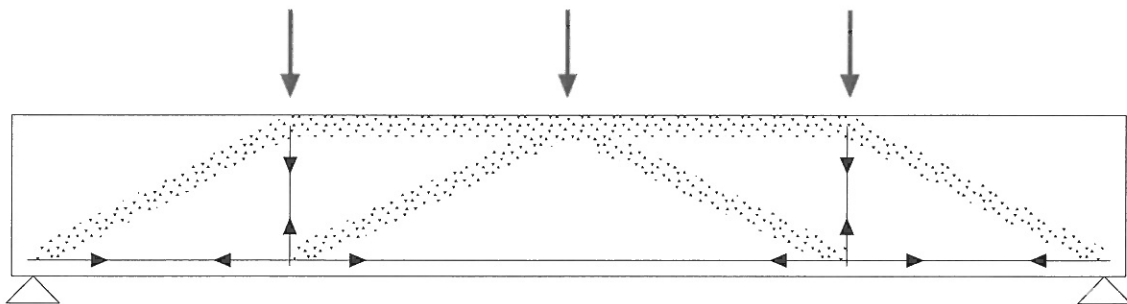
Det forventede revnebillede i konstruktionen kan ligeledes være medvirkende til at give en idé om et hensigtsmæssigt armeringsarrangement, idet der altid skal gå armering igennem områder hvor betonen forventes at revne.

I figur 6.1-1 til 6.1-3 vises et par eksempler på indre kræfters forløb i en bjælke.



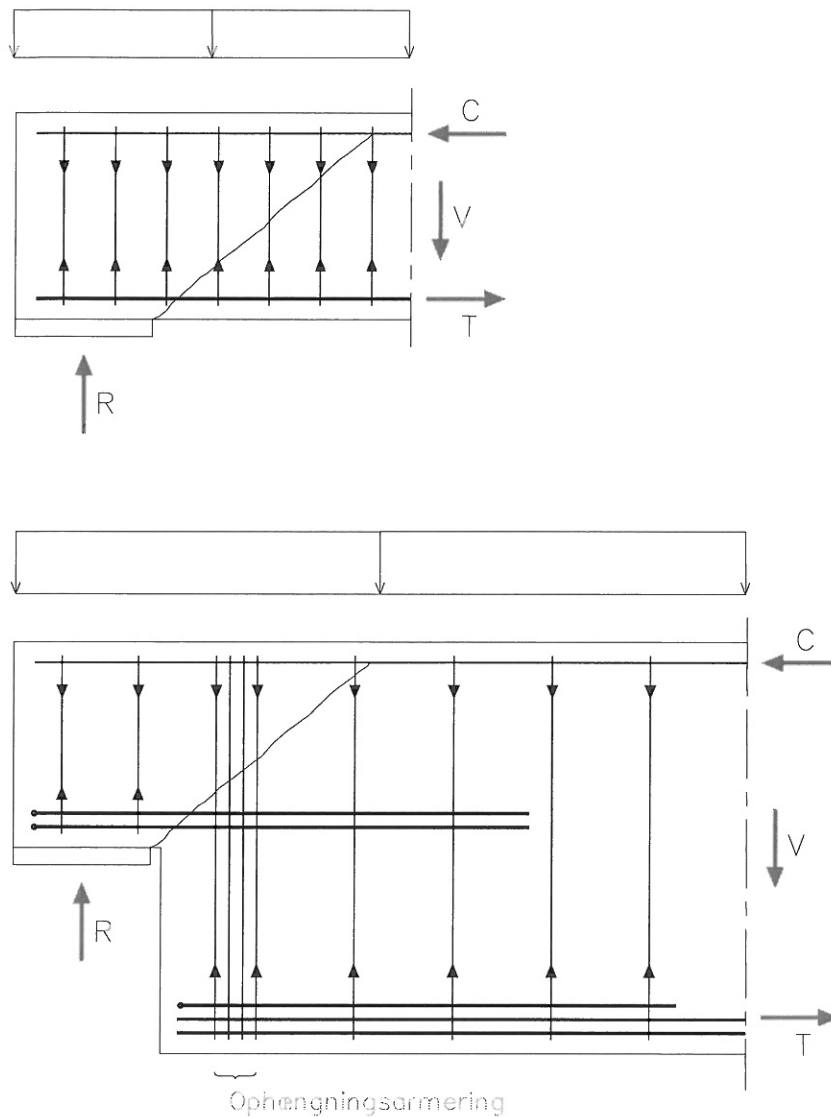
Figur 6.1-1 Bjælke med trykbue.

I figur 6.1-1 er vist, hvordan en ikke forskydningsarmeret bjælke vil kunne optage en jævnt fordelt last som en trykbue med trækband. Der må i dette tilfælde stilles krav om, at armeringen skal forankres for den maksimale trækraft lig med trækraften ved bjælkemidten, idet kræfterne i armeringen ved denne betragtning ikke kan afleveres til betonen.



Figur 6.1-2 Bjælke med tryk- og trækstringer.

I figur 6.1-2 er vist et eksempel på, hvordan gitteranalogien kan anvendes til bestemmelse af bæreevnen for en bjælke påvirket af enkeltkræfter. Normalt vil bjælker dog være forsynet med bøjler i hele længden. Bæreevnen kan bestemmes som den mindste af forskydningsbæreevnen bestemt efter afsnit 4.2, eller bøjningsbæreevnen bestemt efter afsnit 4.1.



Figur 6.1-3 Vederlag for bjælker.

I figur 6.1-3 er vist eksempler på bjælkevederlag, hvor en mulig revne kan løbe fra vederlagskanten og skråt op gennem bjælken. For begrænsning af revnedannelsen anordnes en forskydningsarmering i form af bøjler, her lodrette. Se afsnit 4.2 vedr. forskydning, og 4.6 vedr. forankring.

Generelt er det vigtigt, at trækarmeringen forankres i områder, hvor der er tryk i betonen, eller hvor der forekommer tilstrækkelig tværarmering til at sikre den nødvendige forankring. Ved vederlag og udsparinger m.v. er der ikke altid plads til hele forankringslængder. Her kan det blive nødvendigt at indlægge u-bøjler som forankring eller udforme armeringen med krog, se f.eks. DS 411, pkt. 7.1.3 og EC 2, pkt. 5.2.3.2.

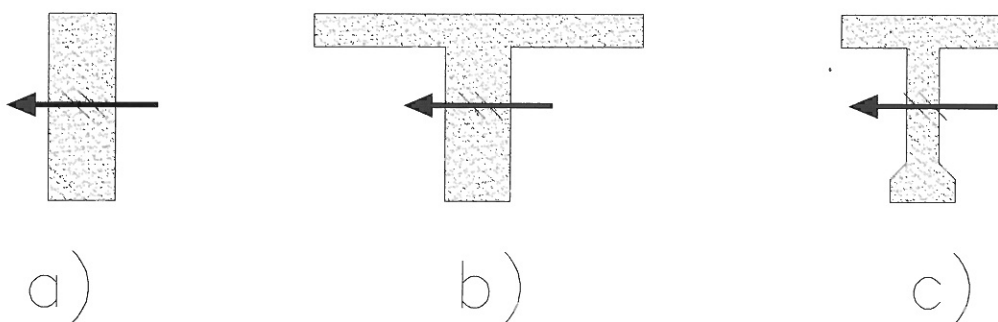
## 6.2 Bjælker

En bjælke defineres som en konstruktionsdel med en kropsbredde, der er mindre end højden og en spændvidde, der er en del større end højden. I praksis anvender man ofte bjælketeorien til bestemmelse af bæreevne, når det for en simpelt understøttet bjælke gælder, at  $L \geq 2h$ . Er  $L < 2h$  anvendes teorien for høje bjælker eller skiver ved beregning af bæreevnen. For udkragede bjælker kan bjælketeorien benyttes, når udkragningen er større end højden. Normalt vil bjælker være påvirket til bøjning og forskydning, men kan i sjældnere tilfælde også være påvirket til vridning. Er bjælken udover bøjning og forskydning påvirket af en relativ stor normalkraft, kan det være nødvendigt at der, ved bestemmelse af snitkræfterne, tages hensyn til bjælkens udbøjning. Bjælken dimensioneres i sidstnævnte tilfælde som en excentrisk belastet eller en tværbelastet søjle.

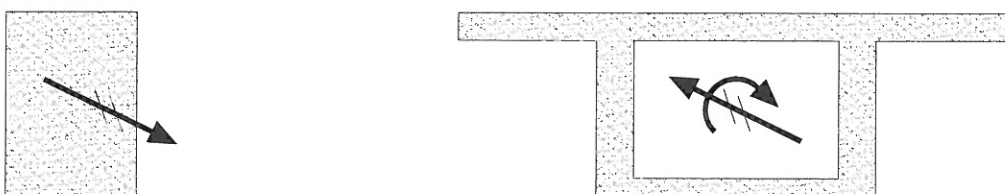
Generelt kan slapt armeret bjælker anvendes ved spændvidder op til ca. 20 m., men af økonomiske- og/eller æstetiske grunde bør en anvendelse af spændbeton også overvejes ved spændvidder fra ca. 10 - 15 m.

### 6.2.1 Betontværsnit

En bjælkes betonmål fastlægges ud fra de påvirkninger som bjælken udsættes for, både under montagen og i det færdige bygværk. Er der kun bøjning om én akse anvendes normalt et rektangulært -, T- eller I-formet tværsnit som vist i figur 6.2-1. Er der tale om bøjning om to akser (skæv bøjning) eller om vridning, kan der med fordel anvendes bjælker med større bredde eller kasseformet tværsnit, som tillige er velegnede til optagelse af vridningspåvirkning.



Figur 6.2.-1 Bjælketværsnit til optagelse af bøjning om én akse.



Figur 6.2.-2 Bjælketværsnit til optagelse af skæv bøjning og vridning.

Ved dimensionering af bjælker fastlægges først de tilnærmede dimensioner ud fra simple overslagsberegninger som hurtigt og nogenlunde korrekt kan fastlægge tværsnitsdimensionerne og en tilhørende armering. Ved den efterfølgende bestemmelse af bæreevne og deformationer, som beskrevet i tidligere kapitler, kan de foreløbige tværsnitsdimensioner og armeringsmængder så justeres, således at konstruktionen på bedste måde kommer til at tilfredsstille kravene til bæreevne og deformationer.

I normerne stilles direkte krav til bæreevnen, medens der for nedbøjning kun angives vejledende grænser. Med hensyn til deformationer kan der afhængig af konstruktionens funktion opstilles anbefalede grænser for deformationen. EC 2 pkt. 4.4.3 anbefaler at nedbøjningen ikke overstiger, henholdsvis spændvidden/250 for langtidslast (kvasi-permanent last), og spændvidden/500 for nyttelast (korttidslast). Under alle omstændigheder skal forholdene hvorunder konstruktionen skal virke, vurderes nøje for bl.a. utilsigtet lastfordeling på sekundære bygningsdele, samt revnevidder i aggressivt miljø m.m.

I det følgende angives en række regler, der kan benyttes i overslagsberegninger til bestemmelse af foreløbige dimensioner.

Af nedbøjningshensyn bør anvendes bjælkehøjder på ca. 1/10 - 1/20 af spændvidden ved simpel understøtte bjælker, medens der for kontinuerte bjælker bør anvendes 1/15 - 1/25 af spændvidden.

I ”Teknisk ståbi” er anvist overslagsberegninger til bestemmelse af minimal højde for bjælker, beregnet ud fra den maksimale momentpåvirkning. I nedenstående formler bestemmes  $h$  i mm, når  $M_d$  og  $b$  indsættes i henholdsvis kNm og m.

Almindelig armeret beton, rektangulært tværsnit:

$$h = \sqrt{800M_d / b} \quad (6.2-1)$$

Almindelig armeret beton med trykarmering, rektangulært tværsnit:

$$h = \sqrt{600M_d / b} \quad \text{til} \quad h = \sqrt{500M_d / b} \quad (6.2-2)$$

Almindelig armeret beton, T- tværsnit:

$$h = 100 \sqrt[3]{0,8M_d} \quad (6.2-3)$$

Almindelig armeret beton, T- tværsnit, presset højde:

$$h = 100 \sqrt[3]{0,5M_d} \quad (6.2-4)$$

En minimumshøjde kan også bestemmes ud fra det balancerende tværsnit som omtalt i afsnit 4.1. Ved dimensionering af en bjælke bør der altid udføres en nedbøjningsundersøgelse for at belyse om en eventuel større højde er påkrævet.

Bjælkebredden kan bestemmes under hensyn til følgende:

- at det skrå betontryk fra forskydningen (se kap. 4.2.) ikke blive for stort, svarende til at
- $$\tau = \frac{V_d}{b_w z} < 0,25f_{cd} \quad (6.2-5)$$

hvor  $z$  indledningsvis kan sættes til  $0,8 h$ .

- at der skal være plads til det nødvendige antal armeringsstænger, og disse bør ikke ligge i mere end 2-3 lag afhængig af bjælkehøjden. I nogle tilfælde kan man med fordel øge bredden omkring hovedarmeringen, som ved I-tværsnit se figur 6.2-1c.
- at der skal være plads til en effektiv udstøbning af betonen. Bjælkebredden bør ikke vælges mindre end 120 - 150 mm for rektangulære tværsnit og 200 mm for T-tværsnit.
- at bjælkens stabilitet er sikret. Ved anvendelse af slanke rektangulære bjælker hvor trykzonen ikke bliver fastholdt sideværts, kan der opstå kipning. Erfaringen viser, at hvis  $b_w$  vælges således, at  $b_w$  opfylder kravene  $b_w > 0,25h$  og  $b_w > 0,016 l$ , hvor  $l$  er trykzonens frie længde, vil der ikke opstå kipningsproblemer. Vælges  $b_w$  mindre end ovenstående krav angiver, bør der foretages en nærmere stabilitetsundersøgelse.

Den effektive bredde af en T- bjælkes trykflange skal fastlægges i overensstemmelse med den beregningsmetode, der benyttes ved snitkraftbestemmelsen.

Når plasticitetsteorien benyttes, kan bredden til hver side af kroppen vælges frit, dog højst  $8h_t$ , hvor  $h_t$  er flangetykkelsen.

DS 411 angiver i afsnit 6.1.2 (4) og (5) nedenstående regler til bestemmelse af en T-bjælkes flangebredde.

Når elasticitetsteorien benyttes, kan bredden til hver side af kroppen sættes til den mindste af størrelserne  $8h_f$  og 40 % af afstanden fra maksimalmomentpunktet til nærmeste momentnulpunkt.

Hvis lasten består af enkeltkræfter, bør der regnes med en mindre bredde. For én enkeltkraft bør der således kun regnes med 20% i stedet for 40%.

Der kan ikke vælges større bredde end den faktisk forekommende bredde.

Ved bestemmelse af minimumsarmering for T-bjælker bør der ikke vælges en for lille værdi af  $b_{\text{eff}}$ . Denne bør opfylde kravet angivet i DS 411:

$$b_{\text{eff}} \geq b_w + 2h_f \quad (6.2-6)$$

Flangetykkelsen  $h_f$  ( dæktykkelsen ) bør ikke være mindre end 60 - 80 mm.

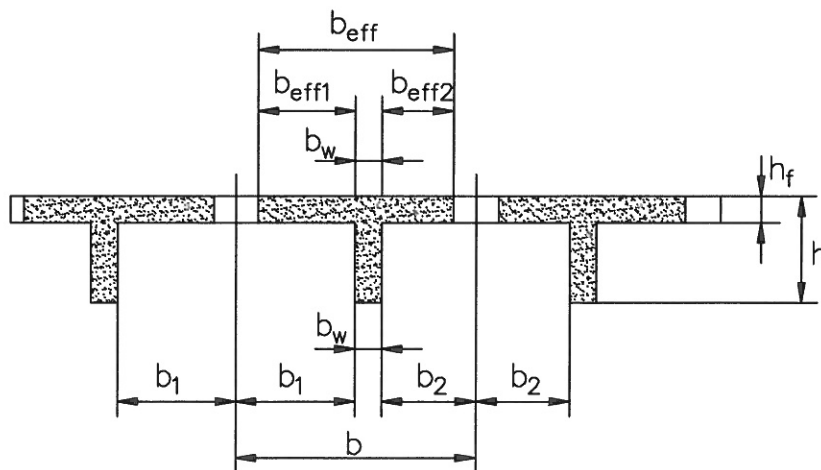
EC 2 angiver i afsnit 2.5.2.2.1 nedenstående formler til bestemmelse af  $b_{\text{eff}}$ :

$$b_{\text{eff}} = b_w + \frac{1}{5}l_0 < b \quad (\text{Symmetrisk T-bjælke}) \quad (6.2-7)$$

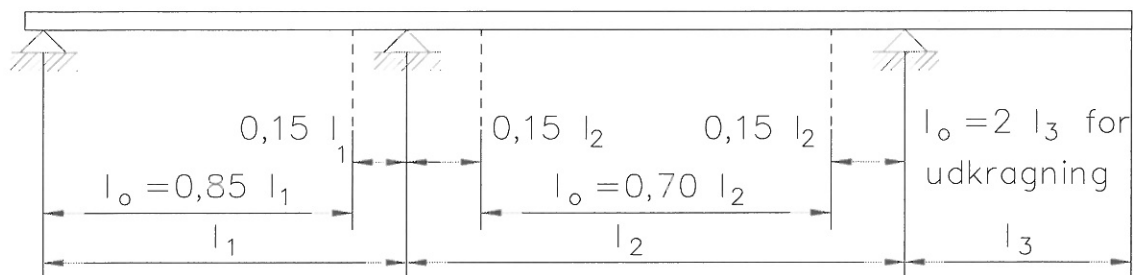
$$b_{\text{eff}} = b_w + \frac{1}{10}l_0 < b_1 \quad (\text{Kantbjælke}) \quad (6.2-8)$$

hvor  $l_0$  er afstanden mellem 2 momentnulpunkter.  $l_0$  kan tilnærmet beregnes som vist i figur 6.2-4.

Ofte benytter man en mindre værdi end den maksimale tilladelige værdi for  $b_{\text{eff}}$ .



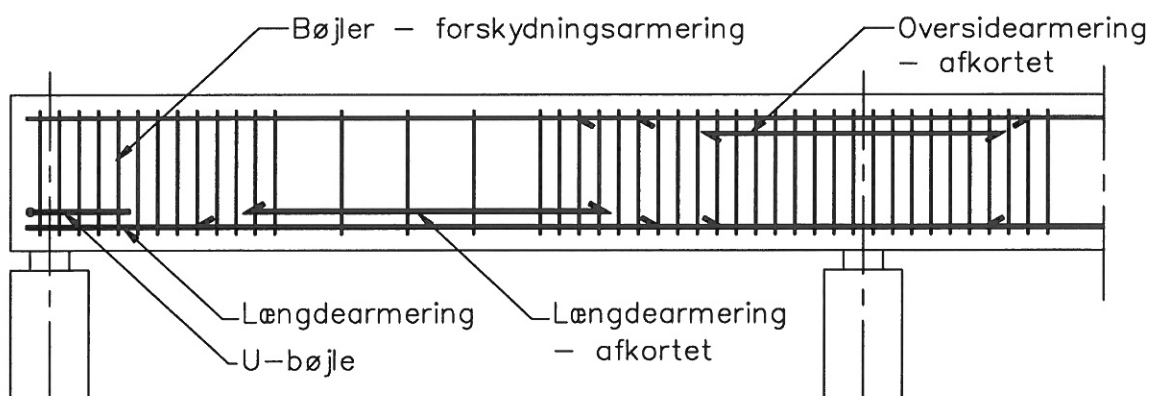
Figur 6.2-3 Definition på dimensioner.



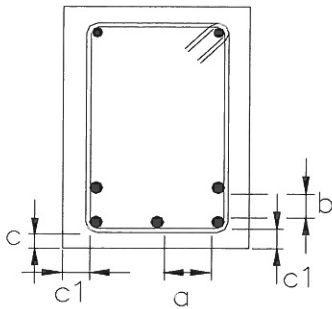
Figur 6.2-4 Tilnærmede værdier for  $l_o$  ved beregning af effektiv bredde iht. EC2.

Det ses, at de effektive bredder for en T-bjælke beregnet efter EC2 er væsentlig mindre end de effektive bredder beregnet efter DS 411. NAD angiver, at indtil EC2 er blevet indført som gældende standard i Danmark, kan EC2 benyttes som alternativ til DS 411 med anvendelse af reglerne i DS 411 for bestemmelse af  $b_{eff}$ .

### 6.2.2 Bjælkearmering



Figur 6.2-5 Bjælkearmering med længdearmering og forskydningsbøjler.



skærpet og normal kontrol:

$$a \geq \begin{cases} 2\phi \\ d_g + 10 \text{ mm} \end{cases}$$

$$b \geq \begin{cases} \phi \\ d_g \end{cases}$$

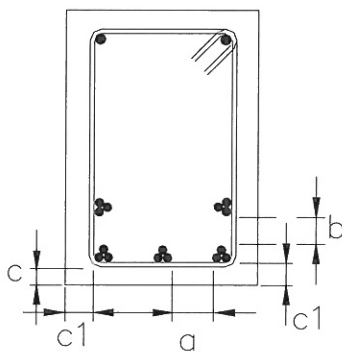
c se tabel 6.2-1

$c_1 > 1,5 \phi$

c og  $c_1$  er foreskrevet dæklag på henholdsvis bøjler og længdearmring.

$d_g$  betegner tilslagets nominelle, maksimale kornstørrelse.

Figur 6.2-6 Placering af armering i en bjælke, jf. DS 411 pkt. 6.4.1.2.



skærpet og normal kontrol:

$$a \geq \begin{cases} 2\phi_{eq} \\ d_g + 10 \text{ mm} \end{cases}$$

$$b \geq \begin{cases} \phi_{eq} \\ d_g \end{cases}$$

c se tabel 6.2-1

$$c_1 \geq \begin{cases} 1,5\phi_{eq} \\ 30 \text{ mm} + \text{tolerancet illæg for 2-bundt} \\ 40 \text{ mm} + \text{tolerance tillæg for 3-bundt} \end{cases}$$

c og  $c_1$  er foreskrevet dæklag på henholdsvis bøjler og længdearmring.

$d_g$  betegner tilslagets nominelle, maksimale kornstørrelse.

$\phi_{eq}$  er defineret i formel (6.2-9).

Figur 6.2-7 Placering af bundtet armering i en bjælke, jf. DS 411 pkt. 6.4.1.2.

### 6.2.2.1 Længdearmring i bjælker

#### *Armeringsplacering og udformning*

Bjælkearmring består af følgende bestanddele: længdearmring, til tider også benævnt hovedarmring, bøjlearmring og montagearmring. Derudover kan der være diverse forankringsbøjler og indstøbte lejeplader m.v. I høje bjælker kan der udover bøjlearmringen være en revnefordelende netarmring i kroppen. Ved montagearmring forstås en sekundær armering, der har til formål at fastholde den øvrige armering under støbningen. I visse tilfælde kan der dog også være tale om en særlig armering som kun er virksom under håndtering af et bjælkeelement under montagen.

Længdearmringen skal placeres så yderligt som muligt, således at nyttehøjden i bjælken bliver så stor som mulig. Denne og den øvrige armering skal desuden placeres under hensyntagen til det miljø som bjælken skal virke under, samt anordnes på en sådan måde at der kan udføres en god udstøbning og en effektiv komprimering af betonen.

Armeringsstængerne skal placeres med så stor indbyrdes afstand, at en god udstøbning og en effektiv komprimering kan finde sted, hvilket kan påregnes når kravene angivet i figur 6.2-6 og 6.2-7 er opfyldt. Mindre afstande end de angivne kan dog tolereres over begrænsede længder, blandt andet i områder med stød, hvis omstøbningen er sikret.

Armeringsstænger, herunder bøjler, skal dækkes af et betonlag, hvis foreskrevne tykkelse ved skærpet og normal kontrol mindst skal være som angivet i tabel 6.2-1. Ved lempet kontrol skal den foreskrevne dæklagstykkelse forøges med 5 mm.

miljøklasse	dæklag	
	minimal tykkelse mm	foreskrevet tykkelse mm
Ekstra aggressiv	40	40 + tolerancetillæg
Aggressiv	30	30 + tolerancetillæg
Moderat	20	20 + tolerancetillæg
Passiv	10	10 + tolerancetillæg

Tabel 6.2-1 Dæklag for slap armering ved skærpet og normal kontrol

Der skal benyttes afstandsholdere, hvis tykkelse er lig med den foreskrevne dæklagstykkelse. De skal anbringes med en sådan indbyrdes afstand, at det i tabel 6.2-1 angivne krav til minimal dæklagstykkelse er overholdt overalt inden udstøbning, og det skal sikres, at armeringsstængerne er tilstrækkelig fastholdt mod bevægelse under udstøbningen.

Armeringsbundter skal dækkes af betonlag, hvis foreskrevne tykkelse uanset armeringsstængernes diameter mindst skal være 30 mm plus tolerancetillæg ved 2-bundt og 40 mm plus tolerancetillæg ved 3-bundt.

Det skrappeste af kravene til dæklaget angivet i figur 6.2-6, 6.2-7 og tabel 6.2-1 samt ovenstående vedr. armeringsbundter er gældende.

Med mindre andet gør sig gældende, bør tolerancen på længdearmeringens placering ikke angives med værdier, der er mindre end plus minus 10 mm, dog højst 10 % af nyttehøjden.

Ved sikkerhedsvurderingen, dvs. ved dimensionering af konstruktionen, anvendes foreskrevne værdier for dæklag og armeringens placering.

Armeringens indbyrdes afstand skal tage hensyn til tilslaget maksimale kornstørrelse  $d_g$ . Disse er for perlestensbeton 8 mm., for ærtstensbeton 16 mm., for nøddestensbeton 32 mm. og for singelsbeton 64 mm.

I figur 6.2-7 er vist, hvordan armeringen skal placeres, såfremt armeringen anbringes i bundter. Her skal der beregnes en ækvivalent diameter  $\phi_{eq}$  for den bundtet armering. Denne kan beregnes af

$$\phi_{eq} = \sqrt{n} \phi \quad (6.2-9)$$

hvor  $n$  er antallet af armeringsstænger i bundtet og  $\phi$  er armeringsdiametere.

### *Minimumsarmering ved bøjning.*

I normerne stilles krav om, at armerede betonkonstruktioner skal forsynes med en minimumsarmering. Kravet om minimumsarmering kan begrundes med følgende:

- for at undgå et uvarslet brud. Et uvarslet brud kan opstå, når armeringsmængden er så lille, at armeringen ved overgang fra urevnet til revnet tværsnit ikke er i stand til at optage de trækspændinger, der forefindes i betonens trækzone umiddelbart før betonen revner. Et sådant tværsnit siges at være underarmeret og brudformen vil være et armeringstrækbrud.
- for at skabe en passende revnefordeling, dvs. mange fine revner i stedet for få grove revner.

Revner kan være fremkaldt af lasten, men kan også hidrøre fra termobevægelser, svind, krybning m.m.

Minimumsarmering for bøjningspåvirkning er i følge DS 411 den armeringsmængde, der skal til for i brudtilstanden at optage et moment, der er lig med revnemomentet for det uarmerede tværsnit.

Vedr. armeringsprocenter for minimumsarmering er dette beskrevet i kapitel 4.1.

Stilles der krav om revnevidder (DS 411 pkt. 6.3), er en minimumsarmering sjældent tilstrækkelig, se nærmere herom i kap. 5.4.

### *Minimumsarmering ved forskydning.*

Minimumskravene for bøjlearmering i bjælker er angivet i kapitel 4.2, formlerne 4.2-49 til 4.2-54.

Afstanden mellem bøjlerne i en forskydningsarmeret betonbjælke skal opfylde krav til bæreevne, minimumsarmering, maksimal afstand og særlige krav ved stød og forankringer. Bøjleafstanden s kan derfor bestemmes som den mindste værdi bestemt af (6.2-10).

$$s \leq \begin{cases} \frac{A_{sw}}{V_d} z f_{ywd} \cot \theta \\ 0,7h \\ 0,7h \cot \theta \\ \frac{5A_{sw} f_{ywk}}{b_w f_{ctk}} \\ 55 \frac{\phi_t^2}{\phi} \quad (\text{ved forankring og stød}) \end{cases} \quad (6.2-10)$$

## EC 2

I EC 2 er der sat nogle minimumskrav til armeringsforholdet. Forskydnings-armeringsforholdet  $\rho_w$  kan beregnes af

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{sb_w \sin \alpha} \quad (6.2-11)$$

hvor

- $A_{sw}$  er arealet af forskydningsarmeringen over længden  $s$ .
- $s$  er afstanden mellem forskydningsarmeringen.
- $b_w$  er bredden af bjælken krop.
- $\alpha$  er vinklen mellem forskydningsarmering og hovedarmering. Lodrette bøjler  $\Rightarrow \sin \alpha = 1$ .

Minimumsværdierne for armeringsforholdet er givet i tabel 6.2-2.

Betonklasser	Stålklasser		
	S220	S400	S500
C12/14 og C20/25	0,0016	0,0009	0,0007
C25/30 til C35/45	0,0024	0,0013	0,0011
C45/50 til C50/60	0,0030	0,0016	0,0013

Tabel 6.2-2 Minimumsværdier for  $\rho_w$ .

Ud over ovenstående krav til armeringsforholdet sætter EC 2 også nogle krav til den største afstand der må være mellem forskydningsarmeringen. Disse er defineret ved følgende forhold

- hvis  $V_{Sd} \leq 1/5 V_{Rd2}$  :  $s_{max} = 0,8d$  dog max 300 mm.
- hvis  $1/5 V_{Rd2} < V_{Sd} \leq 2/3 V_{Rd2}$  :  $s_{max} = 0,6d$  dog max 300 mm.
- hvis  $V_{Sd} > 2/3 V_{Rd2}$  :  $s_{max} = 0,3d$  dog max 200 mm.

$V_{Sd}$  og  $V_{Rd2}$  er defineret i kap. 4.2.

### *Armeringens afkortning*

Ved *afkortet armering* forstås en længdearmering, der ikke føres igennem hele bjælkens udstrækning men afkortes, når den afkortede armeringsstangs bidrag til armeringstværsnittet ikke længere er nødvendig for at opnå et tilstrækkeligt brudmoment i det betragtede betontværsnit.

Til bestemmelse af udstrækningen for afkortet armering anvendes metoden som beskrevet i kapitel 4.7.

### *Armeringens forankring ved understøtninger*

I henhold til formel (4.2-34) skal længdearmeringen i en momentpåvirket bjælke, over en simpel understøtning, forankres for kraften

$$F_s = \frac{1}{2} R_{dL} \cot \theta \quad (6.2-12)$$

hvor  $R_{dL}$  er den lodrette reaktion over understøtningen.

Forankringslængden  $l_{b,net}$  er defineret som den nødvendige forankringslængde ved fuld udnyttelse af armeringen, dvs. når spændingen i armeringen er lig den regningsmæssige flydespænding  $f_{yd}$ . Hvis spændingen i armeringen er mindre end flydespændingen, dvs.  $\sigma_s < f_{yd}$  kan den nødvendige forankringslængde  $l_b$  reduceres svarende hertil

$$l_b \geq \frac{\sigma_s}{f_{yd}} l_{b,net} \quad (6.2-13)$$

hvor  $\sigma_s$  = den aktuelle armeringsspænding over understøtningen.

Bjælkegeometrien over vederlagene er ofte udformet på en sådan måde, at det ikke er muligt at få plads til den ovenfor beregnede nødvendige forankringslængde. I sådanne tilfælde må ekstra foranstaltninger sættes i værk. Nedenfor er nævnt forskellige muligheder for en række ekstra foranstaltninger, hvorved den beregnede forankringslængde kan reduceres:

1. *Indlægning af ekstra bøjler over forankringslængden.*  
Efter DS 411 skal der ved forankring og stød placeres bøjler efter 55-reglen, svarende til en max. bøjleafstand på

$$s \leq 55 \frac{\phi_t^2}{\phi} \quad (6.2-14)$$

hvor  $\phi_t$  = bøjlediameteren, og  $\phi$  = diameteren på længdearmeringen.

Ved at tredoble denne bøjlemængde kan forankringslængden ifølge DS 411 nedsættes med 25 %.

Ud over normen beskriver professor M.P. Nielsen/ DTU i [1] en metode hvor en yderligere reduktion kan medtages, såfremt der tages hensyn til reaktionens virkning (knibtangseffekt). Metoden knytter sig til nogle vederlagsforsøg og må derfor kun anvendes, når forholdene ligner forsøgsomstændighederne. Bl.a. kan nævnes at armeringen kun må ligge i et lag og med 3 stænger over vederlaget. Se nærmere herom i [1].

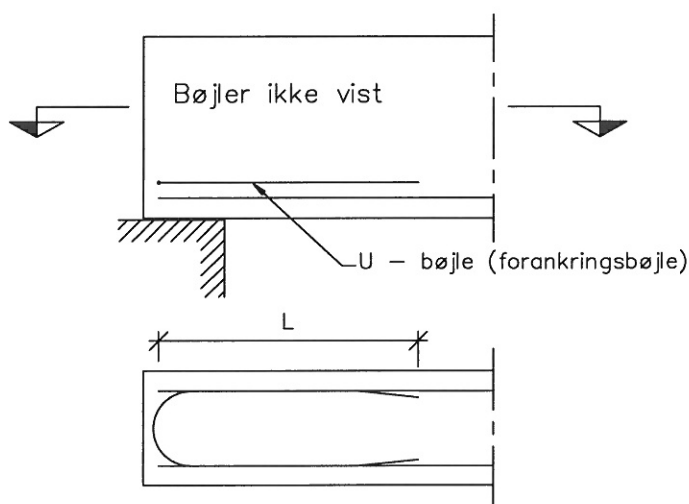
Efter metoden kan forankringslængden reduceres med faktoren

$$k_r = 1 - \mu \pi \frac{\phi_l}{b_w} \quad (6.2-15)$$

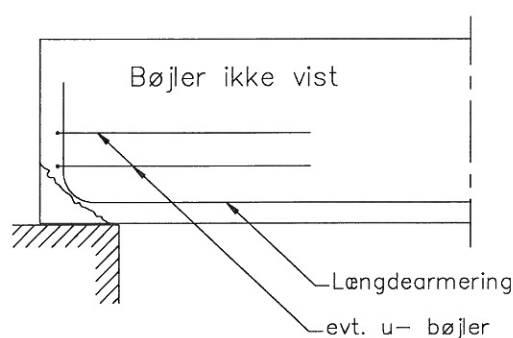
hvor  $\mu$  er en faktor, der er afhængig af armeringsstangens kvalitet og overfladeprofilering. For kamstål kan antages, at  $\mu = 1,4$ .  $\phi_l$  og  $b_w$  er henholdsvis diameteren af længdearmeringen og bjælkebredden. Metoden gælder ikke for rundjern.

2. *Indlægning af vandret(te) u-bøjler.*  
Denne metode er mere anvendt, da der kan indlægges en eller flere vandrette u-bøjler over vederlaget, se figur 6.2-8. U-bøjlen lægges tæt på hovedarmeringen svarende til en trækforankringslængde til denne, og som regel i en mindre dimension end hovedarmeringen. Herved kan u-bøjlerne bukkes rundt med en forholdsvis lille bukkediameter. Man skal dog være opmærksom på, at der kan være fare for spaltebrud såfremt betontrykspændingerne i u-bøjlers indercirkel bliver meget store, se figur 4.6-6. En principiel undersøgelse heraf kan udføres efter kap. 4.6 og DS 411, pkt. 6.2.4.1.

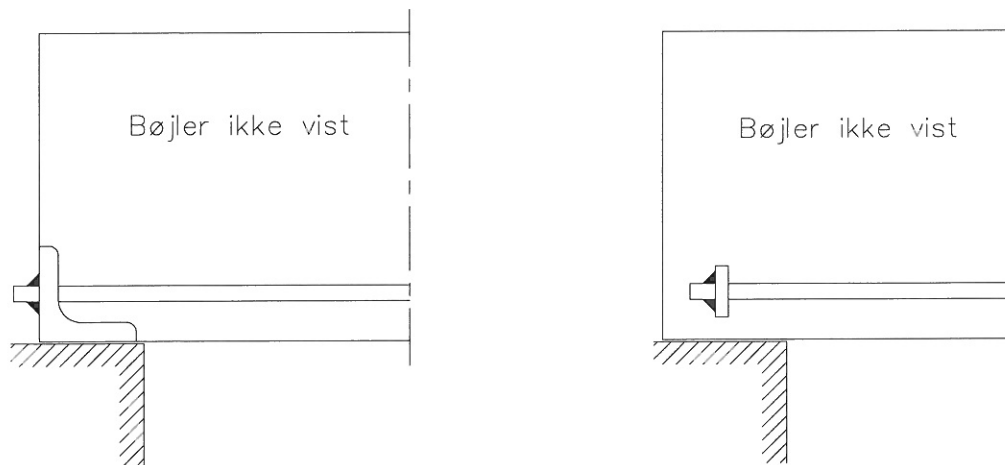
3. *Opbukning af længdearmeringen ved bjælkeende.*  
 Ved denne metode skal det påses, at der ikke kan ske et afskalmningsbrud i den uarmerede zone under armeringens bukkeradius, se figur 6.2-9. Tillige kan der optræde spaltespændinger i betonen omkring armeringens krumninger. Disse kan dog elimineres ved indlæggelse af u-bøjler langs forankringslængden.
4. *Mekanisk fastgørelse af længdearmering.*  
 En nærliggende mulighed er at bolte eller svejse en endeplade på armeringsstangen, som vist i figur 6.2-10, og via denne overføre trækket i armeringen til tryk i betonen. Pladen skal dimensioneres med hensyn til størrelse og stivhed, således at den kan fordele kræfterne til betonen. Betonen skal undersøges for koncentreret last samt for afskalmningsbrud over beslaget. Ved svejsning bør armeringsstangen føres igennem pladen, således at svejsningen bliver trykpåvirket. Materialerne skal være egnet til svejsning, med hensyn til styrke og kvalitet, således at en lokal svækkelse i samlingen undgås. Svejsningen skal udføres meget omhyggeligt og evt. kontrolleres for revnedannelser. Metoden kan bruges til meget korte vederlag, ved f.eks. at anvende et vinkelprofil som både vederlagsplade og forankringsplade. Synlig armering og lejeplader må dog frarådes i udendørs- og fugtigt miljø, da rustangreb her kan få alvorlige konsekvenser. Den mekaniske fastgørelse af længdearmering (slap armering) anvendes ikke særlig ofte.



Figur 6.2-8 Forankring med indlagt U- bøjle.

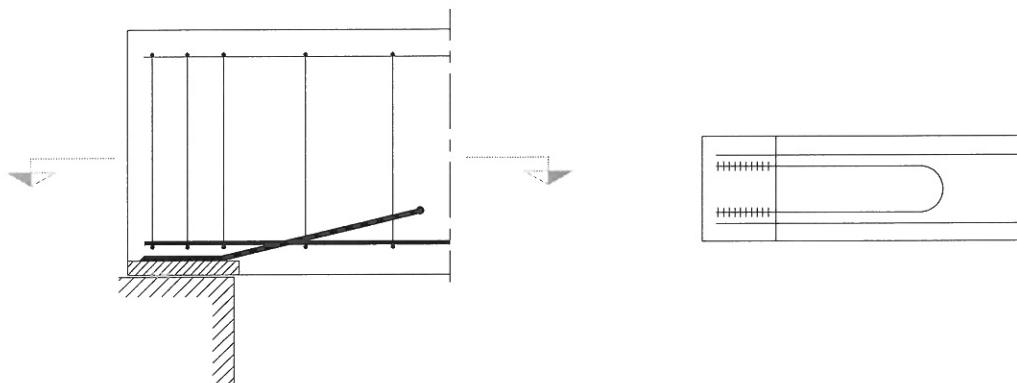


Figur 6.2-9 Forankring ved opbukning af længdearmering.



Figur 6.2-10 Forankring med påsvejste plade/ profil.

Ved præfabrikerede bjælkeelementer, anvendes indstøbte lejeplader med påsvejste armeringsjern til forankring af hovedarmeringen.



Figur 6.2-11 Forankring af lejeplade i bjælke.

Generelt skal der udvises stor omhu, ved dimensionering af et vederlag, idet det er her kræfterne koncentrereres og føres videre gennem bygværket. I praksis er observeret en del svigt der skyldes mangelfulde vederlag.

Nedenfor er nogle årsager til sådanne svigt:

- *manglende forankringer i konstruktionsdelene.* Forårsager løse lejeplader og afskalninger i vederlagszonen.
- *manglende styrke (armering) i understøttende konstruktion.* Forårsager afskalning/ knusning under vederlaget.
- *manglende bevægelsesfrihed (ved dilatationsleje).* F.eks. ved for stor friktion i vederlaget.
- *manglende fastholdelse.* F.eks. ved for svag eller ingen forankring, hvor en bevægelse i samlingen ikke må forekomme.

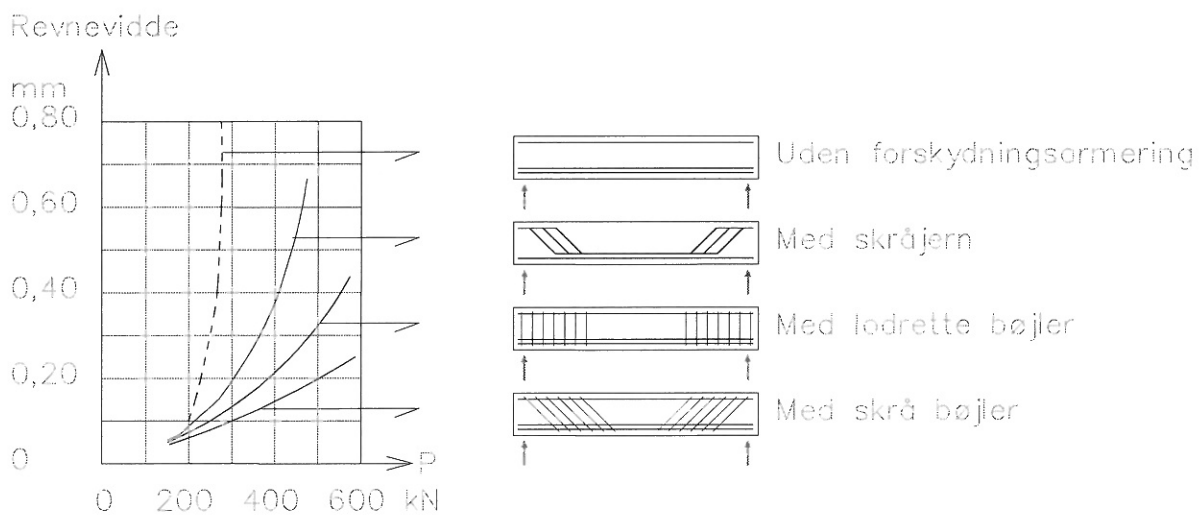
- *skæve vederlag (ikke vandrette vederlag)*. Kan forårsage utilsigtede vandrette kræfter og/eller utilsigtede vandrette bevægelser af konstruktionen.
- *manglende hensyntagen til sideværts kræfter*. F.eks. ved vridningsfastholdelse og ved konstruktioner påvirket for sideværts kræfter.
- *for små lejedybder*. F.eks. ved montagebyggeri hvor vederlagsdybden ikke bliver fordelt lige i begge ender.
- *manglende hensyntagen til tolerancekrav*. F.eks. tolerance til målaf sætning, montageplacering, elementtolerance, samt tolerance til temperaturbevægelse.

### 6.2.2.2 Forskydningsarmering, placering og udformning

En bjælkes forskydningsarmering kan som tidligere nævnt, bestå af lodrette henholdsvis skrå bøjler eller opbøjet hovedarmering.

Bjælker tillades udført uden forskydningsarmering jvf. DS 411 og EC2, se kapitel 4.2.

Forskydningsarmeringens udformning og placering har indflydelse på revnefordelingen og revnevidden som det fremgår af [2] og figur 6.2-12.



Figur 6.2-12 Revnevidder målt ved forsøg med forskellige typer forskydningsarmering.

Forskydningsarmering bestående af opbøjet hovedarmering giver store revnevidder og skal derfor suppleres med bøjler. Denne armeringsform bruges meget sjældent i dag.

Lodrette bøjler er den mest anvendte forskydningsarmering, da denne er lettest at udføre i praksis.

Skrå bøjler med hældning  $45^\circ$  til  $90^\circ$  med vandret, er de mest effektive til optagelse af forskydningskræfter, da de næsten står vinkelret på revnedannelsen, og derfor giver de mindste revnevidder. De er dog vanskelige at montere i praksis, hvorfor de sjældent anvendes.

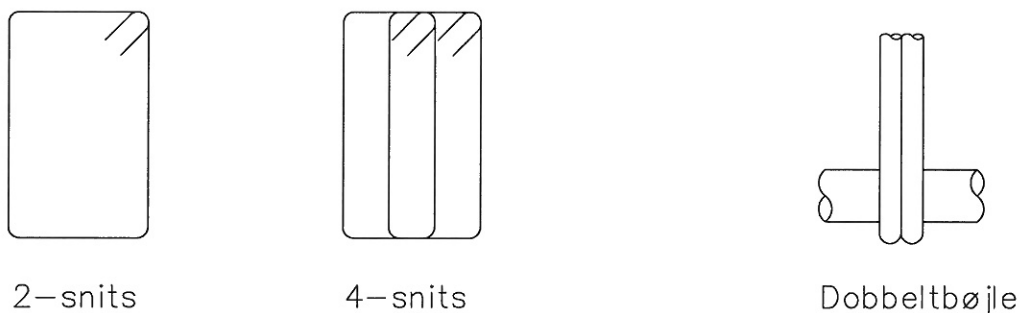
Beregning af skrå og lodrette bøjler er vist i afsnit 4.2.2.

Her i landet skal bøjler altid udformes som lukket bøjler i henhold til DS 411 pkt. 6.4.1.4.

Åbne bøjler kan anvendes i henhold til EC2, pkt. 6.4.2.2, men må ikke anvendes jævnfør DS 411, da forsøg har vist dårlige forskydningsbæreevner med disse udformninger.

Diameteren på bøjlerne vælges normalt mellem 5-12 mm, for at undgå for store bukkeradier.

Bliver den beregnede bøjleafstand mindre end ca. 100 mm vanskeliggøres en effektiv udstøbning og komprimering af betonen. Afstanden kan i sådanne tilfælde øges ved at ændre bøjlen til en flersnitsbøjle, som f.eks. at ændre fra 2- snitsbøjle til 4-snitsbøjle som vist i figur 6.2-13, eller anbringe bøjlerne parvis som dobbeltbøjler som også vist.



Figur 6.2-13 Bøjleformer

Placering af særlige bøjlearrangementer i form af ophængningsarmering kan blive nødvendigt, ved koncentrerede laste i undersiden af bjælken, eller ved større udsparinger/huller i bjælken.

### 6.2.3 Vridningsarmering

Vridningsarmering består af både bøjle- og længdearmering. Bøjler skal være lodrette og lukket jvf. DS 411, og længdearmering skal som minimum være placeret i hvert hjørne af bøjlen, og ellers være jævnt fordelt langs bøjleens indre periferi. Afstanden mellem længdearmeringen må ikke overstige 350 mm. Den maksimale bøjleafstand ved vridningspåvirkning bestemmes af:

$$s \leq \begin{cases} 0,2u_k \cot \theta \\ 0,2u_k \end{cases} \quad (6.2-16)$$

hvor  $u_k$  = omkredsen af midterlinjen i det tyndfligede tværsnit.

### 6.3 Plader

Man skelner mellem enkeltspændte og dobbeltspændte plader.

- *Enkeltspændte plader* understøttes på to af hinanden modstående sider og påvirkes primært kun af bøjning om én akse. Denne forsynes derfor med en hovedarmering som ligger vinkelret på understøtningerne. For at skabe en sammenhæng i pladen lægges en fordelingsarmering vinkelret på hovedarmeringen, svarende til 20% af denne.
- *Dobbeltspændte plader* understøttes på mere end to sider og forsynes med hovedarmering i to retninger der normalt står vinkelret på hinanden.

Beregning af plader er angivet i kap. 4.7 og 4.8.

#### 6.3.1 Betontværsnit

DS 411 anfører, at tykkelser for massive in situ støbte plader, ikke bør udføres med mindre pladetykkelse end 60 mm for tagplader og 80 mm for øvrige plader.

Af stivhedshensyn bør pladetykkelsen for enkeltspændte plader ikke vælges mindre end 1/30 af spændvidden og 1/40 af spændvidden for dobbeltspændte plader.

I Teknisk Ståbi er minimumstykkelsen  $h$  i mm for plader overslagsmæssig angivet dels ud fra styrkehensyn:

$$h \geq \sqrt{800m_d} + 15 \quad (6.3-1)$$

hvor  $m_d$  er pladens maksimale moment i kNm/m.

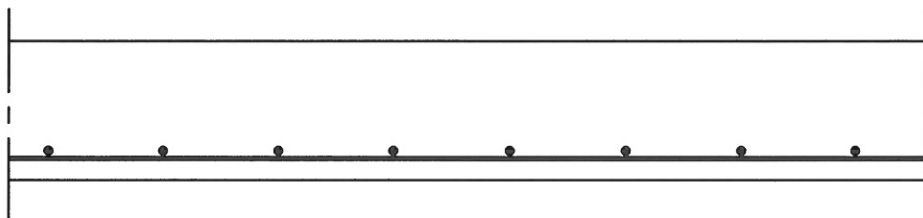
og dels af nedbøjningshensyn (afhængig af lastens størrelse):

$$\text{Enkeltspændt} \quad h \geq \begin{cases} 1/30 l_k & q < 5 \text{ kN/m}^2 \\ 1/30 l_k \sqrt[3]{\frac{q}{5}} & q > 5 \text{ kN/m}^2 \end{cases} \quad (6.3-2)$$

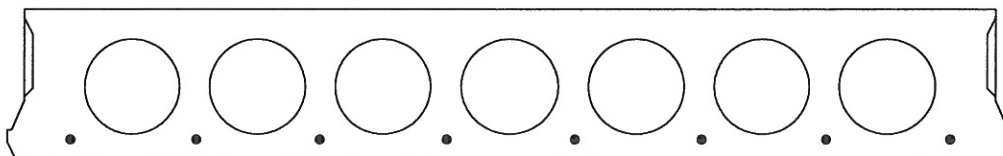
$$\text{Dobbeltspændt} \quad h \geq \begin{cases} 1/40 l_k & q < 5 \text{ kN/m}^2 \\ 1/40 l_k \sqrt[3]{\frac{q}{5}} & q > 5 \text{ kN/m}^2 \end{cases} \quad (6.3-3)$$

hvor  $l_k$  er den mindste spændvidde og  $q$  er pladens regningsmæssige last ekskl. pladens egenvægt.

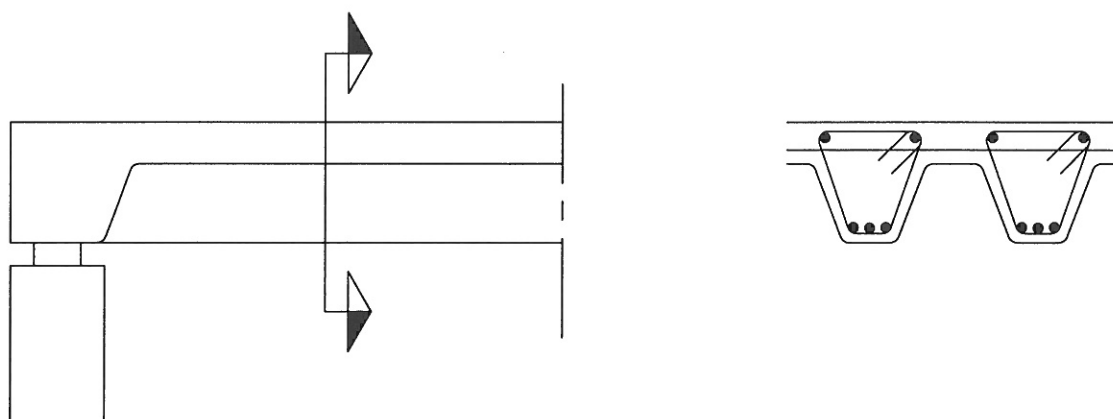
Største spændvidde bør ikke vælges større end 5-6 m for massive enkeltspændte plader, og 8-9 m for dobbeltspændte plader. Ved større spændvidder bliver deformationerne for store på grund af egenlasten. Egenlasten kan imidlertid reduceres ved at udføre pladen som et ribbedæk hvor armeringen koncentrerer i sammensatte T-bjælker, enten som åbne ribber eller lukket som i huldæk og kanaldæk.



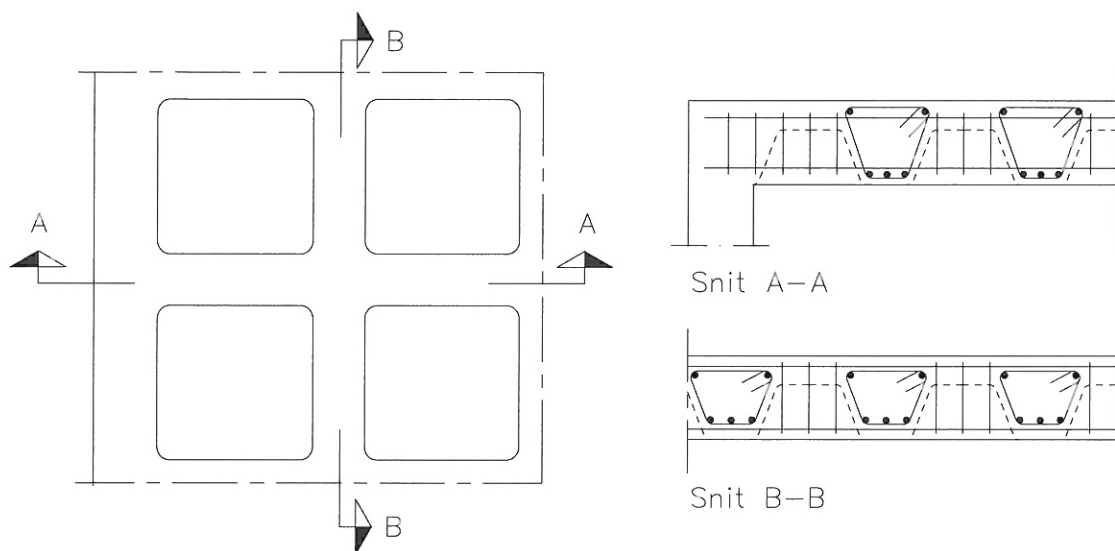
Figur 6.3-1 Armeret massivt dæk.



Figur 6.3-2 Huldæk.



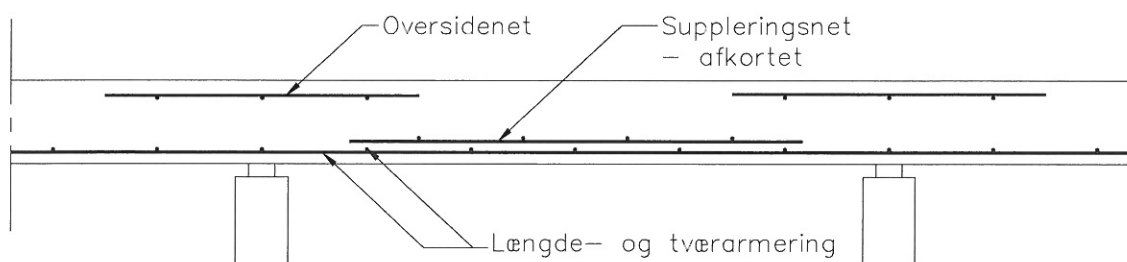
Figur 6.3-3 Enkeltarmeret ribbedæk.



Figur 6.3-4 Krydsribbedæk.

Dobbeltspændte plader kan udformes som et krydsribbedæk med krydsende ribber også kaldet et kuppeldæk.

### 6.3.2 Pladearmering



Figur 6.3-5 Pladearmering

#### 6.3.2.1 Længdearmring i plader

##### *Armeringens placering*

Ud over minimumsarmeringen er der nogle geometriske krav til placering af pladearmering i massive plader. DS 411 kræver, at omkredsen af armeringsnettets masker ikke må overskride 10 gange pladetykkelsen eller 1,20 m.

I EC2 er kravet til den maksimale afstand mellem armeringsstængerne:

$$\text{For hovedarmering} \quad s \leq \begin{cases} 1,5h \\ 350\text{mm} \end{cases} \quad (6.3-4)$$

$$\text{For fordelingsarmering} \quad s \leq \begin{cases} 2,5h \\ 400\text{mm} \end{cases} \quad (6.3-5)$$

hvor  $h$  = pladetykkelsen.

I ribbedæk og større huldæk skal armeringen i ribberne udformes og beregnes som for bjælker, både hvad angår længdearmering og bøjlearmering mv.

Ved dobbeltspændte plader regnes normalt med samme værdi for den effektive højde  $d$  ved bæreevnebestemmelsen i de 2 retninger, idet  $d$ -værdien regnes lig afstanden fra pladetværsnittets trykkede kant til fladen gennem de 2 nets berøringspunkter.

### *Minimumsarmering*

Vedrørende minimumsarmering gælder generelt de samme regler som for bjælker med hensyn til længdearmering, se afsnit 6.2.2.1.

I Danmark stilles ikke krav om minimumsarmering i forbindelse med forskydning i plader. Normalt er pladetykkelsen valgt så stor, at kravet i DS 411 (6.2.2.1) til ikke-forskydningsarmerede plader er overholdt:

$$\tau_{Sd} \leq \begin{cases} \beta \tau_{0d} \\ \frac{1}{2} v_v f_{cd} \end{cases} \quad (6.3-6)$$

hvor faktorerne  $\beta$ ,  $\tau_{0d}$  og  $v_v$  er beskrevet i afsnit 4.2.4.

### *Bøjningsarmering*

Bøjningsarmering placeres efter momentfordelingen i pladen. Lige som for bjælker kan armeringsdækningskurven optegnes, således at denne kan dække indhylningslinien svarende til den forskudte momentkurve, se afsnit 4.7.

Opbukket armering ved understøtning, er som for bjælker efterhånden en sjældenhed. I dag anvendes næsten udelukkende lige stænger til pladebundet armering, eller præfabrikeret netarmering.

Til bestemmelse af oversidearmeringens udstrækning kan anvendes de i DS 411 tilnærmede regler. Her skal udstrækningen fra understøtningens kant være 1/5 og 1/7 af den korte spændvidde, for henholdsvis mellemunderstøtninger og endeunderstøtninger. Forudsætningen for anvendelse af denne simple regel er, at oversidearmeringen højst må bidrage med en indspændingsgrad svarende til kravene i DS 411 ( 6.1.3.3 ):

$$i \leq \begin{cases} 0,5 \\ 0,64 \\ 0,36 + \frac{q_d}{g_d} \end{cases} \quad (6.3-7)$$

hvor  $g_d$  = ensfordelt bunden regningsmæssig last og  $q_d$  = ensfordelt fri regningsmæssig last.

Ved andre indspændingsforhold og meget forskellige spændvidder, skal armeringsinddækningskurverne bestemmes således at disse kan dække de mulige momentkurver fra henholdsvis bunden og fri last, se afsnit 4.7.

### *Armeringsarrangement ved vederlag og pladehjørner*

Armeringen over vederlaget skal forankres for trækket umiddelbart over understøtningsforkanten, i lighed med bjælker. Kraften er et bidrag fra skrårevneeffekten. Moment om trykzonens tyngdepunkt giver

$$N_s = R \cot \theta \quad (6.3-8)$$

idet der ses bort fra vederlagets bredde.

R er pladens reaktion og  $\cot \theta$  er hældningen på den skønnede revnedannelse fra understøtningens forkant, se figur 6.3-6.

Sammenlignes med kravene til forankring af bjælkearmering ses, at kravet til forankring af pladearmering er dobbelt så stort. Dette skyldes, at plader normalt ikke er forskydningsarmerede.

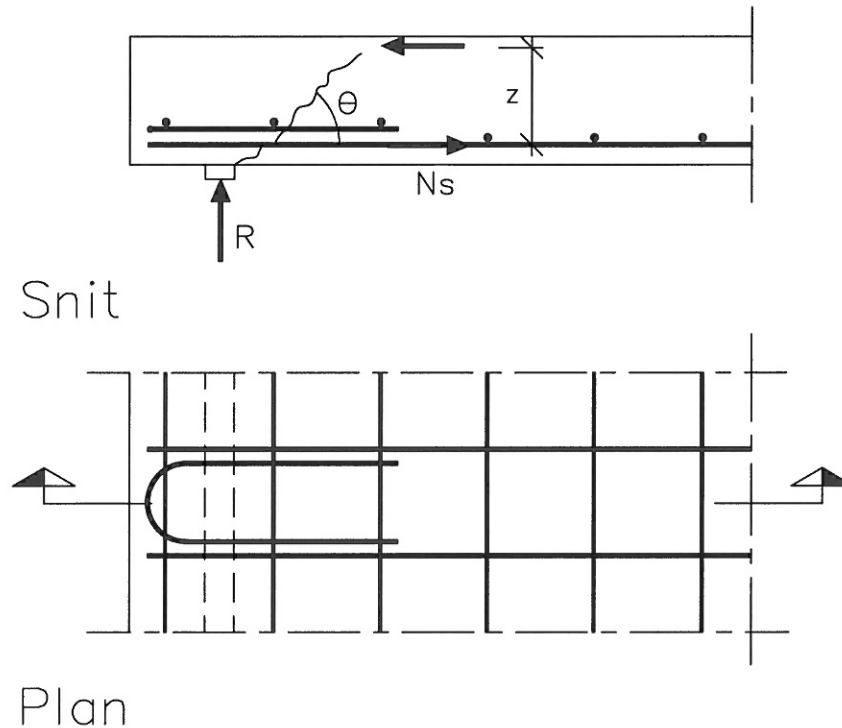
I [3] foreslår Fritz Leonhardt  $\cot \theta = 1,5$  - svarende til  $\theta = 34^\circ$ .

Kraften bliver således

$$N_s = 1,5 R \quad (6.3-9)$$

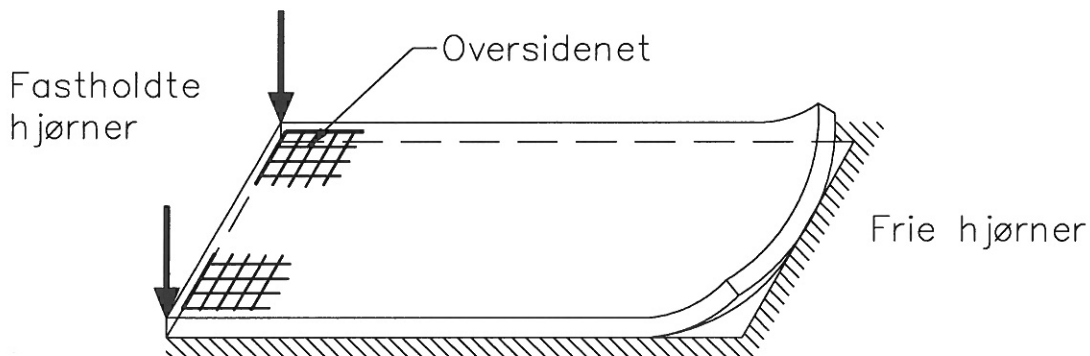
Forankringslængden kan som ved bjælker nedsættes i forhold til den aktuelle armeringspænding umiddelbart over vederlaget.

Er der ikke plads til denne forankringslængde over vederlaget, skal armeringen forankres på anden vis, f.eks. med u-bøjler eller lign. Se figur 6.3-6.



Figur 6.3-6 Forankringkraft  $N_s$  og eksempel på forankring med u-bøjler.

Pladehjørner i dobbeltspændte plader, som er simpelt understøttede og fastholdt af bjælker, søjler eller vægge, skal forsynes med en oversidearmring, der svarer til mindst halvdelen af armeringen i undersiden. Denne armering skal hindre utilsigtede revner i pladens overside. Udstrækningen skal for retvinklede hjørner, være mindst  $1/7$  af den korte spændvidde. Se afsnit 4.8 vedr. negative momenter.



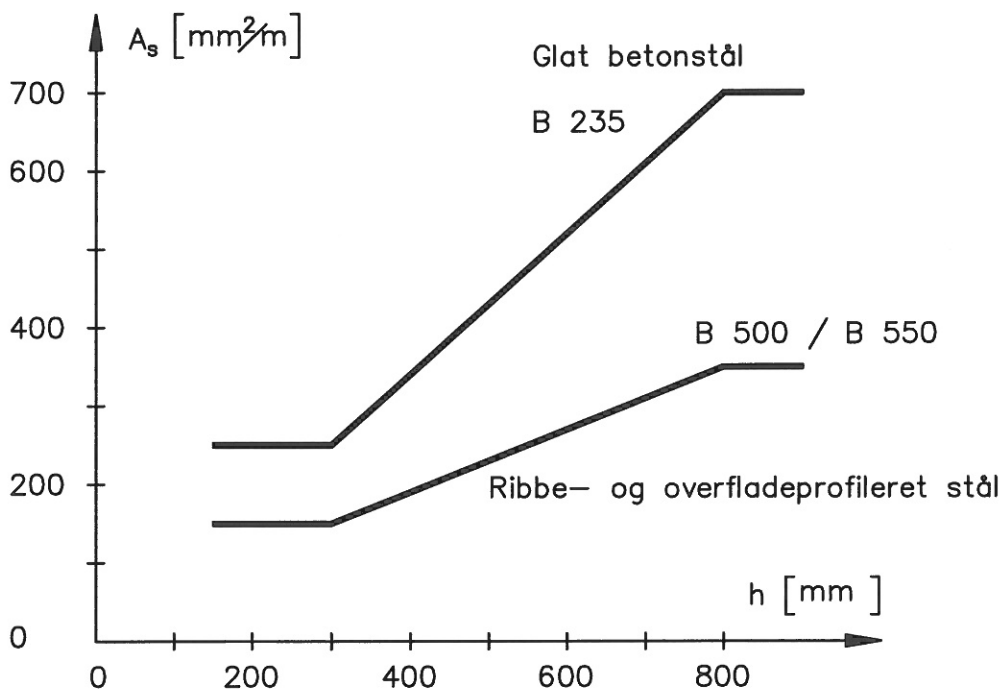
Figur 6.3-7 Dobbeltspændt plade.

I EC2 angiver følgende for armering ved vederlag:

- Mindst halvdelen af den nødvendige armering i pladefeltet, bør fortsætte til understøtningen og forankres.
- Hvor der kan opstå delvis indspænding ved en simpel understøbning ( dvs. pladen ikke kan dreje frit i vederlaget ), og hvor det ikke er medtaget i beregningen, bør oversidearmeringen kunne optage et moment på  $1/4$  af det maksimale moment i det tilstødende pladefelt. Udstrækningen fra understøtningens kant skal være  $1/5$  · længden af det tilstødende pladefelt. ( I DS 411 =  $1/7$ , se foregående afsnit ).

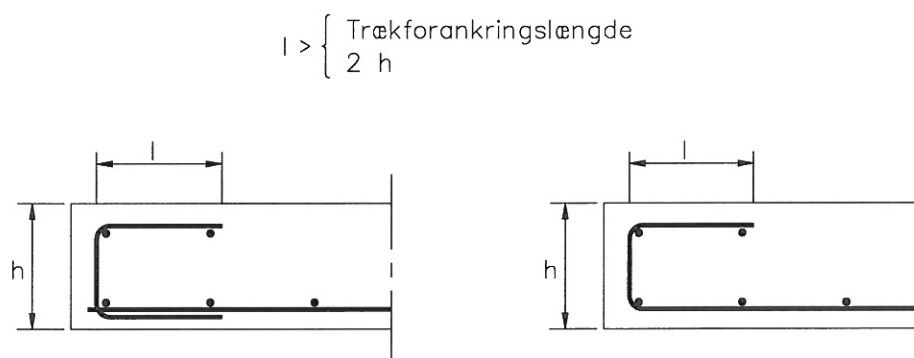
### Armeringsarrangement ved frie pladerande

I pladens frie rande skal der placeres en vridningsarmering bestående af u-bøjler og længdearmering. Hvis der ikke udføres en nærmere dimensionering, kan randarmeringsarealet  $A_s$  for henholdsvis bøjler (1-snit) og længdearmering (4 stk.) bestemmes af figur 6.3-8.



Figur 6.3-8 Randarmering langs frie pladekanter.

Der skal placeres armering langs pladens frie kant, denne placeres i bøjlers hjørner. Pladens armering kan virke som randarmering, såfremt denne bukes rundt, som vist på figur 6.3-9.



Figur 6.3-9 Anordning af randarmering ved frie pladekanter.

Kan der optræde større enkeltkræfter langs en fri pladerand, skal der dimensioneres en særskilt oversidearmering langs med randen, se kap. 4.8.

### 6.3.2.2 Forskydningsarmering i plader

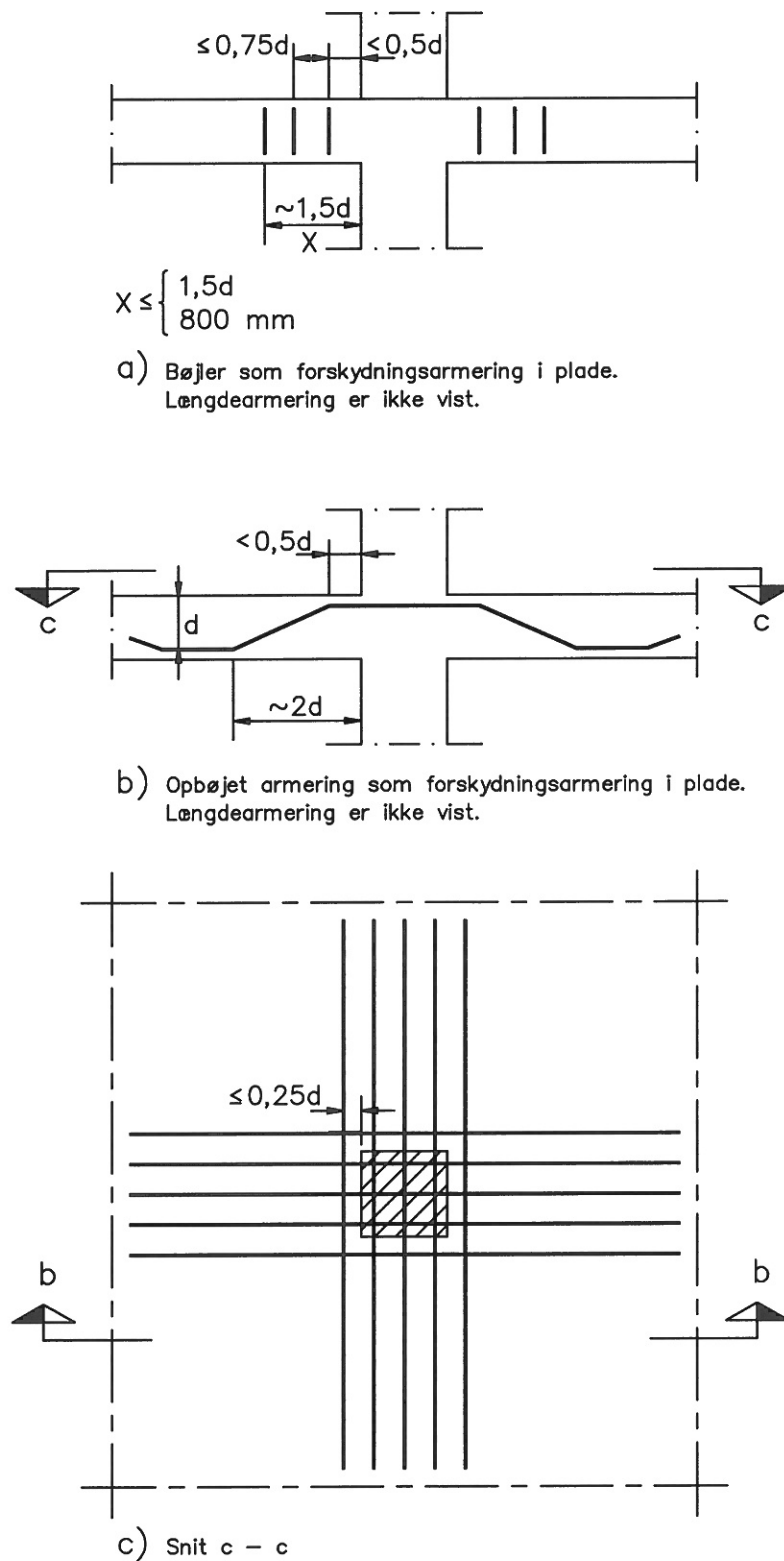
Ofte er pladetykkelsen så stor, eller er valgt så stor, at forskydningsarmering kan undværes. Pladen bærer således alene ved buevirkning.

Viser forskydningsundersøgelsen at en forskydningsarmering er påkrævet, kan denne udføres som opbøjede stænger, eller med placering af bøjler langs vederlaget.

En anden metode er at placere bjælkearmering bestående af længdearmering og bøjler med jævne mellemrum vinkelret på vederlaget.

Ved store enkeltkræfter og ved søjlevederlag kan der være store forskydningskræfter (fare for gennemlokning). I sådanne tilfælde skal der placeres en forskydningsarmering.

I EC2 er anvist nogle krav til placering af armeringsarrangementer for henholdsvis bøjler og opbøjede stænger. Se figur 6.3-10.



Figur 6.3-10 Forskydningsarmering tæt ved en søjle.

**Litteraturliste og supplerende litteratur:**

- [1] M.P. Nielsen: Beton 1, del 3, Bøjning med forskydning - Toaksede spændingstilstande - Søjler og bjælker - Konstruktive regler - Resumésamling, DTU, Lyngby 1993.
- [2] Anker Stæhr-Jørgensen: Konstruktionslære, Betonkonstruktioner, DIAB, Lyngby 1985-1994.
- [3] Fritz Leonhardt: Vorlesungen Über Massivbau, Springer Verlag, del 1-6, 1972-1980.
- [4] Knud Christiansen: Armerede Betonbjælker, DIAB, 3. udgave 1993.
- [5] Knud Christiansen: Armerede Betonplader, DIAB, 2. udgave 1992.
- [6] Teknisk Ståbi 17. udgave, 1995.
- [7] Entreprenørforeningen: Armering, 2. udgave 1996.
- [8] P. Hauberg Hansen: Jernbeton, Haslev Teknikum, 1988.
- [9] Dansk Standard DS 411, 4. udgave, 1999.
- [10] DS/ENV 1992-1-1, EuroCode No. 2: Betonkonstruktioner, Del 1-1: Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner, 2. udgave, marts 1993.
- [11] DS/ENV 1992-1-1 NAD, Dansk supplement til Eurocode No. 2: Betonkonstruktioner, Del 1-1: Generelle regler samt regler for bygningskonstruktioner
- [12] DS/ENV 206, Beton Egenskaber, produktion, udførelse, kontrol og godkendelseskriterier, 1. udgave april 1991.

# Stikordsregister

## A

Adskillelsesbrud 2-10, 2-13, 1-16  
Adskillelsesmodstand 2-12  
Afkortet armering 4.2-17, 4.7-2, **6-13**  
Afskalningsbrud 6-15  
Alfa ( $\alpha$ ) 4.4-7, 4.4-10, 5-2  
alfa-rho ( $\alpha\rho$ -metoden) 5-27  
Anvendelsesgrænsetilstand 3-5, 3-10, 3-11, **5-1**  
Armering **2-33**, 6-8  
  arbejdslinie **2-38**, 4.1-7  
  brudtøjning 3-39  
  bundtet armering 6-9, 6-11  
  bøjeprove 2-37  
  dimensioner 2-44  
  duktilitet 2-37  
  duktilitetsklasse 2-37  
  elasticitetsmodul 2-33, **2-37**  
  flydegrænse 2-39  
  forankring 6-13  
  forankringsevne 2-38  
  forankringsfaktor 2-38  
  forkammet armering 4.6-3, 4.6-3  
  handelsformer 2-43  
  karakteristisk arbejdslinie 2-39, 2-41  
  klassifikation 2-43, 2-44  
  kolddeformation 2-36  
  metervægt 2-38  
  montage 6-9  
  mærkning 2-43  
  net 6-22, 6-23  
  placering 6-9, 6-10  
  proportionalitetsgrænse 2-41  
  regningsmæssig arbejdslinie 3-14  
  rustfri 2-44  
  sejhed 2-36  
  sekundær armering 6-9  
  temperaturafhængighed 2-41  
  trækarbejdslinie 2-37, 2-39  
  trækflydespænding 2-37  
  trækstyrke 2-36  
  udmattelsesprøvning 2-37, 2-38  
  varmebehandling 2-36  
  varmvalset 2-43  
  ældning 2-38

Armeringsareal  
  bestemmelse af størrelsesorden 4.1-16  
Armeringsdækningskurve 6-23  
Armeringsforhold 4.2-9, 6-12  
Armeringsnet 2-44  
  maskestørrelse 2-44  
Armeringstrækbrud 4.1-6, 4.1-19

## B

Basisvariable 3-6  
Begyndelseselasticitetskoefficient 4.4-3  
Begyndelseshældning 4.4-3  
Beregningsmodeller 3-18  
Bernoullis betingelser 5-3  
Beton 2-1  
  arbejdslinie 2-2, 4.1-7  
  brudbetingelse 2-11, 2-12, 2-14  
  brudtøjning 2-3  
  bøjningstrækstyrke 2-7, 2-8  
  elasticitetskoefficient 2-4  
  gennemsnitsarbejdslinie 2-5  
  hydratisering 2-28  
  karakteristisk arbejdslinie 2-5, 2-9  
  karakteristisk elasticitetsmodul 2-9  
  karakteristisk trykstyrke 2-5  
  karakteristisk trækstyrke 2-8  
  korttidsarbejdslinie 2-9  
  middelværdi af trækstyrke 2-8  
  regningsmæssig arbejdslinie 3-17  
  spaltestyrke 2-7  
  trykarbejdslinie 2-2  
  trykbrudtøjning 4.1-6  
  trækarbejdslinie 2-3, 2-7  
  trækstyrke 2-7  
  varmeudvidelseskoefficient 2-28  
Betonlameller 4.2-13, 4.2-15  
Betonvægge 4.4-43  
Bjælkesøjle 4.4-1, 4.4-26  
Bjælketværsnit 6-4  
Bleeding 2-18  
Boltzmanns superpositionsprincip 2-6  
Brand 2-28  
Brand, lastkombination 3-7, **3-15**  
Brandmodstandsevne 2-31, 3-15  
Bratkøling 2-36

Brudbetingelse 4.1-25  
   bøjning m. normalkraft 4.1-25  
 Brudgrænsetilstand **3-5**, 3-11, 3-13, 3-18  
 Brudkrumning 4.7-9  
 Brudmoment 4.1-1  
   fejlf. v. beregn. af br. m. 4.1-20  
   vilkaarligt tværsnit 4.1-21  
 Brud, sejt, skørt 3-4  
 Brudtilstand  
   normalt armeret brudtilstand 4.1-6  
   balanceret brudtilstand 4.1-6  
   overarmeret brudtilstand 4.1-6  
 Brudtype 3-4  
 Bæreevnereserve 3-4  
 Bundtet armering 6-9, 6-11  
 Bøjler 4.2-3, 4.6-11, 4.6-19, 6-8, 6-18  
   dobbeltbøjle 6-19  
   2- og 4-snitbøjle 6-19  
   U-bøjle 6-15, 6-25, 6-26  
 Bøjleafstand 4.2-14, 4.2-22, 6-19  
 Bøjlearmering 4.2-3, 4.6-11, 4.6-19  
   4.4-20  
 Bøjning m. normalkraft 4.1-25  
 Bøjningsarbejdslinie **4.1-3**, 4.1-5, 4.4-24,  
   5-35  
 Bøjningsbæreevne 4.1-1  
   afkortet armering 4.7-2  
   brudkrumning 4.7-9  
   delvis indspænding 4.1-8, 4.7-8, 4.7-10  
   flydeled 4.7-9  
   flydemomenter 4.7-1  
   flydemomentkurve 4.7-2  
   forskudt momentkurve 4.7-3  
   konstant trykzonebredde 4.1-13  
   momentfordeling 4.7-6  
   momentkapacitet 4.7-1  
   rotationskapacitet 4.7-9  
   vilkaarligt tværsnit 4.1-6, 4.1-21  
 Bøjningstrækstyrke 4.1-3, 4.1-29, 5-14

**C**

Centralt belastede søjler og vægge **4.4-1**  
   bæreevne 4.4-10  
 Coils 2-38  
 Coulombs brudbetingelse 2-12

**D**

Densitet 2-17  
 Derformation 5-32, 6-5, 6-20  
   korttidsdeformation 5-2, 5-33  
   langtidsdeformation 5-2, 5-33  
 Delvis indspænding 4.1-8, 4.7-8, 4.7-10  
 Diagonaltrykmetoden 4.2-1, **4.2-12**  
 Dobbeltspændte plader 6-20  
 Dyvelvirkning 4.2-4  
 Dækklag 6-10

**E**

Effektiv højde 4.1-2  
 Effektivitetsfaktor 4.6-12  
 Eksplosionslast 3-7, 3-15  
 Elasticitetskoefficient  
   armering **2-37**  
   beton **2-4**  
 Energibalancemetode 2-31  
 Engessers 1. søjleteori 4.4-2  
 Enkeltspændte plader 6-20, 6-21  
 Excentrisk belastede søjler **4.4-22**  
 EN 1992-1-1 Eurocode 2 (EC2) 4.2-1

**F**

Farvetoning 2-30  
 Flangebredde 6-6  
 Flerakset spændingstilstand 2-10  
 Flydeled 4.7-9  
 Flydemomenter 4.7-1  
 Flydemomentkurve 4.7-2  
 Flytningsbestemmelse **5-32**  
 Forankring **4.6-1**, 6-3, **6-13**, 6-16, 6-24  
   adhæsion 4.6-3  
   basisforankringslængde 4.6-2, 4.6-5  
   forankring 6-13  
   effektivitetsfaktor 4.6-12  
   endeunderstøtning 4.6-11  
   friktionskoefficient 4.6-3  
   glidningsstyrke 4.6-3  
   kohæsion 4.6-3  
   overlappingsstød 4.6-9  
   spaltekræfter 4.6-4  
   tværarmering 4.6-1, **4.6-4**, 4.6-8  
 Forankringsbrud 4.2-5, 4.2-6, 4.6-4  
 Forankringsfaktor 4.6-5

Forankringslængde 4.6-1, 4.7-3, 6-13, 6-24, 6-25  
 Forankringsstyrke 4.6-3  
 Fordampningshastighed 2-19  
 Fordelingsarmering 6-20, 6-23  
 Forkammet armering 4.6-3, 4.6-5  
 Forskudt momentkurve 4.7-3  
 Forskydning mellem krop og flange 4.2-25  
 Forskydningsarmering 4.2-3, **4.2-12**, 4.2-21, 6-18  
 Forskydningsbæreevne 4.2-1, 4.2-16, **4.2-18**, 6-3, 6-8, **6-11**, **6-18**, 6-27  
 iht. DS 411 og EC 2 4.2-32  
 mellem krop og flange i T-bjælke 4.2-25  
 Forskydningsspændinger 4.2-1  
 formel forskydningsspænding 4.2-6  
 Forskydningsspændvidden 4.2-6  
 Forskydningszonen 4.2-12  
 Friktionshypotese 2-10  
 Friktionskoefficient 2-12  
 Friktionsvinkel 2-12  
 Fri søjlelængde 4.4-3, 4.4-19  
 Friktionskoefficient 4.6-3  
 Fysiske betingelser 5-3

## G

Geometriske armeringsforhold 4.2-9  
 Geometriske betingelser 5-3  
 Geometriske parametre 3-10  
 Glidningsbrud 2-11, 2-12, 2-13, 2-16  
 Glidningsstyrke 4.6-3  
 Grashoffs formel 4.2-1  
 Grænsetilstande 3-5  
 Grænsetilstandsprojektering 3-5

## H

Holdbarhed 3-3  
 Hooks lov 5-3  
 Hovedarmering 6-20, 6-23  
 Hovedspændinger 4.4-2  
 Hovedspændingshypotesen 2-10  
 Huldæk 6-21  
 Hydratisering 2-28  
 Hyppig værdi 3-9

## I

Ikke-forskydningsarm. bjælker 4.2-8  
 Indre friktion 2-10

Indre momentarm **4.1-16**, 4.2-6  
 Inertiradius 4.4-3, 4.4-19  
 Indhylningslinie 6-23  
 Indspændingsgrad 6-24, 6-26  
 Initialexcentricitet 4.4-27

## K

Karakteristisk værdi 3-8  
 Knudepunktsfigur 4.4-19  
 Kohæsion 2-10  
 Kolddeformation 2-36, 2-38  
 Konstitutive betingelser 5-3  
 Kombinationsværdi 3-9  
 Kontrolklasse 3-2  
 Konverteringsfaktor 3-13  
 Kornstørrelse 6-10  
 Korttidspåvirkning 5-1  
 Korttidsnedbøjning 5-33  
 Kritisk normalkraft 4.4-2  
 Krumning 4.1-2, 4.4-23, 5-4, 5-8, 5-34, 5-39  
 Kvasi-permanent værdi 3-9  
 Krybning 2-5, **2-22**, 5-2  
 Krydsribbedæk 6-22

## L

Last 3-6  
 bunden 3-7  
 dynamisk 3-7  
 fri 3-7  
 karakteristisk 3-8  
 karakteristisk værdi 3-8  
 permanent 3-6  
 regningsmæssig 3-11  
 statisk 3-7  
 sædvanlig værdi 3-8  
 variabel **3-6**, 3-8  
 Lastkombination 1 3-12  
 Lastkombination 2 3-13  
 Lastkombination 3 3-14  
 Lastkombinationsfaktor **3-8**, 3-13, 3-14  
 Lasttilfælde, kritisk 3-11  
 Lastvirkning 3-6  
 Lastvirkning, regningsmæssig 3-11  
 Levetid 3-3  
 Lejer 6-1  
 Lejeplader 6-9, 6-15, **6-16**  
 Længdearmering 6-8, **6-9**, 6-15, 6-19

**M**

Massivt dæk 6-21  
 Maskevidde 4.4-44  
 Materialekontrol 3-2  
 Mekanisk armeringsgrad  
 forskydningsarmering 4.2-20  
 længdearmering 4.1-14  
 Metervægt 2-38  
 Mikrørevner 2-5  
 Miljøklasser 3-2, 5-42  
 Minimumsarmering 2-33  
 bøjning 4.1-19, **4.1-29**, 6-11  
 forskydning 4.2-17, 4.2-22, 6-11  
 søjler og vægge 4.4-20, 4.4-43  
 Minimumsarmeringsforhold 4.1-31  
 Minimumstykkelser, plader 6-20  
 Modificeret Coulomb materiale 2-12  
 Modificeret diameter 5-51  
 Modstandsevne 3-6  
 Modstandsmoment  
 Urevnet tværsnit 4.1-30  
 Mohrs brudbetingelse 2-11  
 Mohr's cirkel 4.2-2  
 Momentfordeling 4.7-6  
 Momentkapacitet 4.7-1  
 Momentforøgelsesfaktor 4.4-32, 4.4-34

**N**

Naturlaster 3-6  
 Naviers formel 4.2-1  
 Nedbøjning 4.1-2  
 Nedreværdiløsning 4.2-13  
 Nedstyrtningslast 3-15  
 Net, armerings- 6-22, 6-23  
 Normalarmeret brudtilstand 4.1-6, 4.1-8  
 Nulliniedybde 4.1-2, 4.1-10  
 Nyttelast 3-6

**O**

Overarmeret brudtilstand 4.1-8, 4.1-18  
 Overarmeret tværsnit 4.1-18  
 Overfladeprofileret stål 2-38  
 Overlappingsstød 4.6-9  
 Overslagsberegning **6-5**, 6-6, 6-20

**P**

Partialkoefficient 3-10, 3-12, 3-16  
 Partialkoefficientmetoden 3-11  
 Pladearmering 6-22  
 Plastisk svind 2-18, 2-19  
 Poissons forhold 2-6  
 Påkørsel 3-15

**R**

Randarmring 6-26  
 Regningsmæssig arbejdslinie 3-17  
 Regningsmæssig geom. parameter 3-17  
 Regningsmæssig last 3-17  
 Regningsmæssig materialeparameter 3-16  
 Ren bøjning **4.1-13**  
 Revneafstand 5-14  
 Revneanviser 2-20, 2-35  
 Revnefordeling 5-14  
 Revnemoment 5-11, 5-12  
 Revneparameteren 5-46  
 Revner **5-41**, 6-3, 6-11, **6-18**, 6-25  
 det fine revnesystem 5-47  
 det grove revnesystem 5-47  
 middelrevnevidde 5-45  
 middelrevneafstand 5-45  
 revneviddebest. iht. DS 411 5-47  
 revneviddebest. iht. EC 2 5-50  
 Revnet tværsnit 5-14  
 Revnevidde 2-34  
 Revneviddeformel 5-47  
 Ribbedæk 6-21, 6-23  
 Ribbestål 2-38  
 Rotationskapacitet 4.7-9, 4.7-10

**S**

Sekanthældning 2-4  
 Sekantmodul 2-4  
 Sekundær armering 6-9  
 Sikkerhedsbestemmelser 3-1  
 Sikkerhedsklasser 3-2  
 Sikkerhedsindeksmetoden 3-10  
 Sikkerhedsmetoder 3-10  
 Sikringsrum 3-15  
 Skråjern 6-15  
 Skrårevneeffekten **4.2-17**, 4.7-4  
 Slutkrybetallet 2-27  
 Slutsvindet **2-20**, 2-21  
 Spaltekræfter 4.6-4

- Spændingsbestemmelse **5-2**  
 alfa-rho ( $\alpha\rho$ -metoden) 5-27  
 urevnet tværsnit 5-3  
 revnet tværsnit 5-14, 5-24, 5-27  
 v. anv. af transformeret tværsnit 5-3  
 v. anv. af ækvivalensbetingelser 5-24
- Standardbrandkurve 2-31
- Statistiske betingelser 5-3
- Støbeskel 6-1
- Stødlængde 4.6-1
- Svind 2-18
- Svindarmering 2-20
- Svindtøjning 2-20, **2-21**
- Sætning 2-18
- Søjler **4.4-1**  
 alternativ beregning 4.4-17  
 arbejdslinier for beton 4.4-8  
 armerede søjler **4.4-7**  
 beregningsmetode I og Ia 4.4-28, 4.4-32  
 beregningsmetode II 4.4-34  
 beregningsmetode III 4.4-35  
 centralt belastede 4.4-1  
 excentricitet 4.4-19  
 excentrisk belastede 4.4-22  
 fri søjlelængde 4.4-2, 4.4-19  
 kritisk betonspænding 4.4-3  
 kritisk normalkraft 4.4-2  
 metode B 4.4-28  
 slankhedsforhold 4.4-3, 4.4-19  
 uarmerede centralt belastede 4.4-2
- T**  
 Tangenthældning 4.4-3, 4.4-5  
 Temperaturpåvirkning 2-28  
 Tillegering 2-36  
 Tillægsmoment 4.4-22  
 Tolerancetillæg 6-10  
 Transformationsformler 4.2-2  
 Transformeret tværsnit **5-3**  
 Tværskningskonstanter, urev. tværsnit 5-9  
 Tværskningskonstanter, rev. tværsnit 5-16  
 Trykarmering 4.1-9, 4.1-26  
 Trykbue 6-2, 6-27  
 Tryk-/trækstringer 6-1, 6-2  
 Trækbrudtøjning 2-39  
 Trækforskydningsbrud 4.2-5  
 Trækkraft i armering 4.2-18  
 Tværarmering 4.6-1, **4.6-4**, 4.6-8, 6-22
- Tværsnit  
 balanceret 4.1-13  
 dimensioner 6-5, 6-20  
 indre momentarm **4.1-16**, 4.2-6  
 normaltarmeret 4.1-13  
 T-tværsnit 4.1-23
- Tøjning  
 armering 4.1-2  
 beton 4.1-2
- Tøjningsfordeling 4.1-2, 4.1-5  
 Tøjningssvækkelse 2-3
- U**  
 U-bøjle **6-14**, 6-25  
 Udførelseskontrol 3-2  
 Udtørringssvind 2-18, 2-19, 2-20  
 Ulykkeslast 3-7, 3-14  
 Underarmeret konstruktion 4.1-30
- V**  
 Vandret masselast 3-7  
 Varmebehandling 2-36  
 Varmeudvidelseskoefficient 2-28  
 Vederlag 6-1, 6-3, **6-15**, 6-16, 6-24, 6-27  
 Vianellos metode 4.4-28, 4.4-29  
 Volumentøjning 2-6  
 Vridningsarmering 6-19
- Æ**  
 Ækvivalens 4.1-9, 5-5  
 Ækvivalensbetingelser 4.1-10, 5-24  
 Ækvivalent radius 2-20

