Spil, læring og matematikundervisning – et scenariedidaktisk perspektiv

Jensen, Erik Ottar

DOI (link to publication from Publisher):
10.54337/aau644639840

Publication date:
2023

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

SPIL, LÆRING OG MATEMATIKUNDERVISNING

– ET SCENARIEDIDAKTISK PERSPEKTIV

AF
ERIK OTTAR JENSEN

PH.D. AFHANDLING 2023

AALBORG UNIVERSITET

Spil, læring og matematikundervisning
– et scenariedidaktisk perspektiv

Af Erik Ottar Jensen

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

The Doctoral School of Social Sciences and Humanities

Aalborg University

Ph.d. indleveret:	September 2023
Ph.d. vejleder:	Professor Thorkild Hanghøj Aalborg Universitet, Danmark
Ph.d. bi-vejledere:	Docent Charlotte Krog Skott Professionshøjskolen Absalon, Danmark
	Professor Morten Misfeldt Københavns Universitet, Danmark
Ph.d. bedømmelsesudvalg:	Lektor Jacob Gorm Davidsen (formand) Aalborg Universitet, Danmark
	Professor Hannah Palmér Linnæus University, Sverige
	Lektor Fredrik Rusk Åbo Akademi, Finland
Ph.d. serie:	Det Humanistiske og Samfundsvidenskabelige Fakultet, Aalborg Universitet
Institut:	Institut for Kommunikation og Psykologi

ISSN (online): 2794-2694
ISBN (online): 978-87-7573-778-9

Udgivet af:
Aalborg Universitetsforlag
Kroghstræde 3
9220 Aalborg Ø
Tlf. 9940 7140
aauf@forlag.aau.dk
forlag.aau.dk

Trykt i Danmark af Stibo Complete, 2023

Indhold

English abstract

The purpose of this PhD dissertation is to generate new knowledge about games and mathematics learning by examining students' participation in games in primary school mathematics education. The dissertation is based on the hypothesis that students' gaming experiences from their leisure time influence the potential for learning with games in mathematics education, but there is insufficient knowledge on how this occurs.

Research in games and mathematics learning is conducted through different interests: research in *Digital Game-Based Learning (DGBL) focusing on mathematics learning*, *mathematics didactic research in games*, and *research in informal mathematics learning through games*. There are limited intersections within research related to these interests. The research also rarely incorporates students' gaming experiences in understanding how they engage in mathematics education through games. Consequently, research overlooks the opportunities and limitations of connecting students' everyday gaming experiences with the content of academic instruction.

In the dissertation, I inquire into how mathematics learning through games can be understood in relation to connections between students' gaming experiences and mathematical knowledge in mathematics education. The dissertation addresses this through five research questions distributed across two published journal articles, two published book chapters, and a thesis linking text.

Existing research in the field is mapped through a research overview in the thesis linking text (chapter 2), which identifies and constructs the research field of 'games and mathematics learning' through three central research interests. This is supplemented by a qualitative systematic review of how digital games in mathematics education can support students' mathematical reasoning (**Article 1**).

The empirical data for the dissertation was collected in the context of two research projects: the "Sæt skolen i spil" project (SIS) and the "Spilbaseret læring i det 21. århundrede" project (GBL21). Through this context, I employed a pragmatic approach to Design-Based Research (DBR) to participate in two interventions in mathematics education in different 5th-grade classes. I followed a course with the board game "*Hungry Higgs*" (GBL21) and designed an intervention in collaboration with teachers using the digital game "*Minecraft*" (SIS). This resulted in two empirical studies that use interview data with students to investigate various aspects of how students experience participation in the classroom when games are used in mathematics education. The studies examine the tension between a mathematical understanding of games and students' everyday understanding of games. They demonstrate how these two perceptions can create both discrepancies (**Article 2**) and opportunities for new forms of knowledge and participation in mathematics education (**Article 3**). This led to a book chapter containing three didactic analyses of digital games for use in mathematics education (**Article 4**).

In the thesis linking text, I frame the articles in the dissertation within a scenario-based education perspective, assuming that games in education should be understood through both academic domains and everyday domains. This is supported by John Dewey's learning theoretical perspective, emphasizing the meaningful connection of students' everyday experiences with academic insights, and Erving Goffman's understanding of games, distinguishing games into systemic and social aspects. Through this, I show how the scenario-based education and domain perspective contain other potentials and challenges than those dominating the research field, such as aiming to use games as tools to analyse winning strategies or engage students in training exercises. With concrete examples of research-based instructional design, I demonstrate how teaching based on linking games and mathematical challenges can be designed.

The dissertation contributes new knowledge about how games in mathematics education should not only be understood in terms of games as systems with mathematical potential, but also as an inherent social phenomenon. This includes how educational design can start by connecting students' gaming experiences with academic content in mathematics education, which can lead to students perceiving mathematics as relevant in relation to their gaming experiences. It also explores how students, from a social perspective, may have good reasons for evading academic processes when working with games in mathematics education. In the thesis linking text, I discuss future implications for learning design and research that aims to design mathematics education through games with students' social game participation in mind. Investigating the social aspects of students' game participation in mathematics education is a niche within existing research, and there is a lack of solid terminology, knowledge, as well as practical teaching tools and examples before mathematics education with this focus, can be widely implemented in schools.

A key point in the dissertation is that students' experience of games holds potential for them to perceive mathematics as relevant. However, this requires a meaningful connection between games and mathematics. The use of games, as understood in this dissertation, is therefore not about more effective learning but about learning specific mathematical ways of thinking and understanding how mathematics can be experienced as a subject with relevance beyond the classroom.

If the goal is to make mathematics education more meaningful through games, future research in, and design of, mathematics education with games should explicitly consider students' potential understandings of games from their everyday lives, as these contain both opportunities and obstacles for mathematics education.

Dansk abstract
Formålet med dette ph.d.-projekt er at skabe ny viden om spil og matematiklæring ved at undersøge elevers deltagelse i spil i matematikundervisningen i grundskolen. Afhandlingen tager afsæt i hypotesen om, at elevers spilerfaringer fra fritiden påvirker muligheden for at lære gennem brug af spil i matematikundervisningen, men at der ikke er tilstrækkelig viden om hvordan.

Der forskes i spil og matematiklæring med forskellige interesser: *forskning i Digital Game-Based Learning* (*DGBL) med fokus på matematiklæring, matematikdidaktisk forskning i spil* og *forskning i uformel matematiklæring i spil.* Forskning med disse interesser har få berøringsflader og inddrager sjældent elevernes spilerfaringer i forhold til at forstå, hvordan de deltager i matematikundervisning med spil. Dermed overser forskningen mulighederne og begrænsningerne ved at forbinde elevers hverdagserfaringer med spil med indholdet af den faglige undervisning.

I afhandlingen spørger jeg, hvordan matematiklæring med spil kan forstås som forbindelser mellem elevers spilerfaringer og faglig viden i matematikundervisningen. Afhandlingen adresserer dette gennem fem forskningsspørgsmål fordelt på to publicerede tidsskriftsartikler, to publicerede fagbogskapitler samt en kappetekst.

Den eksisterende forskning i feltet kortlægges gennem en forskningsoversigt i kappen, der identificerer og konstruerer afhandlingens forskningsfelt 'spil og matematiklæring' gennem tre centrale forskningsinteresser. Dette suppleres af et kvalitativt systematisk review af, hvordan digitale spil i matematikundervisningen kan understøtte matematisk ræsonnement hos eleverne (**Artikel 1**).

Afhandlingens empiriske data er indsamlet i forbindelse med to forskningsprojekter: *Sæt skolen i spil*-projektet (SIS-projektet) og *Spilbaseret læring i det 21.ende århundrede*-projektet (GBL21). Gennem denne kontekst anvender jeg en pragmatisk tilgang til Design-Based Research (DBR) til at deltage i to interventioner i matematikundervisningen i forskellige 5.-klasser. Jeg har fulgt et forløb med det analoge spil *Hungry Higgs* (GBL21) og designet en intervention i samarbejde med lærere med det digitale spil *Minecraft* (SIS). Dette har ført til to empiriske studier, der bruger interviewdata med elever til at undersøge forskellige aspekter af, hvordan elever oplever at deltage i klasserummet, når spil bruges i matematikundervisningen. Studierne undersøger spændet mellem en matematikfaglig forståelse af spil og elevernes hverdagsforståelse af spil. De viser, hvordan de to opfattelser kan skabe både uoverensstemmelser (**Artikel 2**) og muligheder for nye former for viden og deltagelse i matematikundervisningen (**Artikel 3**). Dernæst har det ført til et fagbogskapitel, der indeholder tre fagdidaktiske analyser af digitale spil til brug i matematikundervisningen (**Artikel 4**).

I kappen anvender jeg et scenariedidaktisk perspektiv, der antager, at spil i undervisningen skal forstås gennem både faglige domæner og hverdagsdomæner til at

rammesætte afhandlingens artikler. Dette understøttes af John Deweys læringsteoretiske perspektiv, der vægter det meningsfulde i at forbinde elevers hverdagserfaringer med faglige indsigter, samt Erving Goffmans spilforståelse, der adskiller spil i systemiske og sociale aspekter. Gennem dette viser jeg, hvordan det scenariedidaktiske domæneperspektiv rummer andre potentialer og udfordringer end dem, der dominerer i forskningsfeltet, fx at sigte mod at bruge spil som redskaber til at analysere vinderstrategier eller til at engagere elever i træningsopgaver. Med konkrete eksempler på forskningsbaseret undervisningsdesign viser jeg, hvordan undervisning med udgangspunkt i at koble spil- og matematikfaglige udfordringer kan designes.

Afhandlingen bidrager med ny viden om, hvordan spil i matematikundervisningen ikke blot bør forstås som spil som systemer med matematiske potentialer, men også som et iboende socialt fænomen. Dette handler om hvordan undervisningen kan tage udgangspunkt i at forbinde elevernes spilerfaringer med fagligt indhold i matematikundervisningen, hvilket kan føre til, at elever oplever matematik som relevant i forhold til deres spilerfaringer. Det handler også om, hvordan elever, fra et socialt perspektiv, kan have gode grunde til at undgå at deltage i faglige processer, når de arbejder med spil i matematikundervisningen. I kappen diskuterer jeg fremtidige implikationer for undervisningsdesign og forskning, der sigter mod at designe matematikundervisning med spil, med øje for fokus på elevernes sociale spildeltagelse. Undersøgelse af de sociale aspekter af elevers spildeltagelse i matematikundervisningen er en niche inden for den eksisterende forskning, og der mangler solide fagbegreber, viden samt praktiske undervisningsredskaber og -eksempler, før matematikundervisning med dette fokus kan praktiseres bredt i skolen.

En hovedpointe i afhandlingen er, at elevers oplevelse af spil rummer potentialer for, at de oplever matematikfaget som relevant for dem. Det kræver dog en meningsfuld kobling af spil og matematikfaget. Brugen af spil, som jeg forstår det i denne afhandling, handler derfor ikke om mere effektiv læring, men om læring af specifikke matematiske måder at tænke på og at forstå, hvordan matematik kan opleves som et fag, der har relevans udover matematikundervisningen.

Hvis målet er at gøre matematikundervisningen mere meningsfuld gennem spil, bør fremtidig forskning i og design af matematikundervisning med spil dog forholde sig langt mere eksplicit til elevers potentielle forståelser af spil fra hverdagen, da disse både rummer potentialer og forhindringer for matematikundervisningen.

Forord

Det er en udbredt forestilling, at der er en tæt sammenhæng mellem spil og matematiklæring: Når der *er* matematik i et spil, så må spillerne jo automatisk blive bedre til matematik, når de spiller. Eller når et spil er sjovt, så må matematikspil også være sjove. Og hvis eleverne bliver motiverede af spil i fritiden, så må de også blive motiverede af matematikundervisning, der gør brug af spil. Sådanne forestillinger ligger til grund for et væld af både analoge og digitale spil til brug i matematikundervisningen. Allerede for 100 år siden skrev Margaret Drummond (1922) dog, at matematikundervisningen vil fejle, hvis et spil bliver en for transparent ramme for den. Spillernes interesse må være i spillet, ikke direkte i det matematiske element. Ligeledes pointerer Collier (1914), at børn tilpasser deres lege/spil til det miljø, de er i, og at man ikke bør bruge et bestemt spil i en klasse, medmindre det på en eller anden måde er forbundet med klassens miljø. Allerede tidligt i det 20. århundrede fandtes idéer om, at spillet betyder noget bestemt for spilleren, og at der er forskellige kontekster omkring spil og matematiklæring, ligesom dette kan påvirke elevernes ønskværdige kognitive processer. Disse ældre referencer tydeliggør, at når spil introduceres i et matematikundervisningsmiljø, opstår der ofte noget, der ikke har med matematiklæring at gøre, fx ved at elever forkaster spillene eller bruger dem på uhensigtsmæssige måder.

I forlængelse af dette undersøger denne afhandling, hvad det vil sige at deltage i matematikundervisning med spil. Som eksempler fra praksis præsenterer jeg to elevudsagn fra pilotundersøgelsen af et undervisningsforløb til GBL21 (jf. afsnit 3.4), da jeg i starten af 2019 besøgte en 5.-klasse på en skole i Københavnsområdet. De viser på forskellige måder, hvad der kan være på færde for eleverne, når spil bruges i matematikundervisningen. Det første er fra en gruppeøvelse i klassen, hvor de tre elever Anna, Alice og Sofie finder idéer til at redesigne brætspillet *Hungry Higgs* (jf. **Artikel 2**) – et spil, jeg karakteriserer som et underholdningsspil med strategi og sandsynlighed (jf. afsnit 2.1). Øvelsen sker som led i en undervisning, der sigter mod at understøtte elevernes udvikling af matematisk ræsonnement gennem redesign af spil. Idégenereringen tager udgangspunkt i elevernes hverdagsoplevelser med spil:

> **Anna:** *Jeg spillede verdens sjoveste spil i søndags.*
> **Alice**: *Hvad var det, der gjorde det sjovt? Så kan vi måske få det ind i Hungry Higgs.*
> **Anna**: *At det ikke helt sådan handlede om at vinde, men at man lærte helt vildt meget om andre.... Virkelig meget.*

I Annas verden er det sjoveste spil et spil, hvor det ikke handler om at vinde, men om at lære hinanden at kende. Dette var ikke foreneligt med undervisningsforløbet, der var rettet mod at lave regler om i spillet *Hungry Higgs*. Det er et abstrakt spil med mange forskellige matematiske elementer og en vinder, men intet, der relaterer sig til at lære de andre spillere at kende. Det, der bliver tydeligt her, er, at der er vidt forskellige former for spil og mål med at spille. Og at de spil, eleverne spiller i fritiden, kan være meget forskellige fra de spil, der bruges i matematikundervisningen. Desuden kan elever opfatte værdien af spil uhyre forskelligt, alt efter om det er fritidsspil eller et redskab, der introduceres i matematikundervisningen.

Det andet udsagn er fra et interview med de samme tre elever, efter at forløbet var afsluttet. Her beskriver eleverne, hvad de oplever, de er blevet bedre til gennem undervisningsforløbet. Anna svarer 'at se matematikken i spillet', og Sofie følger op:

> **Sofie**: *Ja altså, jeg har i hvert fald lagt mærke til mere matematik, efter at vi begyndte at arbejde med Hungry Higgs. Altså, nærmest alle de ting, du laver, har jo faktisk noget med matematik at gøre. Når du laver mad, og da jeg lavede den her mariehøne, der skulle man jo finde ud af, hvor stor den skulle være og sådan noget.*
> **Interviewer**: *Det har jo ikke noget med spil at gøre. Det er jo mariehøner og lave mad. Hvordan kan det være?*
> **Sofie**: *Jeg tror, det er, fordi hvis jeg bare spillede Hungry Higgs normalt, så ville jeg jo ikke lægge mærke til alt det der. Men det skal man faktisk, når man skal lave reglerne om. Så bliver man jo også nødt til at finde ud af, hvad reglerne gør godt, og hvad de gør dårligt. Og det har også noget med matematik at gøre.*

Dette peger på to ting. Når eleverne spiller 'normalt', så lægger de ikke mærke til de matematiske elementer i spillet – hvilket kan hænge sammen med, at de spil, de spiller i fritiden, er anderledes, og at de deltager med andre mål end i matematikundervisningen. Dernæst, at spils berettigelse i matematikundervisningen ikke kun er i forhold til at ræsonnere om systemer, men også i forhold til at udvikle et perspektiv på verden, hvor man lægger mærke til matematik.

Disse indsigter står centralt i afhandlingen som et afsæt for at forstå spil og matematiklæring i forhold til elevernes hverdagsoplevelser med spil. De to spil, jeg undersøger i ph.d.-projektets empiriske undersøgelser, *Hungry Higgs* og *Minecraft*, er begge underholdningsspil, der er til at blive spillet i fritiden og ikke designet til matematikundervisning. De har således betydning uden for matematikundervisningen. De kan spilles, uden at der tænkes én eneste bevidst matematisk tanke, men spillene kan også analyseres matematisk uden tanke på, hvordan de spilles.

Der er en række personer, jeg gerne vil takke i forbindelse med tilblivelsen af afhandlingen. Først og fremmest tak til min hustru, Mette, der har støttet mig og givet plads til dette projekt i vores liv; det har været en uundværlig hjælp. Jeg vil også takke vores børn, Katrine og Laura, der har måttet finde sig i mit fysiske og til tider mentale fravær. Dernæst vil jeg takke mine tre vejledere Thorkild Hanghøj, Charlotte Krog Skott og Morten Misfeldt for god vejledning, råd, konstruktiv kritik og al den hjælp, de har givet mig undervejs i forløbet. Udover disse vil jeg takke Tomas Højgaard og Uffe Thomas Jankvist, der i løbet af mit ophold på DPU, Aarhus Universitet har vist interesse for mit projekt og hjulpet mig i slutfasen. Derudover vil jeg takke mine kollegaer fra ILD Lab på Aalborg Universitet, matematikfaggruppen på KP og gruppen af ph.d.-studerende fra fagdidaktik på DPU for gode diskussioner og diverse former for hjælp undervejs. En stor tak skal gå til de lærere og elever, der har deltaget i mit projekt og inviteret mig indenfor i deres undervisning. Uden jer var dette projekt aldrig blevet til noget. Slutteligt skal en stor tak gå til alle de samarbejdspartnere, jeg har mødt i løbet af de sidste tre år i forbindelse med undervisningen og artikelskrivningen.

Publikationsliste

De fire publikationer herunder er afhandlingens direkte bidrag. I kappen vil jer referere til disse som **Artikel 1**, **2, 3** og **4**.

- **Artikel 1:** Jensen, E. O. & Skott, C. K. (2022). How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 8 (s.183-212)
- **Artikel 2:** Jensen, E. O. (2022). Brætspil i matematikundervisningen. I S. S. Fougt, J. Bundsgaard, T. Hanghøj, & M. Misfeldt (Eds.), *Håndbog i Scenariedidaktik*. Aarhus Universitetsforlag.
- **Artikel 3:** Jensen, E. O. & Hanghøj, T. (2020). What's the math in Minecraft? A design-based study of students' perspectives and mathematical experiences across game and school domains. *The Electronic Journal of e-Learning* (EJEL), 18(3), 261-274.
- **Artikel 4:** Jensen, E. O., Hanghøj, T., & Kjellow, T. N. (2021). Computerspil i matematik. I T. Hanghøj, T. N. Kjellow, S. Melgaard, L. D. Møller, B. Henningsen, & E. O. Jensen (Eds.), *Sæt skolen i spil: brug af computerspil og gamification i undervisningen* (s. 179-230). Aalborg Universitetsforlag.

Relaterede publikationer

I løbet af arbejdet med afhandlingen har jeg udgivet yderligere artikler, der relaterer sig til afhandlingens interesseområde, men ikke direkte er en del af afhandlingens bidrag. De listes her:

- Buhl, M., Dirckinck-Holmfeld, L., & Jensen, E. O. (2022). Expanding and orchestrating the problem identification phase of design-based research. *Nordic Journal of Digital Literacy,* 17(4).
- Händel, V. D., & Jensen, E. O. (2022). Introducing the play activity wheel: Designing social, physical and playful learning activities from digital game universes. I Lockton, D., Lenzi, S., Hekkert, P., Oak, A., Sádaba, J., Lloyd, P. (Eds.), DRS2022: Bilbao, 25 June - 3 July, Bilbao, Spain.
- Hautopp, H., Hanghøj, T., Händel, V. D., Laraignou, A. S., Jensen, E. O., & Gundersen, P. (Accepteret 2023): Facilitating an Educational Board Game Jam: Analysing Different Game Design Strategies. European Conference on Games Based Learning.
- Hussein, M. H., Ow, S. H., Elaish, M. M., & Jensen, E. O. (2021). Digital game-based learning in K-12 mathematics education: a systematic literature review. *Education and Information Technologies*, Vol. 27, Issue 2, Mar 2022 s. 2859-891.
- Jensen, E. O., & Andreasen, L. B. (2020). Exploring the Dialogic Space of a game Elicitation Interview with Fifth Grade math Students. *Proceedings of ECGBL 2020 - 14th European Conference on Game-Based Learning*, (Vol. 2020, s. 268-276). Academic Conferences and Publishing International.
- Jensen, E. O., Nehammer, E. & Eriksen, A. L. (Accepteret 2023). Developing design principles for mathematical reasoning with the board game Othello. European Conference on Games Based Learning.
- Jensen, E. O., & Hanghøj, T. (2019). Math in Minecraft: Changes in Students' Mathematical Identities When Overcoming In-game Challenges. European Conference on Games Based Learning.
- Misfeldt, M., Blomhøj, M., Lindhart, B. K., Moeskær Larsen, D., Mikael Skånstrøm, & Jensen, E. O. (2022). Scenariedidaktik i matematik – et overblik. I S. S. Fougt, Bundsgaard J., T. Hanghøj, & M. Misfeldt (Eds.), *Håndbog i Scenariedidaktik*. Aarhus Universitetsforlag.

Kapitel 1 – indledning

Jeg vil her give en kort introduktion til afhandlingen og forskningsfeltet samt afhandlingens begrundelse og formål.

1.1 Begrundelse for afhandlingen

Spil og matematik har en lang fælles historie (Bishop, 1991), og det synes oplagt, at spil kan understøtte matematiklæring. Der findes fx et væld af analoge matematikspil (Oldfield, 1991) og digitale træningsspil (Larkin, 2015a). Nye digitale underholdningsspil er blevet fremhævet for deres store potentiale for undervisning (Gee, 2003), og fortalere for spil i matematikundervisningen har argumenteret for, at de ligefrem har potentiale til at revolutionere matematikundervisningen og forbedre og understøtte elevers læring af matematik (Devlin, 2011). I dette afsnit vil jeg udfolde nogle af problematikkerne i, hvorfor dette forestillede potentiale langtfra er realiseret i praksis, og hvordan succesfuld brug af spil i matematikundervisning vedrører både spillet, eleverne og den konkrete kontekst (Wei & Hendrix, 2009).

Når jeg forsøger at forstå spil og matematiklæring med et udgangspunkt i elevers fritid og underholdningsspil, adresserer jeg det, der også er kendt som *relevansproblematikken i matematikfaget* (Blomhøj, 2000) – "betydningen af, at eleverne oplever personlig relevans og autenticitet i skolens matematikundervisning" (Misfeldt et al., 2022, s. 175) – hvilket er en del af begrundelsesproblematikken for faget matematik (Niss, 1996)**.** Set i forhold til disse problematikker er der tre begrundelser for at interessere sig for spil i matematikundervisningen med medfølgende forestillede potentialer og begrænsninger.

Den første begrundelse er, at især digitale spil indtager en prominent rolle i børn og unges kultur (Toomey, 2017) og er en magtfuld social, kulturel og økonomisk kraft (Aguilera & de Roock, 2022). 92 % af danske børn mellem 1 og 15 år spiller digitale spil, og næsten halvdelen spiller dagligt (Medierådet, 2021). Digitale spil udgør potentielt et nyt situeret læringsrum, hvor interaktiv læring personliggøres (Gee, 2003), og der kan identificeres matematisk aktivitet i børns spil i fritiden (Avraamidou, 2017; Kørhsen & Misfeldt, 2015). I de spilkulturer der findes i og rundt om underholdningsspil som fx *World of Warcraft* findes der fællesskaber, der indgår i specialiserede matematiske aktiviteter for at optimere deres spil (Nardi, 2010). Dermed er det oplagt at forestille sig, at børns interesse for spil kan kombineres med matematiklæring på nye meningsfulde måder.

Der er dog forskel på at spille spil i fritiden og som en del af matematikundervisningen (2015), da det har en betydning, når aktiviteter uden for skolen tages med ind i klasseværelset (Monaghan, 2007). Læringsspil er fx ikke nødvendigvis motiverende på samme måde eller i samme grad som underholdningsspil (Hanghøj, 2011), og mere motivation gennem spil fører ikke automatisk til mere læring (Wouters & Van Oostendorp, 2013). Selvom underholdningsspil kan være meget motiverende i undervisningen, kan det være svært at forbinde dem med faglige mål (Van Eck, 2006). Det er stadig en udfordring at balancere sjov og læring i spildesign (Aguilera & de Roock, 2022). Det kan således ikke forventes, at børn engagerer sig på samme måde i et spil i skolen som i et spil i fritiden (Siyahhan & Gee, 2018). Idéen om, at elever vil opfatte matematiske spil som brugbare i klasseværelset, er derfor problematisk, da brugen af spil både er afhængig af selve spillets design, elevernes forudsætninger og interesser og den kontekst, spillet spilles i (Wei & Hendrix, 2009). De underholdningsspil, børn spiller mest (Medierådet, 2021), er meget anderledes end de matematiklæringsspil, der findes på fx App Store, og de forskerdesignede spil, der er udgangspunkt for empiriske undersøgelser af spilbaseret matematiklæring. Desuden er matematikken i de kommercielle underholdningsspil oftest skjult og integreret i spillet (Avraamidou et al., 2015) eller forskellig fra matematiske læreplaner (Lowrie, 2015), så de matematiske potentialer ikke nødvendigvis er tydelige for spilleren (Monaghan, 2016). Blot fordi forskere kan identificere matematiske aktiviteter i børns spil, er det ikke sikkert, at børnene selv opfatter spillene som matematiske (Kørhsen & Misfeldt, 2015). Der findes efterhånden en del viden om, hvad spillere motiveres af, når de spiller i fritiden (Deterding, 2013), men der findes begrænset viden om, hvorvidt disse spillermotivationer er de samme i matematikundervisningen. Gennem afhandlingen bidrager jeg med viden om dette ved at undersøge, hvordan elever forholder sig til forståelser af spil og fag, når spil bruges i matematikundervisningen.

Den anden begrundelse for at undersøge spil i matematikundervisningen er, at kommercielle digitale træningsspil allerede udgør en del af matematikundervisningen. Flere undersøgelser peger således på, at spil bliver brugt relativt meget i matematik i forhold til andre skolefag (Egenfeldt-Nielsen et al., 2011; Hainey et al., 2016; Hanghøj & Ejsing-Duun, 2023; Takeuchi & Vaala, 2014). Tilsvarende er der over hundrede års historik med produktion af undervisningsmaterialer til analoge strategispil i matematikundervisningen (Lilholt et al., 2012; Smith, 1912). Samtidig peger forskere på, at det er uklart, i hvor høj grad spil er en del af matematikundervisningen bredt (Bright et al., 1985) og der findes begrænset om, hvordan de forskellige former for spil reelt bliver brugt i matematikundervisningen. Brugen af de digitale træningsspil i matematikundervisningen er desuden forbundet med kommercielle interesser. Siden 1980'erne er der produceret edutainment-spil, dvs. spil, der både skal være lærerige og underholdende (Ito, 2009; Konzack, 2003), samt et overvældende antal af digitale læringsspil og apps (Larkin, 2015). Størstedelen af disse kan dog kritiseres for, at de primært sigter mod træning af simple færdigheder og ikke mod eksisterende og formodede potentialer for spil i matematikundervisningen (Lowrie & Jorgensen, 2015). Selve antallet af sådanne spil (Gros, 2015) og den manglende kvalitet i udbuddet (Larkin, 2015) gør det vanskeligt for læreren at finde og vælge relevante spil til matematikundervisningen. Derudover kan lærere have svært ved at identificere matematiske potentialer i spil (Mosimege, 1998) og understøtte brug af spil i matematikundervisningen (Heshmati et al., 2018). Læreres behov for støtte er desuden afhængigt af erfaring med specifikke spil (Bell & Gresalfi, 2017). I den forstand er spil i matematikundervisningen et udbredt fænomen, men der mangler forskning i, hvordan spil reelt bliver anvendt, og hvordan lærere bedst understøtter brugen af spil. Gennem afhandlingen bidrager jeg med viden om dette ved at undersøge brugen af *Minecraft* i undervisningen samt kortlægge, hvorvidt forskningsinterventioner med digitale spil i matematikundervisningen understøtter elevers udvikling af matematisk ræsonnement.

Den tredje begrundelse for at undersøge spil i matematikundervisningen er, at spil og matematik har en lang fælles historie (Bishop, 1991; Chernoff & Sriraman, 2014), hvor spil beskrives som centrale aktiviteter til at understøtte matematiklæring (Dienes, 1963) som matematiske tankeprocesser (Mosimege, 1998) og ræsonnement (McFeetors & Palfy, 2018). Heshmati et al. (2018) opsummerer et overblik over simulationers og spils anvendelsesmuligheder i forhold til matematisk læring (Cruickshank & Telfer, 1980) således:

> By playing games, individuals are challenged to explore their mathematical knowledge in a highly motivated manner to satisfy their curiosity and reach an outcome. This is due to games creating competition for individuals to achieve specific goals bound by rules, which depend on skills and often chance. (Heshmati et al., 2018, s. 778)

At spille spil er således en motiverende udfordring til at nå spillets mål ved at undersøge matematisk viden i konkurrence mod andre. Med afsæt i nyere forståelser af læring og computerspil (Gee, 2003) rummer de digitale spil store forestillede potentialer for matematikundervisning og -læring (Devlin, 2011). Forskningsinteressen i netop digitalt designede læringsspil er fra 2005-2006 steget markant (Byun & Joung, 2018; Xolocotzin & Pretelin-Ricárdez, 2015), og det er primært disse spil, der er målet for forskning, hvilket ekskluderer brugen af de kommercielle spil (Gresalfi, 2018). De forskere, der undersøger de digitale læringsspil, ønsker ofte at fastslå lærings- (Byun & Joung, 2018; Tokac et al., 2019) og motivationseffekter (Fadda et al., 2022; Vankúš, 2021) ved brug af designede læringsspil i matematikundervisningen. Som eksemplerne illustrerer, er der en lang historik, hvor spil og matematiklæring kontinuerligt bliver sat i forbindelse med hinanden, og hvor der til stadighed peges på nye potentialer for læring, bl.a. pga. den teknologiske udvikling og en voksende mængde forskning, der undersøger effekter af designede læringsspil.

De designede læringsspil er dog langt fra de kommercielle underholdningsspil i forhold til kvalitet, kompleksitet og budget. De er primært fokuserede på indskoling og aritmetik (Xolocotzin & Pretelin-Ricárdez, 2015), de er singleplayerspil (Pan et al., 2022), og de er designet af forskere til brug i specifikke interventioner og forskningsprojekter (Tokac et al., 2019; Young et al., 2012). Kritikken af dem er, at de ofte er simple træningsspil i attraktiv grafik (Larkin, 2015a), der ikke sigter mod fx problemløsning og ræsonnement (Van Eck, 2015). Ligeledes minder de nogle gange i højere grad om skolebøger end spil (Wisittanawat & Gresalfi, 2020). I den forstand er de læringsspil, der designes og primært forskes i, snævre i forhold til både matematiske læreplaner, spilgenre og forskningsmetode. De sigter sjældent mod presserende matematikdidaktiske dagsordener som udvikling af problembehandling, modellering eller ræsonnement, men primært mod træning af færdigheder (Rothschild & Williams, 2015). Jeg bidrager gennem afhandlingen med viden om en bredere spilgenre ved at undersøge elevers opfattelser af at deltage i matematikundervisning med kommercielle underholdningsspil. Dertil bidrager jeg med at designe undervisningsprincipper med afsæt i elevers domæneforståelser af spil.

Selvom det på overfladen burde være nemt at integrere spil i matematikundervisningen, så peger den eksisterende forskning på en række problematikker. Som Dubé og Keenan (2016) skriver: “Games are fun, math games are games, math games are not often fun” (s. 167). Vi kan altså ikke gå ud fra, at spil i matematikundervisningen automatisk bliver opfattet som noget positivt af elever. På mange måder risikerer de digitalt designede læringsspil at gentage problematikker vedrørende tekstopgaver i matematikundervisningen, hvor konteksten ofte er afkoblet fra opgaven (Boaler, 1993, 2015a; Maaß, 2010; Palm, 2009; Vos, 2020). Dette kommer til udtryk, når elever forsøger at spille matematikspil med erfaringer fra deres hverdag, men fejler, da spillene er designede mere som matematikopgaver end spil (Wisittanawat & Gresalfi, 2020).

De tre begrundelser rummer hver for sig gode argumenter for at undersøge spil, læring og matematikundervisning. Samlet peger de på, at spil, læring og matematikundervisning relaterer til både elevers hverdag, forskellige interesser for at designe matematiklæringsspil og en længere historik med brug af spil i matematikundervisningen. Derfor vælger jeg at fundere afhandlingen i et teoretisk perspektiv, der ikke udelukkende er fagdidaktisk, men optaget af hvad det vil sige at inddrage virkelighedsnære fænomener i undervisningen (Bundsgaard et al., 2022). Jeg tager dette teoretiske valg ud fra en antagelse om, at spil er et virkelighedsnært fænomen der kan rumme autentiske problemer (Vos, 2015) for eleverne. På den måde kan spil understøtte undervisning, der tager udgangspunkt i at undersøge meningsfulde udfordringer (Fougt et al., 2022) som både kan skabe læringsmæssige muligheder og begrænsninger i matematikundervisningen.

For at undersøge koblinger mellem elevernes hverdagserfaringer med spil og brug af spil i matematikundervisningen anvender jeg er scenariedidaktisk perspektiv på matematikundervisningen (Jf. afsnit 4.2) Set ud fra et scenariedidaktisk perspektiv antager jeg, at spil i matematikundervisningen kan forstås som en spændingsfyldt kobling mellem vidensdomæner inden for og uden for skolen (Hanghøj, 2011). I den forstand adskiller jeg mig fra den mainstreamforskning inden for spil og undervisning (også kendt som Game-Based Learning eller GBL), der sigter efter at finde læringseffekter for spil i matematikundervisningen. I stedet søger jeg at vide mere om, hvad børn er optagede af, når de spiller spil i matematikundervisningen ud fra et sigte om at forstå, hvornår det er (eller ikke er) meningsfuldt for eleven. Min læringsteoretiske interesse er derfor ikke møntet på, om eleverne lærer specifikt fagligt stof bedre eller mere effektivt, men knytter sig til Deweys læringsteori (jf. afsnit 4.1.3 og 4.1.4), hvor relationer mellem elevernes hverdagserfaringer og fag er centrale. Derfor inkluderer mit perspektiv især, hvordan matematiklæring med spil kan forstås som domænekoblinger mellem elevernes spilerfaringer og faglig vidensproduktion i matematikundervisningen. Jeg forstår sådanne domænekoblinger gennem domænemodellen (Hanghøj, 2011), som jeg bruger til at forstå relationerne mellem elevernes hverdagserfaringer og fag. Det betyder, at elevernes spilopfattelser vedrører de erfaringer, de har fra hverdags- og spildomænet som en del af deres fritid. Den faglige vidensproduktion vedrører det pædagogiske domæne og fagdomænet som en del af matematikundervisningen. Koblinger på tværs af disse to former for domæner forstår jeg som koblinger mellem domæner inden for og uden for skolen.

For at undersøge dette spændingsforhold tager afhandlingens empiriske klasserumsundersøgelser afsæt i underholdningsspil, der er designede til fritidsbrug, men som anvendes i matematikundervisningen med matematiklæring for øje. De to spil er brætspillet *Hungry Higgs* og det digitale spil *Minecraft*, der potentielt afspejler forskellige aspekter af børnenes spilerfaringer og spilkultur. Mere specifikt undersøger jeg både et analogt og et digitalt spil for at finde ud af, hvordan disse forskellige spilformater/-typer kan gøres relevante for matematiklæring. De få studier, der undersøger, hvordan eleverne oplever spil i matematikundervisningen, understreger, at elevernes hverdagsoplevelser med spil har afgørende betydning for deres meningsskabelse i spilaktiviteter i undervisningen. En væsentlig problematik er, at elevernes forståelser af spil kan komme i konflikt med de intenderede matematiske mål for undervisningen (Wisittanawat & Gresalfi, 2020).

1.2 Formål

Det centrale formål med ph.d.-projektet er at

> undersøge, hvordan spil kan skabe læringsmæssige muligheder og begrænsninger i matematikundervisningen, belyst gennem et scenariedidaktisk perspektiv.

Dette undersøges særligt i relation til forskerdesignede digitale læringsspil og elevers deltagelse i både analoge og digitale underholdningsspil. Jeg adresserer afhandlingens formål gennem fire artikler, hvori jeg stiller fem forskningsspørgsmål, der hver udfolder forskellige dele af formålet. I **Artikel 2** og **4** er forskningsspørgsmålene ikke eksplicit skrevet, og derfor uddyber jeg dem herunder. De fem forskningsspørgsmål (**FS**) beskrives i det følgende.

Artikel 1 (Jensen & Skott, 2022), **FS1:**

- How do DGBLE's (Digital Game–Based Learning Environment's) afford primary and lower secondary students' learning of mathematical reasoning?

Med **FS1** trækker **Artikel 1** på et teoretisk fundament om ræsonnement fra matematikdidaktik til at undersøge artikler, der tilhører forskning i DGBL (Digital Game-Based Learning) med fokus på matematiklæring (jf. afsnit 2.2). **Artikel 1** undersøger digitalt designede læringsspil, der ikke kun sigter efter træning af færdigheder, men også efter at understøtte mere komplicerede former for matematisk læring som matematisk ræsonnement, der ofte fremhæves som potentialet ved analoge spil. I forhold til afhandlingens formål bidrager **Artikel 1,** med viden der danner grundlag for at forstå brugen af digitale forskerdesignede læringsspil i matematikundervisningen.

Artikel 2 (Jensen, 2022), **FS2**:

- Hvilken meningskonstruktion sker gennem spil i matematikundervisningen, når der fokuseres på elevers deltagelse i undervisningsscenarierne som spillere?

Gennem **FS2** undersøger **Artikel 2**, hvorfor elever ignorerer matematik i et brætspil i undervisningen. **FS2** sigter dermed mod at undersøge, hvordan 'at spille for at vinde' er gyldigt på forskellige måder, alt efter om det ses fra elevperspektivet forstået gennem spildomænet eller fra det matematikfaglige perspektiv og domæne. I forhold til afhandlingens formål bidrager **Artikel 2**, med viden om hvordan elever deltager i matematikundervisning med et analogt brætspil, og hvilke begrundelser de kan have for ikke at koble spildomænet og matematikdomænet.

Artikel 3 (Jensen & Hanghøj, 2020), **FS3**:

- How can *Minecraft* be used in a teaching unit to engage students in mathematics education by enabling different forms of participation?

FS3 sigter mod at forstå, hvordan elevernes muligheder for deltagelse i og forståelse af matematik påvirkes, når matematikundervisningen designes gennem meningsfulde koblinger mellem elevernes forståelse af koordinatsystemet og deres handlemuligheder i et digitalt spil. Dette inkluderer, hvordan forskellige former for elevdeltagelse bliver mulige gennem et undervisningsdesign, der kobler det spil- og det matematikfaglige domæne.

Artikel 3 (Jensen & Hanghøj, 2020), **FS4**:

- How do students experience new perspectives on mathematical knowledge across in-school and out-of-school domains?

FS4 undersøger dermed, hvordan domænekoblinger mellem domæner inden for og uden for skolen forandrer elevers perspektiver på matematik. I forhold til afhandlingens formål bidrager **Artikel 3**, med udvikling af tre designprincipper til at understøtte scenariedidaktisk matematikundervisning. **Artikel 3** bidrager videre med viden om hvordan denne form for undervisning med *Minecraft*, kan understøtte forskellige former for elevdeltagelse, og hvordan eleverne oplever nye perspektiver på matematisk i koblingerne mellem domæner inden for og uden for skolen.

Artikel 4 (Jensen et al., 2021), **FS5:**

- Hvad er læringspotentialet i undervisningsforløb med digitale spil i matematik, når undervisningsdesignet sigter efter meningsfulde koblinger mellem spil- og fagdomæner?

Artikel 4 sigter mod at beskrive, hvordan undervisning kan designes gennem meningsfulde koblinger mellem spil og matematik. **FS5** undersøges gennem en generaliseret model for, hvordan undervisere kan designe matematikundervisning, der sigter mod domænekoblinger. I forhold til afhandlingens formål bidrager **Artikel 4**, med en konkret udmøntning af scenariedidaktisk matematikundervisning gennem tre undervisningsforløb med spil. Forskningsspørgsmålene retter sig dermed mod forskellige dele af det overordnede formål. **FS1** er rettet mod at afdække eksisterende viden, men da **Artikel 1** undersøger en meget specifik del af feltet om spil og matematiklæring, har jeg valgt at supplere min beskrivelse af den eksisterende forskning med en bredere forskningsoversigt i kapitel 2. **FS2, FS3 og FS4** er rettet mod empiriske undersøgelser af domænekoblinger mellem elevperspektiver og matematikfaglige perspektiver ved brug af spil i matematikundervisningen. **FS5** er rettet mod design af undervisningen, der understøtter sådanne domænekoblinger.

Gennem DBR-metodologi som en iterativ proces (Kap3) og et scenariedidaktisk teoretisk perspektiv (kap 4) adressere kappen og de fire artikler ph.d.-projektets formål. Inden for denne specifikke metodologiske og teoretiske ramme adresserer jeg afhandlingens formål om, hvordan spil kan skabe læringsmæssige muligheder og begrænsninger i matematikundervisningen. Dette sker gennem pragmatisk vidensproduktion i form af afdækning af eksisterende forskning på området, undersøgelse af elevers oplevelse af at deltagelse i undervisningen, og udvikling af konkrete undervisningsforløb og designprincipper til undervisning. Samlet giver afhandlingen et svar på hvordan matematikundervisning med spil kan forstås og designes med udgangspunkt i koblinger mellem domæner inden for og uden for skolen, hvor især elevernes erfaringer med spil er væsentlige. Den viden jeg producere i afhandlingen er begrænset i forhold til kontekst, metodologi, det teoretiske perspektiv samt de specifikke undervisningsforløb og spil jeg undersøger igennem. Afhandlingens rammesættende formål giver mig dermed mulighed for at undersøge specifikke aspekter af matematikundervisning med spil. Disse vedrører læring på tværs af elevers hverdagserfaringer og fag (Dewey, 2005) i form af domænekoblinger (Hanghøj, 2011) gennem brug af underholdningsspil og mine resultater er ikke en til en gælden for brug af spil i matematikundervisningen generelt.

1.3 Læsevejledning

Afhandlingen er artikelbaseret og består af fire selvstændige artikler (jf. publikationslisten) og denne kappetekst. Kappeteksten sammenfatter de fire artikler som et DBR-studie (Gundersen, 2021), der sigter mod pragmatisk vidensproduktion (Goldkuhl, 2012) i en forståelse af matematikundervisning som en designvidenskab (Cobb, 2007). Denne metodologi uddyber jeg i kapitel 3. For læserens skyld vil jeg her beskrive hvordan de fire artikler kan forstås i relation til min anvendte DBR - metodologi. Abdallah og Wegerif (2014) beskriver DBR i form af tre overordnede faser, som denne afhandlings resultater kan forstås igennem: 1) den indledende forskningsfase, som retter sig mod kontekstforståelse, formulering af forskningsspørgsmål og litteraturreview, 2) prototypefasen, som er en iterativ designfase bestående af iterationer med design, intervention og forbedring og forfinelse af designet, samt 3) den refleksive vurderingsfase, der retter sig mod at forstå løsningen og konkludere i forhold til fremtidige anbefalinger. Gennem dette DBR-metodologiske perspektiv (Abdallah & Wegerif, 2014) forstår jeg artiklerne således. **Artikel 1** er en del af den indledende forskningsfase, da den afdækker eksisterende forskning. **Artikel 2** er en del af den refleksive vurderingsfase, da den undersøger elevers deltagelse i en undervisningsintervention fra GBL21. Hensigten er ikke at redesigne denne intervention, men at forstå, hvordan den har påvirket elevernes deltagelse. **Artikel 3** er et selvstændigt designbaseret eksperiment, der rummer alle tre faser i det DBR-metodiske perspektiv på forskellig måde. Det drejer sig om videnskortlægning af brug af *Minecraft* i matematikundervisningen (fase 1), design og test af undervisningsintervention (fase 2) samt vurdering af og refleksioner over videre design (fase 3) gennem udvikling af designprincipper, som jeg ser som en central del af resultaterne i DBR-metodisk øjemed (Hanghøj et al., 2022). **Artikel 4** ser jeg som en del af den refleksive vurderingsfase i den forstand, at **Artikel 4** er et designet artefakt, der er et resultat af de foregående faser i DBR-processen.

Kappens formål er dermed at sammenfatte artiklernes bidrag til den eksisterende forskning inden for en samlet teoretisk-metodologisk ramme. Herunder er en oversigt over de enkelte kapitler i kappen.

- Kapitel 1 introducerer ph.d.-projektets kontekst og formål.
- Kapitel 2 bidrager med en oversigt over forskningsfeltet spil og matematiklæring.
- Kapitel 3 redegør for valg af teoretisk positionering inden for læring, didaktik og spilforståelse.
- Kapitel 4 rammesætter projektet metodologisk, redegør for det empiriske grundlag og uddyber artiklernes metoder.
- Kapitel 5 præsenterer de fire artiklers resultater. Selve artiklerne kan med fordel læses her.
- Kapitel 6 diskuterer ph.d.-projektets resultater og artiklernes samlede bidrag til den eksisterende forskning.

- Kapitel 7 diskuterer ph.d.-projektets metodologi.
- Kapitel 8 konkluderer på den samlede afhandling.

Herefter følger et appendiks med de fire artikler.

Kapitel 2 – forskningsoversigt

I dette kapitel præsenterer jeg en oversigt over forskningen i spil og matematiklæring gennem tre centrale forskningsinteresser i forbindelse med spil og matematiklæring. Dette gør jeg for at afdække nuancerne i den eksisterende forskning om spil og matematiklæring, med henblik på at vise hvor og hvordan, mine resultater bidrager til eksisterende forskning. Men også for at pege på hvordan min forskning adskiller sig fra, eller har fællestræk med de tre forskningsinteresser.

Gennem mit iterative arbejde med ph.d.-projektet bliver jeg opmærksom på, at afhandlingens formål relaterer sig til forskelligartede forskningsinteresser der handler om spil, læring og matematik, men på meget forskellige måder. Jeg vælger derfor at beskrive forskning i spil og matematiklæring gennem de tre forskningsinteresser, da de hver især relaterer sig forskelligt til ph.d.-projektets formål. Opdelingen er med til at kommunikere, hvordan mine resultater bidrager til forskningen, men den tydeliggør også, at forskningsfeltet er splittet og fragmenteret på forskellige måder.

I konstruktionen af min forskningsoversigt læser jeg eksisterende forskning gennem mit pragmatiske vidensyn, og er således optaget af både hvad der er og hvad der kan være (Goldkuhl, 2012). Dermed indikere min konstruktion af de tre forskningsinteresser også et fremtidigt potentiale i at forbinde de tre forskningsinteresser.

Min centrale antagelse i forhold til forskningsfeltet er dermed, at de forskningsmæssige interesser er så forskelligartede, at det er mere hensigtsmæssigt at forstå feltet som en kombination af tre forskellige forskningsinteresser end som et homogent felt. Kort skitseret udgør de tre forskningsinteresser følgende:

1) *Forskning i DGBL med fokus på matematiklæring*, der omhandler udvikling af digitale matematiklæringsspil designede af forskere, måling af læringseffekter og matematisk performance gennem brug af disse spil. Det er især forskere fra det større forskningsfelt om spil og teknologi i undervisningen, der forsker med denne interesse for øje.
2) *Matematikdidaktisk forskning i spil*, der omhandler læreres brug af spil i matematikundervisning og elevers læring af matematik. Det er især forskere fra det større forskningsfelt i matematikdidaktik og matematikundervisning, der forsker med denne interesse for øje.
3) *Forskning i uformel matematiklæring i spil*, der omhandler, hvordan der opstår uformel matematisk aktivitet omkring spil, især i fritiden. Der er forskere fra flere forskellige felter, der forsker med denne interesse. Det er både forskere fra forskningsfeltet om spil, matematikdidaktik som etnomatematik (Bishop, 1991) og konstruktionistiske tilgange til læring (Kafai, 1993; Papert, 1980; Resnick, 2018).

De tre forskningsinteresser omhandler forskellige dele af forskningsfeltet spil og matematiklæring. Det er min intention, at en detaljeret forskningsoversigt over de forskellige interesser kan publiceres i udvidet form på et senere tidspunkt (manuskript D). Her vil jeg blot kortlægge centrale pointer i forhold til at forstå og placere afhandlingens bidrag i forhold til forskning i spil og matematiklæring.

En pointe er, at der er tegn på, at der er begrænset samarbejde og vidensdeling på tværs af de tre forskellige interesser, og at der kun sjældent kombineres. Et eksempel på dette er, hvor overraskende lille en rolle forskere fra forskning i matematikdidaktik har for *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring.* Fx finder Byun og Joung (2018) i en metaanalyse, at kun 5 ud af 71 forfattere, der undersøger spil og matematiklæring, tilhører matematikdidaktikfeltet, mens 38 forskere er fra undervisningsteknologi, 22 fra computer science, og 16 fra ingeniøruddannelsen. Lignende tal finder jeg i mit kvalitative systematiske review **Artikel 1** hvor kun fire ud af 23 forfattere tilhører matematikdidaktikfeltet. Denne skævvridning er videre afspejlet i de tidsskrifter, forskningen publiceres i. Hvor Byun og Joung (2018) finder, at kun 5 ud af 33 af inkluderede artikler er publiceret i tidsskrifter om matematikundervisning. For **Artikel 1** er det 2 ud af 14, og i Kacmaz og Dubés' (2021) metaanalyse og kritiske review er det 2 ud af 26 (min optælling). Disse tendenser tyder på, at forskningen i spil og matematiklæring stadig er en niche i matematikdidaktisk forskning (Byun & Joung, 2018).

Mit arbejde med forskningsoversigten har været drevet af at forstå, hvordan afhandlingens resultater bidrager til den eksisterende forskning. Jeg vælger at beskrive de tre forskningsinteresser i feltet spil og matematiklæring, fordi de på hver sin måde relaterer sig til afhandlingens formål og min erkendelsesinteresse. *Forskning i DGBL med fokus på matematiklæring* bidrager med langt det største antal af empiriske forskningsstudier om spil og matematiklæring og er dermed et udtryk for de dominerende tilgange i feltet. *Matematikdidaktisk forskning i spil*-interessen bidrager med viden om, hvordan spil bruges i klasserummet, og viden herfra kan relateres tæt til matematikdidaktiske diskussioner. Endelig bidrager *forskning i uformel matematiklæring i spil* med viden om spil som kulturel og matematisk aktivitet i uformelle læringskontekster. Her er det netop kombinationen af disse to forskningsinteresser, der er relevant for genstandsfeltet for denne afhandling.

Forskningsinteresserne er forskellige på en række punkter. *Forskning i DGBL med fokus på matematiklæring* sigter primært mod påvisning af effekt for digitale læringsspil i matematik og er ikke særligt optaget af matematikdidaktiske spørgsmål (Byun & Joung, 2018). Det betyder, at den viden, der produceres igennem denne interesse, kan være afkoblet bredere matematikdidaktiske dagsordener, hvilket illustreres af eksemplet med forfattertilknytning og tidsskrifter, der publiceres i, som *Computers and Education, British Journal of Educational Technology, Educational Technology and Society, Journal of Computer Assisted Learning, Education and Information Technologies* m.fl. (Hussein et al., 2021).

Matematikdidaktisk forskning i spil er derimod primært optaget af at undersøge systemiske og matematikfaglige aspekter af spil, fx vinderstrategier (fx Brousseau, 1997), og i mindre grad optaget af at måle læringseffekter eller undersøge de sociale aspekter rundt om spil. Dette medfører en fagligt formålsrettet, men også relativt ensidig definition og forståelse af spil. Denne interesse findes i mere matematikdidaktikorienterede tidsskrifter som *Educational Studies in Mathematics* (Nilsson, 2007), *Journal for Research in Mathematics Education* (Bright et al., 1985), *Journal of Mathematical Behavior* (McFeetors & Palfy, 2018) og *Digital Experiences in Mathematics Education* (Mauntel et al., 2021) og i forskningsantologier om matematikundervisning som *Tools and Mathematics – Instruments for learning* (Monaghan, 2016) og *Digital Games and Mathematics Learning Potential, Promises and Pitfalls* (Lowrie & Jorgensen, 2015b).

I modsætning til disse to forskningsinteresser omhandler *forskning i uformel matematiklæring i spil,* hvordan børn og voksne spiller og indgår i fællesskaber omkring spil i (primært) fritidskontekster uden for skolen, hvor der indgår matematiske aktiviteter. Dette er især væsentligt at inddrage i forhold til at forstå afhandlingens resultater, da det bidrager med forståelser af uformel matematiklæring med spil forstået som deltagelse i sociale situationer, hvilket kun berøres perifert i de to andre forskningsinteresser. Denne interesse er bredt ud over mange forskellige felter. Forskning med denne interesse publiceres bredt, fx i tidsskrifter og konferencer om spilforskning som *Game Studies* (Paul, 2011), *the International Conference on the Foundations of Digital Games* (Debus, 2017) og *the Digital Games Research Association Conference* (Karlsen, 2011) samt i matematikdidaktiske forskningsantologier som *'Digital Games and Mathematics Learning Potential, Promises and Pitfalls*' (Lowrie & Jorgensen, 2015b) (samme bog som ovenfor), i bøger om etnomatematik (Bishop, 1991).og i tidsskrifter vedr. teknologi i undervisningen: *Technology, Knowledge and Learning* (Avraamidou et al., 2012) og *Journal of the Learning Sciences* (Wisittanawat & Gresalfi, 2020).

Forskning gennem de tre interesser giver indblik i forskellige dele af feltet: hvordan effektive læringsspil kan designes (*forskning i DGBL med fokus på matematiklæring*), hvordan spil kan fungere som et matematikdidaktisk redskab (*matematikdidaktisk forskning i spil*), og hvordan matematik er en del af uformelle praksisser omkring spil (*forskning i uformel matematiklæring i spil*). Jeg vælger at konstruere denne tredelte forståelse af forskningsfeltet, da ph.d.-projektets formål vedrører alle tre forskningsinteresser, men ikke kan rummes inden for en enkelt af disse. Videre er mine resultater ikke knyttet til en enkelt af de tre interesser, men peger bl.a. på hvordan en kombination af de forskellige interesser kunne være positiv. Tredelingen tydeliggør, hvor mange forskelligartede interesser der beskæftiger sig med spil og matematiklæring på forskellige måder. Dette er med til at understrege, at de to første forskningsinteresser kan ses som meget snævre i forhold til enten at forstå spil som en designet læringsteknologi eller som et didaktisk middel til at nå et mål. Til dette er forskningsinteressen om *forskning i uformel matematiklæring i spil* med til at understøtte et langt bredere perspektiv på forståelser af elevers hverdagsoplevelser med spil. Jeg vil nu kort beskrive de tre forskningsinteressers forskellige forståelser af spil, da dette er centralt for den måde forskningsinteresserne forstår læringspotentialet i brug af spil i matematikundervisning.

2.1 Spilkarakteristikker

I det samlede forskningsfelt spil og matematiklæring undersøges mange forskellige spil. Det kan være så forskellige spil som *Minecraft* (Bos et al., 2014), *The Sims* (Avraamidou et al., 2012), *Race to 20* (Brousseau, 1997), *Frøhop* (Lee & Chen, 2009), *Fire på stribe* (Houssart & Sams, 2008), *Kryds og bolle* (McFeetors & Palfy, 2018) og en række forskellige læringsspil (Gresalfi, 2015; Habgood & Ainsworth, 2011; Ke, 2019). Denne variation kalder på en kategorisering af spil. Det bliver upræcist og forvirrende, hvis spil beskrives som et samlet fænomen, men variationen af forskellige spil, og hvordan de overlapper, er så stor, at det vanskeliggør en meningsfuld generel kategorisering. Denne problematik bliver endnu mere presserende, hvis man forstår spil i undervisningen som en situeret læringsaktivitet, der medtænker lokale lærings- og deltagelsesformer som i **Artikel 1,** Staaby (2021) og Young et al. (2012). Der er en række faktorer fra grafik til læringstilgang til lyddesignet (i digitale spil) og mange flere, der påvirker, hvorvidt spil kan bruges i undervisningen, hvilket er én grund til, at foregående taksonomier ikke inkluderer alle aspekter af spil (Laato et al., 2020).

Det er ikke i min interesse at lave brede kategorier af spil, da de hurtigt ville miste relevans i forhold til forskellige kontekster og overlap. Derfor vælger jeg at definere spil gennem de forskellige ofte overlappende karakteristikker, spillene har. Dette er i overensstemmelse med Elias et al. (2012), der forstår, sammenligner og analyserer spil gennem deres karakteristikker, hvilket de forstår som "generelle grupperinger af kendetegn eller egenskaber, der giver en overordnet beskrivelse af, hvilken type spil der er tale om" (s. 3). Gennem denne forståelse anvender jeg begrebet karakteristikker i forskningsfeltet *spil og matematiklæring* til at strukturere min diskussion af spillene. De følgende karakteristika er dermed ikke en udtømmende liste, men præsenteres, da jeg har fundet dem relevante for afhandlingens formål, eftersom de på forskellige måder fortæller noget om læringspotentialerne ved forskellige spil. De er:

Digitalt vs. analogt: vedrører, om spillet spilles på en digital enhed som computer, mobiltelefon eller spillekonsol, eller om det spilles ved brug af analoge materialer som spillebræt, kort, terninger m.m. Det er forskelligt for forskningsinteresserne, om de undersøger digitale eller analoge spil.

Individuelt vs. multiplayer: vedrører, om spillet er for én eller flere spillere. Det kan også være hybrider, hvor der vælges mellem, om der spilles én eller flere. Karakteristikken knytter sig til designernes, undervisernes og forskerens forskellige læringssyn, hvor der er forskellige traditioner (Egenfeldt-Nielsen, 2006; Plass et al., 2020).

Strategi vs. sandsynlighed: vedrører, om spilsystemet er baseret på strategi eller på sandsynlighed. Her kan der også være hybrider, hvor forskellige dele af spillet er baseret på de to mekanikker. Karakteristikken er især væsentlig for den *matematik-didaktiske forskning i spil,* hvor en række studier arbejder med at undersøge matematiske ræsonnementer gennem strategiske spil (McFeetors & Palfy, 2018).

Konkurrence vs. samarbejde: vedrører, om spilmekanikken er baseret på konkurrence eller samarbejde. Her kan der ligeledes være hybrider, hvor spillerne samarbejder om et mål, men også har egne mål. Ligeledes kan der være spil, hvor der kan vælges mellem konkurrence eller samarbejde. Karakteristikken knytter sig til potentialer for læring i spil (Mullins et al., 2011) og til, hvordan elever oplever at deltage i matematikundervisningen (**Artikel 2**).

Endeligt vs. uendeligt: Betegnelsen stammer fra Carse (2011) og omhandler, om målet med spillet er at vinde eller at fortsætte med at spille. Karakteristikken er central for at forstå forskelle mellem endelige spil, hvor der findes en sikker vinderstrategi, som '*Race to 20*' (Brousseau, 1997) og spil, der ikke har et endeligt kriterie for at vinde for at slutte spillet, fx *Minecraft* (**Artikel 3**).

Underholdningsspil vs. læringsspil: vedrører, om spillet er designet til at underholde og blive spillet i fritiden, eller om det er designet til læring. Her kan der også være hybrider, der forsøger at sigte mod begge mål. Under læringsspillene er der en række underkategorier, der til tider overlapper hinanden:

- Træningsspil: spil, hvor spilleren træner noget fagligt. Ofte aritmetik og ofte procedure (Xolocotzin & Pretelin-Ricárdez, 2015).
- Edutainment: spil, hvor et fagligt emne er pakket ind i en motiverende kontekst (Ito, 2009; Konzack, 2003).
- Forskerdesignet læringsspil: spil designet af forskere til brug i interventioner i undervisningen. Ofte tekstopgaver præsenteret i en spilkontekst (Gresalfi & Barnes, 2016).
- Analogt matematikspil: spil, hvor den centrale (nogle gange eneste) mekanik er en form for matematisk indhold, der skal læres.

På linje med andre forsøg på at kategorisere spil i forhold til læring (Laato et al., 2020) anser jeg ikke dette for en komplet eller udtømmende kategorisering af spil, der kan understøtte matematiklæring, men kategorier, der kan illustrere, hvordan spil er forskellige i de tre forskningsinteresser.

Når karakteristikkerne anvendes til at forstå forskning i spil og matematiklæring, kan de være med til at illustrere hvordan de tre forskningsinteresser er optaget af bestemte måder at lære på. Videre giver karakteristikkerne anledning til forsigtighed med at generalisere, på tværs af studier der bruger spil med alt for forskellige karakteristikker. I Tabel 2.1 herunder viser jeg, hvordan karakteristikkerne kan bruges til at beskrive forskellige spileksempler fra feltet spil og matematiklæring.

Spileksempel	**Karakteristika**	**Knyttet til matematiklæring ved**
Forskning i DGBL med fokus på matematiklæring		
Pangea (Beserra et al., 2014)	Digitalt træningsspil Edutainment	Individuel træning af procedurer gennem spil bygget op om et narrativ.
Adventure at Boone's Meadow (Gresalfi & Barnes, 2016)	Digitalt Forskerdesignet Læringsspil	Tekstopgaver designet i et spil.
Frog Leap (Lee & Chen, 2009), *Lines* (Houssart & Sams, 2008)	Digitalt Strategi	Spillene inkluderer digitale redskaber til at undersøge strategier.
Matematikdidaktisk forskning i spil		
Race to 20 (Brousseau, 1997)	Analogt Strategi Endeligt	Bruges af en lærer, for at eleverne arbejder med ræsonnement gennem udvikling af vinderstrategier.
Gobblet Gobblers, Othello, Tic Stac Toe og *Go* (McFeetors & Palfy, 2018)	Analogt Underholdning Strategi	Bruges af en lærer, for at eleverne arbejder med ræsonnement gennem udvikling af vinderstrategier.
Cover-up og *Uncover* (Heshmati et al., 2018)	Analogt Matematikspil	Spil designet omkring et centralt fagligt begreb.
Hungry Higgs (**Artikel 2**)	Analog Underholdning Strategi Sandsynlighed	Bruges som udgangspunkt, for at elever redesigner spil.
Forskning i uformel matematiklæring i spil		
Angry Birds, Plants vs. Zombies og *The Sims* (Avraamidou et al., 2015)	Digitalt Underholdning	Matematiske aktiviteter kan identificeres i børns spil i fritiden.
Starcraft, World of Warcraft (Debus, 2017)	Digitalt Underholdning Multiplayer	Theorycrafting-praksisser i fritiden.
Minecraft (Kørhsen & Misfeldt, 2015)	Digitalt Underholdning Multiplayer Uendeligt	Matematiske aktiviteter kan identificeres i børns spil i fritiden.

Tabel 2.1: Eksempler på spil og spilkarakteristika fra de tre forskningsinteresser.

Som tabellen illustrerer, er de tre forskningsinteresser optagede af bestemte slags spil, der inviterer til forskellige måder at lære og undersøge læring på. Karakteristikkerne bidrager med et vokabular til at beskrive spil uden at lave for faste kategorier eller tale om spil som et generelt fænomen. Spilkarakteristikkerne udgør dermed afhandlingens rammeværk til at eksplicitere, forstå og diskutere variationen i spil i forhold til forskellige spil og tilgange til læring. Herunder vil jeg kort beskrive de tre forskningsinteresser.

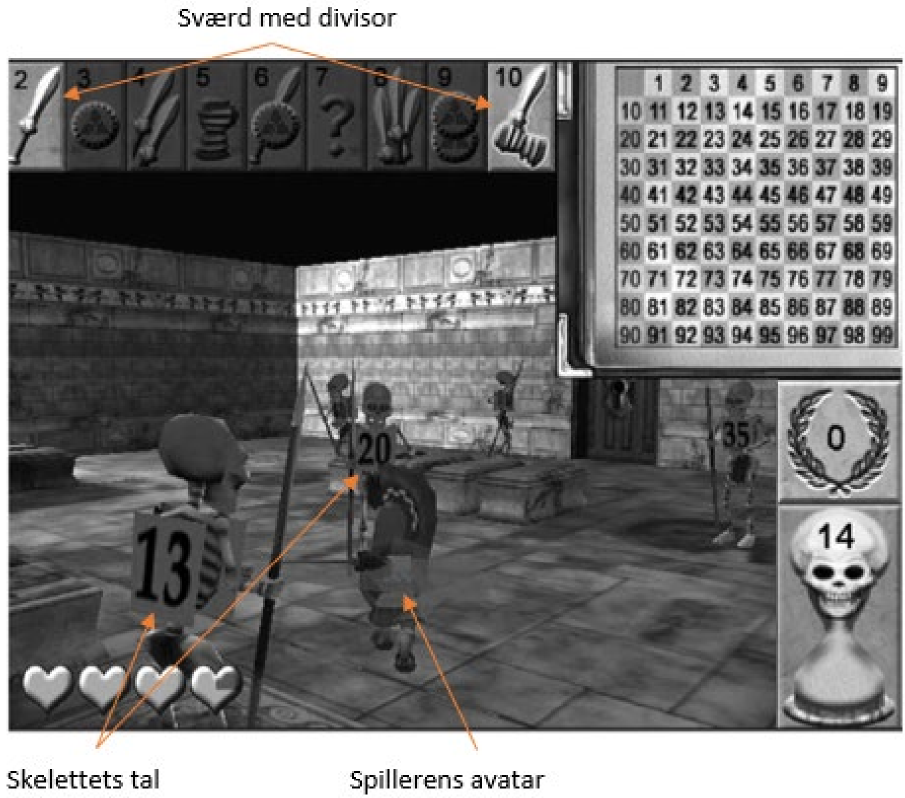
2.2 Forskning i DGBL med fokus på matematiklæring

Denne interesse kommer især fra forskningsfelterne om undervisningsteknologi, 'Learning Sciences' og Game-Based Learning, hvor der er en række forskere, der interesserer sig for matematikspil. Forskning herfra er især optaget af at forstå læring af matematik i spil gennem digitale læringsspil, der ofte er designet af forskere, og som ofte måler kvantitativt på resultater af interventioner med disse spil. Jeg bruger betegnelsen DGBL, da der i overvejende grad er tale om digitale spil, der bliver udviklet til matematiklæring, selvom der også findes studier, der laver hybrider med fx augmented reality (Yu & Denham, 2021) eller *skak* (Rosholm et al., 2017).

Jeg anser denne forskningsinteresse som den mest etablerede af de tre, da den står for en overvældende del af de studier, der publiceres om spil og matematikundervisningen. En god indikation på det store antal studier fås ved at undersøge de mange systematiske reviews, der er lavet med udgangspunkt i denne interesse (fx Byun & Joung, 2018; de Carvalho et al., 2016; Divjak & Tomić, 2011; Hussein et al., 2021; Kacmaz & Dubé, 2021; Pan et al., 2022; Tokac et al., 2019; Xolocotzin & Pretelin-Ricárdez, 2015). Når disse reviews primært undersøger studier der gør brug af digitalt forskerdesignede spil, repræsenterer de spil med bestemte karakteristika (Jf. Tabel 2.1). Deres udsagnskraft udover studier der tager afsæt i interessen om *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring*, er derfor uvis.

Forskningsinteressen hænger sammen med antagelser om, at digitale spil kan hjælpe elever med at lære matematik (Chen et al., 2021), at designelementer fra kommercielle spil kan bruges til at skabe digitale læringsspil, og at forskningen skal hjælpe de travle lærere gennem computerprogrammer, der underviser bedre og hurtigere (Vogel et al., 2006). Målet er dermed design af effektive digitale læringspil og måling af effekter af interventioner gennem valide metoder. Spillene, der anvendes i studier med denne interesse, er primært forskerdesignede digitale singleplayer trænings- og puzzlespil med fokus på matematiklæring (Joung & Byun, 2021; Kacmaz & Dubé, 2021; Pan et al., 2022). Der er en tendens til at beskrive spillene som instrumentelle design (Kacmaz & Dubé, 2021), og spiludviklingen og -designene er langt bagefter de kommercielle spil i forhold til fx grafik og kompleksitet (Xolocotzin & Pretelin-Ricárdez, 2015). Derudover er der sjældent praktikere, fx lærere, involveret i udviklingsprocesserne (de Carvalho et al., 2016).

Det matematiske indhold sigter overvejende mod at forbedre procedurale færdigheder (Xolocotzin & Pretelin-Ricárdez, 2015) og faktuel viden (Hussein et al., 2021) hos yngre skoleelever. Dette ses i spillet *Pangea*, hvor spilleren bliver præsenteret for regneudtryk med de fire regningsarter og skal vælge det rigtige resultat. Fx regneudtrykket 8+2 med valgmulighederne 8, 9 eller 10 (Beserra et al., 2014). Forskningsmetoderne er primært kvantitative effektstudier, og studierne bidrager især med perspektiver på, hvordan kvantitative forskningsmetoder kan bruges til at producere valide forskningsresultater om design og brug af læringsspil som undervisningsteknologi til matematiklæring. Jeg vil fremhæve et konkret eksempel fra denne forskningsinteresse med spillet *Zombie Division* (Habgood et al., 2005; Habgood & Ainsworth, 2011), som kan ses herunder på Figur 2.1.



Figur 2.1: Endogen version af Zombie Division (Habgood et al., 2005, s. 495)*. Jeg har tegnet de orange pile og skrevet den danske tekst.*

Dette spil er designet med udgangspunkt i at forstå læringseffekten af forskellige måder at koble spillerens handlinger til fagligt indhold på (Habgood & Ainsworth, 2011). Studiet bruger to versioner af spillet *Zombie Division*. Der er en *endogen* version, hvor spil og læringsmål er tæt knyttet til hinanden. Denne version kan ses på Figur 2.1, hvor spilleren går rundt i en verden med skeletter og skal vælge sværd med forskellige divisorer (her 2 og 10) til at angribe skeletter med. Når skelettet rammes, bliver tallet på skelettet divideret med sværdets tal (hvis det går op i det) og går i mindre stykker, indtil det ikke kan divideres mere og overvindes. Denne version sammenlignes med en *eksogen* version, hvor der ikke er tal på skeletterne og sværdene. I stedet får spillerne et divisionsspørgsmål, når de angriber et skelet, hvilket pauser spilverdenen. Resultatet er, at det endogene spildesign øger elevernes læring i forhold til det eksogene design, og eleverne spiller spillet syv gange længere i fritiden (Habgood & Ainsworth, 2011). Jeg fremhæver dette eksempel da det understøtter et centralt fund for forskning i DGBL, nemlig at læringsmålet og kerneaktiviteten i spillet bør knyttes tæt til hinanden (Plass et al., 2015). Størstedelen af de designede læringsspil, der er undersøgt med forskningsinteressen for *DGBL med fokus på matematiklæring*, vil jeg dog betegne som eksogene spildesign.

I de reviews, der undersøger læringseffekt, rapporteres der stor variation i effekt mellem primærstudierne og svingende grader af konsensus om, hvorvidt spillene generelt har en positiv effekt på læring af matematik (Byun & Joung, 2018; Kacmaz & Dubé, 2021; Tokac et al., 2019). På trods af dette viser alle seks reviews samlet positive effekter af designede læringsspil, med forskellige optællingsmetoder (Byun & Joung, 2018; Divjak & Tomić, 2011; Hussein et al., 2021; Kacmaz & Dubé, 2021; Pan et al., 2022; Tokac et al., 2019).

Studierne med denne forskningsinteresse er især optagede af, hvordan resultater fremkommer, og hvorvidt artiklerne lever op til de metodiske gyldighedskriterier for forskning, der eksisterer for fx præ- og posttest i RCT og kvasieksperimentelle forskningsdesign. En pointe er, at der er stor forskel på detaljegraden af beskrivelserne af intervention og konkrete spildesign i de enkelte studier. Til tider er spil og undervisningsdesign så mangelfuldt beskrevet i studierne, at det reelt er svært at forstå indhold og aktiviteter af de enkelte læringsspil i studierne (Hussein et al., 2021). De relativt få studier, der beskriver konkrete spildesign, kan tilskrives, at feltet har været præget af en proof of concept-tilgang til at vise, at spil i matematik virker. Der er først relativt sent kommet fokus på, hvordan enkelte design features påvirker matematiklæring (Clark et al., 2016).

Forskningsinteressen bidrager især med viden om, hvordan forskningsdesignede læringsspil påvirker yngre elevers (indskoling og mellemtrin) individuelle performance på posttests, der tester procedurale færdigheder og faktuel viden om aritmetik (Xolocotzin & Pretelin-Ricárdez, 2015). Feltet er med til at pege på, at fremtidig forskning bør indeholde detaljerede beskrivelser af spildesign, intenderet læring, evaluering og vurdering såvel som rationaler for valg og design af spil (Pan et al., 2022). Et enkelt review fra Tyrkiet sætter spørgsmålstegn ved, om det er hensigtsmæssigt at afgrænse til det digitale for at måle undervisningseffekter. Studiet viser, at interventioner med digitale spil har en lille effekt på læring (0.436), mens interventioner med analoge har en stor effekt (1.032) (Öztop, 2022). Dette indikerer, at en bedre forståelse af interventioner med analoge spil kunne være centralt for udviklingen af interessen i *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring*.

Forskning i spil og matematiklæring bliver nødt til at forholde sig til denne interesse, da den er udgangspunkt for langt det største antal af studier og reviews om spil og matematiklæring. Konkret er det væsentligt at have for øje, at der primært er tale om performanceorienterede forståelser af læring, der undersøges gennem kvantitative effektmålinger, at det er afgrænsede matematiske færdigheder, der sigtes mod, og at spillene er designede læringsspil. Til denne forskningsinteresse bidrager jeg med at udvide vidensopsamlingen om spil og matematiklæring, gennem et overvejende kvalitativt review (**Artikel 1**). Dette bidrager med en dybdegående forståelse for læring af matematisk ræsonnement som et specifikt matematikfagligt mål, der kan supplere de eksisterende reviews, der sigter mod at undersøge læringseffekter for matematik i bredere forstand.

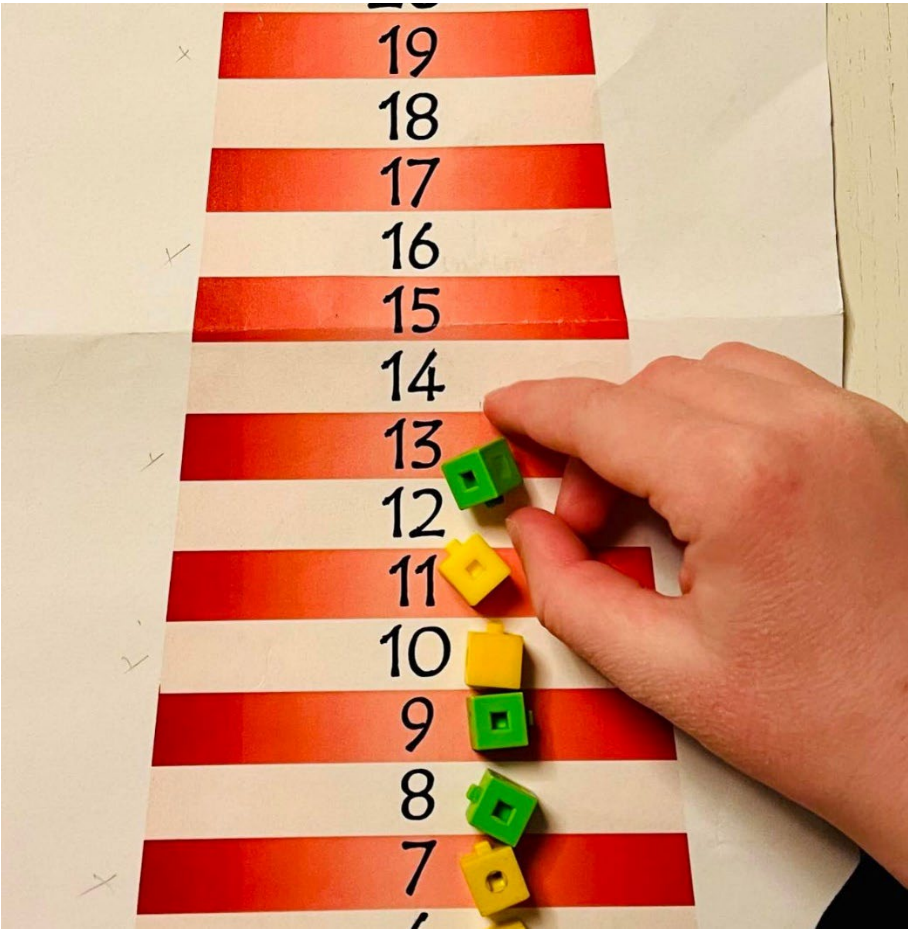
2.3 Matematikdidaktisk forskning i spil

Denne forskningsinteresse har især udspring i forskningsfeltet matematikdidaktik, hvor en række forskere har en faglig interesse for spil i forhold til matematikundervisning. Et godt eksempel er den franske matematikdidaktiske teori om didaktiske situationer og den didaktiske kontrakt (Brousseau, 1997), hvor spil bruges som metafor til at beskrive fundamentale situationer, der løses gennem vindende strategier (Misfeldt & Hanghøj, 2016). Forskningsinteressen er tæt knyttet til antagelser om, at spil kan udfylde en væsentlig rolle i matematikundervisning og læring af matematik (Mosimege, 1998, s. 284), og bygger på argumenter om, at spil bør være en del af matematikundervisningen (Greenes, 1975; Koay, 1996). Dette kan bl.a. føres tilbage til psykologen og matematikeren Z.P. Dienes (1963), der foreslår, at al matematiklæring bør begynde med spil (Ernest, 1986), og argumenterer for, at spil har en væsentlig rolle i forhold til matematiklæring, især i forhold til analyse af 'regelbundne lege' (Dienes, 1963). Omdrejningspunktet i denne forskningsinteresse er først og fremmest matematikundervisningen. I denne kan spil forstås og bruges som ressource (Monaghan, 2016) og som didaktisk redskab for matematiklæreren til at facilitere elevers læring og tænkning i klasserummet (Monaghan, 2016). På den måde forstås spil primært som et redskab, der komplementerer den eksisterende matematikundervisning, og ikke som en erstatning eller isoleret undervisningsaktivitet (Cruickshank & Telfer, 1980).

Der er lavet empiriske studier med denne interesse ved brug af analoge matematikspil (Ernest, 1986) og abstrakte strategispil (McFeetors & Palfy, 2018), men også digitale læringsspil (Gresalfi, 2015; Mauntel et al., 2021). Der er en lang tradition for at lave undervisningsmaterialer, der viser, hvordan spil kan være en del af matematikundervisningen (Smith, 1912) fx til at udvikle talkonceptet (Drummond, 1922) eller som en hjælp til at undervise i matematisk logik (Rosenbeug, 1962). Mosimege (1998) nævner studier fra 1969-1995, der bruger spil i matematikundervisningen til forskellige formål som at udvikle elevernes matematiske ordforråd, matematiske evner, mentale matematikformåen og problembehandlingsstrategier og til at skabe matematisk aktivitet på en lang række forskellige måder.

En måde, hvorpå spil er relevant for matematikundervisningen, er i forhold til at arbejde med elevers vinderstrategier, hvor antagelsen er, at de motiveres af at blive eksperter i spillet (McFeetors & Palfy, 2018). Spørgsmålet er dog, hvorvidt der reelt kan sættes lighedstegn mellem at blive ekspert i et spil og at blive ekspert i strategier i selvsamme spil. Som Monaghan (2016) påpeger, er refleksion over og validering af strategier ikke nødvendigvis en del af det at spille et spil, da valideringen ofte er en del af selve spillet, i form af om man vinder eller ej. Feltet er desuden kendetegnet ved spilanalyser, der rettes mod at forstå matematiske læringspotentialer i analoge spil, der primært anskues som matematiske systemer (Bewersdorff, 2021). Spilanalyserne belyser matematiske begreber i konkrete spils design, og hvordan det er muligt at arbejde didaktisk med disse (Peter Vankúš, 2013). Der er også en interesse for at undersøge, hvordan kommercielle digitale læringsspil kan bruges til matematiklæring (Lowrie & Jorgensen, 2015b), fx hvordan lærere skal vælge mellem digitale apps til matematiklæring (Gresalfi, 2018; Larkin, 2015a).

Eet konkret eksempel fra denne forskningsinteresse er spillet *Race to 20* (Brousseau, 1997). Jeg fremhæver dette eksempel, da det knytter udvikling af vinderstrategier i spil til en matematikdidaktisk teori, teorien om didaktiske situationer (Brousseau, 1997). Dermed er eksemplet med i udviklingen, af det måske mest velbeskrevne matematikdidaktiske argument, for at arbejde med vinderstrategier i spil og er et referencepunkt matematikdidaktiskforskning i spil (Mauntel et al., 2021; Monaghan, 2016). Der er forskellige variationer af spillet *Race to 20*, der kaldes *Nim*-spil (Bewersdorff, 2021). I spillene skiftes spillerne til at fjerne et bestemt antal objekter (fx én eller to tændstikker) fra en pulje med et bestemt antal (eller tilføje, indtil antallet nås). Målet er så enten ikke at tage eller netop at tage det sidste objekt. Figur 2.2 herunder viser et aktivitetsark til en variation, der hedder *Fyrtårnet*, som Bundgaard et al. (2022) har brugt i forbindelse med at undersøge indskolingselevers udvikling af matematisk ræsonnement. I eksemplet fra Figur 2.2 herunder skiftes to spillere til at lægge én eller to centicubes for at se, hvem der rammer 21.



Figur 2.2: Fyrtårnet (Bundgaard et al., 2022) *– en aktivitet til at arbejde med ræsonnements-cyklussen* (Artikel 1; NCTM, 2008) *i indskolingen.*

Spillene er strategispil, der kan gennemanalyseres, og dermed er der en vinderstrategi, der kan sikre, at startspilleren vinder. I *Fyrtårnet* kan 21 deles med 3, så vinderstrategien er at ramme et tal i tretabellen, da man derved kan kontrollere, hvem der lægger den sidste centicube. Hvis du fx har lagt centicube nr. 18, kan du lægge den sidste centicube, uanset om din modstander lægger én eller to centicubes. Hvis du lægger centicube nr. 15 kan du sikre dig at lægge centicube når. Osv. med nr. 12, 9, 6, og 3. Strategien forudsætter således, at modstanderen starter spillet. Brousseau (1997) bruger *Race to 20* som et generisk eksempel på en fundamental situation og bruger spillet til at illustrere og udvikle flere aspekter af teorien om didaktiske situationer. Her indgår spillet *Race to 20* som en situation, hvor eleven kan arbejde selvstændigt og udvikle strategier til at 'løse' spillet. Lærerens rolle er at udlægge situationen for eleverne og understøtte deres arbejde med deres hypoteser i forhold til problemstillingen. Vekselvirkningen mellem elevernes undersøgelse af spillet og dialog med læreren er altså central i denne teori. *Nim*-spillene (inklusive *Fyrtårnet* og *Race to 20*) er 'løst' og endelige (jf. Tabel 2.1, afsnit 2.1) i den forstand, at der eksisterer matematiske løsninger til dem (Bewersdorff, 2021), en karakteristik, der minder mere om en lukket matematikopgave end spil.

Læreren er en central figur i forhold til at udvælge, anvende og evaluere brugen af spil i matematikundervisning, herunder både analoge og digitale spil (Ainley, 1988; De Holton et al., 2001; McFeetors & Palfy, 2018). Dette flugter med bredere generelle synspunkter inden for uddannelsesmæssig forskning om lærerens vigtighed for elevernes læring (Hattie, 2019). En problematik i forhold til at anvende digitale spil i undervisningen er især at finde kvalitetsspil, da de fleste matematiklæringsspil ikke sigter mod højere ordenstænkning (higher-order thinking), men mod visuelt appellerende træning af og øvelser med (Lowrie & Jorgensen, 2015a) matematiske færdigheder (Rothschild & Williams, 2015). Antallet af læringsapps er så stort, at det kan være svært for undervisere at vælge og vurdere kvaliteten af apperne (Gros, 2015). Fx finder Larkin (2015a), at der var 4.000 matematikapps i iTunes App Store allerede i 2012. Mange af dårlig kvalitet, med kun en lille gruppe apps, der potentielt er effektive til at hjælpe elever med matematisk udvikling (Larkin, 2015a). Det bekymrende er, at størstedelen af spillenes design sjældent opfylder de matematiske læringspotentialer, der udpeges i forbindelse med spil (Devlin, 2011). Som Lowrie og Jorgensen (2015a) udtrykker det, bliver de bedste egenskaber og kvaliteter ved spil (endnu) ikke brugt i de designede læringsspil. I stedet bliver der lavet træningsspil, der minder om digitale aktivitetsark, som ikke tilføjer noget nyt til traditionelle metoder (Gresalfi, 2018). En grund er, at mange simple edutainment apps bliver designet af folk uden uddannelsesbaggrund ud fra økonomiske interesser og sjældent baserer sig på teoretiske forståelser af matematiklæring (Larkin, 2015b). I et bidrag til et praksistidsskrift beskriver Gresalfi (2018), at selvom der er lovende forskningsresultater omkring spil i matematikundervisningen, så er næsten al udgivet forskning på området baseret på forskerdesignede spil, der ikke er bredt tilgængelige for praktikere, mens de spil, der er bredt tilgængelige, generelt ikke er baserede på eller genstand for forskning. Lærernes begrænsninger ved at bruge spil i matematikundervisningen er afhængige af måden, de opfatter spil og bruger spil på (Bell & Gresalfi, 2017), deres muligheder for at vælge brugbare digitale spil blandt mange digitale spil af dårlig kvalitet (Larkin, 2015a) og spillenes manglende forbindelse til læreplaner (Monaghan, 2016). Anbefalingen er, at når lærere vælger spil, skal de overveje, hvordan spillene kan integreres, fx om spillene gør noget andet, end læreren kan, eller forbedrer det, læreren i forvejen gør – de skal ikke erstatte læreren. Derudover skal læreren ved både valg og brug af spil fokusere på de matematiske mål (Gresalfi, 2018).

Selvom mange studier fra feltet er langt ældre end interessen for *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring* (se fx Bright et al., 1985; Cruickshank & Telfer, 1980), idet de undersøger brugen af analoge spil, findes der relativt få studier inden for denne interesse. Det har fx ikke været muligt at finde engelsksprogede reviews af forskning om analoge spil i matematikundervisningen. En pointe herfra står i nogen grad i opposition til antagelserne bag interessen for *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring*, der forsøger at identificere generelle effekter ved brug af spil i matematikundervisningen. Pointen er, at spil, læringsindhold og kontekst kan være så varierede, at det vil være vanskeligt at finde forskningsmæssigt belæg for, om spil som sådan er effektive til matematiklæring (Bright et al., 1985; Monaghan, 2016). Mousoulides og Sriraman (2014) peger på en række faktorer, der bør tages højde for, hvis spil skal bruges succesfuldt i matematikundervisningen. Dels må spil ikke være isolerede fra bredere matematikdidaktiske forståelser og spørgsmål og dels bør der være tydelige mål og pædagogikker, der forholder sig til interaktion mellem elever, lærer eller facilitatorrolle, tilgængelighed og brug af teknologiske værktøjer samt 'rige' problembehandlingskontekster. Dette er i modstrid med visse strømninger inden for *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring*, hvor fx All et al. (2016, 2021) argumenterer for at standardisere metoderne til at lave effektstudier og minimere instruktørens (eller lærerens) rolle i fremtidige studier for alene at forstå spillets effektivitet.

Forskning i spil og matematiklæring bliver nødt til at forholde sig til denne interesse, da den bedst udlægger brugen af spil gennem undervisning og den kompleksitet, det medfører. Det er dog væsentligt at have for øje, at spillene, der forskes igennem, er analoge strategispil eller digitale lærings- og træningsspil, og at forskningsinteressen især undersøger disse i forhold til snævre fagdidaktiske mål, og hvordan de bruges som didaktiske redskaber i matematikundervisningen. Jeg bidrager til denne forskningsinteresse ved tre ting. Først ved at afdække viden om hvorfor elever fravælger at deltager i matematikundervisning med spil (**Artikel 2**). Dernæst, ved at udvikle designprincipper og konkret undervisningsmateriale der tager udgangspunkt i at koble domæner indenfor og udenfor skolen (**Artikel 3** og **Artikel 4**). Sidst, ved at undersøge hvordan et digitalt underholdningsspil i matematikundervisningen kan understøtte at elever oplever nye perspektiver på matematik (**Artikel 3**).

2.4 Forskning i uformel matematiklæring i spil

Forskere fra forskellige forskningsfelter interesserer sig på forskellige måder for matematiske praksisser omkring spil. Den samlende faktor for, at jeg beskriver det som én forskningsinteresse, er, at det omhandler læring af matematik i forbindelse med spil, hvor læring ikke er intenderet gennem spil- eller undervisningsdesign. Dette er både en interesse fra forskere fra felterne spilforskning og matematikdidaktik i form af etnomatematik samt det konstruktionistiske læringsfelt og enkelte forskere, der siger mod at forstå uformelle praksisser i matematikundervisningen (Wisittanawat & Gresalfi, 2020).

Det er ikke en samlet interesse på tværs af disse felter, men mere nicher inden for forskellige felter, og det er meget forskelligartede bidrag, der ikke nødvendigvis relaterer sig til hinanden.

Når jeg beskriver denne forskningsinteresse, er det, fordi mit genstandsfelt går på tværs af formelle skolekontekster og uformelle fritidskontekster i den forstand, at matematisk aktivitet omkring spil i matematikundervisningen også relaterer sig til uformelle forståelser af spil og spilkultur. De uformelle matematiske aktiviteter om spil, der beskrives i denne forskningsinteresse, er aktiviteter, der er matematikholdige, matematikorienterede eller matematikinspirerede. Det er aktiviteter, der udspringer af børns spilaktiviteter, som har en form for matematikfagligt indhold. Men der er ikke nødvendigvis tale om aktiviteter, der er genkendelige fra matematikundervisningen, fx at finde arealet af en trekant eller modellere telefonregninger som en lineær funktion og lign.

For spilforskningsfeltet kan dette omhandle emner som, hvorfor spillere engagerer sig i spil (Deterding, 2013), hvordan mikrotransaktioner i et spil påvirker spiloplevelsen (Petrovskaya et al., 2021), og forståelser af motiver bag gambling (Savard, 2015). Et konkret eksempel på et fænomen, hvor matematisk læring opstår i relation til spil i fritidsdomænet, er theorycrafting (Debus, 2017; Nardi, 2010; Paul, 2011), hvor deltagere i interessedrevne og kulturelle fællesskaber omkring spil forsøger at forstå spil på mange forskellige måder. Termen theorycrafting er opstået i forbindelse med *Starcraft*-spilleres debatter om optimale strategier og tilgange, og det er senere blevet et udbredt fænomen i fx *World of Warcraft*-spillene (Paul, 2011). Fjell og Møllersen (2012) præsenterer et eksempel på theorycrafting fra *Starcraft.* I dette spil er rækkefølgen og timingen på opførelsen af bygningerne afgørende. Fællesskabet kommunikerer om sådanne strategiske beslutninger gennem den specialiserede repræsentation 'byggeordre', der rummer bygningens navn og tidsangivelsen for, hvornår den skal bygges. De matematiske aktiviteter, der opstår i sådanne kulturer omkring spil, er drevet af bestemte grunde til at spille spillene og indgå i sociale praksisser (Paul, 2011). En opsummerende forklaring kan lyde således: Spillerne lærer den matematik, der er relevant for dem i den måde, de ønsker at spille på, eller for at overkomme de udfordringer, de vælger i spillet. Feltet peger på, at den måde, børn spiller spil på inden for og uden for matematikundervisningen, ikke nødvendigvis er den samme, og at man ikke kan forvente, at børn engagerer sig på samme måde i et spil i undervisningen, som de gør i spil generelt (Siyahhan & Gee, 2018). Dernæst peger feltet på, at eleverne har eksisterende forståelser af spil, når de deltager i matematikundervisning med spil, hvilket kan være centralt for, hvordan de forstår matematikundervisningen, og noget, der potentielt både kan begrænse og skabe muligheder for læring.

Et konkret eksempel fra denne forskningsinteresse er spillet *The Sims* (Avraamidou et al., 2015). Jeg fremhæver dette eksempel, da det illustrerer en række problematikker, der kommer til syne, når elevers spil i fritiden undersøges med henblik på potentialet for matematikundervisningen. *The Sims* simulerer daglige hverdagsaktiviteter for én eller flere virtuelle avatarer i en forstad i en funktionel by. Avraamidou et al. (2015) undersøger, hvordan børn spiller dette spil med henblik på at udlede affordances for matematiklæring. På Figur 2.3 herunder vises et eksempel på et hus, som ”George og Maria” bygger med et bestemt budget, hvor de diskuterer, hvordan de skal bruge deres penge. De starter med at bygge et stort hus og opdager, at de ikke har råd til nødvendigt inventar som et toilet. Derefter laver de et overslag over, hvor meget de skal reducere størrelsen af deres hus for at få råd til det ønskede inventar.

Figur 2.3: Konstruktion af et hus i The Sims (Avraamidou et al., 2015).

Avraamidou et al. (2015) peger på en række problematikker i forhold til at forstå sådanne spils potentiale for matematikundervisningen. Først er det ikke sikkert, at spillerne arbejder med matematik, der er relevant for curriculum. Dernæst er det heller ikke sikkert, at elementer, der kunne være relevante, fx strategiske overvejelser, kan genkendes som værende matematiske, og derudover er langt størstedelen af de matematiske mekanikker i spillene ’usynlige’ eller skjult for spillerne. Der er dermed både brug for bedre forståelse af spillenes matematik, hvordan de kan bruges i undervisningen, og synliggørelsen af den matematik, der er i dem. Arbejdet med koordinatsystemet i **Artikel 3** og **4** er netop kun muligt, fordi man kan synliggøre spillerens koordinater i *Minecraft* og dermed have adgang til matematikken ’bag’ spillet.

Dernæst er der forskere fra et etnomatematisk perspektiv, der er optagede af forholdet mellem kultur og matematik (D’Ambrosio, 1999). Hvor tre studier (Bishop, 1991; Kørhsen & Misfeldt, 2015; Mosimege, 1998) identificerer matematik i spil i fritidskulturer, og hvordan spil som en del af fritidskultur kan give anledning til matematiklæring. Denne forskning undersøger, hvordan spil som et kulturelt og socialt fritidsfænomen kan medvirke til læring af matematik med potentialer for matematikundervisningen (Bishop, 1991; Devlin, 2011; Kørhsen & Misfeldt, 2015).

Ligeledes relaterer forskningsinteressen sig til en række konstruktionistiske studier (Kafai, 1993; Papert, 1980) med en tilgang til læring, der udspringer af uformelle kontekster som sambaskoler (Papert, 1980), computerklubber (Rusk et al., 2009) og børnehaver (Resnick, 2007, 2018). Her har bl.a. Kafai (1993) arbejdet med en konstruktionistisk tilgang til læring i undervisningen gennem elevdesign og programmering af spil. En tilgang, som senere er videreudviklet af Resnick (2003, 2012, 2018) konkret som forskning igennem programmet Scratch (https://scratch.mit.edu) (se fx Brennan & Resnick, 2012; Resnick, 2007). Konstruktionismen har dermed tydelige tilgange for den skolespecifikke kontekst, men er funderet i forståelser af frivillig deltagelse i sociale læringskulturer uden for matematikundervisningen.

Andre artikler beskæftiger sig med at forstå, hvordan spil, som de spilles af børn i fritiden, kan forstås som matematisk aktivitet (Avraamidou, 2017; Avraamidou et al., 2012, 2015; Lange & Meaney, 2019). Et par enkelte studier undersøger elevers oplevelse af spil i matematikundervisningen med opmærksomhed på uformel matematiklæring (Magnussen & Misfeldt, 2004; Wisittanawat & Gresalfi, 2020).

Wisittanawat og Gresalfi (2020) undersøger elevers oplevelser i matematikundervisningen gennem Goffmans begreber (1961) i et casestudie af elevers interaktioner med det digitale læringsspil *Adventure at Boone's Meadow*. Jeg vil især fremhæve dette studie, da jeg også bruger Goffmans begreber (1961) til at forstå elevernes deltagelse i matematikundervisning. Magnussen og Misfeldt (2004) finder, at elever kan spille læringsspil på måder, der ikke var intenderede af designerne, når de deltager i spillet med uformelle forståelser af spil. Wisittanawat og Gresalfi (2020) viser, at en elev interagerer med læringsspillet, som om det var et underholdningsspil, men da spillet reelt er designet som en matematikopgave med flotte animationer, rammer de strategier, eleven bruger, ved siden af spillets intention. I spillet skal der udregnes benzinforbrug til en flyvetur, hvorefter flyet skal flyves et bestemt sted hen. Eleven skipper hurtigt forbi udregningen, men forsøger at flyve på en måde, han tror, vil reducere benzinforbruget. Spillet er dog designet sådan, at det er udregningen, som helt og holdent afgør, hvorvidt flyveturen lykkes, og den del, hvor eleven flyver, er blot en animation. På den måde er spillet primært en matematikopgave med animation. For at eleven skal have succes med spillet, skal han derfor tolke spillet som en tekstopgave og ikke som et spil. Wisittanawat og Gresalfis (2020) pointe er, at den måde, eleven forsøger at spille spillet på, rummer en del matematisk aktivitet, men at den er anderledes, end designerne af læringsspillet forestillede sig. Dette leder til to indsigter. For det første: Når elever præsenteres for et spil i undervisningen, vil nogle elever spille spillet, som om det faktisk er et spil, og validere deres oplevelse igennem dette. For det andet: Sådan en måde at interagere med spil på kan i nogle tilfælde også forstås som matematisk aktivitet. Pointen her er, at det er centralt, at forskere, spiludviklere og undervisere forholder sig til betydningen af elevernes spilopfattelse i matematikundervisningen.

Min beskrivelse af forskningsinteressen fokuserer især på at spil forstås som et kulturelt og socialt fænomen, dvs. som en frivillig aktivitet med deltagere, såvel som et kulturelt artefakt, der indeholder regler. Feltet svarer dermed på, hvad matematiske spilleaktiviteter er i fritiden. Til matematikundervisningen bidrager dette med begreber for, hvordan elever potentielt kan opleve gyldighedskriterier fra spildomænet (Hanghøj, 2012). Dette sker gennem forståelser af elevers deltagelse i spil som matematisk gennem et 'spiller som deltager-perspektiv' og ved at undersøge elevers og børns interaktioner med spil i fritiden (Avraamidou et al., 2015; Kørhsen & Misfeldt, 2015). Feltet stiller i forlængelse af dette spørgsmål til, om matematiske koncepter i spil reelt er synlige for spilleren (Avraamidou et al., 2015) eller kun opfattes som matematisk aktivitet af den observerende forsker (Kørhsen & Misfeldt, 2015).

Interessen adskiller sig markant fra de andre to felter, ved at undersøgelserne ikke omhandler intenderet eller designet læring, men mere uformelle matematiske processer. En pointe er, at de spil, der spilles i fritiden, ikke én til én kan sammenlignes med de spil, der spilles i klasserummet. Når fx Devlin (2011) og Gee (2003) beskriver potentialerne i spil, omhandler det titler, der typisk kaldes AAA games (triple A games), fx *World of Warcraft*, der har store udviklings- og markedsføringsbudgetter og tager mange år at udvikle. Der er ingen spil udviklet til læring, der er i nærheden af at have sådanne ressourcer, hvilket skaber ulighed i forhold til sammenligning.

En komplementær forståelse af spil som både regler og systemer samt social interaktion (Salen & Zimmerman, 2011) er en helt central del af, hvordan spil repræsenteres fra dette felt. Det betyder, at spil er noget, og at det har betydning for nogen, inden det bliver introduceret i matematikundervisningen. Interessen for *forskning i uformel matematiklæring i spil* er med til at belyse, hvad dette *noget* er, og hvordan det kan påvirke brugen af spil i matematikundervisningen. Denne komplementære spilforståelse, der anerkender, at eleverne har uformelle oplevelser med spil med sig, når de deltager i matematikundervisningen, bliver på mange måder overset af de to andre forskningsinteresser. På den måde bidrager interessen for *forskning i uformel matematiklæring i spil* med et indblik i, hvordan elevernes deltagelse i matematikundervisningen med spil er rammesat fra elevernes perspektiv. Forskningsinteressen er således især optaget af at forstå uformel matematiklæring gennem spil som fritidsfænomen.

Jeg har fundet det nødvendigt at forholde mig til denne forskningsinteresse, da den bedst udlægger brug af underholdningsspil og bidrager med teoretiske forståelser af, hvordan deltagelse i spil opleves af elever i mere end rent faglig forstand. Det er dog væsentligt at have for øje, at denne interesse ikke er udtryk for en form for samlet vidensbase, men i højere grad er fragmenterede forståelser af uformelle matematiske aktiviteter. Samtidig er der stor usikkerhed forbundet med at sammenligne uformelle spilpraksisser med formel deltagelse i undervisning. Jeg bidrager til denne forskningsinteresse, ved at vise hvordan perspektiver og resultater fra denne forskningsinteresse kan bruges analytisk og præskriptivt i forhold til matematikundervisning. Dels ved at vise hvordan elevernes hverdags erfaringer med spil kan være udgangspunkt for at designe undervisning (**Artikel 3**). Dels ved at supplere eksisterende resultater (Magnussen & Misfeldt, 2004; Wisittanawat & Gresalfi, 2020) der afdækker hvordan eleverne oplever at deltage i matematikundervisning med spil (**Artikel 2**).

2.5 Afhandlingens relation til det samlede felt

Til det samlede felt adresserer ph.d.-projektet, at der er begrænset viden om hvordan elever oplever at deltage i matematikundervisningen med spil som en social aktivitet. Dvs. at der sjældent tages højde for elevernes erfaringer med spil fra hverdagen. Dernæst stiller min opdeling af de tre forskningsinteresser og spilkarakteristikkerne spørgsmålstegn ved hvilke aspekter der kan generalises på tværs af feltet. I det scenariedidaktiske perspektiv peger jeg videre på at kombinationen af *matematikdidaktisk forskning i spil* og *forskning i uformel matematiklæring i spil,* er relevant i forhold til at undersøge ph.d.-afhandlingens formål og for fremtidig forskning rettet mod dette. Ph.d.-projektet trækker tydelige tråde til disse to forskningsinteresser og et centralt bidrag til det samlede felt er, at jeg bidrager med viden om hvordan indsigter fra disse to forskningsinteresser, kan (og bør) kombineres i fremtidig forskning. Dette uddyber jeg i diskussionen af resultaterne (Kap 6) i forhold til hvordan sociale aspekter af elevers spildeltagelse i matematikundervisningen kan præciseres og hvordan forskere kan designe undersøgende og meningsfuld matematikundervisning med spil, der knytter an til elevers hverdagsforståelser.

Kapitel 3 - forskningsdesign

I afhandlingen anvender jeg en interventionistisk tilgang til at undersøge, hvordan elever oplever at deltage i matematikundervisning med spil. Jeg forstår min tilgang som en kombination af funktionel og metodologisk pragmatisme (Goldkuhl, 2012). Funktionel pragmatisme i den forstand, at jeg både har interesse for, 'hvad der er', og 'hvad der kunne være', og videre, at et mål for afhandlingen er at producere viden, der kan influere og forbedre undervisningspraksis. Metodologisk i den forstand, at jeg intervenerer i praksis gennem eksperimenter og ser mig selv som medskaber af data. Hvilket konkret sker gennem Design-Based Research-metodologi (DBR) (Bakker & van Eerde, 2015; Collective, 2003; Gundersen, 2021).

Min forskningsinteresse er især, hvordan elever oplever at deltage i matematikundervisningen i et spændingsfelt mellem forståelser af fag, deltagelse i undervisningen og hverdagsforestillinger om spil. For at undersøge denne erkendelsesinteresse har jeg lavet et litteraturreview **Artikel 1**, to empiriske studier baseret på undervisningsinterventioner, interviews (**Artikel 2** og **Artikel 3**) samt en fagdidaktisk spilanalyse (**Artikel 4**), der udmønter sig i tre konkrete undervisningsdesign med inddragelse af spil i matematikundervisningen.

Jeg anvender pragmatisme som et videnskabsteoretisk fundament til at forstå designinterventioner i GBL21- og SIS-projektet som valide undersøgelsesmetode og samtidig som kontekster, der kontinuerligt konstrueres i mit møde med dem. Den form for viden, jeg skaber, forstår jeg som relationel og konstrueret mellem mine handlinger og konsekvenserne af disse og derfor også afhængig af mig som observatør (Dewey, 2005). På linje med Dewey (2005) er min opmærksomhed rettet mod den 'virkelighed, som mennesker lever deres liv i', og jeg ser ikke en dualistisk forskel mellem en sand virkelighed på den ene side og de ideer og begreber, vi bruger til at tænke om virkeligheden med, på den anden side (Biesta & Burbules, 2003; Dewey, 2005). Som forsker er jeg ikke tilskuer til en fuldendt og færdiggjort verden, men deltager i en verden i stadig forandring (Dewey, 2005). Den kontekst, jeg undersøger igennem, er ikke et udtryk for, hvordan matematikundervisningen ser ud over en bred kam, men hvordan de konkrete situationer folder sig ud i GBL21- og SIS-projektet med mig som en medkonstruerende del af situationerne.

Det giver især mening for mig at se min vidensproduktion igennem pragmatismen, fordi jeg forstår matematikundervisning som en *designvidenskab*, hvor den samlede mission involverer "at udvikle, teste og revidere foreslåede design til at understøtte forestillede læringsprocesser" (Cobb, 2007, s. 7). Dette kan foregå på forskellige niveauer, fx et nationalt curriculum-niveau, et skoleniveau eller kommunalt niveau eller i et klasserum (Cobb, 2007). Dermed er den bærende intention for min afhandling at forandre matematikundervisningen og gøre den mere meningsfuld for eleverne. Pragmatismens relevans i forhold til dette er, at den sætter menneskelige handlinger og forandring i en verden under konstant forandring centralt for forståelsen af vidensskabelse (Goldkuhl, 2012). I dette perspektiv søger jeg at skabe, hvad Goldkuhl (2012) betegner *konstruktiv viden*. Denne form for viden begrænser sig ikke til forklaring og forståelser, men rummer andre former for viden som præskriptiv viden, fx at give retningslinjer, normativ viden, fx at udvise værdier, og prospektiv viden, fx at foreslå muligheder. På den måde er jeg ikke blot interesseret i at afdække, hvad der er, men også optaget af, hvad der kunne være (Goldkuhl, 2012). Dette er tydeligt i designprincipperne, jeg udvikler i **Artikel 3**, samt undervisningsforløbene i **Artikel 4**, som jeg ser som eksempler på, hvordan konstruktiv viden appliceres gennem design og derfor integrerer præskriptiv, normativ og prospektiv viden (Goldkuhl, 2012).

Jeg indsamler empiri gennem SIS-projektet og GBL21-projektet, der begge er funderet i DBR (Collective, 2003) og interventionistiske tilgange til at forske i undervisning. Metodologien i afhandlingen er dermed inspireret af en designbaseret tilgang til uddannelsesforskning (Cobb, 2007; Collective, 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006). DBR er udviklet inden for forskellige uddannelsesmæssige forskningssammenhænge, fx matematikdidaktik (Cobb et al., 2001; Fowler et al., 2022) og spilbaseret læring (Squire, 2005), ofte med afsæt i pragmatisk videnskabsteori (Barab & Squire, 2004). Én af de centrale antagelser i DBR er, at konteksten, lærerne og eleverne alle har betydning for at man kan forstå de læreprocesser, der finder sted gennem en intervention (Fowler et al., 2022). DBR kombinerer to mål: 1) at udvikle og forbedre undervisning og læring inden for specifikke områder samt 2) at generere teoretiske bidrag gennem empirisk forskning i disse områder (Prediger, 2019). Kombinationen af at udvikle, undersøge og forbedre design har været udgangspunktet for mit arbejde. Konkret har jeg udviklet og undersøgt et undervisningsdesign om *Minecraft* i matematikundervisningen gennem SIS-projektet, hvilket har været omdrejningspunkt for **Artikel 3** og **Artikel 4**. samt en tredje konferenceartikel (Jensen & Hanghøj, 2019). Dertil har jeg deltaget i videnskortlægning for GBL21-projektet, hvor jeg har produceret én af afhandlingens artikler **Artikel 1**. Endelig har jeg deltaget i GBL21-interventionerne som forsker, hvilket også dannede ramme for produktion af **Artikel 2** samt en yderligere udgivet artikel (Jensen & Andreasen, 2020) og en række manuskripter (A, B og C).

3.1 Empirisk tilgang i interventionerne

Afhandlingens tilgang til empiri har været under kontinuerlig udvikling og skærpelse i forhold til at undersøge og forfølge min erkendelsesinteresse (Goldkuhl, 2012). Jeg ser interventionerne som en kontekst, jeg prøver at lære igennem, men det er også en kontekst, jeg intervenerer i ved design af undervisning og metodeudvikling. Jeg forstår min tilgang til empiri og dataindsamling i interventionerne som formet af en gensidig proces mellem intervention og min forståelse af konteksterne, der interveneres i. Derfor vil jeg herunder udlægge mine overvejelser om empiri i forbindelse med GBL21- og SIS-projektets interventioner.

Konteksten for min dataindsamling i SIS-projektet var et samarbejde med to matematiklærere på en skole, der havde deltaget i det. Med lærerne udviklede jeg et *Minecraft*-undervisningsforløb til matematikundervisningen. Over en uge fulgte jeg forløbet tæt og interviewede elever og lærer efterfølgende.

Konteksten for min dataindsamling i GBL21-projektet var fire (planlagte) GBL21-interventioner i matematikundervisningen på 5. til 6. klassetrin. Her samarbejdede jeg med deltagende lærere fra udvalgte projektskoler om at gennemføre interventionerne, der viste sig at være forholdsvis komplekse for lærerne, hvor koblingen af designkompetencer og matematiske kompetencer (Niss & Jensen, 2002) samt brugen af spilredskaber og designtænkning som didaktisk ramme var udfordrende. GBL21-projektet var særligt velegnet til at undersøge elevers situerede spilaktiviteter, og hvordan erfaringer uden for skolen koblede (eller ikke koblede) med faglige domæner, da forløbene tog udgangspunkt i, at eleverne skulle designe eller redesigne spil. Min indledende hypotese var, at elevernes position som designere i forløbet ville skabe gode vilkår for at undersøge, hvordan deres erfaringer med spil uden for skolen kunne kombineres med indhold og aktiviteter fra det matematikfaglige domæne. Dataindsamlingen i GBL21-projektet var dog udfordret af COVID-19 og skolelukninger, hvorfor mine planlagte observationer og interviews gentagne gange blev afbrudt eller udskudt. Reelt fulgte jeg således kun to af de planlagte interventioner og lavede en pilotafprøvning af *Hungry Higgs*-forløbet på en skole. Det endelige omfang af de indsamlede data er dermed en kombination af min indledende erkendelsesinteresse, en løbende udvikling af forståelse gennem interventionerne, og hvad der af rent praktiske grunde var muligt.

I forhold til det matematikfaglige domæne var jeg i GBL21-forløbene især optaget af at forstå, hvordan eleverne kunne udvikle matematisk ræsonnement (NCTM, 2008). Jeg designede derfor forskellige udkast til, hvordan lærerne kunne arbejde i forløbene, som jeg præsenterede for og diskuterede med dem. Dette arbejde gjorde mig opmærksom på forskellige former for argumentation bag elevræsonnementer, der spændte fra valide matematiske argumenter til fx magt eller autoritet (García-Carrión & Díez-Palomar, 2015). Og at elevernes oplevelser af sandsynligheden i forhold til spillet bestod af ikke bare teoretiske og statistiske, men også subjektive sandsynlighedsforståelser (Jones et al., 2007). Feltarbejdet pegede dermed på, at 'spillet (og spil) som domæne' samt det 'at spille spillet' som en socialt situeret aktivitet på mange måder blandede sig med de matematiske praksisser, som forskere og lærere forventede, at eleverne indgik i. For eksempel når eleverne skulle finde på ideer til redesign af spil og henviste til 'verdens sjoveste spil', som de havde prøvet i weekenden (Manuskript A). Eller når eleverne valgte at redesigne et topersonersspil til et to-til-seks-personers-spil med begrundelsen, at topersonersspil var ekskluderende i frikvartererne og førte til svære sociale valg (Manuskript C). Andre elever valgte at ignorere matematikken i et spil, så alle kunne være med, når det ikke bare handlede om, hvem der var god til matematik (**Artikel 2**).

Parallelt med feltarbejdet arbejdede jeg med videnskortlægning for GBL21-projektet i form af **Artikel 1**, der undersøgte eksisterende viden om matematisk ræsonnement og digitale spil. Her fandt jeg studier, der beskrev, hvordan eleverne spillede på uforudsete måder i interventionerne (Ke, 2019; Pareto, 2014). Disse studier inkluderer dog ikke analyser af elevernes hverdagserfaringer med og forståelser af spil i forhold til at forstå deres deltagelse i matematikundervisningen. Ligeledes var de digitale spildesign i primært studierne i **Artikel 1** primært rettet mod at få eleverne til at tilpasse sig designet. Det var ikke spildesign, der eksplicit tog udgangspunkt i elevernes hverdagsforståelse af spil. På den måde bliver elevers forforståelse af spil ikke et referencepunkt for forståelsen af, hvordan eleverne deltager i matematikundervisningen, eller af, hvordan interventionerne blev designet. Dette ser jeg fra et scenariedidaktisk perspektiv som et videnshul i forhold til at forstå matematikundervisning med spil ud fra et perspektiv, der sigter mod kontinuitet i elevers erfaringer på tværs af uformelle og formelle skolekontekster (Dewey, 2005). Dette blev et udgangspunkt for **Artikel 2**, der i stedet for at drage paralleller til primært studierne i Artikel 1 bidrager ved at vise, hvorfor elever fravælger at deltage som intenderet i matematikundervisningen.

På baggrund af fund fra feltarbejdet og mit arbejde med **Artikel 1** skærpede jeg min opmærksomhed mod at forstå matematisk ræsonnement i forløbene som knyttet til elevernes socialt situerede spilpraksisser. Det interessante ved at forstå spil i matematikundervisningen ud fra et situeret perspektiv er, at det giver anledning til at undersøge specifikke former for validitet, forklaringer og begrundelser. Her bliver især brydninger mellem den logiske matematikfaglige tilgang til spil og den æstetiske og sociale ramme, tydelige i forhold til, hvordan elevernes spiloplevelser er knyttet til faget matematik eller praksissen at spille spil (**Artikel 2**). Elevernes perspektiver på spil blev derfor væsentlige at undersøge for at forstå, hvordan eleverne indgår i faglige praksisser omkring at designe, spille og reflektere over spil i undervisningen.

Igennem min empiriindsamling blev det yderligere tydeligt, at kompleksiteten i GBL21-projektet til dels bestod af, at projektets deltagere havde forskellige opfattelser og forståelser af matematikundervisning med spildesign. Dette var ikke kun tilfældet med forskellige lærere, men også elever, konsulenter og forskere. På den måde formede mit arbejde med GBL21 mit valg af teoretisk perspektiv, da de problematikker, jeg oplevede, kaldte på et didaktisk perspektiv, der adresserer, at deltagere i undervisning forstår deres deltagelse forskelligt. Det gav konkret anledning til at antage et perspektiv, der kobler en scenariedidaktisk forståelse af undervisningen, Deweys forståelse af læring og Goffmans forståelse af deltagelse i spil.

I relation til SIS-projektet brugte jeg interviewdata fra en tidligere konferenceartikel om designinterventioner med *Minecraft* og matematikundervisningen (Jensen & Hanghøj, 2019) til at uddybe det scenariedidaktiske perspektiv. Disse interviewdata kredsede om elevers oplevelser af spil i undervisningen, og hvordan de er påvirkede af oplevelser uden for undervisningen – men med fokus på computerspil i stedet for brætspil. Dette uddybes i **Artikel 3** og videre i **Artikel 4**, der udvikler og beskriver didaktiske og praktiske principper samt konkrete undervisningsdesign med computerspil i matematikundervisningen.

I de følgende afsnit vil jeg redegøre yderligere for de metoder, som jeg har anvendt til at undersøge spil og matematiklæring: litteraturreview (**Artikel 1**), interview (**Artikel 2** og **Artikel 3**) samt fagdidaktisk spilanalyse (**Artikel 4**). Metoderne er i nogen grad beskrevet i artiklerne men for at højne ph.d.-afhandlingens transparens, tilføjer jeg herunder detaljer og refleksioner, der er udeladt i artiklerne grundet pladsbegrænsninger i journal- og bogkapitel-formaterne.

3.2 Litteraturreview

Et centralt element i min afhandling er kortlægning af viden om matematik og læring i spil, hvilket især kommer til udtryk gennem et kvalitativt systematisk litteraturreview om matematisk ræsonnement i digitale spil (Artikel 1). Udover dette bidrager jeg som medforfatter på et systematisk litteraturreview (Hussein et al., 2021), der tager afsæt i *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring* og undersøger læringseffekter af digitale spil.

Artikel 1 er startet som et forberedende studie i forhold til GBL21-projektet for at understøtte arbejdet med matematisk ræsonnement gennem spil i matematikundervisningen. Derfor sigter reviewet ikke mod at forstå spil og matematiklæring generelt, men efter at forstå, hvordan et læringsmiljø med digitale spil kan støtte elevers udvikling af matematiske ræsonnementer. Forskningsspørgsmålet for **Artikel 1** er:

- How do DGBLE's afford primary and lower secondary students' learning of mathematical reasoning?

DGBLE er min betegnelse for 'Digital Game-Based Learning Environments', og spørgsmålet retter sig derfor ikke kun mod, hvordan digitale spil, men også konteksten, de spilles i, understøtter matematisk ræsonnement. Dette fokus er begrundet i, at matematisk ræsonnement anses som en central matematisk kompetence både i dansk og international sammenhæng (CCSSM, 2010; Dingman et al., 2013; Niss & Højgaard, 2019). Tidligere forskning viser, at analoge spil har et potentiale i forhold til at støtte elevers matematiske ræsonnementer (McFeetors & Palfy, 2018; Stein & Burchartz, 2006) og logiske tankeprocesser (Bright et al., 1983; Mosimege, 1998). Begrundelsen for reviewet var derfor at undersøge, om lignende potentialer var gældende for digitale spil. Videre var jeg interesseret i at forstå, hvilke spil og undervisningstilgange der kunne understøtte matematisk ræsonnement. Derfor var den kvalitative tilgang til reviewet gunstig for at undersøge dette, da mit fokus var at udvikle en forståelsesramme.

Jeg beskriver **Artikel 1** som et kvalitativt systematisk review, men da denne term rummer både fortolkende og systematiske aspekter, kan det være en problematisk betegnelse, da disse kan ses som fundamentalt forskellige tilgange til reviewet (Greenhalgh et al., 2018). Kvalitativt systematisk review kan bruges til at beskrive et review, hvor primærlitteraturen udelukkende er kvalitative studier (Grant & Booth, 2009), hvilket også benævnes kvalitativ evidenssyntese (Higgins et al., 2022). Bortset fra, at **Artikel 1** ikke kun ser på kvalitative studier, er metoden lig beskrivelsen af kvalitativt systematisk review hos Grant og Booth (2009). Den systematiske del af **Artikel 1** refererer til søgning og udvælgelse af litteratur, der kendetegnes ved stringens i søgekriterier med sigte på en udtømmende søgning og grundig afrapportering af de tekniske dele af søgeprocessen, så den fremstår transparent og replicérbar for andre. Analysedelen baserer sig på tematisk analyse (Braun & Clarke, 2006), drevet af teori om affordance (Gibson, 1977) og matematisk ræsonnement (NCTM, 2008), der udmøntes i en kvalitativ syntese med fokus på identifikation af temaer og tendenser på tværs af et datamateriale. I den forstand vil en mere præcis betegnelse af **Artikel 1** være en systematisk litteratursøgning med kvalitativ analyse og syntese.

Artikel 1 undersøger et specifikt matematisk område, matematisk ræsonnement, der anses som et centralt og væsentligt område for matematikundervisningen både set gennem læreplaner og fra et matematikdidaktisk forskningsperspektiv. Dette er i kontrast til størstedelen af andre reviews om digitale spil og matematikundervisningen, der undersøger effekter for matematik bredt (Byun & Joung, 2018; Divjak & Tomić, 2011; Hussein et al., 2021; Kacmaz & Dubé, 2021; Pan et al., 2022; Tokac et al., 2019). En undtagelse her er Carvalho et al. (2016), der undersøger 'math literacy'. Når Artikel 1 på den måde undersøger et specifikt fagligt fænomen som matematisk ræsonnement, har det begrænset udsagnskraft i forhold til spil og matematiklæring mere generelt. Til gengæld kommer det mere i dybden med matematisk ræsonnement.

3.3 Interview

Den primære empiri, der anvendes i **Artikel 2** og **Artikel 3**, er indsamlet gennem semistrukturerede forskningsinterview (Brinkmann & Kvale, 2015) samt en variation af det semistrukturerede forskningsinterview, som jeg betegner 'spileliciteringsinterview'(Jensen & Andreasen, 2020), med elever i 5. klasse. I begge tilfælde er det gruppeinterview med de grupper, eleverne har arbejdet med i undervisningen.

Jeg har brugt interview til at indsamle data, fordi jeg har en interesse i elevernes erfaringer og oplevelser fra samt meninger om (Tanggaard & Brinkmann, 2020) deltagelse i matematikundervisning med spil. Målet med at bruge interview er dermed at komme tæt på elevernes oplevelse af at deltage i undervisningen, samt klarlægge hvordan deres erfaringer uden for skolen opleves relevante eller ikke relevante for matematikundervisning med spil. Det betyder, at jeg har en særlig interesse for elevers normer og værdier i forhold til at spille og deltage i matematikundervisningen. Især i forhold til det scenariedidaktiske perspektiv, der forstår, at forskellige domæner har relevans for, hvordan eleverne oplever undervisningen. Jeg har valgt interview som en primær forskningsmetode til at generere empiri, da metoden er effektiv til at kaste lys over deltageres erfaringer og potentielt lader deltagerne komme til orde med deres egne fortællinger (Tanggaard & Brinkmann, 2020). Jeg forstår interviewet som en situation, der kan sige noget om fænomener uden for interviewet, men også som en socialt konstrueret samtaleinteraktion, der kan skabe nye oplevelser, der ikke fandtes hos deltagerne før interviewet (Tanggaard & Brinkmann, 2020). På den måde er interviewet i sig selv også en situation, der kan give anledning til ny læring hos eleverne.

Jeg har anvendt forskellige metodiske tilgange til interview og forskellige analysestrategier i **Artikel 2** og **Artikel 3**, som jeg vil beskrive her. Datagrundlaget for **Artikel 3** er konstrueret gennem semistrukturerede interview (Brinkmann & Kvale, 2015) med seks grupper af to elever foretaget på skole A i forlængelse af SIS-projektet. Til disse interview anvendte jeg en interviewguide (Bryman, 2015), der indeholdt spørgsmål til interventionen gennem fire kategorier: 'elevernes overordnede oplevelser', 'forskelle og ligheder mellem interventionen og normalundervisningen', 'elevers oplevelse af matematik i interventionen' og 'deres oplevelse af *Minecraft* i interventionen'. I hver kategori var der primære spørgsmål og forslag til opfølgningsspørgsmål. Jeg havde en fleksibel tilgang til interviewguiden og vurderede i hvert enkelt interview, hvilke opfølgningsspørgsmål der var relevante at stille (Bryman, 2015). Alle interview blev optaget, transskriberet og analyseret gennem en teoretisk drevet tematisk analyse (Braun & Clarke, 2006), hvor teori om domæner (Hanghøj, 2012), matematiske identiteter (Cobb et al., 2009) og positioner i klasserummet (Hetmar, 2019) var fundament for at tematisere elevernes oplevelser af at deltage i matematikundervisning. Kodearbejdet og tematiseringer er lavet i programmet '*NVivo 11*'. Herigennem konstruerede jeg otte temaer. De tre centrale temaer 'At være god i matematik', 'Koblingen mellem omverdenen, *Minecraft* og matematik' og 'Andre deltagelsesmuligheder med *Minecraft'* har været udgangspunkt for Jensen og Hanghøj (2019) og **Artikel 3.**

Interviewdataene til **Artikel 2** er produceret på skole C og D i forbindelse med GBL21-projektet. Her anvendte jeg et 'spileliciteringsinterview' (Jensen & Andreasen, 2020), en form for interview, jeg har udviklet med inspiration fra fotoeliciteringsinterview (Harper, 2002). Fotoeliciteringsinterview er en interviewform, hvor billeder bruges til at få deltagernes fortællinger frem, og en metode, der understøtter samarbejdet mellem forsker og deltager. Det kan fx være fotos, som deltagerne selv har taget og udvalgt, som intervieweren bruger til at guide og stimulere deres svar i interviewet (Rasmussen, 2017). Spileliciteringsinterview tager udgangspunkt i elevernes designede spil, hvor de først præsenterer deres spil for intervieweren. Derefter spiller intervieweren og eleverne spillet, og til sidst bliver eleverne interviewet med udgangspunkt i den konkrete spiloplevelse gennem et semistruktureret interview.

Jeg ser metoden som en videreudvikling af det semistrukturerede interview til også at inkludere et eliciteringsaspekt. Jeg har udviklet metoden efter et pilotstudie på skole B, hvor jeg brugte elevernes redesignede eksemplar af *Hungry Higgs* til at tale om deres ræsonnementer for deres redesign. Min interviewmetode på skole C, D og E er således en kombination af det semistrukturerede interview og spileliciteringsinterviewet. Ved interview af børn kan metoden være medskabende til en kendt ramme i form af praksissen med at tale om et foto (eller her spille et spil), hvilket kan skabe tryghed (Rasmussen, 2017). Spileliciteringsinterviewmetoden er mit forsøg på at undersøge elevernes ræsonnementer gennem specifikke situationer i spillene og deres refleksioner over situationerne. Desuden er metoden inspireret af forskere, der deltager i spil sammen med informanter og stiller spørgsmål til dem undervejs for at forstå den faktiske spiloplevelse i fx rollespil eller med brætspil (Copier, 2007; Fine, 2002). Min intention med at udvikle metoden var at koble elevernes oplevede erfaringer og refleksion tættere til spillet som materiale og situation i interviewsituationen. I Jensen og Andreasen (2020) beskriver jeg tre elementer ved spileliciteringsinterviewmetoden som jeg har anvendt i de interviews, der ligger til grund for **Artikel 2**. Her var forståelser fra forskellige domæner tydelige. Først, når eleverne skulle forklare deres redesignede spilleregler til intervieweren, derefter, når et slag var slået, og et hold/en spiller skulle tage et valg, og sidst, når intervieweren spurgte ind til specifikke valg.

Min interviewguide var opdelt i to. Den første halvdel rettede sig mod spileliciteringen og bestod af afprøvning af spillet og refleksion over denne situation. Jeg brugte en specifik interviewguide under afprøvningen til at stille spørgsmål til specifikke situationer, fx

- Er det godt at stå her?
- Var det her et godt slag?
- Hvorfor gør du det?
- Hvorfor siger du ja?

Dernæst havde jeg en række spørgsmål, der rettede sig mod refleksion over deres redesignede spil, fx

- Kan I lave en bestemt situation, hvor der er et godt og et dårligt træk, der involverer én af jeres regler?
- Hvordan skal man tænke for at vinde? Kan man lægge en vinderstrategi? Er det anderledes end i normalt *Hungry Higgs*? Er der noget matematik i den måde, man skal tænke på?

Intentionen med det ovenstående var at spørge ind til ræsonnementer knyttet til specifikke opståede situationer og undersøge elevernes refleksioner om deres spil. Den anden del af interviewguiden var opbygget som et semistruktureret interview, der fokuserede på elevernes oplevelser af interventionen i undervisningen gennem tre kategorier: 'elevernes overordnede oplevelser', 'oplevelsen af at forklare og undersøge med matematik' og 'oplevelsen af at arbejde med at producere ideer'.

Begge dele af interviewguiden er tænkt fleksible som i et semistruktureret interview (Bryman, 2015).

I arbejdet med **Artikel 2** havde jeg mange data til rådighed, der var indsamlet på skole B, C og D. Jeg havde allerede brugt dele af dette datasæt i Jensen og Andreasen (2020) samt manuskript A og B. Yderligere planlagde jeg manuskript C, der også ville bruge data herfra. Som resultaterne i **Artikel 2** viser, så var der eksempler på, at eleverne ikke koblede viden mellem forskellige domæner. Min interesse med **Artikel 2** var derfor at undersøge hvorfor disse domænekoblinger ikke skete. Denne interesse forfulgte jeg ved at kode databidder, der indikerede, hvorfor elever positionerer matematikken i spillene som irrelevant, og samle dem i et tema. Min analysestrategi er således styret af begrebsdrevne koder (Tanggaard & Brinkmann, 2020) med en specifik interesse efter at forstå, hvorfor elever vælger at ignorere matematikken i spillene.

Formatet for **Artikel 2** var oplagt til at undersøge et enkelt tema fra datasættet fra skole B, C og D. Da **Artikel 3** især belyste temaer, hvor domænekoblinger skete, så jeg **Artikel 2** som en mulighed for at undersøge de tilfælde, hvor dette ikke skete. Yderligere er det intentionen, at Manuskript C i højere grad vil sigte efter at vise bredden i datamaterialet fra skole B, C og D. Derfor har det været intentionen, at **Artikel 2** skulle gå i dybden med analyse af ét tema. På den måde adskiller mine analysestrategier og interesser sig i de to studier. I **Artikel 3** var målet at kode et samlet datamateriale til et mætningspunkt og publicere på baggrund af de samlede konstruerede temaer. Hvilket bl.a. viser, hvordan elever laver positive koblinger mellem domæner. I **Artikel 2** var målet at undersøge et bestemt tema og forstå, hvorfor domænekoblinger ikke sker.

En begrænsning ved vægtning af interview er dog, at jeg ikke forholder mig eksplicit til observationsdata fra undervisningen, der i højere grad fungerer som bagtæppe for min forståelse af interviewdataene. Hvad mennesker siger, og hvad de gør, kan være meget forskelligt, og selvom interview kan give adgang til oplevelser, egne narrativer og erfaringer, er metoden følsom overfor deltagernes positionering i forhold til intervieweren (Deterding, 2013). En nærmere undersøgelse af interventionerne kunne derfor med fordel tage et ligeværdigt afsæt i observation fra undervisningen og interview og fx bruge triangulering af forskellige datatyper til at opnå større validitet (Kvale & Brinkmann, 2015). Ligeledes kan interviewsituationen være medvirkende til, at de interviewede får nye indsigter og konstruerer viden (Brinkmann & Kvale, 2015), hvilket gør det usikkert, om elevernes udtalelser i interviewene er udtryk for erfaringer fra undervisningen eller erfaringer fra interviewsituationen. Videre kan interviewmetoden medføre en risiko for, at deltagerne svarer ud fra egne interesser, fx for at fremstå i et bedre lys (Brinkmann & Kvale, 2015).

3.3.1 Dataoversigt

Dataindsamlingen er foregået på fem skoler (Skole A, B, C, D og E) i København og Hovedstadsområdet i forbindelse med undervisningsinterventioner i SIS- og

GBL21-projektet. Afhandlingens publikationer bygger på data fra specifikke forløb og skoler: én skole tilknyttet SIS-projektet (Skole A), hvor jeg har indsamlet data gennem et *Minecraft*-undervisningsforløb, to skoler tilknyttet GBL21-projektet (Skole C og D), hvor jeg har indsamlet data gennem et *Hungry Higgs*-undervisningsforløb, samt en pilotskole, der er rekrutteret gennem mit personlige netværk (Skole B), og hvor der er indsamlet data gennem en pilottest af *Hungry Higgs*-undervisningsforløbet. Udover dette har jeg indsamlet data på to skoler i GBL21-projektet i forbindelse med et strategispilsforløb (Skole E) og et forløb med *Scratch* og *Tangram* (Skole D og E). Disse interventioner blev dog afbrudt af nationale skolenedlukninger, og det er kun data fra *Minecraft*-forløbet og *Hungry Higgs*-forløbene, der er analyseret og brugt i afhandlingens artikler.

Dataene er opbevaret efter persondataforordningens retningslinjer (https://gdpr.dk/persondataforordningen/) og følger de gældende standarter på de dataansvarlige institutioner (KP og AAU). Lyd, video og transskriptioner er digitalt opbevaret og beskyttet bag kodeord. Video-, billed- og lydoptagelse af børn er af sensitiv karakter, og jeg har derfor haft en særlig opmærksomhed mod at sikre anonymitet og informeret samtykke. Jeg har overført video- og lyddata til kodeordsbeskyttet opbevaring samme dag, som det er blevet optaget, og slettet data fra lyd- og videooptager samtidig. I transskriptionerne har jeg sigtet mod at anonymisere deltagerne ved at ændre navne og sløre lokationer (Saunders et al., 2015). Derudover har jeg sløret ansigter, når jeg har publiceret og præsenteret billeder fra videodataene, fx i Jensen og Andreasen (2020). Saunders et al. (2015) argumenterer for, at fuld anonymitet i realiteten er svær at opnå, og derfor vil fx andre forskere og deltagere i GBL21, der er tæt på projektet, potentielt kunne genkende deltagere og lokationer. Saunders et al. (2015) præsenterer seks nøgleområder for anonymisering, hvor 'navn' og 'lokation' har været mest relevante i det her tilfælde. 'Religiøs og kulturel baggrund' samt 'familieforhold' har ikke været en del af dataindsamlingen og kan derfor ikke anonymiseres. 'Beskæftigelse' har jeg valgt ikke at anonymisere, da det ville være uhensigtsmæssigt ikke at skelne mellem elever og lærere. Udover dette har jeg sløret genkendelige træk ved billedmaterialer og bruger kun transskriberinger af lyd.

Tabel 3.1, Tabel 3.2, Tabel 3.3 og Tabel 3.4 er en oversigt over mine primære data fra *Minecraft*-forløbet og *Hungry Higgs*-forløbene. Pointen med tabellerne er at tydeliggøre, hvordan jeg har indsamlet dataene, hvilken form for data det er, hvordan jeg har analyseret dataene, og hvilke udgivelser dataene har bidraget til.

SIS-projektet – *Minecraft*-forløb – Skole A	
Deltagere	To 5.-klasser. To matematiklærere. (Frivillig deltagelse, de var ikke en del af det oprindelige SIS-projekt).
Tid og ud-strækning	Efterår 2016. Jeg deltager i 25 lektioner over en temauge.
Primær empiri	Seks semistrukturerede interview med elevgrupper (af to elever) foretaget efter interventionen. Deltagende elever var fra den observerede klasse. (I alt 12 elever). Interviewvarighed: ca. 30-50 min. Lyd optaget og transskriberet. Interviewfokus: oplevelse af matematikundervisningen og matematik i *Minecraft*-forløbet.
Sekundær empiri	Observation af undervisningen i en klasse med feltnoter. Arbejdsmøder med de deltagende lærere (før og under). Samt to semistrukturerede interview (efter) med lærerne individuelt.
Analyse	Deduktivt orienteret tematisk analyse af elevinterview ved brug af domænemodel (Hanghøj, 2011) og sociomatematiske identiteter (Cobb et al., 2009).
Empiri bruges i Artikel	(Jensen & Hanghøj, 2019). **Artikel 3**.

Tabel 3.1: Dataindsamling på skole A.

GBL21-projektet – *Hungry Higgs*-forløb (pilot) – Skole B	
Deltagere	En 5. klasse. En matematiklærer. (Rekrutteret via eget netværk).
Tid og ud-strækning	Forår 2019. Jeg deltager i 18 lektioner over en periode på 5 uger.
Primær empiri	Lydoptagelse af undervisning (plenum og gruppearbejde). To semistrukturerede interview med elevgrupper (af tre elever) (i alt 6 elever). Interviewvarighed: ca. 70-75 min. Video/lyd optaget og transskriberet. Interviewfokus: oplevelse af matematisk undersøgelse og forklaring. Elevernes redesignede spil som eliciteringsredskab. Lydoptagelse af undervisningen er selektivt transskriberet.
Sekundær empiri	Observation af undervisning i klassen med feltnoter. Elevproduceret materiale. Løbende refleksioner med læreren. Et semistruktureret interview (efter) med læreren.
Analyse	Et eksempel fra gruppearbejde analyseres via begrebet ”tænkning gennem resonans” (Wegerif, 2020) og domænemodellen (Hanghøj, 2011).
Empiri bruges i Artikel	Manuskript A (Accepteret til ICME-14, 2020).

Tabel 3.2: Dataindsamling på skole B.

GBL21-projektet – *Hungry Higgs*-forløb – Skole C	
Deltagere	To deltagende 5.-klasser. To deltagende matematiklærere. To deltagende IT-vejledere. (Rekrutteret gennem GBL21-projektet).
Tid og ud-strækning	Efterår 2019. Jeg deltager i 25 lektioner i en klasse og 10 lektioner i en anden over en periode på 11 uger.
Primær empiri	Fire semistrukturerede spileliciteringsinterview med elevgrupper fra begge klasser (to grupper med to elever, én gruppe med tre elever og én grupper med fire elever). (I alt 11 elever). Interviewvarighed: ca. 90-100 min. Video/lyd optaget og transskriberet. Interviewfokus: afprøvning af elevernes designede spil og elevernes forklaringer af spillet (elicitering). Samt elevernes oplevelse af undersøgelse og forklaring i undervisningsforløbet.
Sekundær empiri	Videoobservation i klasserne af én gruppe pr. deltagende klasse samt plenumsamtaler. Elevproduceret materiale. Feltnoter og daglige skriftlige refleksioner efter undervisningen. Arbejdsmøder med lærerne før og under interventionen. Interview med 1 matematiklærer (efter).
Analyse	Udvalgte tema i forhold til at undersøge fund fra **Artikel 1** videre. Analyse af interaktion for at beskrive eliciteringsinterview som metode.
Empiri bruges i Artikel:	(Jensen & Andreasen, 2020). **Artikel 2**. Manuskript B: "Eliciteringsmanuskript". Manuskript C: (Planlagt: Fokus er elevers designintentioner).

Tabel 3.3: Dataindsamling på skole C.

GBL21-projektet – *Hungry Higgs*-forløb – Skole D	
Deltagere	To deltagende 5.-klasser. To deltagende matematiklærere. (Rekrutteret gennem GBL21-projektet).
Tid og ud-strækning	Efterår 2019. Jeg deltager i 9 lektioner i en klasse og 7 lektioner i en anden over en periode på 6 uger.
Primær empiri	Fire semistrukturerede spileliciteringsinterview med elevgrupper fra begge klasser (én gruppe med fire elever, tre grupper med tre elever) (i alt 13 elever). Interviewvarighed: mellem 80 og 85 min. Video/lyd optaget og transskriberet. Interviewfokus: afprøvning af elevernes designede spil og elevernes forklaringer af spillet (elicitering). Samt elevernes oplevelse af undersøgelse og forklaring i undervisningsforløbet.
Sekundær empiri	Videoobservation i klasserne af én gruppe pr. deltagende klasse samt plenumsamtaler. Elevproduceret materiale. Feltnoter og daglige skriftlige refleksioner efter undervisningen.
Analyse	Samme som Skole C (Tabel 3.3).
Empiri bruges i Artikel:	Samme som Skole C (Tabel 3.3).

Tabel 3.4: Dataindsamling på skole D.

Inklusive interventionerne på skole D og E har jeg indsamlet interviewdata med 58 elever og observeret 117 undervisningslektioner. I større forskningsprojekter er der en reel risiko for, at kvalitative forskere kan blive overvældede af meget data (Brinkmann, 2014), og det er essentielt at udvælge, hvilke data der skal analyseres med øje for målet af undersøgelsen (Cobb et al., 2003). Derfor har jeg udvalgt de dele af dataene og de publikationer, der bedst passer til min erkendelsesinteresse i afhandlingen. Data fra Skole A (Tabel 3.1) og C (Tabel 3.3) indgår i afhandlingens atikler. Jeg planlægger yderligere publiceringer på baggrund af det samlede materiale i form af tre manuskripter A, B og C.

3.4 Fagdidaktisk spilanalyse

Jeg bruger termen 'fagdidaktisk spilanalyse' i betydningen at analysere spil med henblik på at udlede didaktiske potentialer i forhold til matematikfaget, hvilket jeg ser som min metode i **Artikel 4**. Metoden indebærer en analytisk undersøgelse af, hvordan et spil kan bruges i faglig undervisning, og består af en opmærksomhed mod både spillet, faget og det omgivende didaktiske design. I **Artikel 4** er den ene del af den teoretiske ramme undersøgende matematikundervisning (Blomhøj, 2016), der lægger vægt på dialog mellem lærer og elever til at støtte undersøgelser og faglige forståelser. Den anden del er en spildidaktisk model, som er en del af flere kapitler i *Sæt skolen i spil*-bogen. Modellen bygger videre på Hanghøj et al. (2019) og er et produkt af designprincipper for spilbaseret undervisning, der er raffineret både gennem GBL21-projektet (Hanghøj et al., 2019) og S*æt Skolen i spil*-projektet (Hanghøj et al., 2021). **Artikel 4** beskriver nærmere, hvordan den didaktiske model og de dertilhørende principper, sammen med en undersøgende tilgang til matematikundervisningen, konkret kan udmøntes gennem tre spilforløb med henholdsvis *Talmat*, *Minecraft* og *Torchlight II*.

I afhandlingen ser jeg **Artikel 4** som en måde at undersøge erfaringer fra SIS-projektet på gennem konkrete handleanvisninger, hvor en spildidaktisk model bliver brugt i forhold til at designe tre konkrete undervisningsforløb. Denne tilgang ser jeg som en måde at skabe konstruktiv viden på (Goldkuhl, 2012) ved at designe forslag til matematikundervisning med spil. **Artikel 4** er et begrundet design af undervisningsforløb, hvor den scenariedidaktiske ramme bruges til at designe undervisningen, mens **Artikel 2** og **Artikel 3** i stedet bruger scenariedidaktisk teori som analyseramme.

Fagdidaktisk spilanalyse er ikke en standardiseret metode, men den minder om andre tilgange til at forske i, hvordan spil kan bruges i undervisningen gennem at analysere deres potentialer i forhold til specifikke uddannelsesmæssige formål (Bewersdorff, 2021; López & Cáceres, 2010; Maffia & Silva, 2022). Jeg forstår fagdidaktisk spilanalyse som en anvendelse af teoretiske forståelsesrammer til at beskrive, hvordan specifikke spil kan bruges i undervisningen for at nå specifikke faglige mål (Maffia & Silva, 2022). En del af den metodiske tilgang er sammenlignelig med matematiske analyser af spildynamikker og præsentationer af undervisningsidéer, der typisk publiceres i praksistidsskrifter som *The Mathematics teacher* (Kaufmann et al., 2009; Quinn et al., 1999; Reiter et al., 2013; Wanko & Nickell, 2013), *Mathematics Teaching in the Middle School*, (Kurz, 2013; Maida & Maida, 2011; Moyer & Bolyard, 2003; Norton et al., 2015; Rubenstein, 2002) *Teaching children mathematics* (Olson, 2007) og *The Australian Mathematics Teacher* (Chick, 2010; Nisbet & Williams, 2009). Målet for disse artikler er at formidle de matematiske potentialer i bestemte (ofte analoge) spil. Jeg har en lignende hensigt med at bruge fagdidaktisk spilanalyse, men ønsker yderligere at fundere potentialerne for matematikundervisning i matematiskdidaktisk teori og koble dette til en metodik fra spilbaseret undervisning.

Som jeg forstår fagdidaktisk spilanalyse, er det analyse af spil med henblik på, hvordan de kan bruges hensigtsmæssigt i matematikundervisningen, og at præsentere dette på en tilgængelig måde for lærere. Den ene del af denne analyse er sammenlignelig med matematikdidaktiske analyser af matematisk læringspotentiale i spil (Bayeck, 2018; Dorier & Maréchal, 2010; Peter Vankúš, 2013; Sugden, 2012). I den forståelse, jeg skriver frem her, tager jeg videre udgangspunkt i et spildidaktisk fundament. Dernæst producerer analysen en beskrivelse af et potentielt undervisningsforløb, hvilket er mere i tråd med forløbsbeskrivelser i praksistidsskrifter om matematikundervisning (Moyer & Bolyard, 2003; Nisbet & Williams, 2009; Oldfield, 1991; Olson, 2007; Quinn et al., 1999; Wanko & Nickell, 2013). Den fagdidaktiske spilanalyse er på den måde et forsøg på at bygge bro mellem matematik- og spildidaktik samt analyse og designundervisning. Denne brobygning mellem forsknings- og undervisningspraksis er relevant i forhold til tre problematikker. Den første problematik er, at mange studier om matematik og (især digitale) spil undlader detaljerede beskrivelser af spil- og undervisningsdesign. Dette gør det vanskeligt at forstå den intenderede undervisning og svært at gentage den efterfølgende i praksis (Hussein et al., 2021). En anden problematik er, at meget forskning om digitale spil og matematikundervisning sker med forskerdesignede spil, der ikke er bredt tilgængelige, mens de matematiklæringsspil, der er bredt tilgængelige, generelt ikke er genstand for forskning (Gresalfi, 2018). En tredje problematik er, at lærere kan have svært ved at analysere sig frem til det matematiklæringsmæssige potentiale i specifikke (bræt)spil og som følge heraf bruge dem i undervisningen (Dorier & Maréchal, 2010; Maffia & Silva, 2022). En pointe er, at selvom reglerne i et spil er nemme at forstå, så er det ikke nødvendigvis nok til at forstå, hvordan man som lærer kan bruge spillet til at fremme læring (Maffia & Silva, 2022).

Introduktionen af analoge og digitale spil i matematikundervisningen kræver således en fagdidaktisk analyse af, hvad konkrete spil kan tilbyde i relation til matematisk indhold, hvis lærere og curriculumdesignere skal kunne anvende spil i undervisningen (Maffia & Silva, 2022). Derfor er der behov for fagdidaktiske analyser af spil, der går videre end at afdække spillets regler og spilmekanikker, men også fokuserer på matematiske læringspotentialer og didaktiske muligheder. Derudover er **Artikel 4** et udtryk for min pragmatiske og designrettede (Cobb, 2007) tilgang til at undersøge matematikundervisning, da jeg via dette producerer reelle undervisningsforløb til praksis.

3.5 Etiske overvejelser

Her vil jeg diskutere mine etiske refleksioner i forbindelse med ph.d.-projektet, der især har drejet sig om indhentning af informeret samtykke fra børn, rekruttering af lærere til projektet, relationer mellem de to overordnede projekter og ph.d.-projektet samt overvejelser om at bringe lærere og elever i positioner, hvor deres gængse fagopfattelser udfordres.

Min intention har været, at eleverne deltager på baggrund af fuldt informeret samtykke, der gennemsigtigt formidler formål, metoder, risici og fordele ved forskningen (Parsons et al., 2015). Derfor har jeg udformet detaljerede samtykkeerklæringer, som forældre til alle deltagende elever har underskrevet. De præciserede, hvilke former for data der blev indsamlet, til hvilket formål, hvordan dataene blev opbevaret, samt mulighed for at trække samtykket tilbage. Jeg sikrede yderligere, at de elever, jeg observerede i klasserne og interviewede, deltog frivilligt, gennem to måder. Først bad jeg lærere udvælge elever, som de forudså, ville være komfortable med at blive observeret og interviewet. Dernæst bad jeg lærerne konfirmere hos de enkelte elever, om de ønskede at deltage. Mit håb var, at elever, der ikke var komfortable med at deltage, ville sige dette til læreren, hvilket nogle elever gjorde. Yderligere præsenterede jeg på opfordring fra to deltagende lærere projektet på et forældremøde for en deltagende klasse. Derudover forklarede jeg grundigt om projektet og min rolle til hver deltagende klasse, hvor elever havde mulighed for at stille opklarende spørgsmål. På den måde sikrede jeg mig, at elever både var informeret og havde mulighed for at sige fra til deres forældre gennem samtykkeerklæring eller til deres lærere, hvis de ikke var komfortable med at deltage.

En anden etisk refleksion vedrører de deltagende lærere på skole B-E, der blev rekrutteret gennem GBL21-projektet. Nogle af disse lærere henvendte sig til mig for at tilbyde deres klasse til mit projekt. For andre lærere var det deres leder eller vejledere, der gjorde det på deres vegne. Skole C tilmeldte sig mit projekt gennem en vejleder, inden fagfordelingen var afsluttet. Det betød, at de tre matematiklærere, der endte med at undervise på årgangen, ikke selv havde valgt at deltage i projektet. Den ene af disse ønskede ikke, at der blev optaget video af hans undervisning, og deltog derfor ikke i projektet. De to andre lærere deltog, men det var vanskeligt for mig at vurdere, om det var frivilligt, eller fordi det var en opgave, der fulgte med at blive sat som underviser på den årgang. Videre blev de to lærere tilknyttet to vejledere, der skulle understøtte dem og hjælpe dem i projektet. Et aspekt, der krævede løbende etiske refleksioner i forhold til disse læreres deltagelse, var, at især den ene lærers pædagogiske tilgang til undervisningen var meget forskellig fra visionen om undervisning i GBL21. Læreren havde således svært ved at se, hvordan hendes faglige forventninger kunne komme til udtryk gennem GBL21-forløbene, og havde derved svært ved at understøtte elevernes læring (Hanghøj et al., 2020). Dette skabte en del spændinger i arbejdet med det konkrete design af undervisningsforløbet og undervisningen i klassen. Fx hjalp vejlederen med at strukturere designtænkningsfaserne langt mere, end de oprindeligt var tiltænkt. Det resulterede i, at faserne blev meget langtrukne, da alle muligheder skulle undersøges. Det mindskede elevernes autonomi i forhold til at tage eksplorative valg i processen. Denne struktur var ønsket af læreren, der pointerede, at hun mente, eleverne ikke kunne agere i de mere løse rammer. Dette udgjorde et vanskeligt dilemma for mig som forsker, da jeg på den ene side ønskede at udfordre lærerens opfattelse af praksis og på den anden side måtte holde for øje, at jeg var på besøg i lærerens situerede kontekst og i det fællesskab, hun 'levede' i (Bang et al., 2016). Fx var det ikke sikkert, at hun ville opleve sin rolle i det mere ustrukturerede undervisningsforløb som en succes. Derfor måtte jeg afveje, hvordan og hvor meget jeg kunne tillade mig at udfordre hendes vision for undervisningspraksis. Det strukturerede forløb blev dog meget langt, og hverken eleverne, læreren eller vejlederen syntes at opleve det som succesfuldt. Dermed blev jeg som observatør vidne til en lærer, der havde svært ved at gennemføre forløbet og ikke virkede komfortabel med, at det blev observeret.

Et videre etisk dilemma ved at bruge spil og spilscenarier i skolen er, at deltagelse gennem forståelse af disse domæner kan positionere eleverne anderledes, end de er vant til i skolen. Dette kan skabe tvetydige situationer, hvor eleverne positionerer sig på måder, der utilsigtet modarbejder den faglige intention, som læreren har (Hetmar, 2017). Når GBL21-projektet inddrager spil i undervisning, så inviterer det til, at eleverne tager positioner som "spiller" eller "spildesigner" i undervisningen. Det er dog ikke nødvendigvis de positioner, som eleverne bliver vurderet på af læreren, hvor det måske nærmere er en position som "matematikelev", de bliver vurderet efter. Dette kan gøre det vanskeligt for eleverne at opleve, at de deltager kompetent i undervisningen, hvis de ikke kan gennemskue, hvor de skal lægge vægten i deres deltagelse. Er det fx at designe et flot brætspil, eller er det at kunne forklare vinderstrategien? På den måde kan undervisningsforløb med spil uintentionelt komme til at lade elever positionere sig på måder, der ikke er hensigtsmæssige fra et fagdomæne eller pædagogisk domæne (Hanghøj, 2012). Det kan være i modstrid med intentionerne i undervisningen og i modstrid med, hvordan læreren vurderer, om eleven deltager succesfuldt. I tråd med dette kan læreren, der bliver sat til at undervise i et scenariedidaktisk forløb, opleve, at det er vanskeligt at forudsige, hvordan undervisningen kommer til at forløbe. Ligeledes kan læreren, der underviser i ukendte processer, fx spildesign i GBL21-projektet, have vanskeligt ved at vide, hvornår og hvordan han eller hun skal hjælpe eleverne.

Kapitel 4 - teoretisk perspektiv

Det teoretiske perspektiv for afhandlingen kombinerer en teoretisk forståelse af læring som udforskning (Dewey, 1938, 2005), en scenariedidaktisk forståelse af undervisning som et samspil mellem domæner inden for og uden for skolen (Bundsgaard et al., 2022; Hanghøj et al., 2017a; Misfeldt, 2021) og et komplementært spilbegreb, der både rummer mekaniske og sociale aspekter af spil (Goffman, 1961). De valg, der har ført til denne teoretiske ramme, er en del af et emergerende forskningsdesign (Creswell & Creswell, 2018) og ikke udtryk for et *a priori* valg af teori. Mit valg af denne ramme er til dels udsprunget af, at jeg ser matematikundervisning som en designvidenskab (Cobb, 2007) og indsamler data gennem to designinterventioner (Brown, 1992; Cobb et al., 2001). Men den er ligeledes valgt for at afgrænse mit perspektiv mod at forstå specifikke forhold og problematikker, jeg har mødt igennem mit projekt. Begge disse begrundelser ser jeg som et udtryk for en pragmatisk måde at tilgå mine teoretiske valg på (Dewey, 1938).

Afsnittet vil redegøre for valget af det endelige teoretiske perspektiv, jeg antager i afhandlingen. Først præsenterer jeg min forståelse af læring som udforskning (Dewey, 1938, 2005), positionerer mit valg i forhold til læringsteoretiske perspektiver på spil og læring (Aguilera & de Roock, 2022; Egenfeldt-Nielsen, 2006) og beskriver, hvordan Deweys udforskningsbegreb tidligere er anvendt i forhold til spil og læring. Dernæst præsenterer jeg scenariedidaktik (Bundsgaard et al., 2022) som et særligt perspektiv på undersøgende undervisning, der især tillader mig at forstå, hvordan elevernes oplevelse af faglig relevans interagerer med andre former for gyldighed i undervisningen. Herunder bruger jeg domænemodellen (Hanghøj, 2012) til at fremhæve betydningen af at koble forskellige domæner i og uden for skolen (Fougt et al., 2022; Misfeldt et al., 2022). Derefter præsenterer jeg min definition af spil som et komplementært fænomen, der gør det muligt for mig at undersøge både et systemisk og et socialt aspekt (Goffman, 1961) af elevernes spildeltagelse.

4.1 Spil og læring som undersøgelsesproces

I denne afhandling forstår jeg spil og læring som en undersøgelsesproces med afsæt i John Deweys teori om læring som udforskning (inquiry) (Dewey, 1938). Mit valg bunder i to argumenter. For det første, fordi teorien beskriver læring som handling knyttet til den sociale situation, handlingen foregår i, hvilket flugter med min spilforståelse, der ser spil som karakteriseret ved, at spillere opfordres til at handle og undersøge konsekvenser af deres valg. På den måde understøtter teorien, at meningen i et spil ikke kan læses ud af spillets mekanik alene, men at et spil spilles af spillere i en bestemt kontekst, og at vi således kun kan forstå læring med spil situeret (Staaby, 2021). Derfor bruger jeg Dewey til at forstå læring i spil som en situeret undersøgelsesproces.

For det andet, fordi teorien beskriver det værdifulde i læringsoplevelser, der rækker ud over faget og ind i elevers hverdag. På den måde tillader den mig at anerkende spil som en betydningsfuld del af elevernes hverdag (Toomey, 2017), hvilket potentielt er en værdifuld ressource for underviseren, men også kan skabe komplikationer. Derfor tillader teorien mig i højere grad at undersøge, hvordan eleverne oplever, at det er meningsfuldt at deltage i matematikundervisning, der gør brug af spil, end at tale om læringsmæssige effekter eller isolerede matematikfaglige mål. Dette giver mig mulighed for at tale om spil som forskellige veje til matematiklæring og engagement af elever i matematikundervisningen, fordi der er nogle iboende kvaliteter, der gør, at de kan bruges til at skabe indsigt i matematikfagligt stof og undersøge matematiske sammenhænge.

Følgende afsnit præsenterer afhandlingens læringsteoretiske fundament gennem Deweys begreb udforskning (Dewey bruger det engelske ord iquiry, som i sin direkte form oversættes til undersøgelse på dansk, men jeg vælger at bruge termen udforskning som andre danske oversættelser (Dewey, 2005; Elkjær, 2012), fordi termen netop er specifik i den måde, Dewey beskriver og bruger den på). Afsnittet vil først beskrive forskellige læringsteoretiske perspektiver på spil og læring (Aguilera & de Roock, 2022; Egenfeldt-Nielsen, 2006; Plass et al., 2015, 2020), og hvor jeg positionerer afhandlingen inden for disse. Derefter beskriver jeg min forståelse af læring gennem udforskning, og hvordan det hænger sammen med de to begrundelser for at bruge Dewey. Afslutningsvis vil jeg redegøre for, hvordan Deweys begreber før har været anvendt i forskning i spil og læring (Barab et al., 2010, 2012; McFeetors & Palfy, 2018; Shaffer, 2004, 2006; Waddington, 2015).

4.1.1 Læringsteoretiske perspektiver på spil og læring

Forståelser af læring i forbindelse med digital spilbaseret læring kan forstås i forhold til Sfards (1998) metaforer for læring som *tilegnelse* eller *deltagelse* (Aguilera & de Roock, 2022). Læring som tilegnelse henviser her til behavioristiske og kognitive perspektiver, som er tydelige i positivistiske tilgange til læring, der er interesserede i læringseffekt og motivation. Deltagelse henviser til det sociokulturelle perspektiv på læring, der i højere grad bruger fortolkende tilgange til at forstå, hvordan spillerne oplever mening med at spille og at deltage. En opdeling, der lægger vægt på effektivitet eller situeret praksis i klasseværelset (Skaug et al., 2020).

Egenfeldt-Nielsen (2006) finder forskellige karakteristika ved henholdsvis behavioristiske, kognitive, konstruktionistiske og sociokulturelle læringsteoretiske tilgange til forskning i digitale spil i undervisningen. For den første tilgang, den behavioristiske, er læring et spørgsmål om at forstærke relevant stimulus og respons gennem belønning, og forskningen fokuserer snævert på interaktionen mellem spiller og spil (Egenfeldt-Nielsen, 2006). Tilgangen knyttes ofte til edutainment-spil (Ito, 2009; Konzack, 2003), hvor *Electric Company Math Fun* fra 1979 anses som ét af de første matematikspil i denne genre. I spillet styrer spilleren en gorilla, der møder regnestykker med de fire regningsarter. Ved et rigtigt svar må gorillaen gå videre. Ved et forkert ryger gorillaen i en å. For den anden tilgang, den kognitive, er læring forbundet med de kognitive strukturer, der ligger bag stimuli og respons i form af mentale skemaer, der rummer begrænsninger og muligheder for læring, der kan understøttes gennem stilladsering (Egenfeldt-Nielsen, 2006). Den kognitive tilgang fører ofte til et forskningsfokus på, om spil er mere effektive og mindre tidsforbrugende end anden undervisning (Plass et al., 2015). Det er den dominerende tilgang for *forskning i DGBL med fokus på matematiklæring*, der især er optaget af læringseffekt (fx Vogel et al., 2006). Et centralt fund for denne tilgang er, at der er grundlæggende forskel på, hvordan spilleres handlinger kobles til fagligt indhold (Lepper & Malone, 1987), og spildesignere bør forsøge at øge spillerens indre motivation ved at knytte spilmekanik og læringsmål tæt til kerneaktiviteten i spillet (Plass et al., 2015). Der skelnes mellem endogene og eksogene spildesign, hvor spillernes handlinger og fagligt indhold enten er tæt eller løst forbundet (Habgood & Ainsworth, 2011). Habgood og Ainsworth (2011) viser, at endogene spildesign øger elevernes læring, ved at undersøge en endogen og en eksogen version af matematiklæringsspillet *Zombie Division*. Den tredje tilgang, den konstruktionistiske, er ligesom kognitivismen optaget af individets konstruktion af viden, men lægger især vægt på eksterne objekters facilitering af læringsprocesser og elevernes affektive tilhørsforhold til det, de konstruerer (Egenfeldt-Nielsen, 2006). Den centrale teoretiker er Papert (1980), der bruger programmeringssproget LOGO, og bl.a. Kafai (1993) har undersøgt elevers design og programmering af spil i dette program. Senere er tilgangen udviklet af Resnick (2003, 2012, 2018), der har skabt og forsker igennem programmet Scratch, hvor eleverne kan designe og programmere spil (se fx Brennan & Resnick, 2012; Resnick, 2007). Læringspotentialet ved at bruge spil er, at de potentielt er meningsfulde objekter for eleverne og derfor kan engagere dem i diskussioner og refleksioner som en måde at konstruere viden på (Egenfeldt-Nielsen, 2006). Den fjerde tilgang, den sociokulturelle, fokuserer på spil, spiller og kontekst, hvor spillet ikke er læringsoplevelsen i sig selv, men et værktøj til at konstruere læringsoplevelser. Dette kan ske, ved at spil medierer diskussion, refleksion og analyse faciliteret gennem den omgivende klassekultur og elevernes identitet. Spil er interessante, fordi de kan guide og facilitere nye undersøgelser, forhandlinger og veje til viden (Egenfeldt-Nielsen, 2006). Gee (2003) har haft en afgørende rolle i forhold til at forske i læring og spil i et sociokulturelt perspektiv, og Devlin (2011) har været en markant fortaler for at udvikle dette perspektiv i forhold til matematiklæring. Forskning, der tager afsæt i denne tilgang, undersøger bl.a., hvordan spil, som de spilles af børn i fritiden, kan forstås som matematisk aktivitet (Avraamidou, 2017; Avraamidou et al., 2012, 2015; Lange & Meaney, 2019), og hvordan spil som et kulturelt og socialt fritidsfænomen kan rumme potentialer for matematikundervisningen (Devlin, 2011). Perspektivet kan ligeledes bruges til at forstå theorycrafting (se afsnit 2.2.3).

De fire læringsteoretiske perspektiver på spil og læring vægter forskellige elementer. Plass et al. (2015) argumenterer for, at spil kan designes ud fra forskellige læringsteorier, og at en bred forståelse af spil og læring kræver, at kognitionsperspektiver, motivationsperspektiver, affektive perspektiver og sociokulturelle perspektiver integreres. I stedet for en omfattende læringsteori til at forstå spil og læring foreslår Plass et al. (2015) en model bestående af tre elementer, udfordring, respons og feedback, som de ser som en grundlæggende struktur i langt de fleste spil. Min forståelse af læring som en undersøgelsesproces gennem Dewey er en positionering i den fortolkende (Aguilera & de Roock, 2022) og sociokulturelle (Dysthe, 2003; Egenfeldt-Nielsen, 2006) tilgang, der er optaget af situerede perspektiver (Skaug et al., 2020). Dette forstår jeg som et normativt valg, hvor jeg ikke er interesseret i kognitive forståelser af effekt eller motivation, men hvordan spil som situeret fænomen giver mening for deltagerne. På den måde er jeg optaget af spilbaseret læring som et sociokulturelt fænomen, der foregår som en del af matematikundervisningen (Skaug et al., 2020) med elever, der deltager både som matematikelever og spillere. Sådan en kvalitativ position er forholdsvist underrepræsenteret i forskning om spil og matematik i forhold til det kvantitative effektmålingsperspektiv (Chen et al., 2021). Derudover omhandler de sociokulturelle empiriske studier primært fritiden (fx Avraamidou, 2017; Avraamidou et al., 2015) eller er fokuserede primært mod fagdidaktiske pointer (McFeetors & Palfy, 2018). Det eksperimentelle og handlende læringssyn, som Dewey beskriver, stemmer overens med Plass et al.s (2015) model for læring i spil og den basale inddeling i udfordring, spillerrespons og feedback til spilleren som basis for at forstå læring i spil. Der er ligeledes bred konsensus om, at undersøgende tilgange til matematikundervisningen rummer en del af svaret på relevansproblematikken for matematikfaget (Artigue & Blomhøj, 2013; Misfeldt, 2021). Jeg ser da også læringssynet i tråd med forståelse af matematisk ræsonnement som en cyklus af eksperiment, hypotese og retfærdiggørelse (**Artikel 1**). Dewey er videre teoretisk bagtæppe for det scenariedidaktiske perspektiv på fagundervisningen (Bundsgaard et al., 2022), jeg antager i afhandlingen.

For Dewey er læring en del af en bredere forestilling om demokrati, livsprocesser, vækst og uddannelse og knyttet til normative tanker om forbedring og berigelse af verden. Læring er hverken en udelukkende indre proces eller et resultat af en rent ydre påvirkning, men et resultat af aktiv praksis (Dewey, 1916). Brinkmann (2006) opsummerer Deweys forståelse af læring således:

> ”Vi lærer ved at gøre, og vi lærer primært det, vi gør (og ikke det, vi ikke gør!). Læring foregår ved at deltage i sociale praksisser, hvor man ikke bare »trænes op«, men også sættes i stand til at forstå de givne praksissers betydning og værdi. Læring involverer først og fremmest etablering af bestemte vaner” (s. 209).

Dette undersøgelsesbaserede læringsbegreb rummer både elementer af handling, sociale praksisser, refleksion samt fortids- og fremtidsperspektiver. Deweys forfatterskab er omfattende, og jeg har ingen intention om at forsøge at rumme alle begreber, der kunne være relevante her. I stedet vil jeg fremhæve, hvordan Deweys teori er relevant for min forståelse af læring som en undersøgelsesproces, og videre hvordan læring er knyttet til relationer mellem fag og omverden.

Jeg bruger således især Deweys teori om læring for at betone betydningen af erfaring og handling i læreprocessen og fokuserer på læring som en social aktivitet, hvor eleverne deltager aktivt og eksperimenterer med materialer og koncepter. Denne udforskning i ubestemte situationer (Dewey, 1938) stemmer ligeledes overens med mit spilsyn, hvor udfordring er centralt (Plass et al., 2015). Dernæst tillader Deweys perspektiv mig at fremhæve det sociale perspektiv, jeg er interesseret i, ikke kun ved at forstå den sociale situation, som eleverne lærer i, som en del af læringen, men også ved at forstå det bredere sociale perspektiv, der rækker ud over det situerede i klasseværelset. På den måde giver perspektivet mig adgang til at forstå et spil som både noget konkret med regler og materialer og en måde, hvorpå det bliver spillet som en del af en social praksis (Aguilera & de Roock, 2022). Det er dermed centralt, at jeg forstår spil og læring som en situeret undersøgelsesproces (jf. afsnit 4.1.2) og elevernes deltagelse i matematikundervisningen i relation til deres deltagelse i forskellige spilpraksisser fra hverdagen (jf. afsnit 4.1.3). Disse to argumenter vil jeg forklare videre i de følgende to afsnit.

4.1.2 Spil som situeret undersøgelsesproces

Mit første argument for at bruge Deweys teori om læring er, at det giver mig adgang til at se læring med spil som en situeret undersøgelsesproces (Bundsgaard et al., 2022), der forstår læring som udforskning (Dewey, 1938). Udforskning betegner den erfaringsskabelse og vidensproduktion, der sker, når mennesket står i en usikker situation, og er den proces, hvorved vi gør situationen bestemt og sikker på en måde, så vi kan mestre den, og den udgør et forenet hele (Dewey, 1938). Konkret sker det gennem opstilling af hypoteser, undersøgelse af udfald og løbende refleksion over processen (Bundsgaard et al., 2022). Viden er knyttet til denne proces ved at være ”det, vi er berettiget til at hævde om verden som følge af, at vi har undersøgt og stabiliseret den” (Brinkmann, 2006, s. 73). Dewey nedprioriterer *a priori* tænkning om verden, der ikke relaterer sig til den menneskelige erfaringsverden, men fremhæver, at viden får gyldighed gennem at afprøves i verden og er knyttet til eksperimenterende handling i sociale praksisser (Brinkmann, 2006).

Læring forstået som udforskning er en handlingsorienteret, social og refleksiv proces, der foregår i en kontekst, hvor eleven er deltagende og aktiv. Denne situerede forståelse hænger sammen med den måde, hvorpå Dewey forstår, at vi lærer gennem erfaringer og refleksion. Refleksion er ikke kun bagudrettet, men indebærer et fremtidsrettet element, der omfatter hypoteser om ”fremtidige sandsynlige eller mulige resultater” (Dewey, 2005, s. 166). Refleksion rummer således forudsigelse på baggrund af oplevede konsekvenser og forestillinger om fremtiden.

> ”At ’lære af erfaringen’ er at skabe en baglæns og en forlæns forbindelse mellem det, vi gør, og det, vi som konsekvens heraf nyder eller lider under.

> Under sådanne betingelser bliver handlingen forsøgende, et eksperiment med verden for at finde ud af, hvordan den er…" (Dewey, 2005, s. 158).

Handling er ikke nok i sig selv for at skabe læring; der skal bagudrettet og fremadrettet tænkning, eller refleksion, til for at skabe kontinuitet mellem erfaringer. Dermed er teorien om læring som udforskning en læringsteori, der antager, at elev, indhold og kontekst er uløselig bundet sammen, og at læring foregår gennem aktive beslutninger, der undersøger specifikke omstændigheder og ændrer dem (Barab et al., 2010). Samtidig indikerer læringsperspektivet, at blot det at spille spil og udelukkende at handle ikke i sig selv er tilstrækkeligt til læring, hvis der ikke reflekteres over handlingerne.

Når jeg trækker på Deweys læringsteoretiske perspektiv i afhandlingen, vil jeg gerne fremhæve, at hans forståelser af det sociale aspekt rummede, hvad han betegner som den umiddelbare forståelse og refleksion med et forestillende element, hvor 'fantasiens leg' med materialet er en central del af erkendelsesprocessen (Dewey, 2005). For Dewey er der ikke en skarp opdeling mellem værdien i arbejde eller leg som del af samme kontinuum, hvor forskellen er, at der ikke er eksterne mål i leg (Dennis, 1970). Det væsentlige i uddannelsesøjemed er en legende attitude, der tillader os at være interesserede i aktiviteter og emner for deres egen skyld (Dewey, 2005). Udforskning bør derfor ikke kun forstås som videnskabelig undersøgende praksis, men er også en kreativ og legende proces.

Forståelsen af spil og læring som en situeret undersøgelsesproces er et skridt væk fra primært at fokusere på spil som et lærerigt designet værktøj og i stedet se dette værktøj i sammenhæng med de faktorer, der påvirker den sociale situation omkring det. Dette situerede perspektiv på læring i spil ligger i tråd med fx Staabys (2021) argument om, at vi ikke har empirisk dækning for at kunne sige, at spil og læringsspil generelt er motiverende, effektive og engagerende redskaber til læring. Tværtimod opfører spil sig på uforudsigelige måder i undervisningen, hvor det i stedet er relevant at undersøge specifikke spil i specifikke læringssituationer. Fx hvor det bliver spillet, hvordan læreren understøtter spillet, eller på hvilke måder eleverne spiller det.

4.1.3 Oplevet relevans af matematiklæring

Det andet argument for at bruge Deweys teori om læring er vægten på samspil mellem skole og den omgivende verden. At stimulere reaktionsmønstre ud fra en behavioristisk tilgang kan være første skridt til læring, men næste skridt er, at eleven forstår betydningen af den sociale praksis, materialet er en del af. Det er på én gang et mål med deltagelsen og et middel til fyldigere deltagelse at forstå betydningen, den givne praksis har historisk og socialt. Vejen til en sådan form for deltagelse indebærer, at den lærende kan se formålet med deltagelsen (Brinkmann, 2006). Det sociale aspekt ved udforskning understreger, at skolen ikke bør forstås som isoleret fra resten af samfundet, og at meningen ved det lærte materiale er tæt forbundet til at forstå den bredere sociale og historiske kontekst, det optræder i uden for skolen (Brinkmann, 2006). Dette bliver især relevant i forhold til at forstå, hvordan elever møder (og ifølge Dewey bør møde) fagligt materiale i skolen, og hvordan faglige erfaringer kan blive (eller undgår at blive) nærværende for eleven. Især kritiserer Dewey, hvad han betegner som en pædagogisk disintegration, hvor fag og emner adskilles og doseres i mindre bidder (Dewey, 2005). I stedet bør undervisning sigte efter, at emner kan indgå i en nærværende erfaring. Dewey (2005) fremhæver her kvaliteten ved ”situationer, hvor meningen med kendsgerninger, ideer, principper og problemer erkendes på en levende måde” (s. 251) i den forstand, at de relaterer sig til noget, som ”et individ selv har påskønnet og erkendt som specielt dybt betydningsfuldt i konkrete situationer” (s. 250). Dette beskriver Dewey som den ’umiddelbare forståelse’, hvor individet oplever, at et givent emne har en umiddelbar værdi. I skolen bør emner generelt arbejdes med, så de har denne form for umiddelbar værdi, eller på en måde, så det erkendes, at de kan bruges til noget andet af umiddelbar værdi (Dewey, 2005). For Dewey bliver spørgsmålet i forhold til skolen således, hvordan ’livets interesser” og ’fagets interesser’ kan kombineres, ikke adskilles.

I forhold til at knytte faglige emner til elevernes livsinteresser skriver Dewey: ”Generelt er det ønskeligt, at et emne præsenteres på en sådan måde, at det enten har en umiddelbar værdi og ikke kræver nogen legitimering, eller at det erkendes som et middel til at realisere noget andet af iboende værdi” (Dewey, 2005, s. 258). Jeg forstår dette således, at enten kan fagstof legitimeres imod fremtidig brug, eller også ved at ved at eleverne kan forstå og relatere til det i deres nuværende liv. Der er to pointer i, hvordan Dewey tænker relationer mellem fagstof og det omgivende samfund og elevernes liv. Dels er det ikke banalt, når elever spørger: ”Hvorfor skal vi lære det her?” eller: ”Hvad skal vi bruge det til?” Det er en grundlæggende erkendelsesmæssig kvalitet, der adresseres. En måde at adressere sådan et elevspørgsmål på er at arbejde med matematik i den kontekst, hvori det bruges (Boaler, 1993), eller simulere brugskontekster, hvori matematik indgår, fx gennem simulationer (Waddington, 2015) og læringsspil (Barab et al., 2010, 2012), som jeg vil beskrive senere. Et andet perspektiv, som jeg vil læggе vægt på, er, hvordan elevernes hverdagserfaringer, i det her tilfælde med spil, også rummer mulighederne for, at de kan se en umiddelbar værdi med fagstof.

4.1.4 Dewey og forskning i læring og spil

Med afsæt i Deweys læringsteori, der er knyttet til matematikdidaktisk forskning, har McFeetors et al. (2018) brugt Deweys begreb om udforskning og refleksion i forhold til at arbejde med elevers ræsonnement i brætspil. Her pointeres det, at det at spille strategiske spil med jævnaldrende er en ideel kontekst for udvikling af matematisk ræsonnement, da det er en genkendelig, motiverende og social aktivitet, der tillader samarbejde om udvikling af strategier. Selvom de understreger, at de arbejder med kommercielle brætspil, som de forstår som en autentisk kontekst, så bliver dette i primær grad et bagtæppe for at undersøge matematisk ræsonnement.

Et centralt element i Deweys tanker om læring og pædagogik er, at fagstof ikke bør (eller kan) læres isoleret fra den verden, det er en del af, og at udforskning derfor bør tage udgangspunkt i en genuin situation (Brinkmann, 2006) og vedrøre autentiske aktiviteter (Shaffer & Gee, 2007). Dette er udgangspunkt for tre tilgange til digitale spil og læring, der læringsteoretisk tager udgangspunkt i Dewey. Waddington (2015) bruger Deweys teori til at fremhæve, at simulationsspil, der simulerer komplekse sociale systemer, kan understøtte, at elever udvikler en eksperimentel attitude ved at agere som aktive undersøgere. En anden tilgang er Barab et al. (2010, 2012), der designer virtuelle verdener, hvor elever møder komplekse udfordringer og kan tage meningsfulde beslutninger i forhold til en spilnarrativ og kan erfare, at deres handlinger er værdifulde, fordi de kan hjælpe med at behandle de problemer, der er i konteksten (Barab et al., 2012). De bruger begrebet 'transformational play' og forsker gennem multiplayerspillet *Quest Atlantis*, som også bruges i Gresalfi (2015) og Gresalfi & Barnes (2016), der begge er med i reviewet i Bidrag #1. En tredje tilgang er Shaffer (2004, 2005, 2006), der designer 'epistemiske spil', der baserer sig på Deweys forståelser om uddannelse gennem gøremål/erhverv (Shaffer, 2006). Disse professionssimulerende spil forsøger at bevare forbindelsen mellem at gøre og vide (Shaffer, 2005).

I Deweys uddannelse gennem gøremål genskaber og genopfører elever industrielle og landbrugsmæssige processer og simulerer de sociale systemer omkring dem. Dette var oprindeligt tiltænkt at skabe undersøgende vaner, teknologisk transparens og samarbejde hos eleverne og gøre dem i stand til at reagere vidende og eksperimenterende med de udfordringer, de mødte i livet (Waddington, 2015). Waddington (2015) bemærker, at digitale spil og simulationer aldrig vil kunne rumme verdens kompleksitet. Dermed kan brug af epistemiske spil, "transformational play" og simulationsspil blive en andenrangs erstatning for de rige autentiske læringsoplevelser, Dewey havde forestillet sig, og i værste fald direkte vildledende (Waks, 2001). Dewey argumenterer dog selv for, at den fulde kompleksitet aldrig vil kunne inddrages i undervisningen (Waddington, 2015), men kritikken gør det tydeligt, at simulationer og spil vanskeligt står alene og kræver facilitering. Især påpeger Waddington (2015), hvordan simulationsspil ofte simplificerer kontekster på to måder, som eleverne kan have svært ved at opdage og kritisere, da de er implicit i mange af sådanne spil. Den ene problematik (der også vedrører strategispil) er, at spillene kan fremme en effektivitetsmaksimerende tankegang og få spillerne til at tænke: "Hvordan kan jeg få mest for mindst", hvilket ikke nødvendigvis er en ønskværdig tankegang at fremme. Den anden problematik er, at der kan lægges for meget vægt på en teknokratisk tankegang, hvor eleven placeres som den magtfulde ekspert, der tager beslutninger i spillet ved at se på data, vælge den 'rigtige' beslutning og have modet til at implementere den. På den måde er der en risiko for, at de sociale processer i konteksten forfladiges og forsimples i simulationen (Waddington, 2015).

Gaydos og Devane (2019) kritiserer de forestillede identitetstransformationer hos Barab et al. (2012) og Shaffer (2006) for, at de primært fokuserer på ønskværdige værdifulde identiteter, men ikke tager højde for de identiteter, eleverne reelt udvikler, når de spiller. De argumenterer for, at det at spille ikke blot handler om at overtage en identitet, der tilbydes i spillet, men om at udøve forskellige identiteter som en del af det at spille. Brug af spil i undervisningen bør således i højere grad tage højde for de forskellige former for identiteter, elever i forvejen har, og de sociale praksisser, de er en del af, når de spiller spillet. Denne opmærksomhed mod elevernes eksisterende hverdagserfaringer med bl.a. spil og undervisningen som en situeret social praksis med mange mulige rammer er central i min interesse for spil i matematikundervisningen.

4.2 Scenariedidaktik

Spil og matematiklæring er et fænomen, der både relaterer sig til matematikundervisningen og hverdagssammenhænge, og hvor elevers spilerfaringer uden for skolen kan have relevans i forhold til at skabe erfaringer med spil i matematikundervisningen. Det har været centralt i mit arbejde med afhandlingen at anvende et didaktisk perspektiv, der kan rumme denne relation. Scenariedidaktikkens interesse for forbindelser mellem undervisningen og omverdenen (Bundsgaard et al., 2022; Hanghøj et al., 2017b; Hetmar, 2019) har derfor været afgørende for, at jeg vælger dette perspektiv. En didaktisk interesse for elevernes erfaringer fra hverdagen er særlig væsentligt for denne afhandling, da jeg undersøger brugen af to underholdningsspil, *Minecraft* og *Hungry Higgs*, i undervisningen. Mine data viser således, at flere deltagende elever har hverdagserfaringer med *Minecraft*, og at andre har specifikke forventninger til det kommercielle brætspil *Hungry Higgs*, som kan tillægges deres bredere erfaringer med brætspil fra hverdagen. Den kompleksitet, jeg ser i min empiri, kan derfor ikke beskrives fyldestgørende gennem et snævert matematikfagligt perspektiv, og jeg vælger derfor det scenariedidaktiske perspektiv for at lægge vægt på spil som et selvstændigt fænomen i forhold til matematik. Det betyder, at jeg ikke blot ser spil som et middel til matematiklæring, men som et fænomen, der i forvejen har betydninger for eleverne. Videre er scenariedidaktik afledt af Deweys teori om læring og sammen med Deweys (2005) pointer om, at fagstof bør knyttes til omverdenen, hvorfor det er oplagt som et perspektiv til at udfolde specifikke potentialer og komplikationer, der opstår i matematikundervisning, der gør brug af spil.

Scenariedidaktik er et relativt nyt teoretisk perspektiv udviklet i en dansk kontekst, og derfor vil jeg kort introducere det her. Det er især formuleret gennem to forskningsantologier (Fougt et al., 2022; Hanghøj et al., 2017a) og fire ph.d.-afhandlinger (Brahe-Orlandi, 2019; Fougt, 2015; Hanghøj, 2008; Lorentzen, 2017). Scenariedidaktik er et overbegreb, der rummer en række undervisningstilgange, der omhandler elevaktivitet, undervisning med meningsfulde opgaver samt realistiske og udviklende arbejdsformer og relationer, hvilket konkret kan være projektarbejde, problembaseret undervisning, undersøgende undervisning, udeskole, innovations- og entreprenørskabsundervisning samt brug af spil, simulationer og fortællinger i undervisningen (Bundsgaard et al., 2022, s. 28). Det er et perspektiv, der forsøger at forstå, hvordan virkelighed (eller forestillet virkelighed) udspiller sig i fagundervisning i klasserum, og det adresserer tre centrale udfordringer:

- Etablering af læringsfællesskaber i klasserummet, der omhandler rammesætning af undervisningsscenariet.
- Behovet for refleksion og faglig legitimering af viden, som retter sig mod viden-i-handling, refleksion-i-handling og refleksion-på-handling.
- Koblinger mellem skole og det omgivende samfund, der omhandler, hvordan brug af scenarier kan eller bør skabe relationer til omverdenen (Bundsgaard et al., 2022).

Det er især den sidste af disse udfordringer, jeg er interesseret i, da den understreger, at scenariedidaktisk undervisning ikke kun er optaget af at skabe meningsfuld undervisning, men også at skabe meningsfulde forbindelser mellem skole og samfund (Bundsgaard et al., 2022). Som teori er scenariedidaktik både deskriptiv og præskriptiv. Det er et deskriptivt analytisk perspektiv, der særligt interesserer sig for scenarier og domænekoblinger. Det er også en præskriptiv didaktisk undervisningsteori, der tilstræber undervisning gennem brug af scenarier med afsæt i domæner uden for skolen.

Det er vanskeligt at lave en afgrænset definition af, hvornår noget er et scenarie. Jeg definerer scenarier på linje med Bundsgaard et al. (2022):

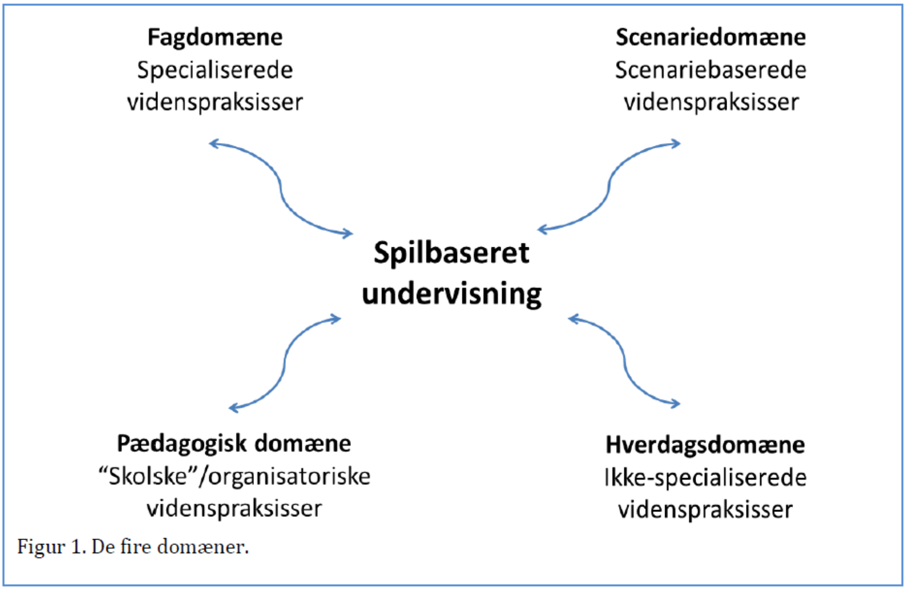
> Scenarier er fælles forestillede eller reelle situationer (ud over undervisningssituationen) med flere mulige udfald, som elever og lærere kan leve sig ind i og agere indenfor og opleve som meningsfulde. De skal give mulighed for, at eleverne med faglige metoder, begreber og redskaber kan undersøge og handle i forhold til konkrete udfordringer, som de enten selv identificerer, eller som er givne i scenariet. (s. 23)

Scenarier kan således variere i form og indhold, men deler det karakteristikon, at lærere og elever ”forestiller sig, undersøger og gentænker mulige konsekvenser af komplekse sammenhænge” (Bundsgaard et al., 2022, s. 18). Et eksempel på et undervisningsscenarie fra matematikundervisningen er *Fornyelse af Bytorvet*, hvor en 8.-klasse deltager i en forestillet arkitektkonkurrence, hvor de skal anvende matematisk modellering i forhold til at forskønne et bytorv (Blomhøj & Skånstrøm, 2022).

Når jeg arbejder med spil, kan det diskuteres, hvad relationen er mellem spil og scenarier. Jeg ser primært et spil som en del af et scenarie i undervisningen, fx som en del af et spildesignforløb eller som et udgangspunkt for specifikke undersøgelser. Alt efter spillets karakteristika kan spillet i sig selv udgøre mere eller mindre af et scenarie. Den overordnede tematisering af spil, baseret på, hvordan de understøttede udvikling af matematisk ræsonnement, fra **Artikel 1** kan illustrere dette. Spillene fra temaet ’Exploring an immersive environment’ forsøger i høj grad at udgøre et scenarie i sig selv, mens spillene fra temaet ’Experimenting’ primært fungerer som en mindre del af tilhørende scenarier. Scenarier med spil kan vække bestemte forventninger hos elever i en grad, så de kan afvise et omgivende scenarie fuldkomment, hvis ikke spillet lever op til deres forventninger. Et eksempel på dette er et studie af elever, der skal designe levels i et digitalt løbespil i form af matematikopgaver. Deres forventning er dog, at de skal designe et helt spil fra bunden, og de oplever derfor, at de ikke kan udøve den forventede autonomi i forhold til at designe spilmekanikker, der har meningsfulde og tydelige konsekvenser i spillet (Jensen et al., 2016). På den måde kan der være specifikke gyldighedskriterier for elever, der deltager i undervisning med spil, der bl.a. relaterer sig til hverdagsforståelser af spil. Det scenariedidaktiske perspektiv bruger begrebet domæner til at præcisere, hvordan sådanne hverdagserfaringer relaterer sig til undervisningen, hvilket jeg uddyber i følgende afsnit.

4.2.1 Scenariedidaktik og domæner

En del af det scenariedidaktiske begrebsapparat er domænespecifikke forståelsesrammer. Jeg definerer på linje med Bundsgaard et al. (2022) og Hanghøj et al. (2017b) et domæne som et erfaringsrum, hvor familier af praksisser udfoldes inden for bestemte diskursive rammer. Det kan fx være en skoleramme eller en specifik fagramme i skolen som matematik. Begrebet ramme er funderet i Goffman (1974), der bruger koncepterne *frame analysis* og *frame,* som jeg oversætter til forståelsesrammeanalyse og en forståelsesramme. Forståelsesrammeanalyse er en mikrosociologisk metode til at studere, hvordan situationer er definerede, hvordan mennesker forstår situationer og aktiviteter, samt hvordan betydning fortolkes, forhandles og dermed rammesættes. Simplificeret kan man sige, at en forståelsesramme beskriver et svar på spørgsmålet om, hvad der foregår i en given situation for en given deltager (Goffman, 1974). Det er én måde at forstå eller fortolke en given situation på. Misfeldt (2015) bruger forståelsesramme til at beskrive dette i forhold til et undervisningsforløb med et projektstyringssimulationsspil. Sådan et praksissimulerende spil repræsenterer aldrig en komplet model af en kompleks praksis inden for et specifikt domæne. Samtidig vil deltagerne have forskellige forståelsesrammer om spillet og rammesætte aktiviteterne i spillet i forhold til forskellige domæner. Eleverne i forløbet kan således rammesætte deres aktivitet gennem domæner, der relaterer sig til skolesituationer, eller domæner, der relaterer sig til spillets scenarie som håndværk, ledelse og samarbejde, men også til domæner, der har med spil og konkurrence at gøre. På den måde kan deltagere i spilscenarier rammesætte deres oplevelser på mange forskellige måder (Hanghøj et al., 2018). Til at forstå disse forskellige rammesætninger bruger jeg domænemodellen udviklet af Hanghøj (2011), og som bl.a. er brugt som analytisk redskab i **Artikel 3**. Domænemodellen viser mulige koblinger mellem forskellige domæner, der antageligt er involveret i undervisningsscenarier med spil. Den illustrerer, at scenariebaseret læring i deweysk forstand kan (og bør) forstås som en spænding og meningsforhandling mellem de forskellige domæner mellem lærere og elever. Domænemodellen er funderet i Barths (2002) begreb om vidensstraditioner, der indbefatter forskellige implicerede vidensformer samt bestemte måder at handle og forstå verden på (Bundsgaard et al., 2022). Dette beskriver jeg i form af domænespecifikke videnspraksisser og forståelsesrammer (Hanghøj, 2012). En videnspraksis dækker over, hvordan implicerede former for viden praktiseres i et domæne. Det er ikke kun udtryk for viden af teoretisk og boglig karakter, men også for, hvordan forskellige sociale sammenhænge kan indeholde forskellige samlinger af viden med tilhørende forestillinger om, "hvad der er vigtigt i verden" (Stokholm, 2007, s. 386). Sådanne videnspraksisser er både specialiserede og ikke specialiserede.



Figur 4.1: Domænemodellen og de fire domæner, der er i spænding, i spilbaseret undervisning (Hanghøj, 2012, s. 6).

Modellen illustrerer, at spilbaseret undervisning kan forstås gennem spændinger mellem forskellige domæner og deres tilhørende gyldighedskriterier. Fx, om et spil er underholdende (hverdagsdomænet), om det fører til mere læring (fagdomænet), eller om det skaber ro eller uro i klassen (det pædagogiske domæne). Domænerne har hvert sine specielle karakteristika:

- Fagdomænet: omhandler de gyldighedskriterier og specialiserede videnspraksisser, der tilhører det faglige område, her matematikfaget. Det kan fx være at arbejde med sandsynlighed eller matematisk ræsonnement gennem fx matematisk undersøgelse af systemiske aspekter af et spil eller vinderstrategier.
- Det pædagogiske domæne: omhandler de gyldighedskriterier og organisatoriske videnspraksisser, der findes i skolen. Det er lærernes og elevernes fo-

restillinger om, hvad man bør gøre og ikke gøre som en del af en undervisning. Skal man række hånden op? Arbejder vi i grupper? Osv.

- Hverdagsdomænet: omhandler ikkespecialiserede videnspraksisser og gyldighedskriterier uden for skolen i elevernes familie- og fritidsliv. Det kan handle om venskaber og forhold til andre elever samt erfaringer knyttet til spil i hverdagen.
- Scenariedomænet: omhandler de gyldighedskriterier og scenariebaserede videnspraksisser, der tilhører det autentiske eller forestillede scenarie, der udspiller sig i undervisningen. Det kan fx være, hvordan det givne spil knytter sig til scenariet og opleves relevant (Hanghøj, 2012), eller hvordan eleverne oplever at deltage gennem spildynamikker som konkurrence eller samarbejde.

Jeg bruger modellen til at analysere elevperspektiver og at designe undervisning med disse perspektiver for øje (Artikel 3) og ikke til at analysere lærerens bidrag til meningsforhandlingerne, samt hvilke domæner disse bidrag stammer fra. Jeg antager, at jeg som forsker har gavn af at forholde mig til elevers eksisterende erfaringer, handlemåder og gyldighedskriterier omkring spil. Derfor bruger jeg modellen for at forstå, hvordan undervisning med spilscenarier potentielt rækker ud i elevernes hverdag og ikke sker isoleret inden for fagfaglige rammer (Hanghøj, 2012). Modellen tillader mig at se på matematikundervisning som meningsforhandling på tværs af domæner, hvor gyldigheder for meningsfuld deltagelse for eleverne kan findes i forskellige domæner. Gennem Dewey (2005) kan man sige, at deltagelse i spil, både i og uden for undervisningen, er en del af en bred praksis, der rummer mange af de samme elementer på tværs af deltagelse i forskellige spil i forskellige kontekster. På den måde har eleverne selvfølgelig ikke kendskab til alle spil, men har egne forståelsesrammer og gyldighedskriterier for, hvad et spil er, og hvad det vil sige at spille på valide og ikkevalide måder. Dette understreger, at spil i undervisningen kan medføre en kompleksitet, hvor eleverne kan opleve gyldighed, men også afkoblinger mellem domæner på forskellige måder. Et eksempel på dette er fra en 3.-klasse, hvor eleverne skulle forestille sig, at de var spildesignere, der arbejdede i et spilfirma, som en del af scenariedomænet. I undervisningen skulle eleverne designe brætspil med værktøjet GeoGebra (www.geogebra.org) og brug af geometriske figurer. For nogle elever var denne fiktive ansættelse hos et spilfirma engagerende for deres faglige arbejde. Andre elever begyndte derimod at tale om lønforhold, og om det var forventet, at de skulle arbejde for spilfirmaet uden at blive kompenseret, hvilket forstyrrede deres faglige aktivitet (Misfeldt & Zacho, 2016). Dermed understøttede scenariet med eleverne som spildesignere ikke deres faglige udvikling. Eksemplet indikerer, at det er væsentligt at spørge, hvordan et scenarie er meningsfuldt for eleven, og validere svaret gennem forståelser om den kontekst, der inddrages i undervisningen. Et eksempel på en grundlæggende spænding i undervisningsscenarier med spil i matematikundervisningen er spændingen mellem sjov og læring. Set gennem gyldighedskriterier for at deltage i spil fra hverdagsdomænet kan en spilpraksis være gyldig, hvis den fx er sjov eller underholdende, og set fra et fagdomæne er praksissen gyldig, hvis den fx fører til læring af matematik.

En videre pointe er, at jeg ser de fire domæner fra modellen som generelle brede domæner, der potentielt er relevante i forståelsen af spilbaseret undervisning. I et konkret undervisningsforløb kan det være hensigtsmæssigt at præcisere domænerne yderligere og vælge ud i forhold til analytisk fokus. Fx bruger jeg i Jensen og Hanghøj (2019) et *spildomæne* relateret til *Minecraft*, da videnspraksisser og forståelsesrammer relaterede til netop dette domæne er relevante for analysen. Derudover kan der i forskellige situationer være andre relevante domæner til stede. Når undervisningen bliver observeret af en forsker, kan der fx være et domæne til stede, der retter sig mod deltagelse i et forskningsprojekt. I forlængelse af denne forståelse bruger jeg betegnelsen 'Spildomænet' om de gyldighedskriterier og ikkespecialiserede videnspraksisser, eleverne har fra deres erfaringer med spil. Disse erfaringer stammer primært, men ikke kun fra hverdagsdomænet. Pointen er, at der at tale om ikke-specialiserede videnspraksisser, der aktualiseres gennem undervisningen. Hverdagsdomænet, spildomænet og potentielt også scenariedomænet relaterer dermed til mere eller mindre specialiserede videnspraksisser, som eleverne har mulighed for at genkende som en del af domæner uden for skolen. Dermed bruger jeg disse ikke-skolske domæner, som optik til at forstå om elever kan relatere undervisningen til deres hverdags erfaringer.

Forskellige domæners gyldigheder kan både overlappe hinanden og være modstridende. En pointe er, at der ikke er noget indbygget analytisk hierarki mellem de forskellige domæner i modellen. I praksis vil lærere og elever dog ofte værdsætte bestemte vidensdomæner højere end andre. Lærerne kan fx opfatte fagdomænet som indeholdende den mest valide form for viden, idet undervisningen foregår i bestemte fag (Hanghøj, 2008). I andre tilfælde kan lærerne opfatte gyldig elevdeltagelse gennem 'skolske' videnspraksisser (Hanghøj, 2012), fx bestemte former for klassesamtaler som IRE (initiativ, respons, evaluering) (Hetmar, 2019). På den anden side kan elevernes erfaringer med gyldighedskriterier fra deltagelse i spil i hverdagen blive bestemmende for, om de oplever undervisningen som meningsfuld (Hanghøj, 2014). Dette understreger, at underholdningsspil ikke blot bør forstås fra et matematisk domæne, men er et fænomen, der i forvejen rummer betydninger for eleverne. Set gennem et scenariedidaktisk perspektiv har spilundervisningsforløb derfor et potentiale for at skabe relationer på tværs af domæner, fx i form af at eleverne oplever deltagelse som meningsfuld gennem flere domæner. Ligeledes tillader modellen at forklare, hvorfor elever ikke altid bliver optagede af det intenderede undervisningsdesign, men også af andre aspekter af undervisningen. Sidst understreger den scenariedidaktiske domænemodel vigtigheden af at forstå de implicerede domæner på egne præmisser. Når jeg ser på matematikundervisningen gennem et scenariedidaktisk perspektiv (Bundsgaard et al., 2022), er det, fordi det netop tillader mig at sidestille det matematiske fagdomæne med andre domæner, der vedrører elevernes erfaringer med spil, øvrige hverdagserfaringer og undervisningens pædagogiske organisering, når jeg analyserer undervisning set fra elevernes perspektiv. På den måde hjælper perspektivet med at åbne for, at elevernes spil- og hverdagserfaringer kan forstås i forhold til matematikundervisning og matematikfaglighed i klasselokalet.

4.2.2 Scenariedidaktik og matematik

Jeg vælger dermed det scenariedidaktiske perspektiv til at forstå spil i matematikundervisningen, da scenariedidaktik bygger på antagelser om en undersøgende didaktik, hvor elevernes handlinger og arbejde med relationer mellem 'virkeligheden' og fag står centralt (Misfeldt et al., 2022). Relationen mellem virkelighed og matematik er et væsentligt tema i matematikdidaktisk forskning, bl.a. i *matematisk modellering* (Blum & Niss, 1991; Kaiser, 2017), *undersøgende matematikundervisning* (Artigue & Blomhøj, 2013; Blomhøj, 2013) og *realistic mathematics education* (Freudenthal, 2002). Hvor forskning i matematisk modellering deler en grundlæggende ambition med dette ph.d.-projekt om at skabe sammenhæng mellem 'virkeligheden' og matematik (Kaiser, 2017). Mit valg bygger dermed på bredt etablerede matematikdidaktiske indsigter om, at dekontekstualiseret træning og tilegnelse af begreber hverken er ønskværdig eller kan stå alene. Samtidig er sådanne former for praksis ofte dominerende i skolen (Misfeldt et al., 2022), og elever oplever (for) ofte matematikundervisningen som frakoblet deres egen verden (Boaler, 2015b).

En central problematik, som relaterer sig til brugen af spil i undervisningen, er, at når situationer fra omverdenen bringes ind i matematikundervisningen, kan eleverne opleve dem som ikkeautentiske, hvis de ikke didaktiseres med omtanke (Fougt et al., 2019). En problematik i forhold til realistiske og autentiske opgaver er, at elever ofte ikke overvejer og forholder sig til, om deres opgaveløsninger giver mening i den 'rigtige verden' (Palm, 2008, 2009; Vos, 2020). Derfor kan elever svare på tekstopgaver på måder, der er i modstrid med den rigtige situation, der beskrives i opgaven – fx hvis de bliver spurgt om, hvor mange busser med en kapacitet på 48 de skal bruge til at transportere 360 elever på skoleudflugt, og de svarer 7,5 (Palm, 2008). Det er ganske vist korrekt, at 360/48 =7,5, men i forhold til reelt at skulle bestille busser er det ikke realistisk at bestille en halv bus. Problemet er, at elever kan have en tendens til at ignorere deres viden om konteksten, når de tilgår en opgave og vurderer deres løsning af den (Misfeldt et al., 2022). Det andet problem er omvendt, at omverdenen kan blive for dominerende, som eksemplet ovenfor fra Misfeldt og Zacho (2016) illustrerer.

Vos (2020) kategoriserer matematikopgaver i forhold til deres brug af kontekst og skelner mellem realistiske og autentiske kontekster. Realistisk forstås i denne forbindelse som, i hvilken grad opgaven relaterer sig til det ægte. Hvor det er vigtigt at overveje, om spørgsmålet i en opgave 'ville blive stillet i konteksten' (Vos, 2020, s. 37), den vedrører, og hvorvidt løsningen har værdi i konteksten, for at vurdere, om opgaven er realistisk. Autentisk kontekst refererer til en 'ægte' kontekst, der ikke er en kopi eller simulation, og hvor konteksten er anskueliggjort gennem overbevisende ressourcer, og konteksten retfærdiggør de spørgsmål, der stilles. I mit scenariedidaktiske perspektiv er der scenariebaserede videnspraksisser og domæner tilknyttet en given kontekst. De er med til at afgøre, om situationen, der tages ind i klasseværelset, stadig er 'ægte' i omverdenens forstand i forhold til at opfylde gyldige kriterier for, om spørgsmål, data og repræsentation m.m. er valide i forhold til situationen.

Vos (2015) definerer autenticitet som et socialt fænomen, da det er afhængigt af certificering. Dvs. at for at vi kan sige, at en kontekst for en opgave er autentisk, må den opfattes sådan af deltagere med kendskab til konteksten. Opgaver med en høj grad af autenticitet i forhold til fx situationen, spørgsmålet og dataene, med repræsentationer, der er relevante, for at konteksten kan understøtte, at elever bruger deres viden om situationen, når de tilgår opgaven (Palm, 2008). Men hvis elever skal agere, som om de skulle løse opgaven uden for skolen, så må de tro, at deres løsning bliver bedømt gennem de krav, der ville være til løsningen i situationen, hvis den var ægte, og ikke blot efter, hvad de tror, læreren forventer fagligt (Palm, 2009).

Når jeg fremhæver det realistiske og det autentiske, er det, fordi elever i spilbaseret undervisning kan forstås som deltagere med kendskab til konteksten (Vos, 2015). Især hvis det er spil, som de spiller i fritiden. Dette kan stille store krav til, hvordan eleverne oplever opgaven i konteksten som ægte, og hvordan de certificerer opgavens autenticitet, og i hvilken grad den relaterer sig meningsfuldt til konteksten (Fougt et al., 2019; Shaffer & Resnick, 1999). Men opleves opgaverne i konteksten som autentiske, kan det skabe mening i, hvordan fag og kontekst interagerer. Et eksempel på dette ses i **Artikel 3**, hvor koordinatsystemet bliver udgangspunkt for elevernes matematiske undersøgelser i *Minecraft*. Udover at være et relevant matematiske begreb, kan koordinatsystemet bruges til at navigere efter i *Minecraft*. Når koordinatsystemet kun er repræsenteret gennem avatarens placering i spillet, giver det anledning til en lang række undersøgelser, der kan støtte eleverne i begrebsopbyggelse om koordinatsystemet. Derefter kan de bruge denne viden om koordinatsystemet til at finde vej i *Minecraft*. Det betyder, at elevernes arbejde relateres til flere domæner gennem indlevelse i scenarier, hvilket giver muligheden for at tænke i relationer mellem domænerne. Sigtet efter koblinger mellem elevernes omverden og det faglige trækker tråde til Deweys (1916) teori om inquiry, hvor et grundprincip er, at "Eleverne skal opleve, at den viden, de udvikler, er nyttig og meningsfuld i deres omverden*"* (Blomhøj, 2021, s. 38).

Det scenariedidaktiske perspektiv understreger, at vi som forskere og undervisere ikke blot kan inddrage en kontekst uden for skolen som middel til et fagligt mål, men også eksplicit søge at skabe meningsfulde koblinger og understøtte et samspil mellem matematik og vidensdomæner uden for matematikundervisningen (Misfeldt et al., 2022). Potentialet i at tilgå matematikundervisning scenariedidaktisk er dermed, at det kan understøtte et "reflekteret og systematisk arbejde med rige autentiske eller forestillede scenarier", der "kan bidrage til at styrke matematikundervisningens samfundsmæssige samt individuelt oplevede relevans" (Misfeldt et al., 2022, s. 173).

Som analytisk ramme kan et scenariedidaktisk perspektiv bruges til at præcisere, hvilke praksisser og domæner der trækkes ind i undervisningen, og for at forstå, hvordan scenariedomænet spiller sammen med (eller ikke spiller sammen med) en række andre domæner (Misfeldt, 2021). Det er ikke alle former for spil, der bruges i matematikundervisningen, som lægger op til at designe scenariedidaktisk undervisning, fx de træningsspil, der sigter mod kognitiv træning af færdigheder (Larkin, 2015a), eller brug af abstrakte matematiske spil, hvor formålet er ræsonnementer om strategi (Bundgaard et al., 2022). I disse eksempler er scenarier ikke nødvendigvis tydelige for eleverne. Jeg anvender det scenariedidaktiske perspektiv til at forstå brugen af underholdningsspil med antagelsen om, at denne genre af spil i forvejen er en del af elevernes hverdagsdomæne, hvor de i mere eller mindre grad har gyldighedskriterier for at spille. Når elever deltager i undervisningsforløb med spil, vil nogle af dem derfor i forvejen være specialister i, hvad det vil sige at deltage i sådanne spil, ud fra deres egne erfaringer med spil uden for undervisningen. Dermed kan spil tilbyde nogle elever en anden position i klassen, end de plejer at indtage (Bundsgaard et al., 2022). På denne måde kan brugen af spil i matematikundervisningen være udtryk for, at forskellige rammesætninger af spil støder sammen og potentielt komplementerer hinanden. Men det kan ligeledes give anledning til en spænding mellem gyldighedskriterier for, hvad der tæller og ikke tæller som valid viden i matematikundervisningen.

Mit fokus på autentiske opgaver leder mig til at forstå scenarier i matematikundervisningen på linje med Misfeldt et al. (2022), men med en enkelt tilføjelse. Misfeldt et al. (2022) beskriver, at et scenarie kan understøtte elevers indlevelse i en problemstilling og oplevelse af autenticitet. Det kan præsentere udsnit af verden, som det er meningsfuldt at matematisere, analysere eller modellere. Det kan lade elever se matematikken i aktion og få en fornemmelse for, hvordan den er relevant for deres fremtid. På den måde kan et scenarie være med til at begrunde og motivere, at elever beskæftiger sig med matematik. På et enkelt punkt vægter jeg min forståelse af scenarier anderledes. Da jeg arbejder med spil, der som bredt fænomen er tæt knyttet til elevernes hverdag, så vægter jeg, at scenarier med spil ikke blot bør rammesættes i forhold til elevernes oplevede fremtidsrelevans, men i lige så høj grad bør medtænke rammesætninger i forhold til elevernes oplevede relevans i deres nutid eller gennem tidligere erfaring. Denne lille, men alligevel anseelige forskel gør mig i stand til at være endnu mere opmærksom på den meningsskabelse, eleverne oplever i forhold til deres hverdag, og ikke deres forestillede fremtid om mange år. Dermed retter jeg mit blik mod, hvordan matematik relaterer sig til elevernes hverdagserfaringer (Dewey, 2005) og deres forståelser af oplevet relevans (Misfeldt et al., 2022), og ikke mod komplekse samfundsproblematikker (Bundsgaard et al., 2022).

Mit valg af det scenariedidaktiske perspektiv på matematikundervisningen bunder dermed i, at brugen af underholdningsspil potentielt lader eleverne rammesætte deres deltagelse i forhold til egne gyldighedskriterier for spilsituationer, da de i forvejen har oplevelser med sådanne spil. Min definition af scenarier med spil i matematik giver dermed især mulighed for at tydeliggøre og beskrive, hvordan eleverne oplever relationer mellem deres omverden og fagdomænet. Dette ser jeg som et bestemt perspektiv på elevoplevelser af autenticitet i matematikundervisningen.

4.3 Spil som system og social interaktion

Min definition af spil rummer både et systemisk og et socialt element og er ikke kun knyttet til materialerne og reglerne i et spil, men er også relativt til spillerne, der spiller det Dette refererer jeg til som en komplementær spilopfattelse. Denne gør mig i stand til at forstå spil som relaterede til et domæne i undervisningen, der er grundlæggende forskelligt fra fagdomænet. Jeg lægger dermed især vægt på interaktionen mellem spil defineret som system og som social interaktion (Salen & Zimmerman, 2011) og potentialer i dette. De sociale og systemiske aspekter er af grundlæggende forskellig karakter. Men det er i spændingen mellem de to, at det 'velspillede' spil findes (DeKoven, 2013), dvs. spillet, der spilles som både en regelbunden systemisk og legende social aktivitet.

Forholdet mellem spil og leg er omdiskuteret. Spil kan dels forstås som en underkategori til og formaliseret del af leg, men leg kan også forstås som en måde at tilgå spil på. 'Game play' eller legen i at spille et spil er i den forstand: "the formalized, focused interaction that occurs when players follow the rules of a game in order to play it" (Salen & Zimmerman, 2011, p. 303). Leg kan også forstås i sig selv uden spil (Skovbjerg & Gudiksen, 2020) og repræsenterer også en selvstændig dagsorden inden for didaktisk forskning (Jørgensen et al., 2022). Når jeg bruger begrebet leg, er det ikke disse forståelser, jeg taler ind i, men udelukkende i forhold til leg i forbindelse med spil, altså som en måde at spille et spil på.

Salen og Zimmerman (2011) gennemgår en række forskellige definitioner af spil, uden at der kan siges at være konsensus om én bestemt definition. Samtidig er det dog sjældent, at folk er i tvivl om, hvorvidt noget er et spil eller fx en film (Skaug et al., 2020). I forskning om spil og matematiklæring kan spilbegrebet på uhensigtsmæssige måder reduceres til instrumentelle læringsredskaber, når specifikke matematiske kvaliteter ved spillet trækkes frem (Kacmaz & Dubé, 2021). I forhold til erkendelsesinteressen for denne afhandling er det vigtigt at beskrive spil som et fænomen, der også giver mening på deltagernes egne betingelser, da det bidrager med forståelser af gyldighedskriterier og vidensprakisser tilknyttet spildomænet. Arnseth et al. (2018) beskriver et dialogisk perspektiv til at analysere, hvordan elever oplever mening gennem undervisning med spil. Her er udgangspunktet, at spil er hændelser, der primært eksisterer i en dialogisk relation til en spiller (Atkins, 2006), og at meningen med et spil på den måde hverken er statisk eller kan forstås *a priori* (Arnseth, 2006). På den måde ser jeg primært spil som et fænomen, der opstår og udfoldes gennem aktiviteter og praksisser, og i mindre grad som et fænomen, der er (som design).

Goffmans (1961) teori om forståelsesrammer er central for min måde at forstå spil på som en social aktivitet, der rammesættes af deltagerne, og min definition af spil som både havende et socialt og et systemisk aspekt. Forståelsesrammeanalyse er flittigt brugt i feltet game studies, hvor især begreber fra essayet *Fun in Games* (Goffman, 1961) bruges til at analysere computerspilleres interaktion med computerspil og forstå, hvordan der er forskellige normer for at spille, gennem interview med spillere (fx Deterding, 2013). Goffman refererer Bateson (1955) i en forklaring af, hvordan forståelsesrammer og spil er koblet. "Games place a 'frame' around a spate of immediate events, determining the type of 'sense' that will be accorded everything within the frame" (Goffman, 1961, s. 20). I denne henseende er spil en forståelsesramme, der omkranser bestemte begivenheder og er med til at definere den form for mening, der tillægges alt i den. Dette udvider Goffman til at se spil i udfoldelse som et lille kosmos, der er under udvikling: "Games, then, are world-building activities" (Goffman, 1961, s. 25). Den mening, der konstrueres i spillet gennem de mulige handlinger og indtagelse af mulige roller, skaber en unik spilverden, hvorigennem betydningen opstår gennem forskellige former for samhandling (Goffman, 2020).

I denne afhandling er især ét begreb fra Goffmans teori om spil som en verdenskonstruerende aktivitet centralt i forhold til at analysere spilleres interaktion gennem spil: spillemødet eller spilmødet (*gaming encounter*), som jeg anvender til at beskrive de sociale interaktioner, der udfolder sig, når personer er samlet for at spille et spil. Begrebet er en måde at adskille et analytisk blik fra selve spillets design på, hvor spillere tager træk, slår med terninger m.m., i forhold til den bredere sociale interaktion, der foregår. For spillere i et spil handler spillet om at følge regler, og analytisk kan dette perspektiv reducere situationen til modstandere, der forsøger at tage de bedste træk over for hinanden. Derved kan man i sådan et perspektiv fx tale om den 'ideelle rationelle spiller' samt ideelle abstrakte spil og strategier. Spilmødet retter sig ikke mod dette regelbundne og systemiske aspekt, men mod den sociale interaktion, der er mellem deltagere i det sociale møde, som både kan indeholde deltagere, der er med i spillet, og andre personer, fx tilskuere. Goffman beskriver forholdet mellem de to aspekter som: "It is as players that we can win a play, it is only as participants that we can get fun out of this winning" (Goffman, 1961, s. 34). Pointen her er, at det er som spillere, vi opererer inden for spillets regler, hvilket gør det muligt at komme til en situation, hvor vi vinder. Betydning af at vinde skal dog findes i spilmødet, dvs. i deltagelsen i den sociale interaktion i og rundt om spillet. Hvis et spil spilles af to spillere, der har rivaliseret i mange år og holder skarpt regnskab med, om den ene eller anden vinder, og dette er det afgørende spil for, om den ene spiller kommer foran i dette regnskab, vil det have en betydning. Hvis det er en far, der spiller et spil med sin datter for at lære hende et spil eller for at dele en oplevelse med hende, vil spilmødet have en helt anden betydning.

Inspireret af Goffman (1961) ser jeg "eleven som deltager i et spilmøde" med en opmærksomhed, der både indeholder systemiske og sociale forhold samt deres interaktion. Det er gennem det systemiske aspekt, der kan ske analyse af en vinderstrategi, men det er den sociale kontekst, der afgør, hvad det betyder, om man vinder eller taber (Woods, 2012). I forlængelse af dette viser Figur 4.2 kompleksiteten, der er til stede, når der spilles i et klasserum.

Figur 4.2: Billedet er fra præsentationen af Marklund og Romin (2020) *på ECGBL-konferencen 2020. Det bruges her med tilladelse af forfatterne. Det illustrerer kompleksiteten, når et computerspil som spil og spilmøde udfolder sig i en klassekontekst. Der er både det fysiske og sociale klasserum, teknologien, selve spillet, eleven spiller, spillet, som andre elever spiller (gul streg), andre elever, læreren og de to elever, der spiller sammen (blå streg), klasserummet som ramme (rød streg) samt den bredere kontekst (grøn streg), spillet spilles i.*

Goffman (1961) bidrager således med et teoretisk perspektiv til at beskrive, hvordan deltagelse i spil opleves i forhold til de forskellige domæner i matematikundervisningen (Hanghøj, 2012). Dette giver mig anledning til at definere spil som et fænomen, der eksisterer i relation til en spiller (Arnseth et al., 2018), med et systemisk og et socialt aspekt, der er situeret og bliver realiseret i et spilmøde (Goffman, 1961). Elevernes oplevelse af at deltage i undervisningen kan således til dels forstås gennem de specifikke gyldighedskriterier, forståelser og videnspraksisser, der tilhører spildomænet. På den måde refererer en elev i matematikundervisningen med spil ikke blot til fagdomænet, hverdagsdomænet eller et pædagogisk domæne, men også til et spildomæne som deltager i et spilmøde.

4.4 Genbesøg af teoretisk perspektiv

Afhandlingens teoretiske perspektiv, der er emergeret i løbet af forskningsprocessen, er især velegnet til at forstå de måder, spilaktiviteter i matematikundervisningen bliver rammesat på af deltagerne. Jeg anlægger et scenariedidaktisk perspektiv (Bundsgaard et al., 2022) med domænemodellen som analytisk ramme (Hanghøj, 2012) til at undersøge elevers oplevelser af, hvordan spil og matematik mødes og brydes i undervisningen. Her lægger jeg især vægt på det socialt situerede og udforskende aspekt af læring (Dewey, 2005) og en spildefinition, der vægter både et systemisk og et socialt element (Goffman, 1961). Det særegne ved dette perspektiv i forhold til at forstå matematikundervisningen er, at det ikke positionerer spil som et middel til et fagligt mål, men positionerer spil og matematik som to ligeværdige fænomener i matematikundervisningen. Mit mål for at udvikle matematikundervisningen gennem denne ramme er således ikke direkte i forhold til matematikfaglige emner, men at forstå, hvordan elever erfarer, at matematik bliver relevant i forhold til de eksisterende praksisser, de deltager i. Disse praksisser er ikke blot elevers hverdagserfaringer med spil, men også hvordan de oplever at deltage i undervisningen som spillere og matematikelever.

Jeg begrunder valget af mit teoretiske perspektiv i to etablerede indsigter fra eksisterende forskning. Dels, at spil har stor kulturel og social betydning i børn og unges liv som digitalt og analogt medie på mange forskellige måder og potentielt rummer forskellige former for matematiske praksisser. Dels, at matematikfaget som skolefag kan opleves verdensfjernt og irrelevant for elever. Igennem disse to indsigter er mit perspektiv relevant til at forstå, hvordan elevernes hverdagserfaringer og socialt situerede praksisser med spil er en del af deres forståelser af matematikundervisningen, og hvordan sådanne erfaringer og praksisser kan relateres til matematikfaglige mål. Derudover begrunder jeg perspektivet gennem min empiri, hvor jeg gentagne gange oplever, at elevers hverdagserfaringer med spil har en betydning for, hvordan de rammesætter spilaktiviteter i undervisningen. Dette kan dreje sig om, hvilke udfordringer der er relevante i spil (**Artikel 3)**, eller hvilket domæne der er i forgrunden, når der spilles som en del af undervisningen (**Artikel 2**). Derfor har jeg valgt et teoretisk perspektiv, der er velegnet til at undersøge dette fænomen.

Kapitel 5 – resultater

Her præsenteres resultaterne fra afhandlingens fire artikler, der alle omhandler læringsmæssige muligheder og begrænsninger ved brug af spil i matematikundervisningen.

5.1 Artikel 1

How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review (Jensen & Skott, 2022). Udgivet i tidsskriftet *Digital Experiences in Mathematics Education*.

Artiklen har til hensigt at besvare forskningsspørgsmålet:

- **FS1:** How do DGBLE's afford primary and lower secondary students' learning of mathematical reasoning?

Altså, hvordan *Digital Game-Based Learning Environments* som et samlet undervisningsmiljø med interaktion mellem spil, lærer, klassen og flere elever, der rummer læringspotentialet, også i forhold til digitale spil, kan understøtte, at eleverne udvikler matematisk ræsonnement.

Et væsentligt fund er, hvordan digitale spil forsøger at understøtte (afforde) elevers udvikling af matematisk ræsonnement på fem forskellige måder i den eksisterende litteratur: 1) developing (winner) strategies 2) exploring an immersive environment 3) experimenting 4) designing learning games, 5) solving tasks.

At udvikle vinderstrategier understøttede alle tre faser i ræsonnementscyklussen (NCTM, 2008), hvor strategispil kan understøtte udvikling af matematisk ræsonnement, når spilmekanikker bruges som udgangspunkt for dialog. Solving tasks sigtede primært efter træning af procedure. De tre andre affordances indebar specifikke potentialer. Derudover viste studiet, at der ikke er evidens for, at matematisk ræsonnement opstår i forbindelse med spil generelt, men at der skal et specifikt spildesign og forskningsdesign til for at påvise, at det sker. Eleverne kan således engageres i matematik gennem stilladsering af både deres interaktioner med specifikke dele af specifikke spil og deres refleksioner over disse interaktioner. Dette kan ske gennem bestemte opgaver, der understøtter deres opdagelse af indlejrede matematiske relationer i spillet gennem diskussion af spiloplevelser. Generelt er ræsonnement ikke tydeligt, når eleverne spiller, men i deres refleksioner over spiloplevelser. En identificeret problematik i den forbindelse er, at elevers formodninger oftest er skjulte, når de spiller.

Artiklen konkluderer, at forskning i digitale spil og matematisk ræsonnement primært udføres fra forskningsfelter om undervisningsteknologi og generel uddannelse. For matematikdidaktisk forskning er det stadig en niche. Derudover er de forestillede måder, hvorpå eleverne skal ræsonnere i spillene, primært belyst gennem et matematikfagligt domæne, som ikke overvejer, hvordan elevernes spildomæne vil påvirke undervisningen.

Et videre fund er, hvordan specifikke elementer ved digitale spil understøtter ræsonnement, fx NPC'er (Non-Playing Characters), der bidrager med alternative perspektiver på løsninger og forklaringer, og TA-robotter (teachable agents), som eleverne skal lære at spille et spil. Alt i alt er der lovende elementer ved digitale spil, der kan bruges til at fremme matematisk ræsonnement som udforskning af en virtuel verden og imiteret social interaktion. Lærerens rolle er dog stadig afgørende. På den måde er muligheden for matematisk ræsonnement knyttet til både spillet og den måde, det spilles på, ligesom den måde, der reflekteres over det på i klassen. Retfærdiggørelse viser sig fx som et socialt fænomen, hvor dialogen mellem lærer og elever eller elever imellem er afgørende. Derfor bør spildesignere overveje, hvilke dele af matematisk ræsonnement der er understøttet i interaktion med spillet, og hvilke dele der er understøttet i den sociale kontekst med læreren eller andre studerende. Det største potentiale for retfærdiggørelse ser ud til at være i dialogen om spillet.

5.2 Artikel 2

Brætspil i matematikundervisningen (Jensen, 2022). Udgivet som kapitel i bogen *Håndbog i scenariedidaktik*.

Artiklen har til hensigt at besvare forskningsspørgsmålet:

- **FS2**: Hvilken meningskonstruktion sker gennem spil i matematikundervisningen, når der fokuseres på elevers deltagelse i undervisningsscenarierne som spillere?

Et væsentligt fund er, hvordan elever deltager i undervisningsscenarier med spil som spillere, og hvorfor dette kan forhindre, at eleverne kobler spil og fagligt domæne. Dermed bidrager **Artikel 2** til at belyse et tilbagevendende fænomen ved brug af spil i matematikundervisningen: nemlig at nogle elever ikke automatisk overtager undervisningsdesignets intentioner.

Artikel 2 viser spillere i en klasse, der ignorerer matematikken i et spil, når de spiller, fordi rammen *spil som social samværsform* træder i forgrunden, og det kan være inkluderende i samværet med andre elever at undgå at opfatte spilmøderne som matematiske aktiviteter. Gennem læreres fortællinger om brug af spil i undervisningen identificeres også en god grund til at ignorere matematikken. Det sker, hvis eleverne oplever konflikt mellem forståelse for det matematiske systemiske aspekt i spillet og deltagelse i spilmødet. Fx hvis de oplever, at en elev er en meget dygtigere matematiker end en anden.

Artikel 2 undersøger ikke, hvad det vil sige at spille godt fra et systemisk perspektiv, men finder forklaringer gennem forståelse for eleven som deltagegende i den sociale situation: spilmødet. Dette viser, at der kan være gode sociale grunde til, at elever ikke engagerer sig i matematisk spilanalyse og forsøger at spille som den rationelt ideelle spiller (fx Brousseau, 1997; Ke, 2019; Pareto, 2014). På den måde er **Artikel 2** med til at vise én måde, hvorpå elever kan finde gyldigheder for deltagelse uden for fagdomænet. Når eleverne med god grund ignorerer matematikken i spillet som potentiel vinderstrategi, sætter det spørgsmålstegn ved, hvordan konceptet at vinde et spil skal forstås i matematikundervisningssammenhæng.

5.3 Artikel 3

What's the math in *Minecraft*? A design-based study of student perspectives and mathematical experiences across game and school domains (Jensen & Hanghøj, 2020). Udgivet i *Electronic Journal of e-Learning.*

Artiklen har til hensigt at besvare forskningsspørgsmålene:

- **FS3:** How can *Minecraft* be used in a teaching unit to engage students in mathematics education by enabling different forms of participation?
- **FS4:** How do students experience new perspectives on mathematical knowledge across in-school and out-of-school domains?

Gennem disse spørgsmål viser **Artikel 3**, hvordan undervisning med *Minecraft* kan understøtte forskellige former for deltagelse, og hvordan elever oplever nye perspektiver på matematisk viden på tværs af domæner inden for og uden for skolen. **Artikel 3** viser, hvordan forbindelse mellem elevers fritidsdomæner og matematikdomænet kan kobles gennem et spilscenarie, der sigter mod faglig kvalificering af eleven, som spiller, og på den måde skaber en dialogisk relation mellem fag og spil.

Artikel 3 finder, at elever kan udvikle nye perspektiver på matematik gennem konceptuel *agens* (Cobb et al., 2009) som jeg oversætter til *handlemuligheder*, i undervisning med *Minecraft*. Derudover udvikler elever også nye måder at se *Minecraft* på. På den måde skabes forbindelser mellem matematikdomænet og spildomænet, hvilket transformerer oplevelsen af begge. Dernæst finder **Artikel 3**, at undervisningen er med til, at elevernes roller genforhandles, fordi nogle elever kan bidrage med ekspertviden om spildomænet.

Artikel 3 udvikler tre designprincipper. Elever skal have mulighed for meningsfulde handlemuligheder gennem problemløsning i relation til både matematik- og spildomænet. Dernæst skal de spil, der vælges til undervisningen, kunne give adgang til matematiske aspekter, der er relevante for læreplaner. Det tredje designprincip er, at undervisere, der bruger kommercielle spil, bør kunne relatere de matematiske aspekter i spillene til udfordringer, der er meningsfulde for spillerne i spillet. **Artikel 3** understreger, at forskere bør interessere sig mere for, hvordan og især hvad elever lærer af at indgå i matematikundervisning med spil. Især er der behov for nærmere at undersøge, hvordan matematik kan blive meningsfuldt for elever gennem spilbaseret læring. På den måde viser **Artikel 3,** hvordan elevers konceptuelle handlemuligheder udvikles på tværs af spil, hverdagsdomæne og fag. Derudover, hvordan især de fagligt dygtige elever oplever, at *Minecraft* i undervisningen påvirker deres deltagelsesmuligheder positivt ved at skabe bredere deltagelsesmuligheder for alle elever.

Gennem det tværgående felt viser **Artikel 3**, at spil i matematikundervisningen kan have et formål udover effektiv læring af procedure (*forskning i DGBL*) eller logisk tankegang og ræsonnement (*matematikdidaktisk forskning i spil*). Dette potentiale retter sig mod at opleve matematikfaget som personligt relevant gennem oplevelser af, at spildomænet på samme tid kan forstås gennem matematikfagdomænet og elevernes hverdagsoplevelser med spil gennem hverdagsdomænet.

5.4 Artikel 4

Computerspil i matematik (Jensen et al., 2021). Udgivet som kapitel i bogen *Sæt skolen i spil: brug af computerspil og gamification i undervisningen*.

Artiklen har til hensigt at besvare forskningsspørgsmålet:

- **FS5**: Hvad er læringspotentialet i undervisningsforløb med digitale spil i matematik, når undervisningsdesignet sigter mod meningsfulde koblinger mellem spil- og fagdomæner?

Dette bidrag er således en måde at tage afsæt i det nye etablerede forskningsfelt på og igennem dette omdanne teori til konkret matematikundervisning. Den bredere diskussion for dette er, hvordan kommercielle computerspil kan didaktiseres i praksis med henblik på matematikundervisning.

Den spildidaktiske model, der præsenteres i **Artikel 4**, som er en del af flere kapitler i *Sæt skolen i spil*-bogen, bygger videre på Hanghøj et al. (2019) og er et produkt af designprincipper for spilbaseret undervisning, der er raffineret både gennem GBL21-projektet (Hanghøj et al., 2019) og S*æt Skolen i spil*-projektet (Hanghøj et al., 2021). **Artikel 4** beskriver nærmere, hvordan den didaktiske model og de dertilhørende principper konkret kan udmøntes i tre spilforløb til matematikundervisningen. På den måde er **Artikel 4** et resultat af flere iterationer i forskellige DBR-projekter, der sigter mod at intervenere og undersøge brugen af spil i matematikundervisningen. Som metodologisk tilgang er DBR ikke blot interesseret i at intervenere med design og generere teori, men også i at kunne demonstrere forandringer på lokale niveauer (Barab & Squire, 2004). Jeg ser derfor **Artikel 4** som en måde at beskrive erfaringer og konkrete handleanvisninger på, da kapitlet ikke blot præsenterer den spildidaktiske model, men også, hvordan den konkret bliver brugt i forhold til at designe tre konkrete undervisningsforløb. Kapitlet taler ind i en spilanalytisk forskningstilgang med et bidrag, der udover selve spilanalysen og forslag til pædagogisk implementering videre forholder sig eksplicit til matematikdidaktisk teori og en forskningsbaseret didaktisk model for spilbaseret undervisning. På den måde er bidraget med til at konkretisere, hvordan forskning kan bruges til at designe undervisningen.

Kapitel 6 - diskussion af resultater

Dette kapitel diskuterer centrale aspekter af mit ph.d.-projekt med afsæt i mit teoretiske fundament. Først diskuterer jeg projektets resultater i relation til to overordnede problematikker inden for forskningen i spil og matematiklæring. Problematikkerne er udvalgt da de retter sig mod afhandlingens formål, går på tværs af projektets fire artikler og har generelle konsekvenser for forskning i spil og matematikundervisning. De to forskningsproblematikker er

1) Manglende forskning i de sociale aspekter af elevers spildeltagelse i matematikundervisningen.
2) Hvordan kan forskere designe undersøgende og meningsfuld matematikundervisning med spil, der knytter an til elevers hverdagsforståelser?

I Kapitel 7 herefter diskuterer jeg ph.d.-projektets metodologiske tilgang i forhold til DBR og reflekterer over mine metodevalg gennem begreberne validitet og reliabilitet.

6.1 Sociale aspekter af elevers spildeltagelse i matematikundervisningen

Som nævnt i forskningsoversigten (kapitel 2) og **Artikel 1** har forskere i spil og matematiklæring ofte specifikke forventninger til, hvordan elever skal spille og arbejde med bestemte spil (se f.eks. Ke, 2019; Pareto, 2014). Problemet er, at disse forventninger ofte er baseret på antagelser om, hvordan og hvorfor eleverne vil eller bør deltage i spil i matematikundervisningen, og sjældent er baseret på viden om elevernes hverdagserfaringer, gyldigheder og vidensprakssisser fra de spildomæner, som der arbejdes med. Bossomaier (2015) skriver fx, at elever generelt bliver motiverede til at udtænke vinderstrategier i spil, fordi de er interesserede i at vinde og er motiverede ”to be good at the game” (s. 206). Et andet eksempel fra de inkluderede studier i **Artikel 1** er Pareto (2014), der antager, at elever vil ”play well” ved at deltage i form af ”predicting and performing mental calculations as well as reasoning about numbers and computations” (s. 255). Den matematikdidaktiske forskning i spil (jf. afsnit 2.3) har især en tendens til at forstå elevers interaktion med spillet i rationelle termer ud fra en antagelse om, at eleverne tænker logisk, når de spiller spil. Tilsvarende har forskningen i DGBL med fokus på matematiklæring (jf. afsnit 2.2) en tendens til at tænke elevers interaktion meget instrumentel i forhold til, hvordan et læringsspildesign kan determinere elevernes interaktion med spillet.

Disse to antagelser om, at elever spiller spil i matematikundervisningen som rationelle logiske tænkere eller instrumentelle problemløsere, er problematiske af to årsager. Den første årsag er, at spil er forskellige, og at elever kan motiveres på forskellige måder gennem spil i undervisningen (Fadda et al., 2022). Nogle elever motiveres således til at agere som rationelle spillere, der kan ”regne spillet ud”, mens andre motiveres mere af spil som en elevaktiverende undervisningsform. Den anden årsag er, at eleverne ofte vil medbringe spilerfaringer fra deres hverdagsdomæne, som kan have stor betydning for deres forventninger, når de møder spil i matematikundervisningen. Studier viser, hvordan elevers spilerfaringer både kan være en ressource og en begrænsning, når spil anvendes i undervisningen, og at nogle elever aktivt anvender deres hverdagserfaringer med spil, når de tilgår spil i matematikundervisningen (Magnussen & Misfeldt, 2004; Wisittanawat & Gresalfi, 2020). Flere af de inkluderede studier fra **Artikel 1** viser dette. Fx understøtter de fleste spil i studierne elevundersøgelser (exploration) (NCTM, 2008), men nogle elever undersøger ikke kun de intenderede matematiske dele af spillet. Bl.a. beskriver Ke (2019), at elever forsøger at omgå det matematiske indhold i spillet ved at gætte, estimere eller bruge 'trial-and-error'-strategier. Det analytiske tema fra **Artikel 1** 'design af læringsspil' viser videre, hvordan elever bliver langt mere optagede af de visuelle aspekter af deres designede læringsspil end af spillenes funktionalitet, som kræver, at de sætter sig ind i og bruger matematisk viden (Ke, 2014). I forlængelse heraf risikerer forskningen i spil og matematiklæring at lægge for meget vægt på, at eleverne skal spille spillene på bestemte måder og overtage intenderede roller, og dermed at overse vigtige sociale aspekter af elevers spildeltagelse. Gaydos og Devane (2019) understøtter dette argument ved at kritisere begrebet 'transformational play' (Barab et al., 2012) for, at det lægger for meget vægt på, at elever skal overtage spildesignerens ønskværdige identiteter igennem at spille, og ikke lægger vægt på, at eleverne selvstændigt udøver identiteter, når de spiller, som bl.a. trækker på deres identiteter som spillere og elever (jf. afsnit 4.1.4).

Set fra et scenariedidaktisk perspektiv er der forskellige gyldighedskriterier for og forventninger til elevers deltagelse i spil i matematikundervisningen. Fra det matematiske fagdomæne og det pædagogiske domæne er der klare fordele ved at arbejde med spil, der knytter sig til forståelser af elever som 'vinderstrategiudviklere'. Her er der gode resultater ved at arbejde med vinderstrategier gennem brug af små gådespil som *Race to 20* (Brousseau, 1997) og i udvikling af matematisk ræsonnement (McFeetors & Palfy, 2018), hvilket ellers kan være en udfordring i matematikundervisningen (Stylianides et al., 2017). Resultater fra **Artikel 1** viser ligeledes, at eleverne fik bedre muligheder for at lære at ræsonnere, når de arbejdede med strategispil med vinderstrategier. I kontrast hertil giver spil- og hverdagsdomænet mulighed for at forstå og få øje på flere nuancer af elevers deltagelse i spil. I hverdagsdomænet er det 'at spille for at vinde' fx kun én motivation blandt flere for at indgå i spil. For voksne, der spiller computerspil, identificerer Deterding (2013) fx fem 'motivationsrelevanser', der artikulerer den dominerende oplevelse, som spillere fokuserer på i forskellige former for deltagelse: kompetitiv, afslappende, social, medrivende (engrossing) og 'hardcore' (som er rettet mod kompetence i spillet). Videre identificerer Yee (2016) seks forskellige spillermotivationsprofiler: handling (spænding og ødelæggelse), socialt (samarbejde og konkurrence), mestring (strategi og udfordring), præstation (magt og fuldførelse), kreativitet (design og opdagelse) og fordybelse (narrativ og fantasi). Fra et spil- og hverdagsdomæneperspektiv er der derfor mange forskellige grunde til at indgå i spil, og det 'at vinde' er kun én blandt mange. **Artikel 3** viser i den forbindelse, hvordan de to elever, der i forvejen er dygtigst og hurtigst til matematik og bliver hængt ud af deres klassekammerater for det, nyder at indtage andre roller gennem spillet, fordi de bl.a. får mulighed for at samarbejde med andre – en arbejdsform, som de ikke er vant til i matematikundervisningen.

Dette ph.d.-projekt bidrager til forståelsen af elevers sociale deltagelse i spil i matematikundervisningen på fire måder. Den første måde er ved at bruge Goffmans (1961) begreber til at adskille *spillet* som system, der skal regnes ud, fra spilleren som *deltager* i et socialt spilmøde. Den anden måde er ved at undersøge grunde til, at elever vælger at ignorere matematikken i spil, når det bruges i matematikundervisningen (**Artikel 2**). Den tredje måde er ved at vise sociale aspekter af ræsonnement i digitale spil (**Artikel 1**). Den fjerde måde er ved at vise, hvordan koblinger af domæner kan designes og føre til meningsfuld læring i matematik, hvilket jeg diskuterer herunder i afsnit 6.2. Her vil jeg vise, hvordan jeg bidrager på de tre første måder.

For det første giver Goffmans (1961) analytiske skelnen mellem et systemisk og et socialt spilaspekt anledning til en række overvejelser om spils konceptualisering i matematikundervisning. Især giver den anledning til at forstå rammesætningen om 'eleven, der spiller for at vinde' som et andet udtryk for Goffmans (1961) 'logisk-rationelle spiller', der er en del af det systemiske aspekt og ikke af det sociale spilmøde. I min forståelse af Goffman kan denne idealtypiske forestilling om en spiller bruges til at beskrive systemiske aspekter af spillet, men den er ikke fyldestgørende til at forstå, hvordan elever deltager i det sociale spillemøde. Videre bidrager resultater fra **Artikel 1 og Artikel 2** til at nuancere, hvordan vi kan forstå matematiklæring som en proces, der både relaterer sig til spilmødet og spilsystemet, samt vekselvirkningen mellem de to aspekter.

Det andet bidrag viser hvordan elevers sociale rammesætning af spildeltagelse i matematikundervisningen gør, at de kan fravælge elementer af et spil, hvis de rammesætter spillet som en matematikkonkurrence, hvor alle elever ikke har lige forudsætninger for at være med (**Artikel 2**). Dette understreger, at det ikke er givet, at elever er interesserede i at analysere sig frem til en vinderstrategi i et spil. Tværtimod kan elever have gode begrundelser for ikke at indgå i matematisk analyse af spil, selvom det er tydeligt fra et matematikdidaktisk perspektiv, at sådanne analyser vil give dem bedre muligheder for at vinde og få en dybere forståelse af det matematikfaglige indhold. Fra et perspektiv, der tager udgangspunkt i social deltagelse, kan det være problematisk, hvis deltagere i et spil har alt for forskellige forudsætninger for at vinde spillet, da de risikerer at blive positioneret i en ulige konkurrence. At spille for at vinde og blive god til spillet kan altså ikke forstås som en generelt dækkende forklaring for, hvorfor elever deltager i spil i matematikundervisningen. Dette kompliceres yderligere af, at gyldighedskriterier fra fagdomænet ofte omhandler det systemiske aspekt af spillet (som matematisk-logisk system), mens gyldighedskriterier fra elevernes hverdagsdomæne ofte omhandler normer for social deltagelse i spil. På den måde kan brugen af spil i matematikundervisningen ikke blot skabe uoverensstemmelse mellem domæner, men også mellem forskellige aspekter af spillet som henholdsvis system og form for social deltagelses, hvor de intenderede matematikfaglige erfaringer har en helt anden karakter end elevernes hverdagserfaringer.

Det tredje bidrag peger på, at matematikfagligt indhold/matematiske kompetencer såsom ræsonnement ikke blot skal findes igennem spilsystemet, men at det kræver spilmøder, hvor det bliver relevant at diskutere aspekter af dette indhold, fx at retfærdiggøre strategier (**Artikel 1**). Resultaterne fra **Artikel 1** knytter sig til læring af matematisk ræsonnement og peger på, at dette er mere tydeligt i elevers refleksioner over spiloplevelser, end når de spiller. Et andet fund er, at der er en indbygget faldgrube ved læring gennem digitale spil, idet en succesfuld strategi kan overflødiggøre retfærdiggørelse af den, da den viser sin validitet ved at ”virke” i spillet. Dette kan gøre det svært at identificere forholdet mellem udvikling af matematisk ræsonnement og det, som Houssart og Sams (2008) kalder “a reasoned and winning approach”. Dette hænger sammen med, at retfærdiggørelse som en del af matematisk ræsonnement (NCTM, 2008) er afhængig af, at der er nogen at retfærdiggøre overfor. Dermed kan vi sige, at elevernes matematiske ræsonnementer vedrører det systemiske aspekt af spillet, men det er gennem det sociale aspekt, at eleverne ofte finder mening i at formulere dem. Et indbygget dilemma ved de fleste kompetitive strategispil er, at de aktivt understøtter, at spillerne hemmeligholder deres strategier for hinanden og derved ikke lægger op til dialog eller deling af ræsonnementer (Accepteret Jensen et al., 2023). Potentialet for matematisk ræsonnement skal på den måde findes i både spilsystem og den situerede konfiguration af spil i klassen, der vedrører undervisningens organisering og gennemførsel samt måden, spillet spilles på (spilmødet), og efterfølgende refleksion over dette.

Artikel 1 viser videre, at det ikke kun er i det sociale fællesskab i klassen, at eleverne kan finde mening, men at der er forskellige muligheder for digital interaktion, der imiterer social interaktion. Fx når elever interagerer med NPC’er med forskellige dagsordener i større narrativer (Gresalfi, 2015) eller træner robotter til at spille spil (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012). Disse elementer medierer mellem forskellige former for systemiske aspekter i spillet. Nogle kan forstås som et systemisk aspekt i klassisk forstand i den form, som Goffman refererer til, fx fire på stribe (Houssart & Sams, 2008) eller kortspil (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012). Andre spilelementer, fx et narrativ (Gresalfi, 2015), sætter en imiteret social ramme om mindre delelementer i spillet. Det kan fx være, når træningsrobotterne positioneres som novicer, som eleven skal træne (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012), eller når forskellige NPC’er har forskellige dagsordener i forhold til opgaver i spillet (Gresalfi, 2015). På baggrund af disse resultater ser jeg et stort potentiale i at undersøge og udvikle værktøjer, der udvider digitale læringsspilformater med spilelementer, der ud over klassiske systemiske elementer også bidrager meningsfuldt til det sociale spilmøde – enten som en integreret del af det centrale spilsystem eller som imiteret social ramme for det.

Det ovenstående peger på en række generelle konsekvenser for forskning i spil og matematiklæring. Dels bør det fremover være et spørgsmål, hvordan vi skal forstå og nuancere den kompleksitet, der opstår mellem spil, spiller og læring i en undervisningssituation. Der er et behov for at forstå, hvilke konsekvenser det har at positionere elever som fx undersøgere af vinderstrategier, og især, hvordan dette kan gøres på hensigtsmæssige måder. Såsom hvilke etiske implikationer der potentielt er, når elever spiller mod hinanden på en måde, de oplever som en konkurrence i matematik. Hvis nogen skal vinde, hvem skal så tabe? Og videre, hvem skal de vinde over og tabe til? Sådanne etiske refleksioner bør få mere opmærksomhed i forskningen. En pointe fra Houssart og Sams (2008) er netop, at et digitalt spil med fordel kan bruges til at positionere elever til at samarbejde om at vinde over spillet. Dienes (1963), som jeg anser som en pioner inden for spildidaktik i matematikundervisningen, bruger fx ikke konkurrencespil, men ser samarbejdet om at løse spil som centralt i arbejdet med spil (Sriraman & Lesh, 2007). Konkurrence- og samarbejdsspil kan give anledning til forskellige former for læring (Ruipérez-Valiente & Kim, 2020). Hvordan dette også involverer forskellige elevpositioneringer, ser jeg således som et område, der bør undersøges nærmere, især med perspektiver, der kan tydeliggøre elevernes oplevelser.

Dette ph.d.-projekt peger dermed på, at der er behov for mere viden om, hvordan forskellige former for deltagelse i spil kan være relevante for matematikundervisningen. I forlængelse af dette bør det undersøges nærmere, om deltagelsesmotivation (Deterding, 2013) og spillerprofiler (Yee, 2016) som design, samarbejde eller opdagelse kan blive centrale for design af scenariedidaktisk matematikundervisning. På den måde kan eleverne få nærværende erfaring med spil, der rækker ud i deres hverdagserfaringer. Begrebet om det sociale spilmøde ser jeg som havende potentiale for at forstå og designe undervisning, der lægger lige så stor vægt på eleven som social deltager som på eleven som systematisk spiller. I et scenariedidaktisk perspektiv er der her et potentiale i at udvikle spil- og undervisningsdesign, der i højere grad medtænker de identiteter, eleverne har i forvejen, og de forståelser af at deltage i spil, de har fra hverdagen.

Den samlede pointe er, at det analytiske skel mellem spilsystemer og elevers spildeltagelse tydeliggør den kompleksitet, der eksisterer i relationerne mellem spil og spiller i matematikundervisningen. Det giver potentielt nye redskaber til at forstå, hvordan disse to aspekter af spil kan mod- og medarbejde matematiklæring, men samtidig tilføjer det yderligere kompleksitet i forhold til at designe matematikundervisningen med spil. Forskningsfeltet om spil og matematiklæring bør derfor interessere sig mere for elevers sociale deltagelse i spil i matematikundervisningen. Hvis ikke, risikerer fokus at blive for meget på de logisk-rationelt tænkende elever, der sandsynligvis klarer sig godt i matematikundervisningen i forvejen, eller at blive for meget på instrumentelle perspektiver ved spil som belønningssystem og gamification. Det videre skridt for forskningsfeltet bør derfor være at kombinere eksisterende indsigter med forståelser af, hvorfor og hvordan elever kan deltage gyldigt i spilpraksisser i matematikundervisningen fra et socialt perspektiv.

6.2 Design af meningsfulde matematiske undersøgelser med spil

Den anden problematik handler om, hvordan forskere kan designe undersøgende og meningsfuld matematikundervisning med spil, der knytter an til elevers hverdagsforståelser. Dette er tæt knyttet til den form for læring, der designes efter, hvor tager jeg afsæt i Deweys (2005) læringsteori i min forståelse af undersøgende og meningsfuld matematikundervisning. Det giver anledning til den specifikke designudfordring at tage højde for elevernes oplevelser af deltagelse. Langt størstedelen af de kommercielt tilgængelige matematiklæringsspil er træningsspil i aritmetik (Larkin, 2015a), og de læringsspil, der bruges inden for forskning i DGBL med fokus på matematiklæring (jf. afsnit 2.2), har ofte enten karakter af træning eller tekstopgaver præsenteret i en spilkontekst (Gresalfi & Barnes, 2016). Tilsvarende er den matematikdidaktiske forskning i spil og matematiklæring i høj grad optaget af læringsspildesign til at fremme effektiv læring, og hvordan analoge matematik- og strategispil kan udvikle elevers tankegang, fx i form af ræsonnementer (jf. kapitel 2). Deweys læringsteori er brugt i dette felt til at forstå, hvordan man kan understøtte læring i spil (jf. afsnit 4.1.4). Der mangler dog at blive taget højde for, hvordan elever oplever underholdningsspil, som de kender fra deres hverdag, i matematikundervisningen, eller hvilke identiteter de udvikler, mens de spiller (Gaydos & Devane, 2019). Med afsæt i Dewey og en scenariedidaktik med interesse for domænekoblinger er dette et specifikt læringspotentiale for brug af spil i matematikundervisningen. Potentialet går på, at underholdningsspil kan være udgangspunkt for meningsfulde matematiske undersøgelser (Dewey, 2005) i matematikundervisningen, netop fordi de kan udgøre autentiske kontekster (jf. afsnit 4.2.2) og dermed være med til at understøtte læringsoplevelser gennem relationer mellem fag og elevers hverdagserfaringer (jf. afsnit 4.1.3). Theorycrafting-studierne (Debus, 2017; Karlsen, 2011) kan ses som eksempler på udforskning af autentiske matematiske problemer i relation til spillernes egne interesser i digitale underholdningsspil i den forstand, at problemerne certificeres som autentiske af deltagere i konteksten (Vos, 2015). I dette projekts scenariedidaktiske perspektiv giver Deweys læringsbegreb anledning til at argumentere for, at målet med matematikundervisning ikke bør være træning, men at eleverne opnår en bred forståelse af den matematiske betydning af de praksisser de indgår i (Brinkmann, 2006). Dermed kan spil være med til at kombinere 'livets' og matematikfagets interesser gennem matematikundervisningen (jf. afsnit 4.1.3). Denne antagelse lægger sig tæt op ad det sociokulturelle perspektiv på digitale underholdningsspil (Devlin, 2011; Gee, 2003), der argumenterer for potentialet for, at spil kan revolutionere og nytænke matematikundervisningen. Fra dette perspektiv er spil et kulturelt fænomen forankret i sociale praksisser både i og uden for skolen og ikke blot en undervisningsteknologi (Aguilera & de Roock, 2022). Eleverne har i forvejen hverdagserfaringer med forskellige spil, som de får nye erfaringer med i undervisningen – og ikke kun faglige erfaringer. Dermed trækker eleverne på eksisterende gyldighedskriterier for spil, når de deltager i spil i klassen, hvilket kan give anledning til tydelige koblinger og afkoblinger mellem deres forståelse af undervisningen. Koblinger i den forstand, at de oplever, at de praksisser, hvormed de deltager i spillene, både er gyldige for domæner inden for og uden for skolen. Afkoblinger, hvis det modsatte er tilfældet. Elevernes gyldighedskriterier kan dermed influere matematikundervisning med spil, hvor de både kan med- eller modarbejde lærerens forventninger til, hvordan eleverne bør deltage i spilforløb ud fra fagdomænets perspektiv. Wisittanawat og Gresalfi (2020) giver som eksempel en elev, der spiller et læringsspil, som var det et underholdningsspil (jf. afsnit 2.4), og som viser en tydelig afkobling mellem spil og fag, da eleven kun oplever sine handlinger i spillet som gyldige i forhold til sine hverdagserfaringer med spil og ikke matematikfagligt i forhold til spillet. I den forstand er det matematiske problem, som eleven møder i læringsspillet, ikke autentisk (Vos, 2015) i sammenligning med at spille et digitalt spil i fritiden.

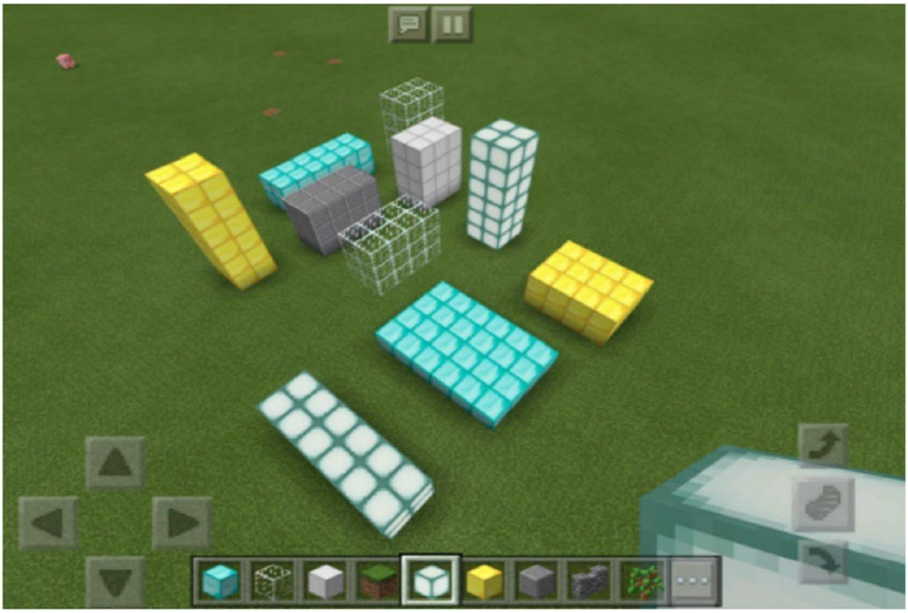
Ph.d.-projektets artikler bidrager med, hvordan man kan skabe meningsfulde undersøgelser med spil i matematikundervisningen på to måder. Først ved at undersøge og nuancere, hvordan elever oplever koblinger mellem spil- og fagdomæne i matematikundervisningen. Dernæst ved at opstille designprincipper for matematikundervisningen, der kan føre til domænekoblinger og meningsfuld læring i et deweysk læringsperspektiv, som kan bruges præskriptivt til at udvikle undervisningsforløb med spil.

Artikel 3 eksemplificerer, hvordan et spilbaseret forløb med *Minecraft*, der søger at skabe koblinger mellem gyldighedskriterier fra forskellige domæner, rummer potentialer for relevante og meningsfulde læringsoplevelser i matematik. Konkret ved at sigte efter at give eleverne nye muligheder for at agere i *Minecraft* gennem det matematiske begreb koordinatsystemet, som er valgt som fagligt fokus, da det kan hjælpe spilleren med at navigere. En central udfordring i spillet er således at finde vej i spilverdenen, og viden om, hvordan spilleren bevæger sig – beskrevet som koordinatsæt – kan hjælpe med dette. Dette undervisningsscenarie understøtter en anden form for spildeltagelse, end fx matematikfaglige forløb med vinderstrategispil eller træningsspil gør, da det eksplicit tager udgangspunkt i en udfordring, som potentielt har afsæt i elevernes hverdagserfaringer med *Minecraft*. Elever kan også have hverdagserfaringer med at spille strategispil, fx *Risk* eller *Mastermind*, men resultater fra **Artikel 2** og andet elevcitatet fra kappens forord indikerer, at de udfordringer, der ofte knytter sig til brug af strategispil i matematikundervisningen – fx at undersøge strategier – ikke er en del af deres hverdagserfaringer. **Artikel 3** eksemplificerer tilsvarende, hvilken læring der kan understøttes ved at sigte mod, at eleverne kan få nye erfaringer og påskønne brugen af et matematisk begreb på en måde, der er relevant for dem i den måde, de spiller spillet på.

Artikel 3 og **Artikel 4** bidrager videre til at vise, hvordan det scenariedidaktiske perspektiv som designredskab kan understøtte undersøgelse af autentiske problemer gennem et sigte mod domænekoblinger i undervisningen. Dette sker bl.a. gennem tre præskriptive designprincipper, der retter sig mod at gennemføre matematikundervisning med digitale underholdningsspil (**Artikel 3**). Principperne er, at

1. Elever skal have meningsfulde handlemuligheder gennem problembehandling, der relaterer sig til domæner, der går videre end fagdomænet matematik.
2. Lærere skal kunne vælge og undervise med spil, der giver adgang til matematiske aspekter, der er relevante for matematikcurriculummet.
3. Lærere skal være i stand til at facilitere undervisning, der kombinerer spillets matematiske aspekter med spillerrelevante spiludfordringer. (**Artikel 3**)

Disse tre principper skal bidrage til, at koblinger mellem domæner kan blive et aktivt designvalg i undervisningsdesignet. I forhold til det første princip er det væsentligt, at der er flere udfordringer i *Minecraft*, der kan løses uden matematisk opmærksomhed eller refleksion (Kørhsen & Misfeldt, 2015). På den måde kan *Minecraft* spilles og opleves som gyldigt udelukkende fra spildomænet (hvilket det er designet til). Den fagdidaktiske interesse for *Minecraft* stammer fra, at spil opbygget af kuber inviterer til konstruktion af figurer, som er en gyldig matematikfaglig aktivitet. Men selvom der kan identificeres gyldige faglige aktiviteter i spillet, er det ikke sikkert, at de rummer relevante udfordringer, der både er gyldige i forhold til spillets handlemuligheder og matematikfaglige mål. Dette blev jeg især opmærksom på i arbejdet med **Artikel 3**, da jeg undersøgte eksisterende undervisningsforløb med *Minecraft*. Disse forløb fokuserede primært på at bygge eller undersøge konstruktioner, fx ved at undersøge visuelle egenskaber ved multiplikation gennem undersøgelse af konstruktioner som vist på Figur 6.1 herunder.



Figur 6.1: Billedet er fra et studie, hvor matematiklærerstuderende undersøger læringspotentialet for Minecraft (Kim & Park, 2018).

Fra fagdomænet er konstruktionen af disse figurer en gyldig matematikfaglig aktivitet, og det er åbenlyst, at *Minecraft* kan bruges på denne måde som repræsentationsform, der understøtter matematiklæring. Det er dog ikke tydeligt, hvordan aktiviteterne er gyldige i spil- eller hverdagsdomænets perspektiv eller praksisser. Eller mere direkte: Hvilken spiludfordring bidrager undersøgelser af sådanne konstruktioner til at håndtere? Uden koblinger til meningsfulde udfordringer i spil- eller hverdagsdomænet reduceres spillet til en matematisk repræsentationsform i flot indpakning. Sker dette, kan opgaven let opleves som irrelevant eller ikkeautentisk fra et spillerperspektiv, og i værste fald kan det gentage problematikken med at stille urealistiske matematikopgaver i fingerede kontekster (Boaler, 1993, 2015b) – og muligvis i endnu højere grad, da eleverne arbejder i en kontekst, som de har stort kendskab og klare forventninger til. Jeg vil ikke afvise den faglige værdi i at bruge *Minecraft* på denne måde, men vil pege på, at mine resultater fra **Artikel 3** tyder på, at meningsfulde koblinger af domæner kan føre til en anden form for læring end denne 'instrumentelle' brug af *Minecraft* til matematikfaglige mål. Og at undervisningen kan sigte efter dette ved at give eleverne meningsfulde handlemuligheder i forhold til spildomænet gennem matematisk problemløsning (jf. designprincip 1).

Det andet designprincip fra **Artikel 3** retter sig mod at synliggøre matematikken i det givne spil. En væsentlig pointe her er, at *Minecraft*-forløbet fra **Artikel 3** og **Artikel 4** gør brug af en "debug screen" i spillet, hvor avatarens bevægelser er repræsenteret som koordinatsæt i real-time. Dette løser problemet med at gøre det matematikfaglige indhold i spillet synligt (Avraamidou et al., 2015), hvilket kun sjældent er en feature i digitale underholdningsspil. Dermed kan det være vanskeligt at overføre denne tilgang til arbejdet med andre digitale underholdningsspil. Denne pointe har også implikationer for spildesignere, der forsøger at lave uddannelsesversioner af kommercielle underholdningsspil, hvor det vil være oplagt at kunne vise essentielle matematiske informationer i spillet.

Det tredje designprincip fra **Artikel 3** retter sig mod, hvordan lærere faciliterer undervisningen mod domænekoblinger. Dette sigte kræver, at lærere både kan håndtere kompleksitet på tværs af domæner og en høj grad af uforudsigelighed. En pointe i **Artikel 3** er således, at eleverne oplever meget forskelligartede koblinger: Nogle oplever, at matematiske begreber knytter sig til omverdenen, nogle, at de kan spille på nye måder, og andre, at der er nye positive muligheder for at samarbejde. Dette resonerer med de mange forskellige grunde til at spille spil i fritiden (Deterding, 2013; Yee, 2016), der kan stritte i forskellige retninger. På den måde kan spil i undervisningen indeholde en stor uforudsigelighed, hvor elevers hverdagserfaringer med spil også kan modarbejde matematiske mål.

Det ovenstående peger på en række generelle konsekvenser for forskning i spil og matematiklæring. Især, at den form for læring, jeg peger på gennem Dewey (2005), er af en anderledes karakter, end forskningsfeltet ellers sigter efter at designe. Min hypotese, der bygger på resultaterne fra **Artikel 3**, er, at undervisningsdesign, der ikke kun inddrager rent matematikfaglige domæner, men kombinerer indsigter fra spildomænet med det matematikfaglige domæne, potentielt kan gøre matematikfaglige undersøgelser mere meningsfulde og relevante for eleverne. På den måde peger **Artikel 3** på, at spilbaseret læring, der skaber meningsfulde koblinger på tværs af fag-, spil- og hverdagsdomænet, kan fremme oplevelsen af autenticitet for eleverne. Denne form for brug af spil burde derfor kunne modvirke, at elever oplever matematik som irrelevant for dem (Misfeldt et al., 2022). Det er et udtryk for et anderledes læringspotentiale end fx træning, som retter sig mod erfaringsdannelse og udforskning, som Dewey beskriver. Brugen af Deweys perspektiv på læring er især med til at understrege, at der er forskellige læringspotentialer forbundet med forskellige forståelser af elevers deltagelse. Dette har en række konsekvenser for, hvordan vi forstår feltet om spil og matematiklæring som et forskningsfelt. Bl.a. udfordrer det ideer om, at vi problemfrit kan sammenligne på tværs af studier, der omhandler spil og matematiklæring, eller tale om generelle effekter af dette. At tydeliggøre, hvordan forskning i spil og matematiklæring antager forskellige perspektiver på læring, ser jeg som en væsentlig pointe at bringe videre i forskningsfeltet om spil og matematiklæring. Hvordan disse former for læring er forskellige og kan understøttes i praksis, bør således være centralt for den videre forskning i spil og matematiklæring. Forskningsoversigten (kapitel 2) kan være et oplagt udgangspunkt for sådan et arbejde. Specifikt peger mine resultater på et behov for at forstå elevers deltagelse i matematikundervisning med spil gennem deres valideringskriterier, der også tilhører spildomænet og hverdagsdomænet, og at forbinde dette til arbejdet med relevante matematiske begreber eller processer om eller i et givent spil. Hvordan fremtidig forskning skal få adgang til elevers forståelse af domæner, må derfor prioriteres.

Pointen om, at matematikundervisningen skal opleves gyldig fra både fag-, spil- og/eller hverdagspraksisser, er ikke blot scenariedidaktisk. Den understøttes af RTC-eksperimenter om endogen spildesign (Habgood et al., 2005), fx med spillet *Zombie Division* (jf. afsnit 2.2). Dette eksperiment understreger, at tæt integration mellem intenderet læring og spillets centrale formål øger matematiklæringen ved brug af digitale læringsspil. Dermed underbygges argumentet om, at den intenderede læring i undervisning med spil både skal give mening i forhold til matematik og i forhold til spillets præmisser, handlemuligheder og mål. En pointe, der også bør gælde for undervisningsdesignere, der ønsker at øge elevernes læringsudbytte. Elevernes oplevelser af relationer mellem matematik og spil er videre interessante for bedre at forstå, hvordan autentiske og realistiske opgavekontekster (Maaß, 2010; Palm, 2009; Vos, 2020) kan være en del af matematikundervisningen. Her er underholdningsspil et interessant fænomen, fordi eleverne på hver sin måde har erfaringer med sådanne spil. Derfor kan vi ikke antage, at elever vil forstå en undervisningskonktekst med spil på samme måde som forskere og undervisere, der har designet den. Tværtimod bør vi gå ud fra, at den oprindelige intention med undervisningen med spil vil blive udfordret af de måder, hvorpå eleverne forstår spil, og at elever på forskellige måder vil certificere (Vos, 2015), hvorvidt de udfordringer, de arbejder med, er autentiske. Netop elevernes erfaringer med en kontekst, som de i forvejen deltager i, bidrager med en unik mulighed for at undersøge relationerne mellem matematikundervisning, kontekst og elevers oplevelse af autenticitet.

Der er en lang tradition for at anvende spil i matematikundervisningen. Men der mangler stadig viden om, hvordan elevernes spilerfaringer og hverdagserfaringer kan aktualiseres og bliver aktualiseret i matematikundervisningen, når man arbejder med spil. Videre er der få eksempler på, at undersøgende og meningsfuld matematikundervisning med spil designes med udgangspunkt i elevers hverdagsforståelser. Dette ph.d.-projekt bidrager med designprincipper for, hvordan dette kan gøres, og understreger, at forskningen i højere grad bør interessere sig for, at forskellige måder at bruge forskellige spil på kan indeholde forskellige læringspotentialer. En mulighed for at undersøge læringspotentialer, der er ud over instrumentalisme og rationelle forståelser af spil, er i langt højere grad at inkludere elevernes perspektiver. Der er problematikker med at inddrage digitale underholdningsspil i undervisningen, fx hvilken slags matematik der kan arbejdes med, om det er relevant for curriculum, og hvordan det kan tilgås (Avraamidou et al., 2015), men **Artikel 3** viser også, at det er oplagt, at spil kan bidrage til fx undersøgende matematikundervisning. Hvis spil skal være genstand for autentiske matematiske undersøgelser, vil det være oplagt at afsøge didaktiske tilgange, der kan inkludere elevernes eksisterende forståelser af spil. Dette kan fx være dialogisk undervisning, som andre fag har benyttet sig af for at tilgå undervisning med spil (Arnseth et al., 2018).

Ud fra en forståelse af matematikundervisning som en designvidenskab og -praksis (Cobb, 2007) har ph.d.-projektets resultater implikationer, der kan komme forskellige designere af matematikundervisning til gavn: forskere, lærebogsforfattere, curriculumudviklere, læringsspiludviklere og undervisere i grundskolen og på professionshøjskoler. Udfordringen for en lærer, der ønsker at bruge underholdningsspil til at skabe domænekoblinger for elever, er dog anderledes end ved brug af digitale træningsspil eller matematikspil. Derfor er der behov for nuancerede fagbegreber, der trækker på både spil-, hverdags- og fagdomæner til at håndtere elevernes oplevelser, fx Goffmans (1961) spilmøde. Designprincipperne fra **Artikel 3** er et skridt på vej mod at nuancere fagsproget. De tilbyder en ramme, der gør det muligt at få øje på og italesætte potentialer og udfordringer ved brug af underholdningsspil i undervisningen, men sådanne begreber skal omsættes via konkrete redskaber for at understøtte praksis. Det kan være, hvordan bestemte spilmekanikker hænger sammen med udfordringer i spillet, og hvordan man kan blive motiveret af spil til at gøre noget. Læreren bliver så at sige nødt til at kunne sætte sig i spillerens sted og være nysgerrig på, *hvordan spilleren oplever spillet.* På nuværende tidspunkt er der sparsomt med forskningsbaserede eksempler på, hvordan dette kan gøres i undervisningen. Jeg bidrager konkret til dette ved at udvikle tre undervisningsforløb (**Artikel 4**).

Kapitel 7 - diskussion af metodologisk tilgang

Da ph.d.-projektets artikler tager udgangspunkt i to forskellige intervenerende forskningsprojekter (GBL21 og SIS), og den metodologiske ramme for afhandlingen er DBR, finder jeg det relevant at diskutere ph.d.- projektets metodologiske tilgang med udgangspunkt i centrale aktiviteter inden for DBR (Gundersen, 2021). Afslutningsvist anvender jeg begreberne validitet og reliabilitet (Creswell & Creswell, 2018) til at diskutere ph.d.-projektets robusthed og troværdighed (Schoenfeld, 2007). Jeg diskuterer min metodologiske tilgang for at gøre den gennemskuelig og give indblik i mine beslutningsprocesser.

7.1 DBR som interventionistisk tilgang

På linje med Abdallah og Wegerif (2014) ser jeg ikke DBR som et endeligt sæt af metodiske principper, men i højere grad som en metodologi, der er afhængig af forskningsobjektets kontekst og natur. Gundersen (2021) identificerer fire nøgleaktiviteter for DBR som forskningstilgang, som jeg vil bruge til at diskutere ph.d.-projektet: 1) planlægning og gennemførsel af interventioner, 2) udvikling af disse gennem iterative cyklusser, 3) samarbejde med praktikere samt 4) test og forfinelse af designprincipper.

I forhold til planlægning og gennemførsel af interventioner er der stor forskel på de tilgange, som ligger til grund for de fire artikler. **Artikel 1** og **Artikel 2** kan forstås som følgeforskning i forbindelse med det intervenerende projekt GBL21, **Artikel 3** som en bestemt intervention i SIS-projektet, og **Artikel 4** som en opsamling af resultater fra flere interventioner fra SIS-projektet. Når interventionerne i GBL21 er planlagt af andre forskere end mig, giver det en række begrænsninger i, hvordan jeg kan arbejde med dem i et DBR-perspektiv. En udfordring ved DBR er generelt at formulere den overordnede interventionsdesignstrategi i projektet, hvilket kan styrkes ved at tydeliggøre, hvorfor og hvordan forskere mener, det er givtigt at gennemføre bestemte interventioner (Gundersen, 2021). I den forbindelse kan det diskuteres, hvorvidt de oprindelige intentioner med undervisningsinterventionerne i GBL21 i højere grad burde have været i fokus i analysen af interventionen end det perspektiv, jeg anlægger i **Artikel 2**. Således giver **Artikel 2** et meget begrænset blik ind i planlægningen af interventionen. En videre analytisk artikel kan derfor med fordel tage udgangspunkt i at undersøge de oprindelige intentioner med interventionen – fx i forhold til intenderet læringsudbytte.

En velkendt problematik inden for DBR er at finde et passende vokabular til at beskrive interventionsstrategier (Gundersen, 2021). Den eksplorative tilgang, jeg har anvendt i ph.d.-projektet, har karakter af, hvad Krogh et al. (2015) beskriver som 'drifting in research' eller at flyde omkring i forskning. Design og forskning har historisk været adskilte akademiske discipliner (Frayling, 1993), og forskeren som designer kan udfordre klassiske forståelse af forskningsprocesser, da evalueringsmetoder og mål er i flux (Krogh et al., 2015), hvorfor drifting kan forstås som en tilfældig, ukontrollabel og inkonsistent tilgang til forskning. For en designtilgang er 'drifting' derimod et kvalitetstegn, da det viser, at designeren er i stand til at lære løbende gennem erfaringer og justere handlinger derefter. Gundersen (2021) foreslår, at 'drifting'-metaforen kan bruges som ramme til at forstå strategiske valg i et DBR-projekt. I Krogh et al.s (2015) metodetypologi for designeksperimenter kan ph.d.-projektets 'drifting'-tilgang anses som komparativ, da jeg anvender et centralt teoretisk perspektiv til at præsentere resultater fra forskellige, men overlappende cases, samtidig med at jeg forsøger at anerkende den iboende kompleksitet af den kontekst, som jeg undersøger. Fx ved at undersøge den gennem domæner. Herved forsøger jeg at fremhæve nye elementer i hver artikel, men samtidig at videreudvikle foregående elementer. Dette er tilfældet, når jeg i **Artikel 2** søger at forklare, hvorfor elever fravælger at indgå i den intenderede matematikundervisning med spil, hvilket var et resultat fra **Artikel 1**. Videre kan min 'drifting'-tilgang forstås som ekspansiv, da jeg forsøger at vise kvaliteterne ved et bestemt forskningsperspektiv, scenariedidaktisk matematikundervisning med spil, og hvordan dette perspektiv bør udvides og ekspanderes. Som et eksempel herpå anvender jeg Goffmans (1961) teoretiske blik på spil og spilmøder samt det scenariedidaktiske perspektiv på elevers hverdagsdomæneforståelser til at rammesætte mine samlede resultater i diskussionen ovenfor. Endelig ser jeg også, at min 'drifting'-tilgang har karakter af 'probing', da jeg især har prioriteret at følge de muligheder, der har vist sig igennem de to projekter, som jeg har været tilknyttet, i forhold til at få adgang til et felt, hvor jeg kunne indsamle empiri om brug af spil i matematikundervisningen.

Den næste centrale aktivitet for DBR som intervenerende metodologi omhandler iterative cyklusser (Gundersen, 2021). I afsnit 1.3 beskriver jeg hvordan de fire artikler kan forstås gennem de tre overordnede faser af iterative cyklusser i DBR (Abdallah & Wegerif, 2014). Min deltagelse i GBL21- og SIS-projektet har primært omhandlet undersøgelse af undervisningsdesign. Konkret tog det form som et pilotstudie af undervisningsforløbet til *Hungry Higgs* i GBL21, der senere blev revideret. Det har videre været i tæt samarbejde med lærerne fra SIS-projektet, hvor undervisningsinterventionen blev udviklet i fællesskab og justeret løbende undervejs. En generel kritik af iterationerne i DBR-metodologien er, at der let opstår en tendens til at fokusere mere på én enkelt forestillet designløsning, der afprøves i en kontekst, end at afsøge flere forskellige designløsninger, hvilket vil være normen i en professionel designkontekst (Gundersen, 2021). Denne kritik kan også rettes mod dette ph.d.-projekt, idet jeg har søgt at forstå potentialet i at anvende underholdningsspil i matematikundervisningen og i den forstand måske er for fokuseret på én teknologi i stedet for at afsøge forskellige løsninger på et problem. Som et eksempel har jeg valgt at undersøge realiseringen af to komplette undervisningsforløb og ikke mindre dele af de samlede forløb. En måde at arbejde mere iterativt og inkrementelt på kunne have været at inddrage artefakter, der gjorde det muligt at undersøge mindre dele af potentielle undervisningsforløb. Fx ved at lade elever eller lærere arbejde med forestillede scenarier i prototyper af forløb.

Den tredje centrale aktivitet i DBR omhandler samarbejde med praktikere (Gundersen, 2021). Dette har i mit tilfælde været meget forskelligartet. I SIS-projektet og i pilotafprøvningen af forløb til GBL21- projektet samarbejdede jeg tæt med frivilligt deltagende lærere om udvikling af undervisningen, hvilket begge gange syntes at føre til positive resultater i forhold til elevers læring. Mit samarbejde med lærerne, der deltog i GBL21-projektet, havde en anden karakter, hvor lærerne i højere grad forsøgte at implementere et færdigt design uden at tilpasse det lokale behov (Gundersen, 2021). Dette kan være medforklarende til de ikkeintenderede elevoplevelser af brætspilsforløbet, som jeg har dokumenteret (**Artikel 2**). Min baggrund for denne påstand er, at jeg er i tvivl om, hvorvidt der i GBL21-projektet var delt beslutningstagning mellem forskere, skoleledere og lærere (og andre deltagere). Dette skal ses i lyset af, at læreres ejerskab over interventioner og tilpasning heraf oftest fører til bedre resultater for både lærere og elever end ved direkte implementering (Durlak & DuPre, 2008). I mit samarbejde med lærere i GBL21-projektet oplevede jeg, at det var svært at opnå delt beslutningstagning. En pointe var, at kompleksiteten i undervisningsforløbene, der kombinerede nye faglige, spilmæssige og designmæssige forståelser, var så massiv, at lærerne havde svært ved at overskue dem. Dette kom til udtryk på to måder. På en skole blev *Hungry Higgs*-forløbet afviklet på et absolut minimum, hvilket resulterede i, at der reelt var meget lidt tid til at samarbejde med lærerne om at udvikle den aktive ingrediens (core practice) (Durlak & DuPre, 2008) i interventionen. På en anden skole valgte lærerne at kaste sig ud i et meget langtrukket og detaljeret forløb, hvor de forsøgte at leve op til alle undervisningsdesignets ambitioner. Men i det meget detaljerede og ambitiøse forløb druknede den aktive ingrediens i summen af mange mindre væsentlige elementer, fx at eleverne brugte meget tid på at dekorere deres spilbræt eller undersøge alle spilmekanikker i *Hungry Higgs,* før de forsøgte at lave om på en enkelt udvalgt spilmekanik. På den måde modarbejdede de meget detaljerede undervisningsforløb i GBL21 lærernes ejerskab over dem og minimerede pladsen til delt beslutningstagning på forskellige måder. Dette taler ind i en videre diskussion om, hvordan større implementering og forandring af undervisningspraksisser skal foregå, da det er urealistisk, at forskere kan arbejde tæt sammen med alle lærere. Her ville det være interessant at undersøge, hvorvidt lærere, konsulenter og forskere i GBL21 oplevede, at der var muligheder for dialog mellem lærer og forsker om kerneingredienserne i matematikforløbene. Et element, Durlak og DuPre (2008) understreger, er centralt. Konkret kunne GBL21-forløbenes potentiale undersøges videre ved at lade lærere udvælge specifikke dele af undervisningsforløbene og lade forskere og lærere samarbejde om at udvikle disse i forhold til at understøtte den aktive ingrediens.

Den fjerde centrale aktivitet i DBR er udvikling af principper: en måde, hvorpå viden produceret gennem DBR-metodologien kan generaliseres (Gundersen, 2021). Det er **Artikel 3**'s tre principper et eksempel på. En problematik er, at det kan være svært at kombinere udvikling af designprincipper med DBR-projekter, der i højere grad forsøger at forstå kontekster end at forbedre dem (Gundersen, 2021), hvilket jeg ser som værende tilfældet med **Artikel 1** og **Artikel 2**, der ikke i sig selv leder til udvikling af designprincipper. Pointen er, at konteksten for **Artikel 2**'s empiri er så specifik, at det ikke virker validt at udvikle abstrakte generaliserede og præskriptive principper på baggrund af denne ene artikel. En mulighed for i stedet at udvikle principperne fra **Artikel 3** kunne være en ny iteration, der fokuserede på raffinering af principperne, med fokus på, hvordan de bør forbedres, og hvorfor. Ligeledes kunne det være relevant at afsøge, hvilke designprincipper der kan laves gennem ph.d.-afhandlingens samlede resultater, og teste disse i yderligere iterationer.

7.2 Validitet og reliabilitet

Validitet og reliabilitet er centrale begreber for at forstå, hvorvidt et forskningsprojekts resultater er troværdige. Jeg diskuterer ph.d.-projektets metode igennem disse begreber, da det kan tydeliggøre styrker og svagheder ved min metodiske tilgang. Validitet og reliabilitet i DBR-studier kan adresseres gennem termerne indre og ydre validitet samt indre og ydre reliabilitet (Bakker & van Eerde, 2015).

Intern validitet refererer til kvaliteten af de indsamlede data og gyldigheden af argumentationerne, der leder til konklusioner (Bakker & van Eerde, 2015). En måde at højne den interne validitet på er gennem triangulering af data med andre former for data (Bakker & van Eerde, 2015, s.444). Dette gør jeg i **Artikel 2**, hvor jeg både indsamler data fra interview med elever og fra workshop med lærerne, hvilket styrker den interne validitet i denne artikel. Desuden anbefaler Bakker og van Eerde (2015), at teoretiske argumenter underbygges med transskriptioner for at give en rig og meningsfuld forståelseskontekst (s. 444), hvilket jeg især har gjort brug af i **Artikel 3**, der er struktureret gennem transskriberede eksempler. Jeg ser dog et potentiale i at styrke den interne validitet yderligere, da jeg har produceret forskellige former for data som feltnoter og videoobservationer af undervisningen. Eksplicit brug af dette materiale i artiklerne kunne have styrket den interne validitet yderligere. Jeg anerkender hermed, at min udvælgelse af data i forbindelse med GBL21-projektet til **Artikel 2**, hvor jeg især har antallet af data (Brinkmann, 2014) og målet for min undersøgelse (Cobb et al., 2003) for øje, potentielt er sket på bekostning af den interne validitet. En pointe er dog, at målet om meget detaljerede kontekstbeskrivelser eller *thick descriptions* (Geertz, 1973) kan medføre, at rapportering af DBR-studier bliver meget lang (Bakker & van Eerde, 2015). Det er dermed oplagt, at pladsbegrænsninger kan gøre det nødvendigt at udvælge, hvilke data der kan arbejdes med i en enkelt publikation.

Ekstern validitet refererer til spørgsmålet om generalisering og overførbarhed (transfer). Det vil sige, hvorvidt resultater fra undersøgelsens specifikke kontekst kan generaliseres på en måde, så de er brugbare for andre kontekster. Én af udfordringerne er at præsentere resultater på en måde, så de er tilgængelige, så andre kan tilpasse dem deres lokale omstændigheder (Bakker & van Eerde, 2015). Dette ser jeg som en væsentlig problemstilling for undersøgelser af spil og matematiklæring, da det kræver indsigt i både spil, kontekst og undervisningsdesign at gennemføre et specifikt foreslået spilbaseret undervisningsforløb. En kritik, jeg selv er med til at stille i Hussein et al. (2021), er, at undervisnings- og spildesign i studier ofte er så mangelfuldt beskrevet, at interventionerne ikke er mulige at gentage. De grundigste beskrivelser af undervisningsdesign og spil, jeg har fundet, er fra praksistidsskrifter (fx Nisbet & Williams, 2009), men disse gør sjældent brug af forskningsmetoder eller empiri. Dermed synes de forskellige publikationsformater at have forskellige begrænsninger for den eksterne validitet. En måde, jeg adresserer dette på, er at publicere om den samme intervention gennem forskellige formater, hvilket er tilfældet med **Artikel 3** og **Artikel 4**, der begge omhandler *Minecraft*-forløbet. **Artikel 3** er en tidsskriftartikel og fokuserer på forskningsmetode, teori, analyse af empiri og diskussion af fund, hvor undervisningsdesignet bruges til at kontekstualisere disse. Det er dog tvivlsomt, om beskrivelsen af undervisningsdesignet i **Artikel 3** er tilstrækkeligt til, at det kan gennemføres i andre kontekster. **Artikel 4** komplementerer dette ved at fokusere på at præsentere og diskutere undervisningsdesignet i detaljer med hensigten at gøre det gennemførligt for andre, hvor teori i højere grad bliver brugt til at begrunde det. På den måde vægter de forskellige publikationer forskellige aspekter af interventionen, hvilket jeg sammenlagt ser som en måde at højne den eksterne validitet på for undersøgelsen som helhed. Jeg vil dog være forsigtig med at hævde at de empiriske resultater om elevers oplevelse af deltagelse i matematikundervisning (**Artikel 2** og **Artikel 3**) har bred generaliserbarhed, selvom de meget vel kunne have det. I stedet tjener resultaterne som et eksistensbevis (Schoenfeld, 2007) på at elever kan have sådanne oplevelser, i matematikundervisning der gør brug af spil.

Intern reliabilitet refererer til den grad, indsamling og analyse af data er uafhængig af forskeren (Bakker & van Eerde, 2015). Den kan forbedres ved at indsamle data gennem objektive enheder som lyd- og videooptagere (Bakker & van Eerde, 2015, s. 445). Dette har jeg gjort brug af i både observation af undervisning, workshops med lærere, møder og interview. Dernæst kan den interne validitet højnes i analysearbejdet ved at diskutere data med andre fagfæller. Dette har jeg gjort ved intensivt at diskutere data fra artiklerne med mine medforfattere og vejledere.

Ekstern reliabilitet beskriver, i hvilken grad undersøgelsen kan replikeres i den forstand, at undersøgelsens konklusioner bør være afhængige af genstandsfeltet og undersøgelsens betingelser og ikke af forskeren (Bakker & van Eerde, 2015). I kvalitativ forskning drejer dette sig om at dokumentere undersøgelsen, så det er tydeligt, hvordan forskningen er udført, og hvordan dataene understøtter konklusionerne. Det betyder, at læseren bør kunne følge og forstå forskernes læringsproces, de anvendte metoder og det konceptuelle rammeværk samt årsager til valg og fravalg (Bakker & van Eerde, 2015). I kapitel 3 'Forskningsdesign' har jeg kommunikere min proces i arbejdet med ph.d.-projektet på en tydelig og gennemskuelig måde, så andre kan følge det. Dernæst beskriver jeg i kapitel 3 mine dataindsamlingsmetoder i en større detaljegrad, end de enkelte artikler tillader, og viser et overblik over de data, der ligger til grund for ph.d.-projektet. Ligeledes beskriver og uddyber jeg mit teoretiske perspektiv i kapitel 4. Min intention med dette er at gøre ph.d.-projektets proces, metoder, teoretiske perspektiver og resultater transparente.

Kapitel 8 - konklusion

Dette ph.d.-projekt undersøger, hvordan spil kan skabe læringsmæssige muligheder og begrænsninger i matematikundervisningen, belyst gennem et scenariedidaktisk perspektiv med særlig fokus på elevdeltagelse og underholdningsspil. Dette sker gennem fire artikler, der rummer fem forskningsspørgsmål.

- **FS1:** How do DGBLE's afford primary and lower secondary students' learning of mathematical reasoning?
- **FS2:** Hvilken meningskonstruktion sker gennem spil i matematikundervisningen, når der fokuseres på elevers deltagelse i undervisningsscenarierne som spillere?
- **FS3:** How can *Minecraft* be used in a teaching unit to engage students in mathematics education by enabling different forms of participation?
- **FS4:** How do students experience new perspectives on mathematical knowledge across in-school and out-of-school domains?
- **FS5:** Hvad er læringspotentialet i undervisningsforløb med digitale spil i matematik, når undervisningsdesignet sigter efter meningsfulde koblinger mellem spil- og fagdomæner?

I forhold til **FS1** identificerer **Artikel 1** fem måder, hvorpå digitale spil inviterer til handlinger, der kan understøtte elevers udvikling af matematisk ræsonnement: udvikle vinderstrategier, udforske spilverdener (immersive environments), eksperimentere med spilmekanikker, designe læringspil og løse opgaver. Hvor det at løse opgaver reelt var rettet mod træning. Resultaterne viser, at matematisk ræsonnement kan opstå gennem elevers interaktioner med spil og refleksioner over spiloplevelser, men at det kræver specifikke spildesign og didaktiske design. Studiet fremhæver, at læreren har en afgørende rolle i at fremme matematisk ræsonnement, især retfærdiggørelse (*justification*) gennem dialog, og at spildesignere bør overveje, hvordan ræsonnement understøttes både i spillet og i den sociale kontekst, der omfatter læreren og andre elever. Resultaterne viser, at potentialet ved digitale spil ikke blot er i form af nye spilformater, men også, at digitale elementer i og omkring spil kan tydeliggøre matematiske aspekter af spillet og støtte op om elevers refleksion over spillet.

I forhold til **FS2** viser **Artikel 2,** hvordan elever kan rammesætte deres deltagelse i matematikundervisning med brætspillet *Hungry Higgs*, og at de kan have gode grunde til at undgå at engagere sig i matematisk spilanalyse. Hvis den primære ramme for eleverne er det sociale spilmøde, kan det føre til, at de ignorerer det matematikfaglige indhold i spillene, eller hvis de rammesætter spillet som en matematikkonkurrence, kan det føre til, at de fravælger deltagelse.

I forhold til **FS3** udvikler **Artikel 3** med afsæt i *Minecraft* tre præskriptive designprincipper til matematikundervisningen med spil, som sigter efter domænekoblinger gennem meningsfulde matematiske undersøgelser. Principperne retter sig mod, at eleverne skal have meningsfulde handlemuligheder gennem problemløsning på tværs af domænerne. Videre skal lærere kunne vælge spil, der gør det muligt at undervise med fokus på aspekter, der er relevante for læseplanen i matematik, og kombinere disse aspekter med spillerrelevante spiludfordringer.

I forhold til **FS4** viser **Artikel 3,** hvordan undervisning med *Minecraft* skaber forbindelser mellem matematikdomænet og spil- og hverdagsdomænet gennem meningsfulde handlemuligheder og nye perspektiver på matematikfaget. Fx ændrede interventionen elevers perspektiver på matematisk viden og deres opfattelse af at *gøre* matematik. Interventionen støttede også ændringer i elevernes indbyrdes sociale relationer og deres opfattelse af kompetent deltagelse i matematikundervisningen, bl.a. som følge af deres oplevelse af udvidede deltagelsesmuligheder. Analysen indikerer, at en hovedårsag til, at eleverne koblede matematikdomænet og spil- og hverdagsdomænet, er, at de var i stand til at bruge viden om koordinatsystemet til at adressere meningsfulde udfordringer i spillet, i dette tilfælde at navigere. Artiklen understreger det tværgående potentiale i at gøre matematik personligt relevant for eleverne i begge domæner gennem spil.

I forhold til **FS5** designer **Artikel 4** tre undervisningsforløb, der konkretiserer, hvordan domænekoblinger kan være udgangspunkt for matematiklæring med spil i praksis. Her er det centralt, at design af matematikundervisning med spil kan ske ved at tage udgangspunkt i de udfordringer, elever møder i et spil, og skabe forbindelser mellem specifikke spilelementer og de matematiske læringsaktiviteter.

Afhandlingens resultater er relevante for videre undersøgelse og design af matematikundervisning med spil, fordi de viser værdien af at udvikle nye teoretiske perspektiver, der kan rumme elevernes sociale deltagelse og hverdagserfaringer som en del af læringsoplevelsen, både analytisk og præskriptivt. I det scenariedidaktiske perspektiv, som jeg anlægger, bliver det tydeligt, at vi mangler viden om, hvordan elevers oplevelser med spil i fritiden kan være en ressource for deres læring i matematikundervisningen. Derudover peger afhandlingen på, at der mangler nuancerede beskrivelser af, hvordan elever deltager i matematikundervisning med spil som en del af det sociale spilmøde. Dermed sætter afhandlingens resultater spørgsmålstegn ved, hvorvidt forskningsfeltet har tilstrækkelig forståelse af konsekvenserne ved at positionere elever som logisk rationelle spillere, og i hvilken grad vi kan antage, at eleverne vil interagere med spil, som forskere og undervisere forventer.

Ph.d.-projektet viser, at der er et læringspotentiale knyttet til elevers meningsfulde erfaringer (Dewey, 2005) med spil, hvor underholdningsspil potentielt kan understøtte dem i at opleve matematik som relevant for deres omverden såvel som for faget. Ph.d.-projektet undersøger dermed et hidtil overset læringspotentiale, der adskiller sig fra den nuværende forskning i læringseffekter gennem digitalt designede læringsspil og forskningen i udvikling af logisk tankegang samt matematisk ræsonnement gennem systemiske aspekter af analoge spil. Dermed er afhandlingen med til at problematisere forestillingen om, at spil i matematikundervisningen kan forstås som et homogent forskningsfelt. Som min forskningsoversigt viser, er der en stor, og ofte uartikuleret, variation i forskningsmæssige tilgange (såsom forskningsmetoder) og genstande for forskningen (såsom, hvilke spil der undersøges, og de læringsmål, der fokuseres på). Dette har konsekvenser for, hvordan vi kan vurdere, sammenligne og generalisere de meget forskelligartede resultater fra feltet (kapitel 2). Dette peger på et behov for at tydeliggøre forskningsmetoder, spildefinitioner og læringsmål, men også for at kombinere indsigter fra de forskellige forskningsinteresser i feltet i fremtidig forskning. I forhold til design af ikke kun digitale, men også analoge spil er forbindelser mellem systemiske og sociale aspekter af elevernes deltagelse i spilmødet et oplagt fokus. Det kan formodentlig udvikles ved at kombinere matematikdidaktiske indsigter om læreres brug af spil som redskaber, fx hvordan en dialogisk tilgang kan understøtte læring, med indsigter fra design af digitale læringsspil.

Afhandlingen diskuterer også forskellige praktiske problematikker ved brug af spil i matematikundervisningen. Først, at der er stor forskel på at anvende et strategispil, hvor spillets mål og det matematikfaglige indhold er tæt knyttet til hinanden, og et underholdningsspil, hvor spillets mål ikke direkte relaterer sig til matematikfaget. Dernæst, at videre udvikling af praksis især bør have fokus på at identificere og rammesætte udfordringer i spillene, der er relevante for både spillet og matematikfaget. Matematiske undersøgelser af spil skal give mening i en skolekontekst, men også i forhold til andre bredere perspektiver, der inkluderer kontekster, som eleverne i forvejen har erfaringer med. Her kan den scenariedidaktiske optik gøre os i stand til at forstå hvordan vi kan positionere elevernes hverdagserfaringer uden for skolen som positive bidrag til matematikundervisning med spil. Videre er der behov for at udvikle redskaber og fagsprog til at understøtte matematikundervisning med spil, som både har øje for et processuelt og socialt aspekt af at indgå i et spilmøde.

Samtidig vil jeg pege på, at koblinger mellem domæner både er komplicerede og uforudsigelige, især da der findes begrænset viden om, hvordan elevers motivationer for at indgå i spilpraksisser forandrer sig, når de bruger spil i matematikundervisningen. Ph.d.-projektet viser her, at elevers hverdagserfaringer med spil også kan være med til at bremse faglige indsigter i stedet for at understøtte dem, hvis de f.eks. har en klar forventning om primært at kunne spille spillet i stedet for at undersøge de matematiske aspekter.

På baggrund af ph.d.-projektet kan jeg konkludere, at spil har potentialet til at understøtte eleveksperimenter og -undersøgelser i en autentisk kontekst. Ph.d.-projektet viser imidlertid også, at hvis dette potentiale skal understøttes, så bør forskningsfeltet i langt højere grad interessere sig for nuancerne i elevernes deltagelse, især for elevernes certificering af faglige udfordringer (Vos, 2015), og hvordan de er afhængige af koblinger mellem spiludfordringer og det matematikfaglige indhold.

Spil og matematik har altid været tæt forbundet. I sin antropologiske undersøgelse af matematikkens historiske udvikling, identificerer Bishop (1991) leg – dvs. spil – som én ud af de seks universelle aktiviteter, der har haft en betydende rolle i udviklingen af matematikken, som vi kender den i dag. Men hvis matematikundervisningen skal drage nytte af de potentialer, som nyere digitale og analoge spilformater tilbyder, så bør vi interessere os for, hvordan elever deltager i sådanne spil, og hvordan matematik kan hjælpe dem med at deltage bedre. Dette handler ikke blot om at gennemskue spilsystemer, men om, hvordan matematikundervisningen tilbyder elever måder at forholde sig til og forstå spil på.

Litteratur

Abdallah, M., & Wegerif, R. (2014). Design-Based research (DBR) in educational enquiry and technological studies: A version for PhD students targeting the integration of new technologies and literacies into educational contexts. *(Unpublished?)*.

Aguilera, E., & de Roock, R. (2022). Digital Game-Based Learning: Foundations, Applications, and Critical Issues. In *Oxford Research Encyclopedia of Education*.

Ainley, J. (1988). Playing games and real mathematics. *Mathematics, Teachers and Children*, 239–248.

All, A., Castellar, E. N. P., & van Looy, J. (2021). Digital Game-Based Learning effectiveness assessment: Reflections on study design. *Computers \& Education*, *167*, 104160.

All, A., Castellar, E. P. N., & Van Looy, J. (2016). Assessing the effectiveness of digital game-based learning: Best practices. *Computers \& Education*, *92*, 90–103.

Arnseth, H. C. (2006). Learning to play or playing to learn: A critical account of the models of communication informing educational research on computer gameplay. *Game Studies*, *6*(1), 1–11.

Arnseth, H. C., Hanghøj, T., & Silseth, K. (2018). Games as Tools for Dialogic Teaching and Learning: Outlining a Pedagogical Model for Researching and Designing Game-Based Learning Environments. In H. C. Arnseth, T. Hanghøj, T. D. Henriksen, M. Misfeldt, R. Ramberg, & S. Selander (Eds.), *Games and Education: Designs in and for Learning* (pp. 123–139). Brill Sense.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(6). https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Atkins, B. (2006). What are we really looking at? The future-orientation of video game play. *Games and Culture*, *1*(2), 127–140.

Avraamidou, A. (2017). *Mathematics that arises from collaborative gameplay in The Sims 3*. University of Leeds.

Avraamidou, A., Monaghan, J., & Walker, A. (2012). Abstraction through game play. *Technology, Knowledge and Learning*, *17*(1), 1–21.

Avraamidou, A., Monaghan, J., & Walker, A. (2015). Mathematics and Non-School Gameplay. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital Games and Mathematics learning* (pp. 11–34). Springer Science+Business Media.

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). *An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education*. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Bang, M., Faber, L., Gurneau, J., Marin, A., & Soto, C. (2016). Community-Based Design Research: Learning Across Generations and Strategic Transformations

of Institutional Relations Toward Axiological Innovations. *Mind, Culture, and Activity*, *23*(1). https://doi.org/10.1080/10749039.2015.1087572
Barab, S., Gresalfi, M., & Ingram-Goble, A. (2010). Transformational play: Using games to position person, content, and context. *Educational Researcher*, *39*(7). https://doi.org/10.3102/0013189X10386593
Barab, S., Pettyjohn, P., Gresalfi, M., Volk, C., & Solomou, M. (2012). Game-based curriculum and transformational play: Designing to meaningfully positioning person, content, and context. *Computers & Education*, *58*(1), 518–533.
Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 1–14.
Barth, F. (2002). An anthropology of knowledge. *Current Anthropology*, *43*(1), 1–18.
Bateson, G. (1955). A theory of play and fantasy. *Psychiatric Research Reports*.
Bayeck, R. Y. (2018). A review of five African board games: is there any educational potential? *Cambridge Journal of Education*, *48*(5). https://doi.org/10.1080/0305764X.2017.1371671
Bell, A., & Gresalfi, M. (2017). Teaching with videogames: How experience impacts classroom integration. *Technology, Knowledge and Learning*, *22*(3), 513–526.
Beserra, V., Nussbaum, M., Zeni, R., Rodriguez, W., & Wurman, G. (2014). Practising arithmetic using educational video games with an interpersonal computer. *Journal of Educational Technology \& Society*, *17*(3), 343–358.
Bewersdorff, J. (2021). Luck, Logic, and White Lies. In *Luck, Logic, and White Lies*. https://doi.org/10.1201/9781003092872
Biesta, G., & Burbules, N. (2003). Pragmatism and educational research. In *Educational Research*.
Bishop, A. J. (1991). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
Blomhøj, M. (2000). Hvorfor matematikundervisning?: matematik og almendannelse i et højteknologisk samfund. In *Matematikken og verden*. Fremad.
Blomhøj, M. (2013). Hvad er undersøgende matematikundervisning? -og virker den? In *Håndbog om matematik i grundskolen - læring, undervisning og vejledning* (pp. 172–188). Dansk Psykologisk Forlag.
Blomhøj, M. (2021). Samspil mellem fagdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisning - belyst gennem erfaringer fra et udviklingsprojekt i undersøgende matematikundervisning. *Sammenlignende Fagdidaktik*, *6*, 29–50.
Blomhøj, M., & Skånstrøm, M. (2022). Fornyelse af bytorvet – Et Scenariedidaktisk forløb i 8. klasse. In *Håndbog i Scenariedidaktik* (pp. 215–229). Aarhus Universitetsforlag.
Blomhøj, Morten. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund.
Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathemat-

ics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1). https://doi.org/10.1007/BF00302716

Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do they Make Mathematics More" Real"? *For the Learning of Mathematics*, *13*(2), 12–17.

Boaler, J. (2015a). *The elephant in the classroom: Helping children learn and love maths*. Souvenir Press.

Boaler, J. (2015b). *What's math got to do with it?: How teachers and parents can transform mathematics learning and inspire success*. Penguin.

Bos, B., Wilder, L., Cook, M., & O'Donnell, R. (2014). Learning mathematics through Minecraft. *Teaching Children Mathematics*, *21*(1), 56–59.

Bossomaier, T. (2015). Serious games and gaming. In *Digital games and mathematics learning* (pp. 201–232). Springer.

Brahe-Orlandi, R. (2019). *Entreprenørskabsundervisning i dansk: en videoetnografisk undersøgelse af udskolingselevers læringspraksis og -udbytte i mål- og værdiskabelsesorienteret entreprenørskabsundervisning*.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101.

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada*, *1*, 25.

Bright, G. W., Harvey, J. G., & Wheeler, M. M. (1983). Use of a Game to Instruct on Logical Reasoning. *School Science and Mathematics*, *83*(5), 396–405.

Bright, G. W., Harvey, J. G., & Wheeler, M. M. (1985). Learning and mathematics games. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *1*, i--189.

Brinkmann, S. (2006). *John Dewey: en introduktion*. Hans Reitzels Forlag. https://vbn.aau.dk/en/publications/john-dewey-en-introduktion

Brinkmann, S. (2014). Qualitative Inquiry in Everyday Life: Working with Everyday Life Materials. In *Qualitative Inquiry in Everyday Life: Working with Everyday Life Materials*. https://doi.org/10.4135/9781473913905

Brinkmann, S., & Kvale, S. (2015). *Interviews: Learning the craft of qualitative research interviewing* (Vol. 3). Sage Thousand Oaks, CA.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970--1990* (Vol. 19). Springer Science \& Business Media.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141–178.

Bryman, A. (2015). Social Research Methods (4th Edition) by Alan Bryman. *Abhigyan VO - 32*, *4*.

Bundgaard, M. A. F., Christensen, K. H., & Honoré, I. R. (2022). Når indskolingselever ræsonnerer. *Tidsskriftet Matematik*, *2*, 4–8.
Bundsgaard, J., Fougt, S. S., Hanghøj, T., & Misfeldt, M. (2022). Scenariedidaktik - en introduktion. In *Håndbog i scenariedidaktik* (pp. 16–42). Aarhus Universitetsforlag.
Byun, J., & Joung, E. (2018). Digital game-based learning for K-12 mathematics education: A meta-analysis. *School Science and Mathematics*, *118*(3–4), 113–126. https://doi.org/10.1111/ssm.12271
CCSSM. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers*.
Chen, P.-Y., Hwang, G.-J., Yeh, S.-Y., Chen, Y.-T., Chen, T.-W., & Chien, C.-H. (2021). Three decades of game-based learning in science and mathematics education: an integrated bibliometric analysis and systematic review. *Journal of Computers in Education*, 1–22.
Chernoff, E. J., & Sriraman, B. (2014). *Probabilistic thinking: presenting plural perspective*.
Clark, D. B., Tanner-Smith, E. E., & Killingsworth, S. S. (2016). Digital Games, Design, and Learning: A Systematic Review and Meta-Analysis. *Review of Educational Research*, *86*(1), 79–122. https://doi.org/10.3102/0034654315582065
Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, *1*(1), 3–38.
Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.
Cobb, P., Gresalfi, M., & Hodge, L. L. (2009). An interpretive scheme for analyzing the identities that students develop in mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40–68.
Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, *10*(1–2), 113–163.
Collective, D.-B. R. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8.
Collier, M. (1914). PLAY AND GAMES IN ARITHMETIC. *School Science and Mathematics*, *14*(3), 229–231.
Copier, M. (2007). *Beyond the magic circle: A network perspective on role-play in online games*. Utrecht University.
Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Fifth. London.
Cruickshank, D. R., & Telfer, R. (1980). Classroom games and simulations. *Theory into Practice*, *19*(1), 75–80.

D’Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technocracy: A trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 131–153.

de Carvalho, M. F., Gasparini, I., & da Silva Hounsell, M. (2016). Digital Games for Math Literacy: A systematic literature mapping on Brazilian publications. In *New Advances in Information Systems and Technologies* (pp. 245–254). Springer.

De Holton, D., Ahmed, A., Williams, H., & Hill, C. (2001). On the importance of mathematical play. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(3), 401–415.

Debus, M. S. (2017). Metagames: on the ontology of games outside of games. *Proceedings of the 12th International Conference on the Foundations of Digital Games*, 1–9.

DeKoven, B. (2013). *The well-played game: A player’s philosophy*. mit Press.

Dennis, L. (1970). Play in Dewey’s Theory of Education. *Young Children*, *25*(4).

Deterding, S. (2013). *Modes of play: A frame analytic account of video game play*. Staats- und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky.

Devlin, K. (2011). *Mathematics education for a new era: Video games as a medium for learning*. AK Peters/CRC Press.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. HENRY HOLT AND COMPANY.

Dewey, J. (2005). *Demokrati og uddannelse.* Klim.

Dewey, John. (1916). *Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education*. The Floating Press.

Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics-learning*. London: Hutchinson of London, 1963, 1968 printing.

Dingman, S., Teuscher, D., Newton, J. A., & Kasmer, L. (2013). Common mathematics standards in the United States: A comparison of K--8 state and Common Core Standards. *The Elementary School Journal*, *113*(4), 541–564.

Divjak, B., & Tomić, D. (2011). The impact of game-based learning on the achievement of learning goals and motivation for learning mathematics-literature review. *Journal of Information and Organizational Sciences*, *35*(1), 15–30.

Dorier, J.-L., & Maréchal, C. (2010). Didactical analysis of a dice game. *CERME 6 - WORKING GROUP 14*.

Drummond, M. (1922). Games. In *The psychology and teaching of number* (pp. 77–83). George G. Harrap \& Co. Ltd.

Dubé, A. K., & Keenan, A. (2016). Are games a viable home numeracy practice? In *Early childhood mathematics skill development in the home environment* (pp. 165–184). Springer.

Durlak, J. A., & DuPre, E. P. (2008). Implementation matters: A review of research on the influence of implementation on program outcomes and the factors affecting implementation. *American Journal of Community Psychology*, *41*(3–4). https://doi.org/10.1007/s10464-008-9165-0

Dysthe, Olga. (2003). *Dialog, samspil og læring* (1. udgave.). Klim. https://www.worldcat.org/title/dialog-samspil-og-lring/oclc/60996508&referer=brief_results

Egenfeldt-Nielsen, S. (2006). Overview of research on the educational use of video games. *Nordic Journal of Digital Literacy*, *1*(03), 184–214.

Egenfeldt-Nielsen, S., Meyer, B., & Sørensen, B. H. (2011). *Serious games in education: A global perspective*. Aarhus Universitetsforlag.

Elias, G. S., Garfield, R., & Gutschera, K. R. (2012). *Characteristics of games*. MIT Press.

Elkjær, B. (2012). Et indblik i pragmatisk læringsteori - med udsigt til fremtiden. In K. Illeris (Ed.), *49 tekster om læring* (pp. 317–329). Samfundslitteratur.

Ernest, P. (1986). Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school. *Mathematics in School*, *15*(1), 2–5.

Fadda, D., Pellegrini, M., Vivanet, G., & Zandonella Callegher, C. (2022). Effects of digital games on student motivation in mathematics: A meta-analysis in K-12. *Journal of Computer Assisted Learning*, *38*(1), 304–325.

Fine, G. A. (2002). *Shared fantasy: role-playing games as social worlds*. University of Chicago Press.

Fjell, M. S., & Møllersen, S. V. (2012). *Opponent modelling and strategic reasoning in the real-time strategy game Starcraft*. Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap.

Fougt, S. S. (2015). *Lærerens scenariekompetence: Et mixed methods-studie af lærerkompetenceudvikling i spændet mellem scenariedidaktik, faglighed og it*.

Fougt, S. S., Bundsgaard, J., Hanghøj, T., & Misfeldt, M. (2022). *Håndbog i scenariedidaktik*.

Fougt, S. S., Misfeldt, M., & Shaffer, D. W. (2019). Realistic authenticity. *Journal of Interactive Learning Research*, *30*(4), 477–504.

Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S. H. D., & Leonard, S. N. (2022). Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00407-5

Frayling, C. (1993). Research in Art and Design. *Royal College of Art Research Papers*, *1*(1).

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Springer Science & Business Media.

García-Carrión, R., & Díez-Palomar, J. (2015). Learning communities: Pathways for educational success and social transformation through interactive groups in mathematics. *European Educational Research Journal*, *14*(2). https://doi.org/10.1177/1474904115571793

Gaydos, M. J., & Devane, B. M. (2019). Designing for identity in game-based learning. *Mind, Culture, and Activity*, *26*(1). https://doi.org/10.1080/10749039.2019.1572764

Gee, J. P. (2003). What video games have to teach us about learning and literacy. *Computers in Entertainment (CIE)*, *1*(1), 20.
Geertz, C. (1973). Thick Description: Toward an Interpretive Theory of Culture BT - The Interpretation of Cultures. *The Interpretation of Cultures*.
Gibson, J. J. (1977). The theory of affordances. In *The Ecological Approach to Visual Perception* (pp. 67–82).
Goffman, E. (1961). *Encounters: Two studies in the sociology of interaction*. Ravenio Books.
Goffman, E. (1974). *Frame analysis: An essay on the organization of experience.* Harvard University Press.
Goffman, E. (2020). *Social samhandling og mikrosociologi: en tekstsamling*. Hans Reitzel.
Goldkuhl, G. (2012). Pragmatism vs interpretivism in qualitative information systems research. *European Journal of Information Systems*, *21*(2). https://doi.org/10.1057/ejis.2011.54
Grant, M. J., & Booth, A. (2009). A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. *Health Information & Libraries Journal*, *26*(2), 91–108.
Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In *Educational design research* (pp. 29–63). Routledge.
Greenes, C. E. (1975). A Review of Mathematical Games. *Simulation \& Games*, *6*(4), 408–422.
Greenhalgh, T., Thorne, S., & Malterud, K. (2018). Time to challenge the spurious hierarchy of systematic over narrative reviews? *European Journal of Clinical Investigation*, *48*(6).
Gresalfi, M. S. (2015). Designing to support critical engagement with statistics. *ZDM*, *47*(6), 933–946. http://10.0.3.239/s11858-015-0690-7
Gresalfi, M. S. (2018). Choosing and using games in the classroom. *Teaching Children Mathematics*, *24*(7), 408–410.
Gresalfi, M. S., & Barnes, J. (2016). Designing feedback in an immersive videogame: supporting student mathematical engagement. *Educational Technology Research and Development*, *64*(1), 65–86.
Gros, B. (2015). Integration of digital games in learning and e-learning environments: Connecting experiences and context. In *Digital Games and Mathematics Learning* (pp. 35–53). Springer.
Gundersen, P. B. (2021). *Exploring the Challenges and Potentials of Working Design-Based in Educational Research*. Aalborg Universitet.
Habgood, M. P. J., & Ainsworth, S. E. (2011). Motivating children to learn effectively: Exploring the value of intrinsic integration in educational games. *The Journal of the Learning Sciences*, *20*(2), 169–206.
Habgood, M. P. J., Ainsworth, S. E., & Benford, S. (2005). Endogenous fantasy and learning in digital games. *Simulation \& Gaming*, *36*(4), 483–498.

Hainey, T., Connolly, T. M., Boyle, E. A., Wilson, A., & Razak, A. (2016). A systematic literature review of games-based learning empirical evidence in primary education. *Computers & Education*, *102*, 202–223.
Hanghøj, T. (2008). *Playful knowledge: An explorative study of educational gaming*.
Hanghøj, T. (2011). Clashing and emerging genres: The interplay of knowledge forms in educational gaming. *Designs for Learning*, *4*(1).
Hanghøj, T. (2012). Tema 1: Spilscenarier i undervisningen-præsentation af en didaktisk model. *Tidsskriftet Læring Og Medier (LOM)*, *5*(9).
Hanghøj, T. (2014). Man kan jo ikke overleve, når man ikke kan dø!: Didaktiske refleksioner over brug af Minecraft i danskfaget. *Viden Om Læsning*, *16*, 100–109.
Hanghøj, T., & Ejsing-Duun, S. (2023). *Spil og designtænkning i dansk, matematik og naturfag - Pixibog fra forskningsprojektet GBL21: Game-Based Learning in the 21st Century*.
Hanghøj, T., Händel, V. D., Duedahl, T. V., & Gundersen, P. B. (2022). Exploring the Messiness of Design Principles in Design-Based Research. *Nordic Journal of Digital Literacy*, *17*(4). https://doi.org/10.18261/njdl.17.4.3
Hanghøj, T., Kjellow, T. N., Melgaard, S., Møller, L. D., Henningsen, B., & Jensen, E. O. (2021). *Sæt skolen i spil: Brug af computerspil og gamification i undervisningen*.
Hanghøj, T., Krog Skott, C., Nielsen, B. L., & Ejsing-Duun, S. (2019). Developing Design Principles for Game-Related Design Thinking Activities. *Proceedings of the 13th International Conference on Game Based Learning*, 308–316.
Hanghøj, T., Misfeldt, M., Bundsgaard, J., & Fougt, S. S. (2018). Unpacking the domains and practices of game-oriented learning. In H. C. Arnseth, T. Hanghøj, T. D. Henriksen, M. Misfeldt, R. Ramberg, & S. Selander (Eds.), *Games and Education: Designs in and for Learning* (pp. 29–46). Brill Sense.
Hanghøj, T., Misfeldt, M., Bundsgaard, J., Fougt, S. S., & Hetmar, V. (2017a). *Hvad er scenariedidaktik?* Aarhus Universitetsforlag.
Hanghøj, T., Misfeldt, M., Bundsgaard, J., Fougt, S. S., & Hetmar, V. (2017b). Omverdenens praksisformer i undervisning. In *Hvad er scenariedidaktik?* (p. 9). Aarhus Universitetsforlag.
Hanghøj, T., Nielsen, B. L., Skott, C. K., & Ejsing-Duun, S. (2020). Teacher agency and dialogical positions in relation to game-based design activities. *Proceedings of the 14th European Conference on Game-Based Learning: ECGBL 2020*, 234–241.
Harper, D. (2002). Talking about pictures: A case for photo elicitation. *Visual Studies*, *17*(1), 13–26.
Hattie, J. (2019). Visible Learning for Teachers. In *Visible Learning for Teachers*. https://doi.org/10.4324/9781003024477
Hautopp, H., Hanghøj, T., Laraignou, A. S., Jensen, E. O., & Gundersen, P. (2023). Facilitating an Educational Board Game Jam: Analysing Different Game Design Strategies. *European Conference on Games Based Learning*.

Heshmati, S., Kersting, N., & Sutton, T. (2018). Opportunities and challenges of implementing instructional games in mathematics classrooms: Examining the quality of teacher-student interactions during the cover-up and un-cover games. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(4), 777–796.

Hetmar, V. (2017). Positioneringsteori og scenariebaserede undervisningsforløb. *Hvad Er Scenariedidaktik*, 75–95.

Hetmar, Vibeke. (2019). *Fagpædagogik i et kulturformsperspektiv.* Aarhus Universitetsforlag.

Higgins, J. P. T., Thomas, J., Chandler, J., Cumpston, M., Li, T., Page, M. J., & Welch, V. A. (2022). *Cochrane handbook for systematic reviews of interventions version 6.3*. John Wiley \& Sons.

Houssart, J., & Sams, C. (2008). Developing mathematical reasoning through games of strategy played against the computer. In *International Journal for Technology in Mathematics Education* (Vol. 15, Issue 2, pp. 59–71). http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bri&AN=BEI.173703&site=ehost-live

Hussein, M. H., Ow, S. H., Elaish, M. M., & Jensen, E. O. (2021). Digital game-based learning in K-12 mathematics education: a systematic literature review. *Education and Information Technologies*, 1–33.

Ito, M. (2009). *Engineering play. A cultural history of educational software*. Cambridge, MA, MIT Press.

Jensen, E. O. (2022). Brætspil i matematikundervisningen. In S. S. Fougt, J. Bundsgaard, T. Hanghøj, & M. Misfeldt (Eds.), *Håndbog i Scenariedidaktik*. Aarhus Universitetsforlag.

Jensen, E. O., & Andreasen, L. B. (2020). Exploring the Dialogic Space of a game Elicitation Interview with Fifth Grade math Students. *ECGBL 2020 14th European Conference on Game-Based Learning*, 268.

Jensen, E. O., & Hanghøj, T. (2019). Math in Minecraft: Changes in Students' Mathematical Identities When Overcoming In-game Challenges. *European Conference on Games Based Learning*.

Jensen, E. O., & Hanghøj, T. (2020). What's the math in Minecraft? A design-based study of students' perspectives and mathematical experiences across game and school domains. *EJEL*, *18*(3), 261–274.

Jensen, E. O., Hanghøj, T., & Kjellow, T. N. (2021). Computerspil i matematik. In T. Hanghøj, T. N. Kjellow, S. Melgaard, L. D. Møller, B. Henningsen, & E. O. Jensen (Eds.), *Sæt skolen i spil: Brug af computerspil og gamification i undervisningen* (pp. 179–230). Aalborg Universitetsforlag.

Jensen, E. O., Hanghøj, T., Schoenau-Fog, H., & Reng, L. (2016). Students as Math Level Designers: Exploring how students become motivated through design of a math learning game. *Designs for Learning*.

Jensen, E. O., Nehammer, E. M. H., & Eriksen, A. L. (2023). Developing design principles for mathematical reasoning with the board game Othello. *European Conference on Games Based Learning*.

Jensen, E. O., & Skott, C. K. (2022). How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review. *Digital Experiences in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s40751-022-00100-7

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. In *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*.

Jørgensen, H. H., Schrøder, V., & Skovbjerg, H. M. (2022). Playful learning, space and materiality: An integrative literature review. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–14.

Joung, E., & Byun, J. (2021). Content analysis of digital mathematics games based on the NCTM content and process standards: an exploratory study. *School Science and Mathematics*, *121*(3), 127–142.

Kacmaz, G., & Dubé, A. K. (2021). Examining pedagogical approaches and types of mathematics knowledge in educational games: A meta-analysis and critical review. *Educational Research Review*, 100428.

Kafai, Y. B. (1993). *Minds in play: computer game design as a context for children's learning. (volumes i and ii)*.

Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. *Compendium for Research in Mathematics Education*.

Karlsen, F. (2011). Theorycrafting: from collective intelligence to intrinsic satisfaction. *DiGRA Conference*.

Kaufmann, M. L., Bomer, M. A., & Powell, N. N. (2009). Want to Play Geometry? *Mathematics Teacher*, *103*(3), 190–195.

Ke, F. (2014). An implementation of design-based learning through creating educational computer games: A case study on mathematics learning during design and computing. *Computers & Education*, *73*, 26–39.

Ke, F. (2019). Mathematical problem solving and learning in an architecture-themed epistemic game. *Educational Technology Research and Development*, 1–20.

Kim, Y. R., & Park, M. S. (2018). Creating a virtual world for mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, *6*(12), 171–183.

Koay, P. L. (1996). *The use of mathematical games in teaching primary mathematics*.

Konzack, L. (2003). *Edutainment: leg og lær med computermediet*. Aalborg Universitetsforlag.

Kørhsen, K. L., & Misfeldt, M. (2015). An ethnomathematical study of play in minecraft. *Nordic Research in Mathematics Education: Norma*, *14*, 205–214.

Krogh, P. G., Markussen, T., & Bang, A. L. (2015). Ways of drifting—Five methods of experimentation in research through design. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, *34*. https://doi.org/10.1007/978-81-322-2232-3_4

Kurz, T. L. (2013). Target Zombies with Plants and Math. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(7), 440–443.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). Interview: en introduktion til et håndværk. In *En introduktion til det kvalitative forskningsinterview*.

Laato, S., Lindberg, R., Laine, T. H., Bui, P., Brezovszky, B., Koivunen, L., De Troyer, O., & Lehtinen, E. (2020). Evaluation of the pedagogical quality of mobile math games in app marketplaces. *2020 IEEE International Conference on Engineering, Technology and Innovation (ICE/ITMC)*, 1–8.

Lange, T., & Meaney, T. (2019). What the mathematics in the puzzles and handicrafts in 1920s Danish children′s magazines tells us about childhoods. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *20*(4), 394–408.

Larkin, K. (2015a). An App! An App! My Kingdom for An App: An 18-Month Quest to Determine Whether Apps Support Mathematical Knowledge Building. In *Digital games and mathematics learning* (pp. 251–276). Springer.

Larkin, K. (2015b). The Search for Fidelity in Geometry Apps: An Exercise in Futility?. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Lee, C. Y., & Chen, M. P. (2009). A computer game as a context for non-routine mathematical problem solving: The effects of type of question prompt and level of prior knowledge. *Computers and Education*, *52*(3), 530–542. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2008.10.008

Lepper, M. R., & Malone, T. W. (1987). Intrinsic motivation and instructional effectiveness in computer-based education. In *Aptitude, learning, and instruction* (pp. 255–286). Routledge.

Lilholt, A., Rasmussen, F. E., & B. Nielsen, G. (Eds.). (2012). *Matematikkens dag - Matematik på spil*. Forlaget Matematik.

López, J. M. C., & Cáceres, M. J. M. (2010). Virtual games in social science education. *Computers and Education*, *55*(3). https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.05.028

Lorentzen, R. F. (2017). *Lærerens dilemma mellem ideal og praksis: en virksomhedsteoretisk analyse af progressiv undervisning med it: Ph. d.-afhandling*.

Lowrie, T. (2015). Digital games, mathematics and visuospatial reasoning. In *Digital Games and Mathematics Learning* (pp. 71–92). Springer.

Lowrie, T., & Jorgensen, R. (2015a). Digital Games and Learning: What's New Is Already Old? In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital Games and Mathematics learning* (pp. 1–10). Springer Science & Business Media B.V.

Lowrie, T., & Jorgensen, R. (2015b). *Digital games and mathematics learning: Potential, promises and pitfalls* (Vol. 4). Springer.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311.

Maffia, A., & Silva, L. (2022). *Teachers' Struggling in Identifying the Semiotic Potential of Mathematical Board Games*. https://doi.org/10.4018/978-1-7998-9660-9.ch017

Magnussen, R., & Misfeldt, M. (2004). Player transformation of educational multiplayer games. *Proceedings of Other Players*.
Maida, M., & Maida, P. (2011). Problem Solving around the Corner. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *16*(8), 466–472.
Marklund, B. B., & Romin, R. (2020). Bad Game, Good Learning; Examining the Contradictions of Digital Game-Based Learning. *ECGBL 2020 14th European Conference on Game-Based Learning*, 67.
Mauntel, M., Levine, B., Plaxco, D., & Zandieh, M. (2021). The Characterization and Evolution of Strategies About Vector Equations in the Game Vector Unknown. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *7*(3), 453–476.
McFeetors, P. J., & Palfy, K. (2018). Educative experiences in a games context: Supporting emerging reasoning in elementary school mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 103–125. http://10.0.3.248/j.jmathb.2018.02.003
Medierådet. (2021). *Børns spillevaner 2020*.
Misfeldt, M. (2015). Scenario based education as a framework for understanding students engagement and learning in a project management simulation game. *Electronic Journal of E-Learning*, *13*(3).
Misfeldt, M. (2021). Undersøgende matematikundervisning fra et scenariedidaktisk perspektiv: Respons til Blomhøj. *Sammenlignende Fagdidaktik*, *6*, 109–119.
Misfeldt, M., Blomhøj, Morten., Lindhart, B. K., Moeskær Larsen, D., Mikael Skånstrøm, & Jensen, E. O. (2022). Scenariedidaktik i matematik – et overblik. In S. S. Fougt, J. Bundsgaard, T. Hanghøj, & M. Misfeldt (Eds.), *Håndbog i Scenariedidaktik*. Aarhus Universitetsforlag.
Misfeldt, M., & Hanghøj, T. (2016). Spildidaktik--når indhold og aktivitet smelter sammen. *Kvan-Et Tidsskrift for Læreruddannelsen Og Folkeskolen*, *36*(104), 104–116.
Misfeldt, M., & Zacho, L. (2016). Supporting primary-level mathematics teachers' collaboration in designing and using technology-based scenarios. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2–3), 227–241.
Monaghan, J. (2007). Linking school mathematics to out-of-school mathematical activities: student interpretation of task, understandings and goals. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 50–71.
Monaghan, J. (2016). Games: Artefacts in gameplay. In *Tools and Mathematics* (pp. 417–431). Springer.
Mosimege, M. D. (1998). Culture, games and mathematics education: An exploration based on string games. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Stellenbosch: University of Stellenbosch*.
Mousoulides, N., & Sriraman, B. (2014). Mathematical games in learning and teaching. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 383–385.
Moyer, P. S., & Bolyard, J. J. (2003). Classify and Capture: Using Venn Diagrams and Tangrams To Develop Abilities in Mathematical Reasoning and Proof. In *Mathematics Teaching in the Middle School* (Vol. 8, Issue 6, pp. 325–330).

Mathematics Teaching in the Middle School. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ668729&site=ehost-live

Mullins, D., Rummel, N., & Spada, H. (2011). Are two heads always better than one? Differential effects of collaboration on students' computer-supported learning in mathematics. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *6*(3). https://doi.org/10.1007/s11412-011-9122-z

Nardi, B. (2010). *My life as a night elf priest: An anthropological account of World of Warcraft*. University of Michigan Press.

NCTM. (2008). *Navigating through Reasoning and Proof in Grades 9-12*. National Council of Teachers of Mathematics. https://www.nctm.org/Store/Products/Navigating-through-Reasoning-and-Proof-in-Grades-9-12-(with-CD-ROM)/

Nilsson, P. (2007). Different ways in which students handle chance encounters in the explorative setting of a dice game. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 293–315.

Nisbet, S., & Williams, A. (2009). Improving students' attitudes to chance with games and activities. *Australian Mathematics Teacher, The*, *65*(3), 25–37.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In *International handbook of mathematics education* (pp. 11–47). Springer.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(June), 9–28.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf

Norton, A., Boyce, S., & Hatch, J. (2015). Coordinating Units at the Candy Depot. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *21*(5), 280–287.

Oldfield, B. J. (1991). Games in the Learning of Mathematics: 1: A Classification. *Mathematics in School*, *20*(1), 41–43.

Olson, J. C. (2007). Developing Students' Mathematical Reasoning: through Games. *Teaching Children Mathematics*, *13*(9), 464–471. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ehh&AN=24884503&site=ehost-live

Öztop, F. (2022). Effectiveness of Using Digital and Non-digital Games in Primary Mathematics Teaching: A Meta-Analysis Study. *International Primary Educational Research Journal*, 65–80.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 37–58.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In *Words and Worlds* (pp. 1–19). Brill.

Pan, Y., Ke, F., & Xu, X. (2022). A systematic review of the role of learning games in fostering mathematics education in K-12 settings. *Educational Research Review*, 100448. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100448

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc.
Pareto, L. (2014). A Teachable Agent Game Engaging Primary School Children to Learn Arithmetic Concepts and Reasoning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *24*(3), 251–283. http://10.0.3.239/s40593-014-0018-8
Pareto, L., Haake, M., Lindström, P., Sjödén, B., & Gulz, A. (2012). A teachable-agent-based game affording collaboration and competition: evaluating math comprehension and motivation. *Educational Technology Research and Development*, *60*(5), 723–751. https://doi.org/10.1007/s11423-012-9246-5
Parsons, S., Abbott, C., McKnight, L., & Davies, C. (2015). High risk yet invisible: Conflicting narratives on social research involving children and young people, and the role of research ethics committees. *British Educational Research Journal*, *41*(4). https://doi.org/10.1002/berj.3160
Paul, C. A. (2011). Optimizing play: How theorycraft changes gameplay and design. *Game Studies*, *11*(2), 100.
Peter Vankúš. (2013). Didactic games in mathematics. In *comae.sk*. http://www.comae.sk/didacticgames.pdf
Petrovskaya, E., Deterding, C. S., & Zendle, D. (2021). Prevalence and Salience of Problematic Microtransactions in Top-Grossing Mobile and PC Games: A Content Analysis of User Review. *CHI 2022, Proceedings*.
Plass, J. L., Homer, B. D., & Kinzer, C. K. (2015). Foundations of game-based learning. *Educational Psychologist*, *50*(4), 258–283.
Plass, J. L., Mayer, R. E., & Homer, B. D. (2020). *Handbook of game-based learning*. Mit Press.
Prediger, S. (2019). Theorizing in design research: Methodological reflections on developing and connecting theory elements for language-responsive mathematics classrooms. *Avances de Investigacion En Educacion Matematica*, *15*. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.265
Quinn, A. L., Koca, R. M., & Weening, F. (1999). Developing mathematical reasoning using attribute games. *The Mathematics Teacher*, *92*(9), 768–775.
Rasmussen, K. (2017). Det foto-eliciterende interview. In J. Kampmann, K. Rasmussen, & H. Warmning (Eds.), *Interview med børn*. Hans Reitzels Forlag.
Reiter, H. B., Thornton, J., & Vennebush, G. P. (2013). Using KenKen to Build Reasoning Skills. *Mathematics Teacher*, *107*(5), 341–347.
Resnick, M. (2003). Playful Learning and Creative Societies. *Education Update*.
Resnick, M. (2007). All I really need to know (about creative thinking) I learned (by studying how children learn) in kindergarten. *Proceedings of the 6th ACM SIGCHI Conference on Creativity \& Cognition*, 1–6.
Resnick, M. (2012). Reviving Papert's dream. *Educational Technology*, *52*(4), 42–46.
Resnick, M. (2018). *Lifelong kindergarten: cultivating creativity through projects, passion, peers, and play*.

Rosenbeug, H. (1962). Great challenges of mathematics education. *The Mathematics Teacher*, *55*(5), 360–368.
Rosholm, M., Mikkelsen, M. B., & Gumede, K. (2017). Your move: The effect of chess on mathematics test scores. *PLoS One*, *12*(5), e0177257.
Rothschild, M., & Williams, C. C. (2015). Apples and coconuts: Young children "Kinect-ing" with mathematics and Sesame Street. In *Digital Games and Mathematics Learning* (pp. 123–139). Springer.
Rubenstein, R. N. (2002). Building Explicit and Recursive Forms of Patterns with the FUNCTION GAME. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *7*(8), 426.
Ruipérez-Valiente, J., & Kim, Y. (2020). Effects of solo vs. collaborative play in a digital learning game on geometry: Results from a K12 experiment. *Computers & Education*. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131520302062
Rusk, N., Resnick, M., & Cooke, S. (2009). Origins and guiding principles of the computer clubhouse. *The Computer Clubhouse: Constructionism and Creativity in Youth Communities*, 17–25.
Salen, Katie., & Zimmerman, Eric. (2011). *Rules of play game design fundamentals*. TPB.
Saunders, B., Kitzinger, J., & Kitzinger, C. (2015). Anonymising interview data: challenges and compromise in practice. *Qualitative Research*, *15*(5). https://doi.org/10.1177/1468794114550439
Savard, A. (2015). Making decisions about gambling: The influence of risk on children′s arguments. *The Mathematics Enthusiast*, *12*(1), 226–245.
Schoenfeld, A. H. (2007). Method. In F. k. Jr. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 69–107).
Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27*(2), 4–13.
Shaffer, D. W. (2004). Pedagogical praxis: The professions as models for postindustrial education. In *Teachers College Record* (Vol. 106, Issue 7). https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2004.00383.x
Shaffer, D. W. (2005). Epistemic games. *Innovate: Journal of Online Education*, *1*(6), 2.
Shaffer, D. W. (2006). *How computer games help children learn*. Macmillan.
Shaffer, D. W., & Gee, J. P. (2007). How computer games help children learn. *How Computer Games Help Children Learn*, 1–242. https://doi.org/10.1057/9780230601994
Shaffer, D. W., & Resnick, M. (1999). " Thick" authenticity: New media and authentic learning. *Journal of Interactive Learning Research*, *10*(2), 195–216.
Siyahhan, S., & Gee, E. (2018). *Families at play : connecting and learning through video games*. MIT P.
Skaug, J. H., Husøy, A., Staaby, T., & Nøsen, O. (2020). *Spillpedagogikk : dataspill i undervisningen*. Fagbokforlaget.

Skovbjerg, H. M., & Gudiksen, S. (2020). *Framing Play Design : A hands-on guide for designers, learners and innovators*. BIS Publishers.

Smith, D. (1912). Number Games and Number Rhymes: Introduction. *Teachers College Record*, *13*(5), 1–3.

Squire, K. D. (2005). Resuscitating research in educational technology: Using game-based learning research as a lens for looking at design-based research. *Educational Technology*, 8–14.

Sriraman, B., & Lesh, R. (2007). A conversation with Zoltan P. Dienes. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(1), 59–75.

Staaby, T. (2021). Still in Another Castle. Asking New Questions about Games, Teaching and Learning. *Gamevironments*, *15*.

Stein, M., & Burchartz, B. (2006). The invisible wall project: Reasoning and problem solving processes of primary and lower secondary students. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(1), 65–90.

Stokholm, A. (2007). Fredrik Barth Balinese Worlds. Chicago 1993. In *Antropologiske mesterværker* (pp. 385–403). Aarhus Universitetsforlag.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). *Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward*.

Sugden, S. (2012). The Number Crunch game: a simple vehicle for building algebraic reasoning skills. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, *43*(2), 244–258. http://10.0.4.56/0020739X.2011.573872

Takeuchi, L. M., & Vaala, S. (2014). LevelUp learning: A national survey on teaching with digital games (Joan Ganz Cooney Study). *Games & Learning*, 66 p.

Tanggaard, L., & Brinkmann, S. (2020). Interviewet : samtalen som forskningsmetode. In *Kvalitative metoder : en grundbog*.

Tokac, U., Novak, E., & Thompson, C. G. (2019). Effects of game-based learning on students' mathematics achievement: A meta-analysis. *Journal of Computer Assisted Learning*, *35*(3), 407–420. https://doi.org/10.1111/jcal.12347

Toomey, M. (2017). Engaging the enemy: Computer games in the English classroom. *Literacy Learning: The Middle Years*, *25*(3), 38–49.

Van Eck, R. N. (2006). Digital game-based learning: It's not just the digital natives who are restless. *EDUCAUSE Review*, *41*(2), 16.

Van Eck, R. N. (2015). *SAPS and Digital Games: Improving Mathematics Transfer and Attitudes in Schools* (pp. 141–173). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9517-3_9

Vankúš, P. (2021). Influence of game-based learning in mathematics education on students′ affective domain: A systematic review. *Mathematics*, *9*(9), 986.

Vogel, J. J., Vogel, D. S., Cannon-Bowers, J., Bowers, C. A., Muse, K., & Wright, M. (2006). Computer gaming and interactive simulations for learning: A meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research*, *34*(3), 229–243.

Vos, P. (2015). Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct. In *International Perspectives on the*

Teaching and Learning of Mathematical Modelling. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_8

Vos, P. (2020). Task contexts in Dutch mathematics education. In *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 31–53). Springer, Cham.

Waddington, D. I. (2015). Dewey and video games: From education through occupations to education through simulations. *Educational Theory*, *65*(1). https://doi.org/10.1111/edth.12092

Waks, L. J. (2001). Computer mediated experience and education. *Educational Theory*, *51*(4). https://doi.org/10.1111/j.1741-5446.2001.00415.x

Wanko, J. J., & Nickell, J. V. (2013). Reinforcing Geometric Properties with Shapedoku Puzzles. *Mathematics Teacher*, *107*(3), 188–194. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1036868&site=ehost-live

Wegerif, R. (2020). Orientations and ground rules: A framework for researching educational dialogue. *Research Methods for Educational Dialogue*, 27–46.

Wei, F.-Y. F., & Hendrix, K. G. (2009). Gender differences in preschool children′s recall of competitive and noncompetitive computer mathematics games. *Learning, Media and Technology*, *34*(1), 27–43.

Wisittanawat, P., & Gresalfi, M. S. (2020). The “tricky business” of genre blending: Tensions between frames of school mathematics and video game play. *Journal of the Learning Sciences*, 1–39.

Woods, S. (2012). *Eurogames: The design, culture and play of modern European board games*. McFarland.

Wouters, P., & Van Oostendorp, H. (2013). A meta-analytic review of the role of instructional support in game-based learning. *Computers \& Education*, *60*(1), 412–425.

Xolocotzin, U., & Pretelin-Ricárdez, A. (2015). EXPLORING THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF COMPUTER GAMES RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. *12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, 241.

Yee, N. (2016). The gamer motivation profile: What we learned from 250,000 gamers. *Proceedings of the 2016 Annual Symposium on Computer-Human Interaction in Play*, 2.

Young, M. F., Slota, S., Cutter, A. B., Jalette, G., Mullin, G., Lai, B., Simeoni, Z., Tran, M., & Yukhymenko, M. (2012). Our princess is in another castle: A review of trends in serious gaming for education. *Review of Educational Research*, *82*(1), 61–89.

Yu, J., & Denham, A. R. (2021). Designing an augmented reality digital game for adaptive number knowledge development. In *Game-based Learning Across the Disciplines* (pp. 245–271). Springer.

Appendiks

Herunder er afhandlingens fire artikler. Samt tilhørende side nr.

Side 129: Artikel 1

Jensen, E. O. & Skott, C. K. (2022). How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 8 (s.183-212)

Side 159: Artikel 2

Jensen, E. O. (2022). Brætspil i matematikundervisningen. I S. S. Fougt, J. Bundsgaard, T. Hanghøj, & M. Misfeldt (Eds.), *Håndbog i Scenariedidaktik*. Aarhus Universitetsforlag.

Side 173: Artikel 3

Jensen, E. O. & Hanghøj, T. (2020). What's the math in Minecraft? A design-based study of students' perspectives and mathematical experiences across game and school domains. *The Electronic Journal of e-Learning* (EJEL), 18(3), 261-274.

Side 187: Artikel 4

Jensen, E. O., Hanghøj, T., & Kjellow, T. N. (2021). Computerspil i matematik. I T. Hanghøj, T. N. Kjellow, S. Melgaard, L. D. Møller, B. Henningsen, & E. O. Jensen (Eds.), *Sæt skolen i spil: brug af computerspil og gamification i undervisningen* (s. 179-230). Aalborg Universitetsforlag.

Digital Experiences in Mathematics Education
https://doi.org/10.1007/s40751-022-00100-7

How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review

Erik Ottar Jensen[1,2] · **Charlotte Krog Skott**[2]

Accepted: 12 January 2022

Abstract

In this article, we conduct a qualitative systematic review of studies examining the use of digital games to promote students' mathematical reasoning in primary and lower secondary schools. Digital games now have a prominent role in students' leisure time, as has mathematical reasoning in curricula around the world. This study investigates how the affordances of digital game–based learning environments (DGBLEs) are used to support students' mathematical reasoning. Through a thematic analysis, we construct five distinct themes that describe how mathematical reasoning is afforded in the DGBLEs in the reviewed studies: developing (winner) strategies, exploring an immersive environment, experimenting, designing learning games and solving tasks. By analysing the themes in relation to the reasoning and proof cycle, we found that DGBLEs primarily supported exploration, conjecturing and, to a lesser extent, justification. We conclude that students' mathematical reasoning can be achieved through DGBLEs that specifically target exploration, conjecturing and justification, and by carefully structuring students' interactions with and dialogues about the games played.

Keywords Mathematics education · Mathematical reasoning · Game · Digital games · Game-based learning · Qualitative systematic review · Thematic analysis · Affordances

✉ Erik Ottar Jensen
erikoj@ikp.aau.dk

Charlotte Krog Skott
CKSK@kp.dk

1 Department of Communication and Psychology, Aalborg University, A. C. Meyers Vænge 15, 2450 Copenhagen, Denmark

2 Department for Teacher Education, University College Copenhagen, Humletorvet 3, 1799 Copenhagen, Denmark

Published online: 22 February 2022

Introduction

There is a long tradition of mathematics teachers employing gameplay to support students' mathematical learning (Bright, 1983; Oldfield, 1991). However, new reinterpretations of the educational role of games are motivated by the promising possibilities of digital games (Devlin, 2011), which permeate children's leisure time today. They often play for extended periods while being deeply immersed. To understand children's engagement with games, Gee (2003) studied the learning principles used by the game design industry and how to exploit these principles in educational contexts. His seminal work has contributed to an understanding that digital games can be used to introduce new literacies and new learning opportunities in education more generally.

There has been some optimism in mathematics education regarding the use of digital games (Divjak & Tomić, 2011). Following Gee's principles, Devlin argued that video games are the ideal medium for learning mathematics, and Larkin (2015) used the principles to evaluate mathematical apps for learning. Moreover, Hainey et al. (2016) reported that digital game–based learning (GBL) approaches are frequently applied in mathematics education. Based on a survey of six hundred and eighty-four K–8 teachers, Takeuchi and Vaala (2014) concluded that, among the subjects in question, 'mathematics ranked highest, with 71% of [digital game–using teachers] reporting that digital games have been either effective or highly effective in improving their students' mathematical learning' (p. 48). This indicates a strong belief among teachers that digital games can help children learn mathematics. Indeed, in a meta-analysis of computer games as learning tools, Ke (2009) found that, across subjects, games seemed to promote players' higher-order thinking (such as reasoning) to a greater degree than the learning of facts. Her finding aligns with Gee's view on the learning potential of digital games.

Contrary to these positive findings, Young et al.'s (2012) review stressed the difficulties involved in exploiting the potential of GBL in mathematics education, as opposed to, for instance, using GBL to learn language and history. Moreover, two recent meta-analyses of GBL within the context of mathematics education only found minor positive effects (Byun & Joung, 2018) or marginally significant effects (Tokac et al., 2019) on students' mathematical achievement. These meta-analyses also reported considerable differences in the effectiveness of GBL approaches in the selected studies. Thus, the key question is not whether digital games as such are effective in mathematics teaching but, rather, how the use of specific digital games can lead to students' mathematical learning.

In this review, we seek to understand how digital games can be used to promote students' mathematical reasoning in primary and lower secondary education. Our motivation for focusing on digital games is that, while they are perceived to offer new and transformational potential in mathematics education, this has seldom been realised (Lowrie & Jorgensen, 2015). Therefore, we want to understand the specific features of the digital components in terms of their potential to support students' mathematical learning.

We identified three motivations for combining our focus on digital games with mathematical reasoning. The first is that research into the use of analogue games suggests that games can be used to help students construct mathematical arguments (Moyer & Bolyard, 2003; Olson, 2007), explore gameplay dynamics that possibly lead to reasoning and justification (Chick, 2010), generalise and reason for a winning strategy (Day, 2014) and reason axiomatically during gameplay (Kaufmann et al., 2009). The second motivation is that previous reviews on games and mathematics learning have focused broadly on mathematical conceptual knowledge or procedural skills and not on specific processes or competences such as reasoning. The third motivation is that over recent decades, mathematical reasoning has gained a prominent role in primary and secondary curricula around the world, and a number of studies have shown that mathematical reasoning is difficult for students to learn and for teachers to teach (e.g. Stylianides et al., 2017). Therefore, our primary research interest here is to understand how digital games (and the context in which they are used) can support primary and lower secondary students' learning of mathematical reasoning.

Games and Affordances

In our definition of a digital game, we mean any game (including game apps) that can be played on a digital device such as a computer, tablet, mobile device or gaming console. The sheer diversity of games makes it difficult to define a game more precisely. However, we rarely have trouble recognising a game when we see one (Skaug et al., 2020). For the purpose of our study, we understand games in line with an often-used definition: 'a game is a system in which players engage in an artificial conflict, defined by rules, that results in a quantifiable outcome' (Salen & Zimmerman, 2004, p. 80). This means that a game involves one or more active participants (players) who interact with a system and engage in an artificial conflict, that there is some form of contest and that the game maintains some boundary from everyday life. The game is structured by rules and playing it will result in a quantifiable outcome: for example, one player wins and another loses (Salen & Zimmerman, 2004), or the desirable completion of a challenge, such as the rescuing of a wounded eagle (Gresalfi & Barnes, 2016).

We understand participation in games along the lines of Goffman (1961), who distinguishes between the *game* as a set of rules and materials and the *gaming encounter* as the social interaction in which the game takes place. In this understanding, a game will not simply be played as designers intend, but will be constructed as a local cosmos with specific meaning by the participants in the gaming encounter. According to Goffman, 'while it is as players that we can win a play, it is only as participants that we can get fun out of this winning' (p. 34). The sense that is created from playing a game is thus created by the participants in this social encounter, and the goals of such encounters are not solely directed at winning. DeKoven (2013) describes that, in a play community with the aim of collective enjoyment, the goal could be to participate in the community by engaging in the game; in some role-playing games, playing to win can be considered to be an outright destructive approach (Gribble, 1994).

Deterding (2013) identifies five different motivational relevancies for playing digital games: relaxation, relatedness, engrossment, competence and achievement. Such relevancies can be seen in games such as *Minecraft* played in creative mode for engrossment, or *The Sims* played for relaxation. The need to understand students' participation in games is highlighted by Bishop (1991), who suggests that fun should be an important construct when appreciating the playing of games as a mathematically significant activity and when organising a mathematics curriculum that incorporates games. However, how to organise a curriculum in this way is an open question and the concept of fun is seldom defined in the GBL literature. Nonetheless, in our understanding of games, we stress a two-fold perspective: one related to the formal structures of the game (i.e. its design) and the other related to the social interactions of the players involved in the game.

The concept of affordance has been used in technology-related fields, such as information studies, to capture aspects of the relationship between users and technology in relation to possibilities for action. In this sense, what is afforded is considered more than part of the technology; it also emerges as possible interactions from the relationship between the user and the technology, where multiple affordances can be identified (Volkoff & Strong, 2017). Gibson (1977), who initially coined the term *affordance* in this context, defined it as an interactional relationship among objects, actors and the actions that the environment offers to specific actors. Importantly, this does not imply that these actions will necessarily occur. For GBL approaches, this means that, even though specific affordances are designed into a game, it is not certain that students consider them as possible interactions. Therefore, some students play games differently from as intended by the teacher or designers (e.g. Al-Washmi et al., 2014).

Drawing on Gibson's work, Brown et al. (2004) described affordance as a promising notion in analyses of classroom activity, '[where] students are immersed in a mathematically and technologically rich learning environment' (p. 126). Along the lines of Kress (2005), we use affordance as a concept to describe students' possibilities for action in relation to digital games and the surrounding environment with its culturally and socially produced resources. In this understanding, the affordances in a learning environment include the digital game and its specific design features, the relationships between the student and the game and the social setting, including teacher support (Tanner & Jones, 2000).

Using the phrase *afforded interactions leading to mathematical reasoning*, we refer to the relationships among students, games and the learning environment that can lead to students' engagement in mathematical reasoning. This can be interactions afforded by specific design features of the digital game, but also by the teacher's ways of organising classroom talk, group-work or tasks around the game. To capture this, we use the abbreviation DGBLE for digital game–based learning environment. Thus, we attempt to identify affordances both of the design features of digital games and of the learning environments based on a GBL approach with digital games and how a teacher's scaffolding can support students' mathematical reasoning. With this understanding of affordance, we state our research question as follows:

> How do DGBLEs afford primary and lower secondary students' learning of mathematical reasoning?

Digital Games and Mathematics Education

Despite the promising opportunities for digital games to support mathematical learning (Devlin, 2011; Ke, 2009), studies have pointed to at least three complexities. The first is whether students become more motivated to learn mathematics when they use digital games. Studies disagree on this significant question (Monaghan, 2016). A second complexity regards the use of *non-school digital games*: that is, games that are not specifically designed to be played in a mathematics lesson (e.g. *Angry Birds*, *Plants versus Zombies* or *The Sims*). Avraamidou et al. (2015) have shown that the mathematical elements in these games are mostly invisible to the player, as they are integrated into the algorithmic design of the game. The mathematics in these games also differs from the mathematics curriculum. Thus, it can be a challenge both for teachers and for students to discover the mathematics of a digital game and for teachers to establish meaningful connections between the game and the mathematics curriculum. A third complexity is the unpredictability of students' gameplay, which makes it difficult for the teacher to achieve common learning goals.

The various digital games designed to support mathematics learning introduce at least three additional challenges. The first is that the overwhelming majority of digital games used for mathematics learning only enhance basic skills (Larkin, 2015). These simple skill-and-drill games are often simple training software in attractive graphics that mainly focus on procedural fluency in subject areas such as algebra, geometry and measurement. As such, they cover only small and not very complex parts of the mathematics curriculum (Byun & Joung, 2018), such as the four basic operations (de Carvalho et al. 2016). Some researchers perceive such games as a waste of students' time (Fox et al., 2000), criticising them for not engaging students in mathematical processes, such as problem solving and reasoning (van Eck, 2015).

A second challenge is that the available empirical research is rather narrow in terms of mathematical content areas and builds predominantly on these skill-and-drill games or gamified versions of traditional worksheets. A third challenge is a concern raised by Lowrie and Jorgensen (2015), that these visually appealing drill-and-practice games seem to be the kind of games that teachers will use. This concern is underscored by two international teacher surveys: Egenfeldt-Nielsen et al. (2011) show that 52% of a sample of two hundred and seventy-five teachers used games designed to learn skills, while Takeuchi and Vaala (2014) stress that mathematics teachers generally used short stand-alone games or mini-games. Evidently, these teachers did not use longer, complex, immersive, decision-making games, even though these in general perform better in research on learning outcomes. However, in contradiction to these challenges and tendencies, other studies (e.g. Ke, 2009) point out that, in general, games seem more useful in promoting higher-order thinking, such as reasoning, than they are in supporting conceptual and factual knowledge acquisition.

Reasoning in School Mathematics

In curricular documents around the world, reasoning has gained a prominent role in school mathematics during the last two decades. To use the Danish syllabus as an example, the so-called mathematical thinking and reasoning competency (Niss & Højgaard, 2019) is expected to play an important role from the first to the ninth grades in all sub-topics of mathematics (Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling, 2015). This competency encompasses being ‘able to relate to and pose the kinds of generic questions that are characteristic of mathematics and relate to the nature of [expected] answers [… as well as] to analyse or produce arguments (i.e. chains of statements linked by inferences) put forward in oral or written form to justify mathematical claims’ (Niss & Højgaard, 2019, pp. 15, 16). A similar shift in focus can be seen in the Common Core State Standards in the USA (CCSSM, 2010), where two of the eight mathematical practices involve reasoning: that is, the ability to reason abstractly and quantitatively, to construct viable arguments and to critique the reasoning of others (e.g. Dingman et al., 2013).

This renewed focus on mathematical reasoning has at least three possible explanations. The first is that reasoning and proving are key activities in the field of mathematics. As Schoenfeld (2009) states, ‘If problem solving is the “heart of mathematics”, then proof is its soul’ (p. xii). The expectation is that students can learn to think mathematically and learn mathematics in a more in-depth manner through engagement in activities that involve reasoning and proving (Stylianides, 2016). The second includes the new opportunities for explorations, dynamic visualisations, calculations and so on, offered by digital technologies (e.g. dynamic geometry systems and computer algebra systems).

These technologies allow students to explore and discover relationships, systems and regularities, and thus to formulate hypotheses more easily (Sinclair & Robutti, 2013). The third explanation is a general tendency in mathematics education also to focus on students’ learning of mathematical processes, such as reasoning, modelling and problem solving, rather than (as previously) on their learning of mathematical products, such as concepts and procedures (NCTM, 2000). The idea is that students will learn these products more profoundly by engaging in mathematical processes.

Based on the above-described tendencies and explanations, this study will focus on students’ learning of one specific process, namely mathematical reasoning, and not on their learning of mathematical products. However, there is overwhelming evidence that teachers find it challenging to teach mathematical reasoning and that students find it difficult to learn (Nardi & Knuth, 2017; Stylianides, 2016; Stylianides & Stylianides, 2017). In the case of Denmark, these difficulties were recently documented in the large-scale project on student mathematical reasoning. It was called *Quality in Teaching Danish (L1) and Mathematics* (Hansen et al., 2020), where teachers struggled to teach mathematical reasoning even though they used tasks predesigned by researchers for this purpose. The learning results were poor in terms of student mathematical reasoning (Larsen & Lindhardt, 2019).

In the field of mathematics education, mathematical reasoning and proofs are defined in various ways (Stylianides, 2016). Stylianides et al. (2017) identified a range of definitions from a mathematical stand-point that associate reasoning and proofs with logical deduction, and link premises with conclusions to a social perspective that focuses on how members of a community jointly approve an argument as a proof. For our purpose, we found the definition of reasoning and proof—in terms of *a reasoning and proof (R&P) cycle*—proposed by NCTM (2008) appropriate. In contrast to the mathematical thinking and reasoning competency in the Danish national syllabus, the R&P cycle emphasises the meaning-making aspects of the reasoning process, including a broader set of activities. This broader approach to reasoning seems to be more in line with the opportunities for actions that may arise when students play digital games.

The R&P cycle consists of three interconnected phases: exploration, conjecturing and justification. In the exploration phase, students intuitively investigate mathematical phenomena for patterns and structures, in an attempt to detect regularities and relationships. In the conjecturing phase, they use their observations to formulate hypotheses or modify existing hypotheses. In the justification phase, they validate or refute their conjectures by explaining why they are true (or untrue) from a mathematical point of view. The result of the justification phase can be a mathematical proof in a formal sense, but it can also consist of more informal arguments, dependent, among other things, on the age of the students. The three phases can occur in any order, and reasoning processes in classrooms often consist of iterative cycles of these phases. Here, we apply this approach to reasoning in school mathematics to investigate the affordances of DGBLEs.

Methodological Approach

We conducted a qualitative systematic review and used a systematic literature search strategy to synthesise the existing research through a thematic analysis (Grant & Booth, 2009). To review a broad spectrum of research and follow a systematic approach, we selected and searched four relevant academic databases: Education Research Complete, British Education Index, ERIC through Ebscohost and Matheduc (a mathematics education database). We followed the building blocks search strategy (Johannsen & Pors, 2013) by identifying key terms and including synonyms for each of them separated by the Boolean operator OR. The four key terms, including synonyms, were separated by the Boolean operator AND. Our first search string consisted of the four key terms (including synonyms): *game*, *reasoning*, *mathematics* and *age group*. We selected studies where all four terms (or synonyms, see Table 1) were present in the title, keywords or abstract.

Following Sidenvall (2019), we pilot-tested the search string and found that the inclusion of more than the key term—*reasoning*—in the second search term resulted in too many unwanted results. Therefore, we removed the synonyms (*problem solving*, *modelling* and *higher-order mathematical thinking*) in the second term and only used *reasoning*, which encompassed prefixes such as *mathematical*, deductive and *inductive*. We did not include more specific features of reasoning, such as exploring, conjecturing, justifying, generalising or identifying patterns (Jeannotte & Kieran, 2017). Another limitation for the search was to include only peer-reviewed studies written in English.

After the removal of forty-one duplicates found in several databases, our final search string produced a hundred and fifty-one singular results. We based our first screening of the studies' titles and abstracts on four criteria to ensure a systematic and consistent inclusion process. The inclusion criteria were as follows:

Table 1 Final search string

Term 1	Term 2	Term 3	Term 4
game OR gaming OR gamification OR game-based learning OR educational games OR puzzle	reasoning	mathematics OR math* OR mathematical	‘basic education’ OR K12 OR primary OR secondary OR elementary OR ‘middle school’

1. An explicit focus on student reasoning
2. Empirical research studies
3. A broad focus on students, rather than specific groups of students
4. Publication in peer-reviewed journals, books or conference proceedings

The first screening resulted in twenty-five studies. For some studies, we could not determine whether they fulfilled the criteria simply from reading the title and abstract. If not, they were excluded from the subsequent steps. We also read through the references in these studies for titles relating to our research question and screened possible relevant studies according to the four criteria. This resulted in six additional studies. Thus, we selected thirty-one studies in total for full-text reading. Based on this reading, we excluded seventeen studies for various reasons: for example, some did not address digital games, some focused on the tertiary level of education and others were not empirical studies. In the end, fourteen studies matched our criteria and were selected for review. This small number of studies should be seen in relation to the fact that relatively few studies exist on games and learning in mathematics (Ke, 2014). Aside from the strategy games in Houssart and Sams (2008) and in Lee and Chen (2009), the digital games in the remaining twelve studies were designed specifically for the purpose of supporting students' mathematical learning.

Thematic Analysis

In the fourteen selected studies, we found mathematical reasoning to be connected to a wide range of interactions, including engaging with a narrative (Gresalfi & Barnes, 2016), designing a game (Ke, 2014) and discussing a single move in a game of *Lines* (Houssart & Sams, 2008). This diversity in DGBLEs across the studies—both in terms of the game designs and of the didactical framing of activities and dialogue about the gameplay—prompted us to use a thematic analysis (Braun & Clarke, 2006). We used their six steps to structure our thematic analysis. Firstly (step 1), we familiarised ourselves with the data through full-text readings. Secondly (step 2), we generated the following initial codes: student age, methodological approach, description of digital game, kind of student reasoning, emphasised aspects of (design of) teaching and perceived affordances of the digital game.

We then analysed each study using these codes. Later in the process, we also coded the studies according to author affiliation and research interest, as well as the research fields of the journals. Thirdly (step 3), we developed themes to capture a patterned response or meaning in the DGBLEs in order to understand the opportunities emerging in the studies for learning to reason mathematically. The affordances in the DGBLEs led us to divide the studies into five themes, each comprising distinct potentials in and challenges to establishing a learning environment where mathematical reasoning was afforded. These themes were continuously reviewed (step 4), then refined and renamed (step 5) in order to ensure clear definitions of each theme. Finally (step 6), examples were found to represent each theme.

The themes describe the overall forms of interaction in the different DGBLEs in terms of the kinds of mathematical reasoning afforded to the students. We call this *the main affordance for mathematical reasoning of a DGBLE*. For example, we coded one affordance for mathematical reasoning under the theme ‘exploring an immersive environment’. Different elements of the DGBLE afforded exploration of the immersive environment, one of which was a *non-player character* (NPC) who gives feedback to students’ recommendations, requiring them to apply statistical reasoning to determine their consequences in the gameplay (Gresalfi, 2015).

Another type of main affordance for mathematical reasoning was coded under the theme ‘developing (winner) strategies’, an example of which was provided by Houssart and Sams (2008). Here, the computer is the students’ opponent in a strategic game, and the students position the computer as an adversary whom they have to outsmart and after whom they have to model their own winning strategies in terms of how the computer-player played. The specific ways in which the computer-player formed part of this DGBLE thus afforded the students to reason through the development of winner strategies.

The five themes considered are as follows.

1. *Developing (winner) strategies*—the main affordance for mathematical reasoning is to figure out how to play better than one’s opponent(s) by developing (winner) strategies.
2. *Exploring an immersive environment*—the player is invited to explore a virtual world and engage in solving problems within it. The main affordance for mathematical reasoning is to solve problems and understand the consequences for the world, scenario or narrative.
3. *Experimenting*—the player is offered an experimental context where the main affordance for mathematical reasoning is to experiment with different values of game settings and explore their relationship.
4. *Designing learning games*—the main affordance for mathematical reasoning is to design and create content-specific learning games.
5. *Solving tasks*—the main affordance for mathematical reasoning is to solve closed tasks to move forward in an appealing game context.

Finally, we analysed the studies according to whether (and, if so, how) they addressed each of the three R&P phases. This analysis showed a variety of ways in which the use of digital games afforded students’ engagement in different parts of the mathematical reasoning process.

The following five sub-sections present the main affordances for mathematical reasoning. Each contributes to answering our research question by describing and exemplifying different ways in which DGBLEs afforded students’ mathematical reasoning through the lens of the R&P cycle.

Developing (Winner) Strategies

The main affordance for mathematical reasoning by the four studies under this theme (Houssart & Sams, 2008; Lee & Chen, 2009; Pareto, 2014; Pareto et al., 2012) was to develop one or more (winner) strategies to outplay one’s opponent(s). This affordance was provided by using strategic games in which the objects of mathematical reasoning were closely tied to their rules and aims, and students were required to explore and identify underlying patterns and develop strategic approaches to win the games. We emphasise two overall findings here.

The first finding was that the studies did not consider students' interactions with the games as sufficient in themselves to support their learning. Rather, the game was used as part of a wider DGBLE, where students' gameplay and situations around their gameplay were scaffolded. Learning was thus afforded both by the design features of the game and by the environment in which it was played. The didactical framing in the environment included teachers posing specific questions that related game aspects to mathematics (Lee & Chen, 2009), as well as the use of an intelligent *teachable agent* (TA) that challenged students' arguments (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012). The teacher's scaffolding of group and classroom talks in Houssart and Sams (2008) provides an example of framing dialogues about gameplay that led students to conjecture and then modify and justify their conjectures.

Houssart and Sams (2008) was the only reviewed study that convincingly engaged students in all three R&P phases. It involved nine primary classes in England (children aged 9–11 years) in the use of a game of strategy called *Lines* (in four to eight lessons). The game is a digital version of *Connect Four*, but its pieces can be placed anywhere on the digital board and the co-ordinates of each move are displayed along with sequences of previous moves. In the study, groups of two or three students played against the computer. The computer adopted the best strategy, but since the students were always allowed the first move, it was possible for them to develop a winning strategy and win.

A key factor in the study was the 'set of rules for talk' (p.60)—inspired by Mercer's (1995) *exploratory talk*—that each class developed to encourage students to work and talk together while using computers. The authors reported that questions such as 'Where should we put our counter?', followed by 'Why do you think that?', enabled the students to explore and reason together in ways that led them to develop winner strategies, which they might not have been able to achieve without being taught how to reason effectively together (p.69). Another key factor in the study was the possibility of rewinding the game (i.e. a design feature), so that the combined set of moves could be examined by the students.

A second finding was that three of the four studies used a virtual character—a specific affordance of digital games—to support student mathematical reasoning. Such a character can be an expert game player that inspires students to develop winner strategies by modelling its behaviour or encouraging students to outsmart the computer (Houssart & Sams, 2008). A promising example of a designed feature added to a game is the virtual character in the form of a TA (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012), an agent that can be taught to play the games by the students through a master–apprentice scheme.

These two studies used a collection of two-player digital games built on an animated, graphical model to represent numbers and simulate arithmetic calculations. The game objectives were to teach younger students arithmetic concepts (especially place value and operations involving carrying and borrowing) and to stimulate their reasoning and strategic thinking. The students and computer-player took turns placing cards representing an arithmetic operation on a gameboard until all cards were played. In one game, the students placed cards on top of already-played cards and received points for each ten they created. The students could see their opponent's cards: thus, they could prevent their opponent from creating tens and develop strategies to avoid this.

To win, students had to develop strategies by calculating mentally, by reasoning about numbers and computations and by judging the impact of certain moves on future game conditions. However, these were not explicit activities; rather, the game was purposely designed so they would appear as side effects of playing (Pareto et al., 2012). The TA learned about the game in two ways. One was to play against students and learn from their corrective feedback and acceptance/rejection of the TA's suggestions. The other was to watch students play and ask them about the reasons for their choice of cards before the consequences of these choices appeared in the game. For example, the TA could ask 'Why do you choose card seven?' in a game where the goal is to make tens, with the following possible answers:

- 'It's obviously the best one! It gives 1 point and it's the only card that blocks the opponent'.
- 'It gives 1 point. Unfortunately, it doesn't block the opponent from getting points'.
- 'It doesn't give any points, but it blocks at least the opponent from getting points'.
- 'I don't know'. (Pareto, 2014, p. 262)

To choose from such pre-defined explanations, students must evaluate them in relation to the game situation. In this sense, they can be said to be engaged in the justification phase, albeit without being required to develop arguments themselves. One result is that students who improved their performance based on the TA questions became better at selecting the correct explanations, but not necessarily at developing such explanations themselves (Pareto, 2014). The purpose of the TA was both to challenge students to reflect on their gameplay and to act as a role model of exploration, by prompting students to consider and explain their choices. As the students taught the TA to play, the TA's learning level became a proxy for their own learning.

Overall, this theme shows that students' engagement in one or all three R&P phases could be afforded in a DGBLE with a strategic game, if the students' interactions with the game were framed didactically. This could be achieved either through specific rules to support explorative talk or, to some extent, by introducing virtual characters that either played the game or simulated learning the game from the students.

Exploring an Immersive Environment

The main affordance for mathematical reasoning by the four studies under this theme (Gresalfi, 2015; Gresalfi & Barnes, 2016; Ke, 2019; Wijers et al., 2010) was to explore an artificial virtual world and solve problems within it: for instance, to help an injured eagle in *Adventure at Boone's Meadow* by planning flight routes (Gresalfi & Barnes, 2016) or to help rebuild an area hit by a natural disaster in an architecture simulation game (Ke, 2019). The affordances for mathematical reasoning in these DGBLEs were closely tied to the extent to which the immersive environments carried out the contextual consequences of the player's choices. In cases of high and credible alignment between the player's choice and its contextual consequences, the players (i.e. students) had better opportunities to evaluate, discuss and argue about the appropriateness of their solutions from both a game and a mathematical perspective. We stress three findings here.

The first finding is that exploring an immersive environment can afford the need to justify solutions mathematically, as long as justifiable solutions are required by the environment. One example of this was when students assisted a mayor in the virtual *Ander City* to use statistical problem solving to make decisions about which bike brands were safer to use (Gresalfi, 2015). By comparing sets of data using statistical tools (e.g. mean, median), the students developed data-based arguments for or against specific decisions. The consequences of their recommendations were then enacted in the game environment. An NPC provided the students with statistical data, as well as feedback on their recommendations, which afforded them to relate the statistical reasoning behind their recommendations to the context where the consequences appeared.

During a first research iteration, Gresalfi found that asking students to explain their recommendations was rarely sufficient to provoke discussions about statistical tools or prompt mathematical argumentation, as students seemed to think that the problems only had one legitimate solution. Therefore, a second research iteration was conducted, where a competing mayor was implemented to challenge the students' recommendations and arguments, and to offer conflicting perspectives. This helped the students understand that alternative solutions were possible, which improved the justifications for their recommendations.

The second finding is that immersive environments can afford multi-faceted, contextual perspectives on problems through the enactment of contextual consequences of their solutions. This is emphasised as a key ingredient in promoting students' justification, as it supports them in realising the possibility of different solutions, which, in turn, affords them to justify their own solution. One example is *Adventure at Boone's Meadow* (Gresalfi & Barnes, 2016), in which students must rescue a wounded eagle by making transportation-related decisions. Depending on their solution, the eagle will live as before, have to endure with an amputated wing or die.

As the consequences of the decision appear in the game (which the authors called consequential feedback), the students can evaluate and validate their mathematical thinking in relation to this context. If, for instance, the eagle dies, their solution may involve incorrect calculations or ignore important contextual features that should have been included in their calculations or reasoning. Here, the authors distinguish between mathematical justifications (e.g. use of mathematics to justify a decision, for example, by comparing route lengths) and consequential justifications (e.g. justifying one's decision in relation to its contextual consequences). This signals that not all the students' justifications in this environment were mathematical (and hence why we only marked this study with (X) under justification).

The third finding is that the timing of consequential feedback provided through and in relation to the game narrative was essential to support the students' mathematical reasoning, and was especially effective in the explorative and conjecturing phases. They found that feedback provided after students' problem solving was not used in revising their mathematical reasoning or in considering alternative solutions. However, consequential feedback provided early in the students' thinking (about how to solve a problem) nurtured their awareness of multiple perspectives on the problem, potentially factored into their thinking about aspects they would not have otherwise considered and promoted a higher degree of justification for their final solution. Additionally, early consequential feedback on the students' initial hypotheses enabled them to test these hypotheses and realise that other solutions existed.

Experimenting

The main affordance for mathematical reasoning in the three studies under this theme (Bakker et al., 2015; Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010; van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013) was to experiment with different values of game settings and explore their relationship. One example was the game *Hit the Target*, designed by the research team behind the three studies, which is an interactive simulation of an archery game consisting of a bow, a target, a pile of arrows, rules for distribution of points and a scoreboard. Students can change the number of arrows and points given for a hit and a miss and, by experimenting with these quantities, they can realise the co-variation between them and the score number.

In the three studies, the research team investigated the influence of different conditions on students' algebraic reasoning, such as playing at home or at school with different didactical framings. Three key points are highlighted here. The first is that playing an experimental game at home can be an effective extension of school learning. Students are reported to perform better in the on-line environment, via game-generated and situation-based feedback, than in a paper-and-pencil scenario without feedback (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010). However, statistical analysis of results from a randomised, longitudinal experiment showed no significant effects for students playing at home without the support of didactical framings around the game (Bakker et al., 2015).

This implies that simply playing at home is not necessarily sufficient to facilitate student mathematical reasoning. Rather, students' gameplay needs to be directed at specific problems or accompanied by activities that can elicit the discovery of embedded mathematical relations in the game (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013). These activities can be in the form of follow-up class discussions at school on student discoveries of certain relationships, systems or patterns when they play (Bakker et al., 2015) or non-routine tasks that require students to experiment with game settings to solve them, such as 'What is the game rule to get 16 points in total with 16 hits and 16 misses?' or 'Are there other game rules to get 16 hits, 16 misses, and 16 points?' (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013, p. 290).

The second point is that digital games inviting students to experiment with quantitative values of game settings, and to collect data on the effect of these changes, have the potential to engage students in the exploration and conjecturing phases. Furthermore, the three studies indicated a progression whereby younger students primarily engaged in the exploration and conjecturing phases, while students in the fifth and sixth grades also engaged in the justification phase. Justification consisted primarily in arguing for experimental results by performing calculations.

The third point is that an experimental game should offer students situation-based feedback on their actions, rather than evaluating their answers, as such feedback enables students to revise and refine their solutions and reflect on their learning process (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010). Situation-based feedback was provided indirectly by hitting the target in the score number, which was influenced by the students' choices of the number of arrows and points given for a hit and a miss. In this sense, the feedback invited the students to explore the influence of varying the game settings to solve the tasks involved.

Designing Learning Games

The main affordance for mathematical reasoning in the one study under this theme (Ke, 2014) was to design and create content-specific learning games. This was envisioned as engaging students in mathematical reasoning in three ways. The first was by providing opportunities to learn mathematics by designing a game with the aim of explaining content-specific concepts or processes to younger students. The second was by working with mathematical concepts, such as variables, when programming a game. The third was by considering how mathematical concepts affected the design of the game (Ke, 2014). This theme is distinct from the others, because its main affordances for mathematical reasoning are related to creating games and not playing them. The kind of reasoning addressed in the game creation addressed exploration, conjecturing and justification, but this was in relation to the interplay between developing a gameworld and using mathematics (e.g. numbers, *x*- and *y*-coordinates, variables) to program it.

The first finding is that it was challenging for students to design a game about mathematics, even when they had been exposed to a variety of such learning games. Ke (2014) described how the mathematics in the students' games were predominantly depicted as integer calculations and as an extrinsic add-on to game actions. Some games included no mathematical learning content at all. The second finding is that it was challenging for students to base their programming on abstract and quantitative reasoning. Ke found that, rather than analysing scripts or coding gameplay actions, the students engaged in aesthetics programming, such as designing game sprites.

Furthermore, they explored their use of variables in programs by re-executing their games without first exploring the relationship between such variables or engaging in deeper learning about them as a mathematical concept. Therefore, rather than exploring the mathematical content in the games and the gameplay mechanics, the students spent time and effort creating gameworlds and crafting their story using visual and sound effects. Only a few students reasoned abstractly as they tried to model and co-ordinate the animations and events in a game.

Solving Tasks

The main affordance for mathematical reasoning in the two studies under this theme (Wouters et al., 2015, 2017) was to solve traditional closed tasks in order to move forward in an appealing game context. The studies examined the effect of curiosity-triggering events (Wouters et al., 2015) and surprising events (Wouters et al., 2017) in the game *Zeldenrust* in secondary pre-vocational education. The game is a simulation of a summer job at a virtual hotel. It integrates a set of proportional reasoning problems related to different authentic situations, such as sorting a refrigerator and mixing drinks.

The studies investigated *proportional reasoning skills*, defined as the activities students perform when they find solutions to comparison problems, missing-value problems and transformation problems (Tourniaire & Pulos, 1985). Wouters et al. (2015) presented an example task for measuring proportional reasoning skills: 'For a banana milkshake, you have to use 28 bananas and 48 units of ice. How many units of ice do you need if you are going to use 56 bananas and you want to remain the same proportion?' (p. 197).

Both studies (Wouters et al., 2015, 2017) showed that students improved their proportional reasoning skills. However, no evidence was found of students transferring their reasoning to problems in different contexts, becoming more motivated (in fact, the opposite was observed)or developing new mathematical insights (Wouters et al., 2017). The authors attributed these results to the strongly repetitive nature of the game (Wouters et al., 2015), indicating that continuously using repetitive games, which resemble training software in the guise of a game, was not valued by the students—at least not at this age.

Discussion

The mathematical content areas in the studies were varied and included the following: arithmetic (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012), early algebra (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010; van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013), statistics(Gresalfi, 2015), fractions (Gresalfi & Barnes, 2016), geometry (Ke, 2019; Wijers et al., 2010) and co-ordinates and variables (Ke, 2014). Across these different content areas, the thematic analysis identified five distinct ways that DGBLEs afforded students' mathematical reasoning. We now discuss these results. First, we synthesise the results by answering our research question. Second, we highlight promising game design features for mathematical reasoning. Third, we discuss how the studies differed in their ways of defining mathematical reasoning. Fourth, we discuss issues with the documentation of student mathematical reasoning. Fifth, we note obstacles to supporting students' mathematical reasoning in the studies.

Affordances for Mathematical Reasoning

The thematic analysis answered our research question by identifying five general ways in which students' mathematical reasoning was afforded in the selected studies. Now, we synthesise and discuss how, and to what extent, the DGBLEs afforded students' mathematical reasoning in terms of the R&P cycle, which consists of the following three phases: exploration, conjecturing and justification.

As Table 2 shows, eleven (twelve including the markings in parentheses) studies engaged students in exploration, five (ten) studies engaged students in conjecturing and one (seven) study engaged students in justification. This means that the DGBLEs afforded new learning opportunities that particularly supported students' exploration and conjecturing and, to a lesser extent, their justification. This seems to reflect a level of complexity in terms of what is required to engage students in mathematical reasoning: exploration is the least complex, while justification is the most complex. In addition, none of the studies engaged students in formal proving, which is arguably the most complex form of justification. This indicates that DGBLEs are particularly suited to afford exploration, conjecturing to a certain degree and justification to a lesser degree.

In terms of exploration, all studies except those under the *solving task* theme afforded the opportunity, to some extent, for students to explore mathematical relationships or relationships between mathematics and the game contexts. Under the theme of *developing (winner) strategies*, the students explored and identified the underlying patterns of the rules in the games. Under the theme of *exploring an immersive environment*, they explored how the environment carried out the consequences of their choices, while under the theme of *experimenting*, the students explored the relationships between different values in game settings.

Concerning conjecturing, the five studies (marked with an X) under the first three themes (*developing (winner) strategies, exploring an immersive environment* and *experimenting*) afforded students the opportunity to make conjectures of a mathematical character. According to these studies, it is crucial to scaffold students' conjecturing in relation to their gameplay; they provided no evidence that students' conjecturing occurred as a result of simply playing these games. Houssart and Sams (2008) and Bakker et al. (2015) have stressed the importance of the teacher's scaffolding of explorative talks among students and debriefing sessions for the whole class to encourage students to formulate their own hypotheses and talk about their discoveries of new strategies or relationships among variables or quantities. As an alternative, Gresalfi (2015) and Gresalfi and Barnes (2016) exploited a digital design feature in the form of a virtual character that, among other things, supported the students in formulating hypotheses. However, it is less clear whether the students' conjectures were related to statistics or to the anticipated consequences of their choices in virtual environments. In Pareto (2014) and Pareto et al. (2012), a TA afforded the students with an opportunity to engage in conjecturing, primarily by assessing the TA's own conjectures and questions.

In relation to justification, Houssart and Sams' (2008) study provided the most convincing case of students' engagement in mathematical argumentation and, thus, in the entire R&P cycle. The students in this study argued mathematically as to why

Table 2 Overview of thematic analysis

	Main Affordance forMathematical Reasoning					Forms of Mathematical Reasoning, R&P Cycle		
	1. Developing (winner) strategies	2. Exploring an immersive environment	3. Experimenting	4. Designing learning games	5. Solving tasks	Exploration	Conjecturing	Justifying
Pareto (2014)	X					X	(X)	(X)
Pareto et al. (2012)	X					X	(X)	(X)
Houssart & Sams (2008)	X					X	X	X
Gresalfi (2015)		X				X	(X)	(X)
Gresalfi and Barnes (2016)		X				X	X	(X)
Kolovou and van den Heuvel-Panhuizen(2010)			X			X	X	(X)
van den Heuvel-Panhuizen,Kolovou and Robitzsch(2013)			X			X	X	(X)
Bakker, van den Heuvel-Panhuizen and Robitzsch(2015)			X			X	X	
Ke(2014)				X		(X)		
Ke (2019)		X				X	(X)	
Lee and Chen (2009)	X					X	(X)	
Wijers, Jonker and Drijvers(2010)		X				X		
Wouters et al. (2015)					X			
Wouters et al. (2017)					X			

Studies with a similar shade of grey are part of the same research project. A parenthesised X indicates that the identified R&P phase was present to a lesser degree, implicit in the study or not part of the main affordance for mathematical reasoning. Note that two studies did not present evidence that we interpreted as being part of the R&P phases. This issue is addressed under the theme solving tasks

their strategies were winner strategies, supported by the teacher's scaffolding of their mutual and whole-class talks. While the students in Gresalfi (2015) and Gresalfi and Barnes (2016) engaged predominantly in consequential and not in mathematical justification, in Bakker et al. (2015), Kolovou and van den Heuvel-Panhuizen (2010) and van den Heuvel-Panhuizen et al. (2013), they justified their experimental data primarily by performing calculations.

Our analysis suggests that the main affordance *developing (winner) strategies* seems highly promising for students to learn to reason mathematically when the reasoning process is thoroughly framed didactically. One reason for this is that the object of student reasoning is closely tied to the rules of the game, and students must explore and identify underlying mathematical patterns to develop strategies to win the games. This affordance for exploration gives teachers opportunities to engage students in all three R&P phases, and this engagement is supported both by letting students play the game and by prompting their reflections on how the game is played.

Notably, the games *Lines* (Houssart & Sams, 2008) and *Frog Leap* (Lee & Chen, 2009) are not advanced in terms of graphics, narrative or other features normally associated with commercial digital games. Instead, their design is focused on making the mathematical structures of the games visible and encouraging experimentation with them. This is done through in-game features such as the possibility to rewind and fast-forward the game (Houssart & Sams, 2008) and the ability to edit relevant game settings, such as the number of frogs in *Frog Leap*. Such design features afford student experimentation and are a starting point for dialogue about the influence of different settings on students' gameplay.

In summary, the most promising DGBLEs for mathematical reasoning combine a game that supports students' exploration of mathematical relations, or highly specific game design features that target elements of the R&P cycle, and a dialogical framework that supports students' conjecturing and justification. This could take the form of students' gameplay in school or at home followed by classroom discussions (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013) or exploratory talk (Mercer, 1995) to structure dialogue around gameplay (Houssart & Sams, 2008), or from asking students to compare and discuss different results from a game with other students who have reached different results (Gresalfi & Barnes, 2016).

The positive findings from these studies highlight that a DGBLE aimed at using digital games to promote mathematical reasoning must consider the use of the game in relation to the classroom environment. In particular, classroom interactions among students, as well as between students and teachers, are vital for affording mathematical reasoning. In this regard, the integration of digital games in education mimics results from general studies on ICT that show that technology and pedagogy must be well integrated to be useful (e.g. Genlott & Grönlund, 2016), as well as outcomes suggesting that the teacher's role can both support students' gameplay and, at the same time, be in conflict with the game-based approach to learning (Vangsnes & Økland, 2015).

Game Design Affordances

In the analysis, we have identified how the DGBLEs afford mathematical reasoning. Three design features of the digital games afforded this in particularly positive ways: situation-based feedback, influencing game settings and NPCs.

First, situation-based feedback can lead to increased student verification in the justification phase (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010). The timing of feedback is essential: feedback provided after students deliver their solution does not lead them to revise their reasoning nor to consider alternative solutions. On the other hand, feedback provided early in the students' problem-solving process can create awareness of multiple solutions and increase student justification of their own solutions (Gresalfi & Barnes, 2016). Second, allowing students to experiment with changing game settings (Lee & Chen, 2009) can support them in engaging both in the exploration and in conjecturing phases (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010).

This second design feature makes the underlying structures of the game available for interaction, thereby affording student exploration and dialogue about patterns in the game, such as showing a second mathematical representation of the gameplay, displaying the co-ordinates for each move along with sequences of previous moves and making it possible to rewind gameplay (Houssart & Sams, 2008). Third, NPCs are a new feature of digital games that were implemented differently across the studies. The TA interacted with students' gameplay, learning from the students' input, which led students to judge the TA's conjectures and justifications (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012). Another NPC was the expert computer-player that acted both as an inspiration for playing smartly and as an opponent that encouraged students to outsmart their opponent (Houssart & Sams, 2008). In addition, the second mayor in *Ander City* was an NPC, introduced as a part of the game narrative, to support students to see that problems could have more than one legitimate solution, which increased their justifications of their own solutions (Gresalfi, 2015). These three design features highlight the potential for the digital component of games to create other forms of interactions (compared with analogue games) that afford mathematical reasoning.

Approaches to Mathematical Reasoning

The reviewed studies defined mathematical reasoning in a variety of ways, which complicates comparison between them. At one end, Wouters et al. (2015, 2017) investigated *proportional reasoning skills*, without explicitly defining them, and with tasks that primarily seemed to support students in practicing skills and memorising facts. The two studies do not refer to exploration, conjecturing or justification, and their approach has little in common with the R&P cycle. At the other end, Ke (2014) defined mathematical reasoning as modelling, focusing on the relationships between developing, testing and debugging a program and the mathematics involved. She also used *abstract reasoning*, *content-specific reasoning*, *case-based reasoning*, *fundamental reasoning skill*, *everyday reasoning*, *quantitative reasoning*, *inductive and deductive reasoning*, *analytical reasoning*, *math reasoning* or simply *reasoning*, which makes it difficult to navigate the different concepts in the study.

Between these two ends, other studies have used, for instance, *procedural*, *conceptual*, *consequential* and *critical engagement* in mathematics to analyse students' activities (Gresalfi, 2015; Gresalfi & Barnes, 2016). While the last two of these considered mathematical reasoning to some extent, as consequential engagement involves exploring and predicting the impact of one's solutions in a game context and linking different solutions with different consequences, critical engagement captures the decision-making involved in problem solving, such as actively choosing tools and mathematically justifying one's choices.

Some authors distinguished between mathematical and other forms of reasoning: for example, Ke (2019) referred to crude reasoning and Pareto (2014) to casual reasoning. To add to the complexity, reasoning was also used to refer to logical thinking with implicit understandings of what this meant in the specific context: for example, *reasoning about area* (Wijers et al., 2010) or *deep-level reasoning* (Pareto, 2014). This complexity is underscored by what Yackel and Hanna (2003) describe as the sometimes-present implicit assumption that there is a universal agreement on what reasoning means, which Jeannotte and Kieran (2017) later clarified was not the case. These diversities in the studies' approaches to reasoning make comparison between them difficult.

One explanation for the diversity may be the skewed distribution of research fields in the studies. In our initial coding, we found that only four of the twenty-three authors in the studies were affiliated with mathematics education, while eight were from departments of general education, teaching and learning, and a further eight from departments of educational technology, computer education, computing sciences and instructional technology. Of the fourteen studies, eight were both published in journals outside of mathematics education and by authors outside this field. Only two studies were published in a mathematics education journal and had at least one author working in a mathematics education department. The former combination of both journals and authors from outside the field of mathematics education could prove problematic for a research field dedicated to understanding students' learning of mathematics. Such studies risk presenting results that are difficult to reconcile with those from the mathematics education community, especially if they do not take research from this field into account. We do not intend to suggest that this highly interdisciplinary field should only be restricted to mathematics education researchers. However, we do highlight the apparent lack of mathematics education researchers interested in this field, and that quality and relevance could be improved by promotion of the mathematics educational perspective in future studies. Ultimately, it would appear that special care needs to be given to understanding the domain of mathematics education, especially when broaching concepts such as mathematical reasoning, where even the current state of research within mathematics education is based on approaches so varied that comparison between them is difficult (Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2016). In this review, we sought to mitigate this by being explicit about our own approach to mathematical reasoning.

In our reading of the selected studies, we found that three aspects helped us understand how mathematical reasoning was conceptualised. We therefore encourage future research on the relationships between digital games and students' mathematical reasoning to make these three aspects more explicit. The first is to define mathematical reasoning in terms that enable comparisons with existing research from mathematical education. The second is to distinguish between mathematical reasoning and reasoning in relation to games or contexts, such as consequential justification (Gresalfi & Barnes, 2016), as reasoning in and around the games does not need to be mathematical in nature. The third is to differentiate between mathematical reasoning and other forms of mathematical thinking, such as being procedurally engaged (Gresalfi, 2015) or solving tasks, in order to clarify that students can engage with the mathematics of a DGBLE without being engaged in mathematical reasoning.

Documenting Mathematical Reasoning

The documentation of students' mathematical reasoning and gameplay is a difficult task. The digital setting offers new possibilities for documentation, such as logging students' gameplay (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010), but without necessarily making documentation of mathematical reasoning easier. Across our selected studies, the task of documenting was approached differently. In total, ten studies (Bakker et al., 2015; Gresalfi & Barnes, 2016; Ke, 2019; Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010; Lee & Chen, 2009; Pareto, 2014; Pareto et al., 2012; van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013; Wouters et al., 2015, 2017) included some form of post-testing of mathematical learning. Additionally, some studies also identified mathematical reasoning by analysing transcriptions of students' dialogues and interactions with the DGBLEs (e.g. Gresalfi & Barnes, 2016; Houssart & Sams, 2008; Ke, 2014, 2019) or by coding students' written work in terms of mathematical and consequential justification (Gresalfi, 2015; Gresalfi & Barnes, 2016) or student strategies (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010). As a new means of documentation offered by the digital set-up, Pareto (2014) and Pareto et al. (2012) used the level of the TA as a proxy to indicate students' learning. However, being a proxy leads to uncertainty regarding what it means in relation to students' mathematical reasoning.

Regardless of the approach used, one issue in documenting student mathematical reasoning is that students can produce answers without using mathematical reasoning. For example, if students are asked to answer comparison and missing-value problems in the proportional reasoning domain, but not to explain how they arrived at their answer, it 'can lead to greatly overestimating a student's ability, since a correct answer can be generated from non-proportional reasoning' (Tourniaire & Pulos, 1985, p. 183). This suggests that post-tests determined to assess learning gains in terms of mathematical reasoning must enable students to explain their reasoning and not simply measure correct answers.

Moreover, the relationship between mathematical reasoning and the development of what Houssart and Sams (2008) call *a reasoned and winning approach* in gameplay was not always documented in the studies. There were clear intended affordances in the games that students would discover and explore properties and relations (Pareto et al., 2012), predict and reason about numbers (Pareto, 2014), discover relations between quantities (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013), investigate and interpret (Ke, 2019) and explore and consider statistical tools (Gresalfi, 2015). However, it was often difficult to judge whether and how these affordances were exploited by the students, as crucial elements of these processes were not explicitly documented in the respective studies.

Using the R&P cycle, we were able, in some cases, to conceive of the students' game choices as hypotheses or conjectures that they were forming in relation to current and future game stages. Nevertheless, the developments of these conjectures were often implicit. For instance, it is unclear how students received feedback on their answers to the TA or whether this feedback appeared only indirectly as consequences of their card choices in the game in Pareto (2014) and Pareto et al. (2012). This means that it is unclear how students can explain, validate or refute their hypotheses (answers) and be supported in developing strategies for playing well. As a result, a key issue for further research would be to make students' conjectures more explicit and to document more precisely when and how students engage in reasoning processes—for instance, by using the R&P cycle.

One challenge in making students' mathematical reasoning explicit in games is that, if students play against each other, cultural and social norms can encourage them to keep their strategies secret from other players rather than sharing them. One way to address this, which is afforded by digital games, is to position the students to compete with the computer-player or the environment rather than with each other.

Another consideration is that the DGBLEs affect the students' way of doing mathematics in unpredictable ways which can be difficult to document. Kolovou and van den Heuvel-Panhuizen (2010) suggest, for instance, that the game-generated feedback from the archery game led some students to verify answers in the post-test and create student-generated feedback. This leads to a question over whether the lack of mathematical reasoning outcomes is due to the DGBLEs not affording it or simply to insufficient documentation. As stated above, assessment of mathematical reasoning needs to include ways for students to explain their thinking to document their reasoning convincingly.

The challenge, therefore, is to design a DGBLE that affords explicit exploration, conjecturing and justification, while at the same time allowing for documentation of their occurrences.

Obstacles for Affording Mathematical Reasoning

Engaging students in mathematical reasoning is a challenging task (Nardi & Knuth, 2017; Stylianides, 2016; Stylianides & Stylianides, 2017). The use of digital games in mathematics education presents us with some specific obstacles. One idea is that digital games create engaging learning experiences (Kolovou & van den Heuvel-Panhuizen, 2010) and can therefore be used to teach students specific content. However, in order to afford this effectively, certain structures need to be present in the learning experience (Bakker et al., 2015). Other elements are best avoided when using games for learning mathematical reasoning, such as the continuous use of repetitive games, which does not seem to lead to new mathematical insight (Wouters et al., 2015, 2017). Indeed, this can create tensions in the gaming encounter (Goffman, 1961), because it affects the kinds of sense that can be made by the participants. If such structures are not sensitive to the nature of participation in the game, they risk ruining the fun that can be created in the gaming encounter.

In the reviewed studies, we interpret this issue to be seen in how the studies' designed affordances for playing and reasoning mathematically were sometimes different from how students played and reasoned about the games in reality. Such discrepancies were variously described in the studies. Bakker et al. (2015) reported, for instance, that more gameplay did not automatically lead to more learning, while Pareto (2014) emphasised that it was important that students try to *play well*, defined as, 'making good choices […] which in turn involves predicting and performing mental calculations as well as reasoning about numbers and computations' (p. 255). She also showed that the students could play a lot without trying to play well, and that they did not learn more simply by playing more.

On the other hand, van den Heuvel-Panhuizen et al. (2013) identified three student strategies when playing: *free playing*, *looking for answers* (i.e. to the associated tasks) and *exploring relationships*. Students who explored relationships scored significantly higher in a post-test than those who played freely, while students who looked for answers scored marginally higher than free-playing students. Hence, it is not only playing the game that leads to learning, but also particular ways of playing. Ke (2019) found that some students only explored and applied the targeted mathematical content when they valued mathematical reasoning as an efficient strategy. Otherwise, they circumvented mathematical content interaction and tried to outwit the environment through trial-and-error, estimation, guessing and crude reasoning: as such, they sometimes by-passed the mathematical task—actions that she described as content-irrelevant, gaming strategies and *careless gameplay* (p. 16).

These discrepancies can possibly be attributed to poor design of games or poor application of the games by teachers. We suggest that it also points to a lack of understanding of how students make sense of DGBLEs in the classroom. Terms such as *careless gameplay* (Ke, 2019) indicate a specific perspective that may not encompass how students' knowledge of how to play games from their leisure time influences what is afforded to them. An example is the opportunity to apply trial-and-error strategies that are sometimes highlighted as one potential for using GBL (and certainly as a valid form of interaction) in digital gameplay outside of school. However, we found that trial-and-error strategies needed to be applied to the learning content to be helpful in student learning (Ke, 2019; van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013). This indicates that, even though trial-and-error strategies are part of how the students approach the games, they are not efficient for learning in the long run, especially when applied to content other than what was intended.

The results here show that games and DGBLEs afford many different actions that do not only involve learning content. The perceived affordance to play well from a mathematical educational perspective is not necessarily the same affordance to play well from the student's perspective. This calls for further investigation of what such games afford for the students and not only if they afford the expected mathematical interactions. In short, what does it mean to play a game well from the student perspective, and how does this relate to the designed games and teacher/researcher intentions?

Our analysis shows less engagement of students in the justification process in particular. Here, we suggest two possible reasons for this. The first is that the consequences of the player's actions in a digital game are often directly reflected in the game. This is in line with findings on the use of dynamic geometry systems, where it has been reported that compelling dynamic visualisations often provide sufficient empirical evidence to students, meaning they no longer feel the need for further justification (Sinclair & Robutti, 2013). Comparable to this, our results indicate that justification can become irrelevant when students play digital games, because the way in which the narrative or context changes or how the empirical exploration occurs can be experienced as sufficient justification, making it unnecessary, from the students' perspective, to engage further in argumentation to validate or refute conjectures.

In games with a winner, a student's logic may be 'If I won the game, there is no need to justify that what I did was correct, because my winning proves it to be correct'. It can be argued that the justification the students forward in such a situation is the actual enacting of game strategies during gameplay and, if the strategies work in the game, then there is no need for the students to justify them. Game moves that are self-explanatory in this fashion do not afford explicit justification, as the effect they have on the game state can be considered self-justifying.

The other reason relates to the social perspectives regarding justification (Stylianides et al., 2017), whereby both the need for and the process of justification involve considerable social meaning-making. This means that students (in part) justify based on how they interpret the social situation (Yackel & Cobb, 1996). In our review, this social aspect of justification was underlined by the fact that Houssart and Sams (2008)—the study that most explicitly engaged students in the entire R&P cycle—was also the study with the most explicit focus on students' explorative dialogue and social interactions. Furthermore, the game's design features that target justification do so by imitating forms of social interaction, such as the TA (Pareto, 2014; Pareto et al., 2012),which mimics a master–apprentice relationship, or the competing mayors in the Gresalfi (2015) study. In this respect, future DGBLE designers must consider that justification will most likely happen if students can also participate in justifications as part of social interactions or interactions that imitate these social aspects.

Conclusion

This review of mathematical reasoning and digital games in the interdisciplinary field of mathematics education and game-based learning shows a large diversity among the fourteen included studies in terms of the DGBLE affordances for mathematical reasoning offered to students. From our analysis, we draw six conclusions in relation to our research question.

First, the thematic analysis answers our research question by identifying five main affordances for mathematical reasoning: (1) *developing (winner) strategies* and figuring out how to play better than one's opponents; (2) *exploring an immersive* environment by solving problems and understanding the consequences in the world, scenario or narrative; (3) *experimenting* with different values of game settings and exploring their relationship; (4) *designing learning games* and creating content-specific learning games; (5) *solving tasks* in an appealing game context.

This shows that there are different ways to use digital games to support mathematical reasoning. However, *developing (winner) strategies* proved to be especially fruitful in affording all three phases of the R&P cycle, perhaps because the studies in regard to this theme most successfully combined designed game features with a dialogical pedagogical frame. Themes 2, 3 and 4 each carry specific potentials that could be developed further. We identified the fifth theme—*solving tasks*—as the least fruitful, in part because the studies here were aimed more at training in procedures than engagement in mathematical activity.

Second, we found no evidence in the studies that students learn to reason mathematically as a natural by-product of simply playing digital games, for instance, at home. The complex processes of mathematical reasoning are different from what is normally required to play a digital game well, which suggests that it requires a specific game design to afford mathematical reasoning, as well as a specific research design to document it. The analyses suggest that digital games are better suited to afford experimentation and (to some extent) conjecturing, while justification was afforded more through dialogues about the game and gameplay. Nonetheless, we identified highly promising design features that should be developed and investigated further, such as NPCs like the TA character, situation-based feedback and features enabling interaction with the underlying patterns of the games. The analysis shows that mathematical reasoning can be achieved through the scaffolding of both students' interactions with certain aspects of specific games and their reflections on these interactions.

Third, students' digital gameplay can support learning to reason mathematically if accompanied by tasks that can elicit their discovery of embedded mathematical relations in the game or, more effectively, through follow-up discussions in class on students' discoveries of mathematical relationships between different game settings. Generally, reasoning is not especially present when students play the games in these studies, but it is present in their reflections on the gameplay. Moreover, interaction with specialised designed features, such as the possibility to rewind a game or to experiment with game settings, affords reasoning. One issue, however, is that students' conjectures in gameplay are mostly hidden, and it must be afforded for the students to make them explicit. Design features necessary to do so include, for example, the TA or the competing mayors.

Fourth, our review shows that digital games and mathematical reasoning represent a small research niche, primarily conducted in the fields of educational technology and general education. This indicates that the field has yet to capture the interest of the broader mathematics education research field. To advance the field, more research is needed into whether and how DGBLEs can be designed to afford mathematical reasoning more explicitly, and how their affordances can be didactically framed to enhance students' engagement in the conjecturing and justification phases of the R&P cycle, in particular. One key issue here is that, without solid documentation of the students' reasoning process, it is difficult to judge whether and under which conditions mathematical reasoning occurs. Researchers in the field should take special care to define their use of mathematical reasoning and aim to document explicitly when and how such reasoning is evident.

Fifth, in the reviewed studies, the envisioned ways in which the students engaged in mathematical reasoning when playing well were seen primarily from a mathematical perspective, without considering how students would perceive playing well when using their everyday experience with games as a reference point. Even though exploration was afforded by many of the DGBLEs, this did not necessarily involve exploring the mathematical features of the game: certain students would merely experiment with the game as a whole and engage in different interactions with it, some of which did not lead to learning. To us, this indicates that students can perceive playing well differently from what the designers and researchers originally intended. Investigating what is afforded to the students when playing games in mathematics education seems crucial to understanding this further. Failing to do so risks excluding students for one of the primary reasons for introducing games in education in the first place, namely that they are fun for students.

Sixth, our review shows promising design features of digital games in DGBLEs in affording students' learning of mathematical reasoning, such as offering a place for exploration or a virtual world in which to immerse themselves and imitate social interactions. However, when using digital games to enhance mathematical reasoning, one must acknowledge that mathematical reasoning also has a social component, and that the teacher's role consequently remains pivotal. How DGBLEs afford students' learning of mathematical reasoning is closely linked both to the design of the games and to how they are played and reflected on in class. Designers of a game meant for the learning of mathematical reasoning should therefore consider which part of the R&P cycle is afforded by interactions with the game, with the teacher and with other students. At this point, the most promising way to afford justification appears to be through dialogue about the games in student groups, with teachers or in classroom discussions.

Author Contribution Not applicable.

Funding The study is part of a PhD project granted by the Danish PhD Council for Educational Research, which is funded by the Danish Ministry of Higher Education and Science.

Data Availability The reviewed studies are from the databases Education Research Complete, British Education Index, ERIC and Matheduc. The data generated during the study are available from the authors upon request.

Code Availability Not applicable.

Declarations

Conflict of Interest The authors declare no competing interests.

References

Al-Washmi, R., Bana, J., Knight, I., Benson, E., Afolabi, O., Kerr, A., Blanchfield, P., & Hopkins, G. (2014). Design of a math learning game using a minecraft mod. In C. Busch (Ed.), *Proceedings of the 8th European Conference on Games Based Learning* (Vol. 1, pp. 10–17). Academic Conferences and Publishing International Limited.

Avraamidou, A., Monaghan, J., & Walker, A. (2015). Mathematics and non-school gameplay. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital games and mathematics learning* (pp. 11–34). Springer.

Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2015). Effects of playing mathematics computer games on primary school students' multiplicative reasoning ability. *Contemporary Educational Psychology, 40*(5), 55–71.

Bishop, A. (1991). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Bright, G. (1983). Use of a game to instruct on logical reasoning. *School Science and Mathematics, 83*(5), 396–405.
Brown, J., Stillman, G., & Herbert, S. (2004). Can the notion of affordances be of use in the design of a technology enriched mathematics curriculum? In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 119–126). MERGA.
Byun, J., & Joung, E. (2018). Digital game-based learning for K–12 mathematics education: A meta-analysis. *School Science and Mathematics, 118*(3–4), 113–126.
CCSSM. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf
Chick, H. (2010). A Lakatosian encounter with probability. *Australian Mathematics Teacher, 66*(4), 32–40.
Day, L. (2014). Australian curriculum linked lessons: Reasoning in number and algebra. *Australian Primary Mathematics Classroom, 19*(3), 16–19.
de Carvalho, M., Gasparini, I., & Hounsell, M., et al. (2016). Digital games for math literacy: A systematic literature mapping on Brazilian publications. In A. Rocha (Ed.), *New advances in information systems and technologies* (Vol. 2, pp. 245–254). Springer.
DeKoven, B. (2013). *The well-played game: A player's philosophy*. MIT Press.
Deterding, S. (2013). *Modes of play: A frame analytic account of video game play*. Unpublished doctoral dissertation. Carl von Ossietzky University of Oldenburg.
Devlin, K. (2011). *Mathematics education for a new era: Video games as a medium for learning*. CRC Press.
Dingman, S., Teuscher, D., Newton, J., & Kasmer, L. (2013). Common mathematics standards in the United States. *Elementary School Journal, 113*(4), 541–564.
Divjak, B., & Tomić, D. (2011). The impact of game-based learning on the achievement of learning goals and motivation for learning mathematics-literature review. *Journal of Information and Organizational Sciences, 35*(1), 15–30.
Egenfeldt-Nielsen, S., Meyer, B., & Sørensen, B. (2011). *Serious games in education: A global perspective*. Aarhus University Press.
Fox, B., Montague-Smith, A., & Wilkes, S. (2000). *Using ICT in primary mathematics: Practice and possibilities*. David Fulton Publishers.
Gee, J. (2003). What video games have to teach us about learning and literacy. *Computers in Entertainment, 1*(1), 20.
Genlott, A., & Grönlund, Å. (2016). Closing the gaps: Improving literacy and mathematics by ICT-enhanced collaboration. *Computers & Education, 99*, 68–80.
Gibson, J. (1977). The theory of affordances. In R. Shaw & J. Bransford (Eds.), *Perceiving, acting and knowing* (pp. 67–82). Wiley.
Goffman, E. (1961). *Encounters: Two studies in the sociology of interaction*. Penguin Books.
Grant, M., & Booth, A. (2009). A typology of reviews: An analysis of 14 review types and associated methodologies. *Health Information & Libraries Journal, 26*(2), 91–108.
Gresalfi, M. (2015). Designing to support critical engagement with statistics. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 47*(6), 933–946.
Gresalfi, M., & Barnes, J. (2016). Designing feedback in an immersive videogame: Supporting student mathematical engagement. *Educational Technology Research and Development, 64*(1), 65–86.
Gribble, N. (1994). Munchkin examined. *Interactive Fantasy, 2*, 101–108.
Hainey, T., Connolly, T., Boyle, E., Wilson, A., & Razak, A. (2016). A systematic literature review of games-based learning empirical evidence in primary education. *Computers & Education, 102*, 202–223.
Hansen, T., Elf, N., Misfeldt, M., Gissel, S., & Lindhardt, B. (2020). *Kvalitet i dansk og matematik: Et lodtrækningsforsøg med fokus på undersøgelessorienteret dansk- og matematikundervisning*. Læremiddel.dk - Nationalt Videncenter for Læremidler.
Houssart, J., & Sams, C. (2008). Developing mathematical reasoning through games of strategy played against the computer. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 15*(2), 59–71.
Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16.
Johannsen, C., & Pors, N. (2013). *Evidens og systematiske reviews: En introduktion*. Samfundslitteratur.

Kaufmann, M., Bomer, M., & Powell, N. (2009). Want to play geometry? *Mathematics Teacher, 103*(3), 190–195.

Ke, F. (2009). A qualitative meta-analysis of computer games as learning tools. In R. Ferdig (Ed.), *Handbook of research on effective electronic gaming in education* (pp. 1–32). IGI Global.

Ke, F. (2014). An implementation of design-based learning through creating educational computer games: A case study on mathematics learning during design and computing. *Computers & Education, 73*, 26–39.

Ke, F. (2019). Mathematical problem solving and learning in an architecture-themed epistemic game. *Educational Technology Research and Development, 67*(5), 1085–1104.

Kolovou, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Online game-generated feedback as a way to support early algebraic reasoning. *International Journal of Continuing Engineering Education & Life-long Learning, 20*(2), 224–238.

Kress, G. (2005). Gains and losses: New forms of texts, knowledge, and learning. *Computers and Composition, 22*(1), 5–22.

Larkin, K. (2015). "An app! An app! My kingdom for an app": An 18-month quest to determine whether apps support mathematical knowledge building. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital games and mathematics learning: Potentials, promises and pitfalls* (pp. 251–276). Springer.

Larsen, D., & Lindhardt, B. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet. *Matematik- Og Naturfagsdidaktik, 1*, 7–21.

Lee, C.-Y., & Chen, M.-P. (2009). A computer game as a context for non-routine mathematical problem solving: The effects of type of question prompt and level of prior knowledge. *Computers & Education, 52*(3), 530–542.

Lowrie, T., & Jorgensen, R. (2015). *Digital games and mathematics learning: Potential, promises and pitfalls*. Springer.

Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge: Talk amongst teachers and learners*. Multilingual Matters.

Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling. (2015). *Fælles mål for faget matematik*. [*Common Goals for the Subject Mathematics*]. Copenhagen. Ministry for Children Education and Gender Equality. Published at www.emu.dk.

Monaghan, J. (2016). Games: Artefacts in gameplay. In J. Monaghan, L. Trouche, & J. Borwein (Eds.), *Tools and mathematics: Instruments for learning* (pp. 417–431). Springer.

Moyer, P., & Bolyard, J. (2003). Classify and capture: Using Venn diagrams and tangrams to develop abilities in mathematical reasoning and proof. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(6), 325–330.

Nardi, E., & Knuth, E. (2017). Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions? *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 267–274.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2008). *Navigating through reasoning and proof in grades 9–12*. National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 9–28.

Oldfield, B. (1991). Games in the learning of mathematics: A classification. *Mathematics in School, 20*(1), 41–43.

Olson, J. (2007). Developing students' mathematical reasoning: Through games. *Teaching Children Mathematics, 13*(9), 464–471.

Pareto, L. (2014). A teachable agent game engaging primary school children to learn arithmetic concepts and reasoning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 24*(3), 251–283.

Pareto, L., Haake, M., Lindström, P., Sjödén, B., & Gulz, A. (2012). A teachable-agent-based game affording collaboration and competition: Evaluating math comprehension and motivation. *Educational Technology Research and Development, 60*(5), 723–751.

Salen, K., & Zimmerman, E. (2004). *Rules of play: Game design fundamentals*. MIT Press.

Schoenfeld, A. (2009). The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K–16 perspective* (pp. xii–xvi). Routledge.

Sidenvall, J. (2019). Literature review of mathematics teaching design for problem solving and reasoning. *Nordic Studies in Mathematics Education, 24*(1), 51–74.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. In K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 571–596). Springer.

Skaug, J., Husøy, A., Staaby, T., & Nøsen, O. (2020). *Spillpedagogikk: Dataspill i undervisningen*. Fagbokforlaget.

Stylianides, A. (2016). *Proving in the elementary classroom*. Oxford University Press.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2017). Research-based interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119–127.

Stylianides, G., Stylianides, A., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.

Takeuchi, L., & Vaala, S. (2014). *Level up learning: A national survey on teaching with digital games*. The Joan Ganz Cooney Center at Sesame Workshop. https://www.joanganzcooneycenter.org/wp-content/uploads/2014/10/jgcc_leveluplearning_final.pdf

Tanner, H., & Jones, S. (2000). Using ICT to support interactive teaching and learning on a secondary mathematics PGCE course. In *Proceedings of the annual conference of the Australian Association for Research in Education*. Sydney, Australia: AARE. https://www.aare.edu.au/publications/aare-conference-papers/show/2937/using-ict-to-support-interactive-teaching-and-learning-on-a-secondary-mathematics-pgce-course

Tokac, U., Novak, E., & Thompson, C. (2019). Effects of game-based learning on students' mathematics achievement: A meta-analysis. *Journal of Computer-Assisted Learning, 35*(3), 407–420.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181–204.

van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A., & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 281–307.

van Eck, R. (2015). SAPS and digital games: Improving mathematics transfer and attitudes in schools. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital games and mathematics learning* (pp. 141–173). Springer.

Vangsnes, V., & Økland, N. (2015). Didactic dissonance: Teacher roles in computer gaming situations in kindergartens. *Technology, Pedagogy and Education, 24*(2), 211–230.

Volkoff, O., & Strong, D. (2017). Affordance theory and how to use it in IS research. In R. Galliers & M.-K. Stein (Eds.), *The Routledge companion to management information systems* (pp. 232–245). Routledge.

Wijers, M., Jonker, V., & Drijvers, P. (2010). MobileMath: Exploring mathematics outside the classroom. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 42*(7), 789–799.

Wouters, P., van Oostendorp, H., ter Vrugte, J., van der Cruysse, S., de Jong, T., & Elen, J. (2017). The effect of surprising events in a serious game on learning mathematics. *British Journal of Educational Technology, 48*(3), 860–877.

Wouters, P., van Oostendorp, H., ter Vrugte, J., Vandercruysse, S., de Jong, T., & Elen, J. (2015). The role of curiosity-triggering events in game-based learning for mathematics. In J. Torbeyns, E. Lehtinen & J. Elen (Eds), *Describing and studying domain-specific serious games* (pp. 191–207). Springer, Cham.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236). National Council of Teachers of Mathematics.

Young, M., Slota, S., Cutter, A., Jalette, G., Mullin, G., Lai, B., Simeoni, Z., Tran, M., & Yukhymenko, M. (2012). Our princess is in another castle: A review of trends in serious gaming for education. *Review of Educational Research, 82*(1), 61–89.

KAPITEL 12

BRÆTSPIL I MATEMATIK-UNDERVISNINGEN

Erik Ottar Jensen

Dette kapitel belyser den meningskonstruktion, der sker i undervisningsscenarier med spil i matematikundervisningen, ved at fokusere på, hvordan elever deltager i scenarier som *spillere*. Kapitlet viser, hvordan elever oplever arbejdet med spil i undersøgende og designorienteret matematikundervisning, et perspektiv, der indtil videre er underbelyst i forskningen om spil og matematik. Fra et scenariedidaktisk perspektiv undersøger jeg, hvordan elevernes spilrammer vanskeliggør en matematikfaglig rammesætning. En problematik ved at bruge spil i matematikundervisningen er, at spil som udgangspunkt ikke handler om matematik for dem, der spiller. Spil refererer således til en hverdagsfaglighed, som eleverne i forvejen har mange og forskelligartede oplevelser af. Ligeledes viser jeg ved hjælp af Goffman, hvordan elevernes opfattelser af mening ved at spille spil antager forskellig karakter, alt efter hvilken ramme de tolker gennem. Pointen med kapitlet er ikke at forklare, hvordan eleverne argumenterer matematisk eller danner matematiske begreber, mens de arbejder med spil, men at belyse, hvordan det, at eleverne rammesætter aktiviteterne, tillader, at de orienterer sig forskelligt. Med dette bidrager kapitlet til en videre diskussion af, hvilke problematikker og potentialer det indebærer at anvende spil som didaktisk, socialt og kulturelt fænomen i matematikundervisningen.

SPIL I MATEMATIKUNDERVISNINGEN

Spil har længe været brugt i matematikundervisning (f.eks. Oldfield 1991; Randel, Morris, Wetzel & Whitehill 1992), og der er generelt konsensus blandt matematikdidaktiske forskere om, at spilaktiviteter kan bidrage til at støtte elevers matematiske udvikling (f.eks. Bishop 1991) og tilbyde væsentlige læringsoplevelser for børn i grundskolen (Ramani & Eason 2015). Empirisk forskning har i en årrække især været optaget af digitale spil, og resultaterne herfra rejser tvivl om, hvorvidt der egentlig er en positiv læringseffekt af at bruge spil i matematikundervisningen (Byun & Joung 2018; Tokac, Novak & Thompson 2019). Ligeledes har studier vist, at selvom elever spiller i lang tid i undervisningen, er det ikke sikkert, at de lærer matematik af det (Bakker, van den Heuvel-Panhuizen & Robitzsch 2015; Pareto 2014).

Jeg vil i dette kapitel belyse, hvordan eleverne i høj grad orienterer sig mod spilrammen, når der bruges spil i matematikundervisningen. At deltage i et spil i matematikundervisningen involverer forskellige praksisser, hvilket indebærer forskellige forventninger, beslutninger og handlemåder hos eleverne (Wisittanawat & Gresalfi 2020). Set fra et spil- og legekulturelt perspektiv beskriver Huizinga (1955), at et væsentligt element ved at spille et spil er, at aktiviteten ikke er rettet mod et eksternt mål, men bærer en værdi i sig selv. Det er altså ikke givet, at elever ser det som et væsentligt mål, at de skal have andet ud af at spille end netop at spille. Dermed kan der opstå usikkerhed blandt deltagerne omkring, hvilke diskurser der er styrende for undervisningen (Hetmar 2017).

Når læreren f.eks. introducerer et spil i matematikundervisningen, sker det så ud fra en forventning om, at eleverne morer sig og hygger sig, som om de spillede et spil med deres venner i frikvarteret, skal de være koncentrerede og fokuserede, som om de løste en matematikopgave, eller skal de placere sig et sted midt imellem? På den måde tilbyder spil i matematikundervisningen eleverne forskellige deltagerperspektiver, der har forskellige gyldighedskriterier for valide handlinger og fortolkninger af spilsituationer (Hanghøj, Misfeldt, Bundsgaard & Fougt 2018).

Grænsen for, hvad der skal vurderes som ægte eller ikke ægte viden i et spil i en undervisningssituation, er dermed ikke veletableret, men skal konstrueres og forhandles af deltagerne, alt efter hvilke perspektiver deltagerne anlægger på spilaktiviteten. Når lærere inddrager et spil som kontekst i matematikundervisningen, inddrager de samtidig muligheden for, at eleven kan positionere sig som *spiller* – og ikke kun som matematikelev. I forlængelse heraf er det min hypotese, at en dybere forståelse for læring med spil i matematikundervisningen hænger sammen med at forstå eleven både som matematikelev og som spiller i matematikundervisningen.

EN DESIGNTILGANG TIL UNDERSØGENDE MATEMATIKUNDERVISNING

Empirien, der præsenteres i kapitlet, er indsamlet gennem forskningsprojektet GBL21, der står for G*ame-Based Learning in the 21st Century* (2017-2023) (se også kapitel 5). Det er et projekt, der bruger designtænkning (Brown 2008) og spildesign som didaktisk metode for en række designinterventioner i matematik, dansk og naturfag på 18 skoler i Danmark. Empirien er indsamlet i fem forskellige 5.-klasser på tre skoler i hovedstadsområdet ud fra observation af matematikundervisning, elevinterviews og workshops med lærerne.

Klasserne har gennemført et undervisningsscenarie, hvor elevgrupper skulle bruge designtænkning til at ændre på reglerne i brætspillet *Hungry Higgs*. Morten Misfeldt og kolleger (Misfeldt, Christensen, Bjerre, Jensen & Puck 2018) har tidligere dokumenteret, at deltagelse i matematik-undervisningsforløb udviklet af Bertold, Nielsen, Fink, Nielsen & Kongsted Cordes (2017) med afsæt i *Hungry Higgs* understøtter elevernes motivation for at deltage i matematikundervisning. I det GBL21-forløb, som er i fokus her, er det imidlertid ikke selve spillet, der udgør undervisningsscenariet, men redesignprocessen, hvor spillet er det redskab, som eleverne skal redesigne ud fra matematiske kriterier.

Hungry Higgs, jf. figur 1, består af et spillebræt, der kan vippe og vægtede spillebrikker med forskellig vægt, der påvirker brættets balance forskelligt, alt efter hvor langt de er fra midten af spillepladen. To spillere spiller mod hinanden og forsøger enten at slå modstanderen hjem ved at lande oven på dem eller flytte nok vægt over på sin egen halvdel af spillebrættet til at tippe brættets balance (se figur 1). Spillerne spiller med to sekssidede terninger, der hver har tre forskellige udfald (1, 1, 2, 2, 3, 3), og som bestemmer, hvor en spiller kan rykke sin spillebrik rundt på de kvadratiske hvide og sorte felter på brættet.

Undervisningsscenariet, der rammesatte elevernes matematiske arbejde, var et projektforløb, hvor eleverne skulle være spildesignere. Hensigten var at udvide elevernes muligheder for at reflektere over spillet fra mere end perspektivet som spildeltager. Gennem scenariet undersøgte eleverne de matematiske elementer i *Hungry Higgs* med fokus på placering af spillebrikken, udfaldsrum for terningerne og vægtstangsprincippet. Herefter fandt eleverne på et mål for at redesigne spillet, f.eks. at det skulle tage længere tid at spille eller involvere flere spillere. Dernæst skulle eleverne redesigne spillet ved at ændre på dets matematiske egenskaber og ræsonnere matematisk over, hvorvidt deres ændringer indfriede deres mål.

Figur 1. Nederst til højre er det originale *Hungry Higgs* med spilleplade, brikker og terninger. De tre andre billeder er eksempler på elevgruppers redesignede spil inklusive elevernes regler og arbejdspapirer (fotos: øverst og nederst til venstre: Erik Ottar Jensen, nederst til højre: Gravity Board Games).

Det matematikfaglige sigte var, at eleverne arbejdede med at anvende matematiske ræsonnementer i deres undersøgende arbejde. Intentionen var, at dette kunne ske, når eleverne opstillede hypoteser for deres forslåede ændringer, begrundede deres ændringer i spillet og udviklede vinderstrategier for deres spil, f.eks. ved at bruge viden om sandsynlighed til at forudsige gode placeringer. På denne måde understøttede spildesignscenariet, at eleverne kunne opfatte gyldig deltagelse i scenariet som et spørgsmål vedrørende designprocesser i højere grad end om, hvorvidt de blev gode til at spille spillene. Reelt viste det sig dog vanskeligt at rammesætte matematikundervisningen på en måde, hvor eleverne opfattede sig som spildesignere, og ved flere lejligheder blev spil og spildeltagelse det styrende ‘scenarie’ for undervisningen.

De deltagende lærere fulgte et undervisningsscenarie udviklet af GBL21-projektet og deltog desuden i workshops om spil i undervisningen og designtænkning. De klasser, jeg fulgte, modtog løbende supervision fra mig. Der var stor variation i de enkelte læreres måder at gennemføre undervisningsforløbet på, og det kan diskuteres, i hvor høj grad undervisningsforløbets oprindelige intentioner kom til udtryk i de enkelte klasser. Alle deltagende elever arbejdede dog med at undersøge de matematiske elementer i spillet og redesignede et spil i deres elevgruppe.

Størstedelen af den internationale forskning omkring spil i matematikundervisning omhandler brug af træningsspil til at fremme elevers procedurale færdigheder (Byun & Joung 2018; Larkin 2015) og de fire regningsarter (de Carvalho, Gasparini & da Silva Hounsell 2016) med et generelt fokus på at kunne måle individuelle elevers læringsudbytte.

I den tilgang, jeg beskriver her, er udgangspunktet for undervisningsscenariet, at matematisk læring understøttes af elevers undersøgelser og designprocesser i sociale kontekster samt en antagelse om, at spil kan mediere mellem elevers erfaringer fra hverdagsdomæne og matematisk domæne og på den måde kan skabe engagerende og meningsfuld matematikundervisning (Misfeldt & Zacho 2016). Det forskningsmæssige fokus er således på at undersøge, hvordan eleverne fortolker, overskrider og genfortæller de rammer, som scenariet tilbyder, samt hvordan læreren rammesætter og understøtter elevernes faglige progression (Misfeldt 2017). Den matematikdidaktiske inspiration tager afsæt i undersøgende matematikundervisning (Blomhøj 2013), hvor eleverne positioneres som *spildesignere* (Barab, Pettyjohn, Gresalfi, Volk & Solomou 2012; Tekinbas, Gresalfi, Peppler & Santo 2014). Dette leder mig frem til kapitlets forskningsspørgsmål, nemlig hvordan elever orienterer sig mod forskellige spilmæssige rammer og matematiske forståelser, når de reflekterer over spilprocesser i scenariet?

INTERAKTION I SPIL

Når lærere anvender spil i matematikundervisning, introducerer de ikke kun et spil i form af systemer og regler. Spil skaber også en kontekst, hvori eleven kan udvide sin deltagelse i undervisningen til at være *eleven som spiller*. For eleven rummer det en anden rolle og nye måder at orientere sig mod og indgå i aktiviteterne i undervisningen.

I scenariedidaktiske termer kan elevers tilgange til spil forstås ud fra en hverdagsfaglighed (Bundsgaard & Fougt 2017), der rummer bestemte, men også usystematiske og delvist ikkeekspliciterede perspektiver, værdier og handlemåder. Den amerikanske mikrosociolog Erving Goffmans (1961; 1974) rammebegreb ('framing') kan hjælpe med at forstå, hvordan elever deltager som spillere i matematikundervisning. En *ramme* er kort sagt svaret på, "hvad der foregår i en given situation" (Goffman 1974). Når elever f.eks. deltager i bestemte undervisningssituationer, sker det altid ud fra forskellige *rammesætninger* med emergerende betydninger, som løbende bliver fortolket og forhandlet af deltagerne.

Goffman (1961) skelner mellem, hvad det vil sige at spille et spil, f.eks. når man skiftes til at lave et træk, og de sociale aktiviteter, der opstår, når personer samles for at spille et spil. Det sidste kalder han for et *spilmøde* ('gaming encounter'). At spille et spil involverer *spillere* og handler om at følge reglerne i spillet, mens spilmødet involverer *deltagere* og betegner den sociale interaktion mellem spillerne. Goffman udtrykker det: Det er som spillere, at vi kan vinde et spil, men det er kun som deltagere, at vi kan få noget sjovt ('fun') ud af at vinde (Goffman 1961, s. 34, min oversættelse).

Deltagelse i et spilmøde er karakteriseret ved det, Goffman kalder 'regler for irrelevans' ('rules of irrelevance'). Det betyder, at deltagerne i et spilmøde organiserer deres aktivitet ud fra en præmis om, at noget af virkeligheden skal ignoreres. Når ens spillebrik skal rykke i fængsel i Matador, er det således ikke et ægte fængsel med mure og lås på døren, men et sted på spillepladen, der repræsenterer, at spilleren er røget i fængsel. Man kan på ethvert tidspunkt fysisk rykke brikken ud af fængslet. En væsentlig del af konceptet fængsel, frihedsberøvelsen, er altså ikke relevant i spillet, og derfor må deltagerne ignorere dette, for at spilmødet fungerer. På den måde er der bestemte ting, der enten inkluderes eller ignoreres i spilmødet.

Et andet centralt begreb for spilmødet er *spontan involvering* ('spontaneous involvement'), som Goffman forklarer som det at være engageret eller opslugt af en aktivitet. En deltagers spontane involvering fortæller noget om deltagerens intention og er derigennem med til at skabe sikkerhed og tryghed omkring præmisserne for spilmødet. En delt spontan involvering mellem flere deltagere tillader et gensidigt udtryk af respekt og relationer, og når den spontane involvering har fokus på selve spilmødet, bekræfter det stabiliteten af den verden, som konstrueres af deltagerne med dens egne regler for irrelevans (Goffman 1961, s. 37).

For Goffman er spilmødet således en 'verdenskonstruerende' aktivitet i den forstand, at lokale regler for irrelevans og spontan involvering er med til at opbygge et lokalt kosmos (Goffman 1961). I modsætning til f.eks. det at læse en tekst, så bliver spillet ikke bare 'læst' af spillerne, men bliver skabt sammen af spillerne ved, at de interagerer med og udfolder spilverdenen (Wisittanawat & Gresalfi 2020).

METODISK FREMGANGSMÅDE

I kapitlet præsenteres et empirisk eksempel fra et interview med en elevgruppe foretaget efter undervisningsforløbet. Interviewet startede med, at elever og interviewer spillede elevernes redesignede spil sammen – læs mere om metoden i Jensen & Andreasen (2020). Data er indledningsvis udvalgt efter formålssampling ('purposeful sampling') (Emmel 2013) for at indfange variation i forhold til, hvordan elevernes rammesætning af undervisningen orienterer sig mod spilrammer eller matematikfaglige rammer. Det primære eksempel, der præsenteres her, er udvalgt for at vise, hvordan eleven Lise reflekterer over spilsituationer i sin klasse, og kan samtidig belyse, hvordan elever primært orienterer sig mod spilrammerne. Eksemplet suppleres med de deltagende læreres refleksioner over undervisningsscenariet.

EN VERDEN, HVOR MATEMATIK BLIVER IRRELEVANT

I eksemplet herunder reflekterer Lise over, hvordan de redesignede spil spilles i klassen, og hun beskriver, at hun ikke forventer, at andre deltagere i spilmøderne forsøger at 'regne den ud'. Her er Lise blevet spurgt om, hvad eleverne skulle lære i forløbet:

> Lise: I princippet kunne man godt tænke over, hvor meget vægt det gav ligesom tilsammen. For at være sikker på at, hvis du ville vinde, så kunne du finde ud af, hvor meget vægt du skulle have i forhold til den anden for at få den her.
> Interviewer: Okay. "I princippet" siger du?
> Lise: Ja eller [griner], jeg tror ikke, de fleste gør det, altså, i et spil. Der er jo rigtig mange muligheder for, at du kan vinde, ik'. Men det er ikke særligt tit, at du udtænker dem. Altså dem alle sammen, f.eks. så at du faktisk ikke ved, at du kan vinde, selvom du kan. Eller ja.
> Interviewer: Hvorfor ikke? Er man ligeglad med at vinde eller?
> Lise: Næ, jeg tror måske, du kan vinde på en anden måde. Plus så tror jeg, de fleste er sikre på, den anden heller ikke har gjort det. Altså … Så hvis den anden har gjort det, kan det godt være, du gør det, ikke.

Formuleringen "i princippet kunne man godt" viser, at Lise er klar over, at man *kan* regne vægten på byttebrikkerne ud og videre, at man *kan* bruge den information til at forsikre sig om, om man kan vinde eller ej. Det væsentligste her er, at Lise mener, at denne matematiske forståelse af spillet er hypotetisk. Det er altså ikke noget, hun aktivt oplever, at eleverne gør eller bør gøre. Som Lise siger: "jeg tror ikke, de fleste gør det, altså i et spil". Så hun formoder heller ikke, at det er noget, som de andre gør, når de spiller det i klassen.

Lises begrundelse for ikke at optimere sin taktik ud fra en matematisk forståelse er, at man kan vinde på andre måder. Derudover antager hun, at hendes modstander heller ikke regner på de matematiske egenskaber, og oplever derfor heller ikke noget behov for selv at regne vægten ud. Eksemplet viser, hvordan forskellige rammesætninger eksisterer samtidig, men også at en social rammesætning i forhold til at *deltage i spillet som en social samværsform* træder i forgrunden i elevernes rammesætning af spilaktiviteten. Derfor bliver det vigtigere for Lise "bare at spille" med de andre end at forsøge at regne noget ud, selvom hun er klar over, at man kan regne på vægtforskydningen og dermed være mere sikker på at vinde.

Svaret indikerer ligeledes, at Lise også er klar over, at hensigten med forløbet er knyttet til matematisk læring, hvor der f.eks. skulle regnes på vægtforskydninger i spillet. Alligevel er hendes forventning, at spilrammen træder i forgrunden i klassen, hvilket bliver afgørende for, hvordan hun ser på muligheden for at regne vægtforskydningen ud. Eksemplet viser, at en regel for irrelevans for spilmøder i denne klasse er at ignorere den matematiske dybde i spillet, hvilket er uproblematisk for eleverne som spillere, så længe deres modstandere gør det samme. Så til trods for at eleverne ville være mere sikre på, hvem vinderen blev, hvis de regnede på det, så foretrækker de at deltage i spillet som et socialt og underholdende møde.

EN GOD GRUND

Det at spille uden en matematisk velovervejet strategi bliver i en workshop ligeledes beskrevet af en af de deltagende lærere:

> Lærer: Men det er jo også sjovere at spille på den måde. Fordi lige så snart du begynder at spille et spil, hvor man udtænker en plan. Hvis din modstander så er bedre til at udtænke en plan. Og man er barn. Så bliver det demotiverende. Fordi man ved, man taber.

Læreren beskriver her, hvordan det kan være demotiverende at deltage i spilmøder, hvis spillet skal tilgås fra et matematisk perspektiv, hvor konkurrence er i fokus. Læreren beskriver senere, at han har observeret, at elever, der ikke selv mener, at de er gode til matematik, helt kan miste lysten til at deltage i aktiviteter med spil, når de opdager, at det går ud på, at man skal regne strategien ud.

Man kan forstå ovenstående pointer ud fra Goffmans skelnen mellem den *ideelle rationelle* spiller, der agerer i et ideelt abstrakt spil, kontra deltageren, der er *spontant involveret* i et spilmøde (Goffman 1961). For den ideelt rationelle spiller er formålet med spillet at vinde. Ud fra den formelle logik i *Hungry Higgs* er det indlysende, at matematisk kunnen kan bruges til at forbedre spilstrategier og maksimere vinderchancer. Derfor er den matematisk-logiske indgangsvinkel til at spille et spil som spiller både fornuftig og brugbar. Men for en spontant involveret deltager i et spilmøde er målet ikke kun at vinde. Som deltager er målet afhængigt af andre deltagere, og hvordan situationen som helhed bliver forhandlet og rammesat: Som Suits (1978) beskriver, gælder det i et spil både om at have det sjovt ved at *deltage* i situationen og at *spille* spillet og derigennem forsøge at vinde, men målet er ikke kun at vinde i sig selv.

Et fokus i undervisningen på at øge vinderchancer kan på den måde ændre deltagelse i spillet fra social samværsform til at kunne optimere strategier ud fra en matematisk forståelse, hvilket dog samtidig påvirker elevernes muligheder for at deltage på lige vilkår. Det kan så at sige forstyrre elevernes spontane involvering i spilmødet, fordi det ikke opleves sjovt at spille imod spillere, der har for stor fordel i spillet. Dermed kan der opstå en konfliktfyldt situation, der på paradoksal vis er modsatrettet en af de væsentligste begrundelser for at bruge spil i matematikundervisningen, nemlig at det skal være *sjovt* for eleverne.

I stedet for at der opstår en synergi mellem det sjove ved at spille spil og en matematisk logisk forståelse af spillet, kommer disse to indgangsvinkler til spilmødet til at være i konflikt med hinanden. For Lise og flere af de andre elever i hendes klasse er der således en inkompatibilitet mellem det logiske og det sjove spilmøde, hvor det er sjovt at spille, når det ikke handler om at bruge matematik til at vinde.

I princippet kan det godt være sjovt at indgå i en konkurrence med en anden i et spilmøde og bruge matematisk viden til at spille så rationelt og logisk som muligt for at øge ens vinderchancer, men det er langtfra givet, at deltagelse i en sådan aktivitet er sjov. Når eleverne oplever, at matematiske kompetencer bliver afgørende for, hvordan de samskaber spilmødet, medfører det også snævre muligheder for at blive spontant involveret heri. Samtidig kan det være, at nogle elever ikke ønsker, at et spilmøde skal være afhængig af deres matematiske kompetence. Idéen om at forstå og bruge matematik i et spil til at konkurrere mod sine klassekammerater kan således være modstridende med at blive spontant involveret og have det 'sjovt'.

De elever, der oplever, at de ikke er gode til matematik, kan vælge at ignorere den matematik, der er i spilmøderne, og dermed undgå, at deltagelse i spilmøderne bliver afhængig af deres matematiske kompetencer. For nogle elever giver dette god mening, når de skal spille spillet i klassekonteksten, da det kan skabe spilmøder, der er mere inkluderende på tværs af elevernes matematiske kompetencer. Et tidligere studie viser yderligere, at konkurrence i matematikundervisning også kan være problematisk for de dygtige elever: De elever, der altid bliver først færdige med matematikopgaverne, kan f.eks. opleve, at resten af klassen bliver vrede på dem (Jensen & Hanghøj 2020). Brug af spil i matematikundervisningen rejser dermed væsentlige spørgsmål om, hvem der skal vinde og tabe i matematikundervisning, og hvad skal de få ud af at vinde og tabe? Et spørgsmål, der har fået meget lidt opmærksomhed i litteraturen. Analysen her viser, at en nærmere forståelse af dette kan findes ved at undersøge, hvordan elever ikke blot er *spillere* i spil, men *deltagere* i spilmøder i undervisningen.

OVERSÆTTELSE MELLEM SPIL OG MATEMATIK

Eksemplerne viser, hvordan elever kan konstruere spilmøder, hvor deres matematiske kompetencer bliver irrelevante. Selvom et spil har matematiske egenskaber, er det altså ikke sikkert, at disse egenskaber bliver en del af det spilmøde, eleverne konstruerer i undervisningen.

Den samlede empiri fra dette studie tyder på, at eleverne generelt har svært ved at opdage og konstruere relevante matematiske beskrivelser af spil gennem scenariet. F.eks. koblede eleverne sjældent den teoretiske sandsynlighed knyttet til terningerne til den præcise måde, hvorpå sandsynligheden var en del af de enkelte spilmøder. I stedet gættede eleverne på terningernes udfald uden at bruge viden om sandsynlighed i deres gæt. En udfordring er således, at eventuelle matematiske egenskaber ved de redesignede spil ikke er definerede og afgrænsede på forhånd. Derfor bliver lærere og elever nødt til at opdage og identificere disse, hvilket kan være komplekst og uoverskueligt.

Den centrale pointe i den fremlagte empiri er dog, at selvom eleverne opdager matematiske egenskaber ved spillene, er det ikke nødvendigvis noget, de kombinerer med deres deltagelse i spilmøderne. Yderligere risikerer elevernes indsigt i matematiske egenskaber, der udelukkende kan bruges til at vinde, at positionere eleverne på en måde, der ikke er ønskværdige for dem. Et spilmøde er en verdenskonstruerende aktivitet, hvor deltagerne kan gøre nogle elementer irrelevante, indlade sig i spontan involvering og have det sjovt (Goffman 1961). Så selvom spil kan lægge op til at undersøge og arbejde med matematik for at finde vinderstrategier, er dette blot én mulighed for at konstruere et spilmøde. Her er det væsentligt, at eleverne i forvejen spiller forskellige spil og har en spilfaglighed, som er til stede i samskabelsen af situationen. Eleverne ved altså på forskellige måder i forvejen noget om, hvordan de skal begå sig i spilsituationer, herunder hvad der er vigtigt og gyldigt. Men den viden kan ikke én til én overføres til, hvordan de skal begå sig i et undervisningsscenarie, der udover spilfaglighed også trækker på design- og matematikfaglighed.

Matematikundervisning med spil introducerer således ikke udelukkende en ny faglighed for eleverne, *men er ligeledes udtryk for, at eleverne skal udvikle nye bestemte faglige perspektiver på spil som en i forvejen eksisterende hverdagsfaglighed.* I scenariedidaktiske termer bliver etableringen af et læringsfællesskab dermed udfordret, fordi legitimeringen af faglig viden ikke kan kombineres med elevernes eksisterende perspektiv på spil gennem scenariet. Dette sker, dels fordi spilperspektiver bliver mere dominerende end både matematik og designperspektiver. Men også fordi eleverne i spilperspektivet bliver optagede af, hvordan de *som deltagere* får noget sjovt ud af at spille, og ikke kun hvordan de *som spillere* forbedrer deres chancer for at vinde spillet.

PERSPEKTIVER PÅ SPIL I MATEMATIKUNDERVISNING

En begrundelse, der ofte bruges for at inddrage spil i undervisningen, er, at elever kan lære matematik ved at forsøge at spille strategisk og 'spille godt' i spil med matematiske egenskaber (f.eks. Pareto 2014). Men dette perspektiv forholder sig primært til de logiske regler i spillet og ser spillerne som ideelle og rationelle spillere, der sigter mod at vinde. Perspektivet overser dermed, at for deltagere i spilmøder handler det ikke *kun* om at vinde. At 'spille godt' som spiller er ikke nødvendigvis lig med at 'deltage meningsfuldt' i et spilmøde. Et matematisk fagligt perspektiv kan bruges i forhold til de logiske regler i et spil, men de logiske regler i spillet er ikke i sig selv styrende for spilmødet.

For Goffman er det ikke i spillet, men i spilmødet, at sjov kan opstå (Goffman 1961), og netop derfor er det væsentligt at forstå spilmødet som en central del af elevernes oplevelse af at arbejde med spil, også i matematikundervisningen. Dette kapitel viser, at eleverne kan have gode grunde til at undgå at spille som ideelt rationelle spillere. Som lærer, der skal planlægge et forløb med spil, er spørgsmålet om faglig legitimering af viden derfor ikke kun, hvordan matematik kan bringe nye værdifulde perspektiver ind i spilsituationer med logiske og rationelle spillere.

Det handler i lige så høj grad om at undersøge, om og hvordan matematik er en del af spilmødet med eleven som deltager, og hvordan matematik kan anvendes til at have det sjovt som deltager i spilmøder – og ikke kun som spiller i et spil.

LITTERATUR

Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Robitzsch, A. (2015). Effects of playing mathematics computer games on primary school students' multiplicative reasoning ability. *Contemporary Educational Psychology*, *40*, s. 55-71.

Barab, S., Pettyjohn, P., Gresalfi, M., Volk, C. & Solomou, M. (2012). Game-based curriculum and transformational play: Designing to meaningfully positioning person, content, and context. *Computers & Education*, *58*(1), s. 518-533.

Bertold, V., Pedersen J.O., Eis-Hansen, M. & Fink, C. (2017). *Hungry Higgs: Matematisk balancespil – Lær spillet at kende og opbyg jeres egen vinderstrategi*. Forlaget Matematik.

Bishop, A.J. (1991). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Blomhøj, M. (2013). Hvad er undersøgende matematikundervisning? Og virker den?, i M.W. Andersen & P. Weng (red.). *Håndbog om matmatik i grundskolen – læring, undervisning og vejledning*, s. 172-188. Dansk Psykologisk Forlag.

Brown, T. (2008). Design thinking. *Harvard Business Review, 86*(6), s. 84-92.

Bundsgaard, J., & Fougt, S.S. (2017). Faglighed og scenariedidaktik, i T. Hanghøj, J. Bundsgaard, M. Misfeldt, S.S. Fougt & V. Hetmar (red.) *Hvad er scenariedidaktik?*, s. 97-117. Aarhus Universitetsforlag.

Byun, J. & Joung, E. (2018). Digital game-based learning for K-12 mathematics education: A meta-analysis. *School Science and Mathematics*, *118*(3-4), s. 113-126.

de Carvalho, M.F., Gasparini, I. & da Silva Hounsell, M. (2016). Digital Games for Math Literacy: A systematic literature mapping on Brazilian publications, i A. Rocha, A. Correia, H. Adeli, L. Reis & M. Teixeira (red.). *New Advances in Information Systems and Technologies*, s. 245-254. Springer.

Emmel, N. (2013). Purposeful sampling. *Sampling and Choosing Cases in Qualitative Research: A Realist Approach,* s. 33-45.

Goffman, E. (1961). *Encounters: Two studies in the sociology of interaction.* Ravenio Books.

Goffman, E. (1974). *Frame analysis: An essay on the organization of experience*. Harvard University Press.

Hanghøj, T., Misfeldt, M., Bundsgaard, J. & Fougt, S.S. (2018). Unpacking the domains and practices of game-oriented learning, i H.C. Arnseth, T. Hanghøj, T.D. Henriksen, M. Misfeldt, R. Ramberg & S. Selander (red.). *Games and Education: Designs in and for Learning,* s. 29-46. Brill Sense.

Harper, D. (2002). Talking about pictures: A case for photo elicitation. *Visual Studies*, *17*(1), s. 13-26.

Hetmar, V. (2017). Positioneringsteori og scenariebaserede undervisningsforløb, i T. Hanghøj, J. Bundsgaard, M. Misfeldt, S.S. Fougt & V. Hetmar (red.). *Hvad er scenariedidaktik?*, s. 75-95. Aarhus Universitetsforlag.

Huizinga, J. (1955). *Homo ludens; a study of the play-element in culture*. Beacon Press.

Jensen, E.O. & Andreasen, L.B. (2020). Exploring the Dialogic Space of a game Elicitation Interview with Fifth Grade math Students. *ECGBL 2020 14th European Conference on Game-Based Learning*, s. 268-276.

Jensen, E.O. & Hanghøj, T. (2020). What's the math in Minecraft? A design-based study of students' perspectives and mathematical experiences across game and school domains. *EJEL*, *18*(3), s. 261-274.
Larkin, K. (2015). An App! An App! My Kingdom for An App: An 18-Month Quest to Determine Whether Apps Support Mathematical Knowledge Building, i T. Lowrie & R. Jorgensen (Zevenbergen) (red.). *Digital games and mathematics learning*, s. 251-276. Springer.
Misfeldt, M. (2017). Matematisk kreativitet og målstyret undervisning, i T. Hanghøj, J. Bundsgaard, M. Misfeldt, S.S. Fougt & V. Hetmar (red.). *Hvad er scenariedidaktik?*, s. 144-166. Aarhus Universitetsforlag.
Misfeldt, M., Christensen, P.T., Bjerre, A.R., Jensen, E.O. & Puck, M.R. (2018). *Motivation og brætspil i Matematikundervisningen.* Aalborg Universitet.
Misfeldt, M. & Zacho, L. (2016). Supporting primary-level mathematics teachers' collaboration in designing and using technology-based scenarios. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2-3), s. 227-241.
Oldfield, B.J. (1991). Games in the Learning of Mathematics: 1: A Classification. *Mathematics in School*, *20*(1), s. 41-43.
Pareto, L. (2014). A Teachable Agent Game Engaging Primary School Children to Learn Arithmetic Concepts and Reasoning. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *24*(3), s. 251-283.
Ramani, G.B. & Eason, S.H. (2015). It all adds up: Learning early math through play and games. *Phi Delta Kappan*, *96*(8), s. 27-32.
Randel, J.M., Morris, B.A., Wetzel, C.D. & Whitehill, B.V. (1992). The effectiveness of games for educational purposes: A review of recent research. *Simulation & Gaming*, *23*(3), s. 261-276.
Suits, B. (1978). *The Grasshopper: Games, Life and Utopia.* Broadview Press.
Tekinbas, K.S., Gresalfi, M., Peppler, K. & Santo, R. (2014). *Gaming the system: Designing with gamestar mechanic.* The MIT Press.
Tokac, U., Novak, E. & Thompson, C.G. (2019). Effects of game-based learning on students' mathematics achievement: A meta-analysis. *Journal of Computer Assisted Learning*, *35*(3), s. 407-420.
Wisittanawat, P. & Gresalfi, M.S. (2020). The 'tricky business' of genre blending: Tensions between frames of school mathematics and video game play. *Journal of the Learning Sciences, 30*, s. 1-39.

What's the math in Minecraft? A Design-Based Study of Students' Perspectives and Mathematical Experiences Across game and School Domains

Erik Ottar Jensen and Thorkild Hanghøj
Aalborg University, Copenhagen, Denmark
erikoj@hum.aau.dk
thorkild@hum.aau.dk
DOI: 10.34190/EJEL.20.18.3.005

Abstract: This paper presents empirical findings from a qualitative study on Minecraft as a mathematical tool and learning environment. Even though Minecraft has been used for several years in classrooms around the world, there is a lack of detailed empirical studies of how students learn subject-related content by working with the game. This study is based on a design experiment with an inquiry-based teaching unit for fifth graders, which focused on using the coordinate system embedded in Minecraft, as a means to navigate and explore the game in order to solve mathematical problems. Based on student interviews, we explore how the students experienced and switched to new perspectives on mathematical knowledge through their participation in the teaching unit. Using thematic analysis, we explore data from six group interviews. The theoretical framework is based on domain theory, dialogical theory and notions of students' mathematical agency. The key analytical findings regard the students' experience of the coordinate system as part of both the academic domain of mathematics and their everyday domain of playing Minecraft, how they actively use the coordinate system to improve play in Minecraft and how they experience new ways of participating in mathematics. The article concludes by offering design principles for the future use of computer games in mathematics education.

Keywords: Minecraft, game-based learning, mathematics education, domain theory, coordinate system

1. Introduction

Games have long existed as part of mathematics education and have been investigated for several years (Bright, 1983; Oldfield, 1991). According to one review, games are used more frequently for teaching mathematics than for any other subject (Hainey et al., 2016). Thus, there is a widespread belief that games have tremendous potential in mathematics education. Although some scholars have pointed to video games as an ideal medium for teaching mathematics in middle school (Devlin, 2011), two recent meta-analyses showed only small and marginally significant positive learning effects from using games in mathematics education (Byun and Joung, 2018; Tokac, Novak and Thompson, 2019). This indicates that there is only limited research evidence to support the assumed potential of game use in mathematics learning.

A prevailing problem for mathematics education is that many students do not come to see mathematics as a constructive endeavor (Boaler, 2015). Similarly, student interest in mathematics is reported to be one of the most significant predictors in determining mathematical performance and perseverance (Hannula et al., 2016). However, the use of games in mathematics education is often based on game elements serving as rewards or aspects of extrinsic motivation, which do not support learning as much as games, where the learning activities are driven by students' inner motivation (Habgood and Ainsworth, 2011). Cobb (2007) argues that classroom activities being worthy of student engagement in its own right is an important part of the cultivation of students' interest in mathematics and should be considered an important goal for mathematics educators. As such, the aim of the current study is to explore these two research questions:

- How can Minecraft be used in a teaching unit to engage students in mathematics education by enabling different forms of participation?
- How do students experience new perspectives on mathematical knowledge across in-school and out-of-school domains?

2. Learning mathematics with Minecraft

Minecraft is one of the most played video games in the world, and it appeals widely to both boys and girls, especially around of the ages of 9–11 (Mavoa, Carter and Gibbs, 2018). At the same time, *Minecraft* is also increasingly being used as an educational tool in classrooms (Kipnis, 2018), and research has been conducted on its use in promoting learning within a wide variety of school subjects (Nebel, Schneider and Rey, 2016). Several

Reference this paper: Jensen, E. O., and Hanghøj, T., 2020. What's the math in Minecraft? A Design-Based Study of Students' Perspectives and Mathematical Experiences Across game and School Domains. *The Electronic Journal of e-Learning,* 18(3), pp. 261-274, available online at www.ejel.org

studies have explored the envisioned potential for using *Minecraft* as a component of mathematics education (Tromba, 2013; Bos et al., 2014; Ellison and Evans, 2016; Winter, Love and Corritore, 2016). For example, Kim and Park (2018) explored how preservice teachers identify potential mathematics learning benefits when using *Minecraft* as a learning tool. Other studies have described how *Minecraft* can model different mathematical concepts (Short, 2012) or how player behavior can be considered mathematical (Kipnis, 2018), with some proposing teaching material that employ elements from *Minecraft* as a context for mathematical exploration (Moore, 2018). However, these studies share a general lack of empirical evidence to support their claims about student learning, as the focus is primarily speculative explorations of possible learning potentials. Other studies have reported on local teaching experiments using *Minecraft* in mathematical contexts (Al-Washmi et al., 2014; Foerster, 2017; Freina et al., 2017) but provide limited descriptions of students' mathematical outcomes. Another study found no significant correlations between students' *Minecraft* habits and their perceived abilities to solve mathematical problems (Griffin and Griffin, 2018). None of these studies provide detailed descriptions of students' learning in relation to *Minecraft.* An exception, however, is the ethnomathematical qualitative study by Køhrsen and Misfeldt (2015), focusing on mathematical activity in *Minecraft* in an after-school programme. This study used empirical evidence with children, combined with a theoretically founded approach to understanding learning.

Overall, the studies point to learning potentials, promising teaching designs and innovative approaches regarding the use of *Minecraft* in mathematics education. However, most studies are based on anecdotal evidence, and very few articles focus empirically on students' learning or use a theoretically grounded approach to mathematical learning. This article seeks to address this research gap by presenting an empirical qualitative study of how *Minecraft* can help students learn mathematics.

3. Case: Teaching unit with *Minecraft*

The current study is based on a design experiment with a teaching unit using a *Minecraft* map in a fifth grade class comprising 22 students. *Minecraft* worlds are randomly generated, so a key element in the game is the exploration of the specific virtual world in which you are playing (Lane et al., 2017). However, it can be difficult to successfully navigate *Minecraft* and locate specific objects or other players. This can result in problems for players – e.g. getting lost on the map after building a structure and being unable to locate the structure again.
The idea of the intervention originated from the fact that the mathematical concept of Cartesian coordinates used in the mathematics educational curriculum was accessible in the *Minecraft* user interface and that three-dimensional (3D) navigation is a key challenge in the game. More specifically, the player can access the x, y and z coordinates of his avatar in the game. The x-axis indicates the position on an east–west axis, the z-axis shows the position on a south–north axis, and the y-axis indicates elevation (see figure 1 below). One whole number on the axis is equal to the length/height of one block in the game, which is equal to one meter in the real world.

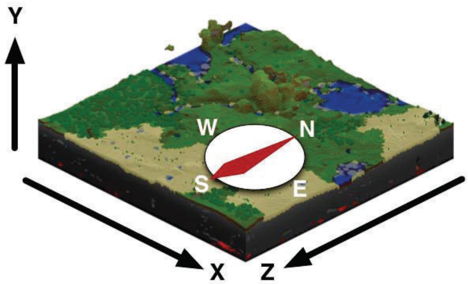


Figure 1: Screendump from the game map and an illustration of the x, y and z coordinates

When the players move their avatar in the virtual world, the values of the axes change according to the position. Moving directly up or down will affect the y-axis and moving directly towards the east will increase the value of the x-axis. Looking at figure 2, we see a player avatar standing on the first, second and third steps of a staircase in *Minecraft*. For each picture, the avatar coordinates are in the upper-right corner.

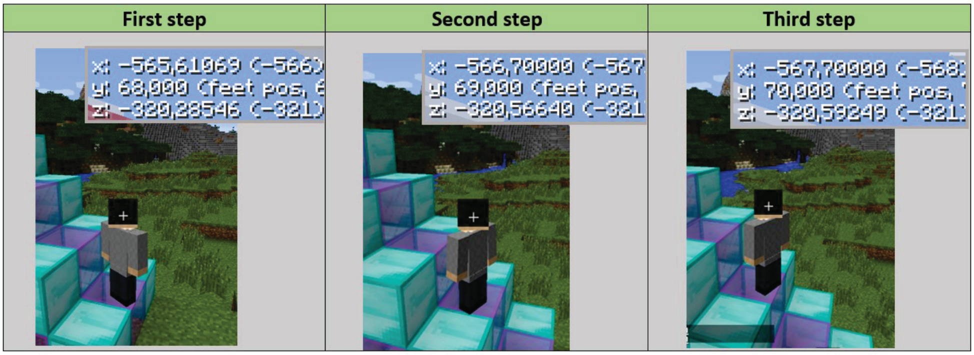


Figure 2: Change in coordinates

Following the avatar going up the stairs, the y-axis changes from 68 to 69 to 70. The x-axis also changes because the avatar is also moving west as it climbs the stairs. The change in the numbers after the decimal point indicates that the avatar can be placed on different locations within one square block.

The accessibility of such an underlying mathematical dynamic is not commonplace in commercial games, where the mathematical rules are often hidden from players, as they may disturb the players' immediate experience of the game (Lowrie and Jorgensen, 2015). Our hypothesis or humble theory (Prediger, 2019) for the design experiment was that the mathematical concept of Cartesian coordinates could be introduced as a means to solving the real player problem of locating objects in *Minecraft* in order to help students master and influence their understanding of the game. Therefore, instead of using the game as an instrumental tool for teaching mathematics, our starting point was to understand how we could design a teaching unit that created meaningful links between in-game challenges and the mathematical aspects of the game. Thus, the coordinate system in *Minecraft* should optimally serve as a useful resource for learning mathematics in order to master the navigation in the game and for playing the game in order to explore the mathematical concept of coordinates.

The teaching unit with the game map consisted of 15 lessons distributed over five days in one week. One of the researchers held meetings with the teacher, who contributed with feedback and ideas for improving the unit. The students' activities were mainly inquiry-based and framed around open questions. The initial task for the students was to understand what the numbers at x:, y: and z: indicated. The staircase shown in figure 2 was used by the students to examine how the coordinate numbers changed when their avatar moved up and down the stairs. This was not explained directly to the students in the way we have done above. Instead, the students were asked to build a staircase and reason about how the coordinate numbers changed. This would help them identify y: as an indication of their height level. In another activity, the students were asked to move in a way so that either the x or z coordinate remained constant while they moved. This was challenging for them, as it required them to move directly towards east, west, north or south. One solution was to build a wall and move in parallel with it. These assignments helped the students to reason about what the coordinate numbers indicated. Later in the unit, the students had to use their knowledge of the coordinate system to solve tasks. One task was to build a railway of exactly 100 blocks long, in pairs, starting from opposite ends and meeting in the middle. Another similar task was to build a tunnel through a mountain from each side. Finally, the students used the coordinate system to create treasure hunts, with new coordinates written on each post. In one instance, a student-created treasure hunt was played by the entire class in pairs. One student in each pair would control the avatar, while the other student would act as the navigator, looking at the coordinate numbers and guiding the controlling student.

4. Theoretical framework

Our research question was explored by analysing student interviews through a theoretical framework consisting of two complementary theories. The first theory was *scenario-based domain theory* (Hanghøj et al., 2018), which was used to map the interplay of different practices in the game-based teaching unit, with a particular emphasis on students' mathematical obligations (Cobb, Gresalfi and Hodge, 2009). The second theory assumed that students would explore the game-based teaching unit through different *voices* and *perspectives* in relation to the *dialogic space* created in and around the game scenario (Wegerif, 2006). By combining these perspectives in our exploration of *Minecraft* in mathematics, we described the students' perspectives on mathematical learning across in-school and out-of-school domains. We shall now outline the two complementary theories.

4.1 Domain theory

When the students played Minecraft in the mathematics classroom, they took part in a specific educational scenario (Hanghøj et al., 2018), which required them to imagine and perform domain-specific game practices, such as navigating the 3D game space, finding locations, hiding items from other players or building structures. In order to overcome in-game challenges, the students had to develop and use their knowledge of the coordinate system as a mathematical concept. As fifth graders, most of them were quite familiar with the game, having played it at home. In this way they participated in an open-ended inquiry process, which involved an interplay of practices across in-school and out-of-school domains.

A practice involves recognizable ways of doing things for shared social purposes, such as being able to navigate the game world of Minecraft or solving a mathematical task in the classroom (Hanghøj et al., 2018). Domains represent clusters or families of different practices and involve different validity criteria for what counts as legitimate knowledge and what does not. As such, students' exploration of Minecraft in mathematics involves a transformation of experiences and practices across four domains: the domain of everyday life, the pedagogical domain of schooling, the disciplinary domain of mathematics and the scenario-based domain of overcoming challenges in Minecraft. We shall now unpack these domains.

The domain of everyday life concerns students' lifeworlds, such as their life at home with family or friends. In this study, we were particularly interested in how the students were able to link the teaching unit with their out-of-school experience of playing Minecraft and their experience of using mathematics in their everyday life.

The second domain involved the pedagogical domain of schooling, which relates to the asymmetrical relationship between the teacher and student and the norms and expectations of what it means to participate in classroom teaching. These institutional and communicative practices are "school only", as they only occur in school contexts, but are always locally defined at the classroom level. In this study, we looked at how the game-based teaching unit, which differed from their regular teaching, allowed the students to collaborate and change their relationships.

Third, the disciplinary domain of mathematics concerned how the students participated in and experience mathematics as a school subject. In order to describe this aspect, we used concepts from the interpretive framework of Cobb, Gresalfi and Hodge (2009) for understanding students' mathematical identities. The authors argue that being a doer of mathematics implies a normative identity with certain obligations that define and constitutes the role of a good mathematical student in a specific classroom. These obligations concern three aspects. The first concerns the ways in which students legitimately express agency, which relates to both their use of established mathematical solution methods (disciplinary agency) and their ability to choose mathematical methods and develop meanings and relations between concepts and principles (conceptual agency). The second aspect relates to the distribution of authority, i.e. to whom the students are accountable when working with mathematics. The third aspect encompasses specific mathematical obligations that the students are accountable for, that is, what counts as competence in terms of mathematical reasoning and argumentation. Drawing on these concepts, we were able to show how the students, in working with Minecraft, expressed different forms of agency, authority and competence in the disciplinary domain of mathematics compared to their experience of normal classroom practices.

Finally, the fourth domain was the scenario-based domain of Minecraft, that is, the students' exploration of the specific game map used in the teaching unit. We took a closer look at the students' different interests in the game and how these influenced their experience of playing the game in a formal educational setting. Even though nearly all the students had tried Minecraft prior to the teaching unit, there were important differences in their experience and competence with playing the game.

The dynamic relationship amongst the knowledge practices of the four domains involved in the students' game activities is illustrated in Figure 3:

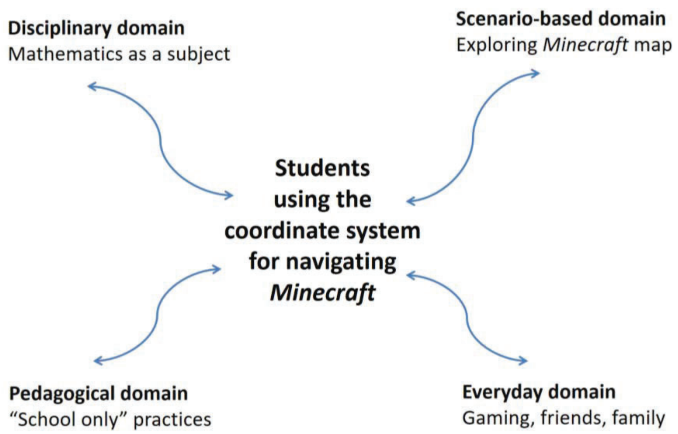


Figure 3: Interplay of practices across domains

By describing this interplay of knowledge practices across the in-school and out-of-school domains, it became possible to explore what counts as valid knowledge and the valid ways of doing math when playing *Minecraft* in the mathematics classroom.

4.2 Dialogic perspectives on Minecraft and mathematics education

The scenario-based domain theory is a generic theoretical framework, which can be used to describe the interplay of domains in a range of educational contexts. In order to provide a more detailed understanding of the bridging of practices and student experiences across the four domains, we found inspiration in the theory on dialogic education (Wegerif, 2006), which has been further developed in relation to mathematics education (Kazak, Wegerif and Fujita, 2015) and game-based teaching (Arnseth, Hanghøj and Silseth, 2018). Dialogues may be recorded as talk and interaction in external space and time. However, according to Wegerif (2006), dialogues are not simply external phenomena; they also involve an internal aspect, which invokes different times and spaces and a range of voices that reflect the participants' perspectives. The term voice, originally developed by Bakhtin (1981), refers to a first person perspective in a dialogue. In this sense, a dialogic space "is the space that emerges between voices, but that is also a shared space within which voices relate to each other" (Kazak, Wegerif and Fujita, 2015, p. 107).

Playing games at school with others may create dialogic spaces in which participants can explore and exchange a range of voices and perspectives (Arnseth, Hanghøj and Silseth, 2018). In our study, the students explored the use of *Minecraft* in mathematics through different voices, reflecting an interplay of experiences across the four domains. As we shall see in the analysis, some students related the *Minecraft* teaching unit to their everyday experience with the game outside of school or their everyday experience of "doing math class". Some students focused on the mathematical aspects of the game, while others emphasized how the teaching unit allowed them to collaborate and learn from their peers. It can thus be argued that the educational use of *Minecraft* opens up a multi-voiced dialogic space, where students are able to explore several interests and experiences across in-school and out-of-school domains.

According to Kazak, Wegerif and Fujita (2015), participation in a dialogic space enables students to *switch* between different perspectives, which is valuable in terms of extending and developing their understanding of a given problem or concept. However, switching between perspectives is not a mechanical process and requires an active choice, where students are willing and able to *step back* from their own point of view in order to explore different perspectives within a dialogue. The current study is based on group interviews with the students following the completion of the teaching unit with *Minecraft*. Through the interviews, we aimed to explore how the students experienced perspectives on mathematical knowledge in relation to the *Minecraft* teaching unit. We were not interested in documenting specific learning outcomes or how the students' learning processes took place during the teaching unit. Rather, we were interested in describing how the students' exploration of *Minecraft* allowed the emergence of new perspectives on mathematical concepts.

5. Methodological approach

This pilot study is part of an on-going design-based investigation (Barab and Squire, 2004) of how commercial games can be linked to curriculum aims. The data were collected in an urban public school with a large percentage of bi-lingual students in a socially and economically challenged area in Copenhagen. The school had participated in a previous project using commercial games (Hanghøj, Lieberoth and Misfeldt, 2018), where several of the teachers had developed a positive interest in using *Minecraft* for mathematics teaching. Based on this interest, teachers at the school decided to allow two fifth-grade classes – not part of the previous project – to participate in a game-based teaching unit for mathematics. One of the authors of this study conducted video observations and took field notes in one of the classes, where he had on-going dialogue with the teacher about how to facilitate the teaching unit. After the teaching unit was completed, six semi-structured group interviews (Brinkmann and Kvale, 2015) were completed with two fifth-grade students in each group. These interview data formed the empirical focus for this study.

Six student groups of two students each were selected prior to the intervention and in dialogue with the teacher in order to represent a broad spectrum of mathematical performance with students who demonstrated high-, low- and medium-level mathematical skills. The groups were mixed gender, with three male-only groups, two male–female groups and one female-only group. There were mainly male students in the class, which was reflected in the division of gender. The teachers described the class as disruptive and difficult to manage, with an overall low performance in mathematics and only a few mathematically skilled students. In order to ensure a contextual link with the gameplay activities, the students were interviewed once after the teaching unit, in the same pairs described above. The interview guide involved questions regarding their everyday experiences of math class and the mathematics the students used during the intervention with *Minecraft*. Each interview lasted between 45 and 60 minutes. Thereafter, all the collected interview data were subjected to a thematic analysis (Braun and Clarke, 2006), which involved transcription and coding using open categories, which were used to establish themes relating to the students' experiences of learning mathematics and participation in the mathematical activities. Following this, we identified overall analytical themes by linking the categories with concepts from domain theory and the students' mathematical agency (Cobb, Gresalfi and Hodge, 2009).

6. Analysis

In this section, we unfold how *Minecraft* can be used in a teaching unit to engage students in mathematics education through different forms of participation and how the students experienced new perspectives on mathematical knowledge across in-school and out-of-school domains.

Based on the analysis of the six interviews, we identified four analytical themes on different student perspectives on mathematical knowledge construction. The first concerned the students' experience of what it meant to participate as a student in regular math class. The second described how the students experienced learning mathematics through *Minecraft*. The third theme involved students' experiences about using mathematics to learn how to become better players. Finally, the fourth theme had to do with how the students experienced collaborative work in mathematics in relation to *Minecraft*. The four themes show a wide range of connections of student experiences across the different domains, all illustrating how the game-based intervention changed the students' experience of learning mathematics. We describe below the students' perspectives of mathematical learning. To illustrate how the use of *Minecraft* generated experiences that differed from those of the students' everyday math class, we describe the students' perspectives on math class with and without *Minecraft.*

6.1 Participation as a student in "math class"

This theme explored the *students' perspectives on their everyday participation in "math class"* before the intervention. We intentionally used the term math class to underline that this theme did not reflect the students' perspectives on mathematics as such but, instead, how they perceived participation in the local pedagogical context of their everyday mathematics classroom. Hence, this theme focuses less on exploring *Minecraft* and more on the students' established perspective on what it means to participate in math class.

One of the categories that emerged around this theme was the students' perception that it was important to calculate quickly. This finding relates back to the notion by Cobb et al. (2009) of disciplinary agency, i.e. being able to follow established methods in order to be considered mathematically competent. For instance, when Melanie was asked what it meant to be a good mathematics student, she replied:

> *When I know something, or if I have listened and understood it, then I can be fast and answer quickly.*

Other students also linked being a good math student to the speed at which answers are provided, knowing something or being able to understand the teacher's explanation. In Henrik's words: "*You have to be good at calculating fast*." Henrik further explained that, sometimes, it is best to know new concepts and answers before they are introduced by the teacher, as this gives an advantage in terms of answering quickly and correctly.

Another category indicated that the students rarely experienced links between the domain-specific activities and concepts from math class with experiences from their everyday domain. In reflecting on his experience of the intervention, Mads replied:

> *I didn't know that you could use the coordinate system in games or in Mine… [craft] or in reality.… No, I just thought it was a… a thing you had to learn.*

Earlier in the interview, Mads recalled that he had worked with the coordinate system before the Minecraft intervention. However, as the quote shows, he had not considered whether this mathematical concept had any relevance outside of the subject domain. From his perspective, what you do in mathematics is not necessarily useful in "reality". Rather, the coordinate system is just "a thing you had to learn", which suggests that the students did not see the purpose of what they had to learn. Thus, Mads did not anticipate that the content in math class was of relevance to his everyday life.

Summing up, the students' general perspective on mathematical classroom activities was that "math class" was an isolated domain and that the legitimate exercise of agency in everyday math class was disciplinary. The students experienced that in order to participate competently, they had to listen closely to what the teacher was saying and answer quickly, indicating that authority in the classroom was largely distributed to the teacher.

6.2 Learning mathematics through Minecraft

The second analytical theme concerned the *students' perspectives on learning mathematics through Minecraft*. The interviews involved several examples of students reflecting on how the *Minecraft* teaching unit created new perspectives on what constitutes mathematical knowledge. One example was Henrik's reflections on the intervention:

> Henrik*: It was the first, almost.*
> Interviewer*: It was the first?*
> Henrik*: Mm... approximately.*

> Interviewer: *Uhm… I'm just trying here to understand. The first what?*
> Henrik*: I could use, in all subjects, from mathematics.*
> Interviewer*: Ahh. It was the first [time] you have experienced in mathematics…*
> Henrik*: That you can use in all subjects. Yes.*

Henrik's experience of using the coordinate system in the intervention was a first in terms of understanding that mathematical concepts can be used in subjects other than mathematics. This indicates that he experienced that what he learnt in mathematics could have connections to the world. The use of the word "first" also suggests that he expected more connections to be made. The word "almost" indicates that such an experience might have been present, though not to any lasting degree, or that he, in some way, thought that mathematics should be related to the world but that he had not experienced it before. Henrik further reflected on how he switched his perspectives on mathematics in relation to the *Minecraft* teaching unit. He was asked whether he used mathematics in the teaching unit, and he replied that he did not see it as mathematics at first. The interviewer asked him to elaborate. He replied as follows:

> *Look… in the beginning, I thought the coordinate system was entirely mathematics, just something like, that you can just do in mathematics. But no, you can use it in all subjects. You can also use it in physical education and in umm… and arts class because there is a coordinate system on a picture, there and in the upper left and the upper right and all sorts of different things.*

Here, Henrik described how he switched his perspective from seeing the coordinate system as exclusively linked with math class to seeing possibilities for applying it in other subjects, thereby creating connections from the mathematics subject domain to a more general school setting. Henrik expressed conceptual agency by developing the meaning of the concept of the coordinate system, explaining that it is "*where you can be*", which refers to the notation of placement. Additionally, he made connections between the coordinate system and new possible areas of use, which is also a way of expressing conceptual agency across different domains.

Similarly, other students created new connections between using the coordinate system in *Minecraft* and the everyday domain in a more general sense. This can be illustrated in Maja's description of how she perceived the coordinate system:

> *it was new and you could… you could use it to find places. Like a compass but, where it says... a place… uhm. You can kind of call it an address of some sort.*

This quote shows that Maja was able to exercise conceptual agency in two ways. First, she described how the coordinate system could be meaningfully used to find places. Moreover, she used her own words to explain the meaning of coordinates in a system by creating connections to similar phenomena such as "compass" and "address". Both the description of what the coordinate system can be used for and the comparison with other concepts are indicative of conceptual agency. The connection made by Maya is not limited to the subject domain of mathematics; it is linked to the scenario of the teaching unit, which required the students to locate specific coordinates in order to create or overcome in-game challenges. In this way, she made linkages between using the coordinate system to find places in *Minecraft* and its use in the everyday domain by comparing coordinates to an address.

As the examples suggest, the students generally experienced a higher degree of conceptual agency when engaging with the mathematics in *Minecraft* than in their everyday math class. Moreover, they experienced several connections across the in-school and out-of-school domains, which they did not mention in relation to regular math class.

However, the realization that the coordinate system could be of relevance across several domains did not occur to all the students. One student, Melanie, did not think that the coordinate system was taught in normal math class at all and described math class as being only about numbers and calculations. Melanie reasoned that the teaching unit concerned mathematics primarily because it was taught by her mathematics teacher. As such, Melanie failed to make a connection between the game domain and the mathematical subject domain. Moreover, Melanie created a dichotomy between the domains by explaining that mathematics is about calculations, in contrast to *Minecraft*, which is a game. These examples show that making connections between the subject domain and other domains relied heavily on the students being able to alter their perception of mathematics as an already established subject domain.

6.3 How Minecraft is given new meaning through mathematics

During the analysis, it became clear that the teaching unit not only gave the students opportunities to develop new perspectives on mathematics. some of the students also valued the teaching unit for providing *perspectives that gave new meaning to playing Minecraft as a game*, as shown in the following example:

> Interviewer*: Have you learned anything new about the coordinate system that you didn't know before. Or can you do something now that you couldn't do before?*
> Hasan*: Yes. Well, I didn't know, even though I have been playing Minecraft a lot, I didn't know where the coordinate system was. Even though I pressed F3 and it [the coordinates] then it appeared, but I didn't know, I didn't know what it was. When I moved, it just changed a lot, and I turned it off again, and I didn't know what it was. But now, now I know what it is. Now I use it often in Minecraft.*
> Interviewer*: Okay, so you have used it afterwards after the course?*
> Hasan*: Yes, because if I have to find something that I have forgotten but I have the coordinates to, then I can just, then I can just go over to them.*

Hasan knew from playing the game at home that he could press F3 and prompt new and changeable information but was unable to translate the information into something meaningful. After learning what the numbers meant, he now frequently used them to locate objects in the game. In terms of domains, Hasan referenced his everyday activities in *Minecraft* (the game domain) to explain the usefulness of the coordinate system from the mathematical domain. As such, he created a strong connection between the different domains. His use of the coordinate system in *Minecraft* became a new way to interact with the game. If we expand the notion of agency in math class to understand the changes in how Hasan now played the game, then his statements validates the use of the coordinate system as a legitimate way of expressing what we could call player agency in *Minecraft* because it can be used to address the actual challenge in the game of how to locate objects by keeping track of their placement via coordinates.

The position of being a mathematical *Minecraft* player refers to the students' experiences of using the coordinate system to remember and find places in *Minecraft*. When the students experience that they can use the coordinate system in the game to solve the mathematical task given by their teacher in math class, they establish new connections between the two already established, though initially separated, domains, that is, mathematics and the everyday domain, which in turn transform both domains.

6.4 Collaborating around Minecraft in math class

The fourth and final analytical theme concerned the *students' perspectives on collaboration in math class in relation to Minecraft*. In addition to affecting the students' view of mathematics as a subject and their ability to navigate within *Minecraft*, the teaching unit also changed the students' perception of participating in math class. To exemplify, we shall focus on two students, Mads and Adam, who the teacher regarded as the highest-performing students in math class. Here, Mads explained that always being the first to finish tasks in regular math classes often put the two friends in an awkward position in relation to their classmates.

> Mads*: And then they [the other students] always get angry and say, you shouldn't always say "we are finished, we are finished"... But we understand why they say it*
> Interviewer*: Okay*
> Mads: *Because it is only... Most of the time, we are the only ones who finish first. It may never… they can't look forward to finishing faster than us.*

As the first theme showed, being mathematically competent in this classroom was highly dependent on speedy task-solving. However, when the same students repeatedly finished first, their peers found themselves in a situation where it was difficult for them to be regarded as mathematically competent. According to Mads and Adam, the other students felt like they had no chance of ever finishing first. Because of this, Mads and Adam experienced the other students' frustration and anger towards them.

These two students had little prior knowledge of *Minecraft* before the teaching unit. However, they had a very positive experience of the teaching unit because it had freed them from their original positions in math class as the fastest to solve tasks. Moreover, they were also able to learn about the game from their classmates, indicating a greater distribution of authority in the classroom. This is exemplified in the following excerpt:

> Adam*: But when we are working in pairs and we are together, then (Mads: Then they all get mad) sometimes. Because we are very fast and they have to keep up, but are slower, but in this [Minecraft unit], it was just fantastic.*
> Interviewer*: Yes, and how can it be that this was fantastic?*
> Adam*: Because. it. We usually don't play Minecraft, but the others know how to play. The others, who need some time to understand mathematics, they have played Minecraft, so they can react faster and know everything you have to do and everything you can build. We had to learn that from them.*
> Interviewer*: You had to learn from them?*
> Adam*: Yes, and then we could see how it is when we do math quickly and they have to keep up with us.*
> Mads*: But with this, with this Minecraft, then we were all equal (Adam: yes); nobody was better or worse.*
> Interviewer*: at playing Minecraft?*
> Mads*: At everything.*

Mads and Adam's positive experience of having to learn from the other students can be seen as a renegotiation of the authority in the classroom towards a more distributed model of teaching and learning than they would normally experience. Drawing on the other students' expertise with *Minecraft*, the game opens up a space for exercising conceptual agency, where Mads and Adam became the novices and had to learn from their classmates. Thus, the game created new connections for knowledge construction across the pedagogical and game domains.

Moreover, the two students concluded that the reversal of student authority and switch of perspectives proved beneficial to everyone. Valuable knowledge was not tied simply to the first to finish a mathematical task but to how all the students could collaborate about integrating knowledge across the various domains. This challenged Mads and Adam to understand knowledge about *Minecraft*, which became a valid and valuable aspect of competency in the intervention. The students who were skilled at mathematics were not necessarily the same students who were skilled at *Minecraft*, which means that the students' competences were redistributed across different domains. Mads and Adam's experience of being more on the same level as the other students released them from the normal classroom obligation of finishing tasks quickly. What they addressed with this change was not, however, that they were losing an opportunity to display mathematical competence towards the teacher; rather, to be free from this obligation was "fantastic" and was a shift toward positive identification. This underlines the fact that the focus on being the first to finish creates very narrow opportunities for students to live up to their classroom obligations.

Collaboration was far from the norm in the students' experience of everyday math class, where most work was done individually. They described that it was best "*to keep to themselves*" and only check results with the teacher, not with other students, which was regarded as cheating. Even though Mads and Adam had tried to play other learning games in mathematics, such as the mini-games in the Matfessor learning portal, their experience of game-based intervention was highly different. As Adam put it: "*in Matfessor, there is no need to talk to each other at all*", whereas working with *Minecraft* requires "*a lot about collaboration*", where they "*talk to each other all the time*". In summary, this final theme emphasizes how collaboration opens up to various ways of participation relating to the different ways of working with mathematical activities and helping each other navigate and build things in the game.

7. Discussion

The analysis showed how the intervention allowed the students to experience new perspectives as they transformed mathematical knowledge across the different domains of the school subject, the game map and their everyday game experiences. Table 1 presents a summary of our findings in the four analytical themes.

Table 1: Summary of analytical findings

Theme	Focus	Domain crossings	Findings
Participation as a student in "math class"	Students' experience of participating in their regular mathematical lessons	Links between the disciplinary domain and the pedagogical domain	The students stress the importance of being able to calculate and answer quickly and listening closely to the teacher. Mathematical knowledge is disconnected from the everyday domain Experience of mathematics as following established procedures (disciplinary agency)
Learning mathematics through Minecraft	Students' experience of a changed perspective on mathematics as a subject	Links between the disciplinary domain, the everyday domain and the scenario-based domain (game map)	The students describe how the coordinate system in and beyond the game represents (or does not represent) mathematical knowledge Different experiences of the coordinate system as a mathematical concept (conceptual agency)
Minecraft is given new meaning through mathematics	Students' experience of a changed perspective on Minecraft	Links between the scenario-based game domain and the disciplinary domain	The students are able to use their knowledge of the coordinate system as a new way to play Minecraft Experience of how the coordinate system is meaningfully linked to in-game actions (conceptual agency)
Collaboration in math class in relation to Minecraft	Students experience a changed perspective on participation in math class	Links between the pedagogical domain, the disciplinary domain and the scenario-based game domain	The students experience broader possibilities for participation, which involve more ways of being considered competent as well as more distributed authority between the teacher and students Working collaboratively opens up for the emergence of different understandings between the students of the coordinate system (conceptual agency)

Generally, the findings show how, compared with everyday math class, the students experienced a higher degree of freedom as they explored and solved tasks in the *Minecraft* map. This involved a broad distribution of authority, with several ways of seeking and getting help from other students. The game-based learning environment allowed new ways of participation and expression of agency, which, for some students, evened out the hierarchical playing field in their math class. The results also indicate shifts in what counts as legitimate mathematical agency in the classroom, as the intervention created new perspectives on how the mathematical concept of the coordinate system could be used in Minecraft and beyond. Thus, the students experienced several *ways of being competent* – i.e. within the domain of mathematics education, learning to navigate in the game domain and making connections relating to how mathematical knowledge could be relevant in other domains.

As mentioned earlier, much of the research on games in mathematics education is focused on using single-player learning games as somewhat instrumental tools for increasing student motivation and narrowly defined learning outcomes. Using the concepts of Cobb and colleagues (2009), learning games are often used in mathematics education to enforce disciplinary agency through skill and drill exercises, with lesser emphasis on students' conceptual agency. However, the findings of our study suggest that there are good reasons for exploring the use of open game worlds and inquiry-based teaching with games in the mathematics classroom – e.g. to develop students' conceptual understanding of the coordinate system. Based on our design-based approach and findings, we suggest three design principles that could inform future research on games in mathematics education.

The first design principle relates to how the students created meaningful experiences across in-school and out-of-school domains by collaboratively solving tasks in the *Minecraft* map. Based on these findings and borrowing from scenario-based domain theory (Hanghøj et al., 2018), we propose that the educational use of games in mathematics could benefit from designing and teaching with game worlds, where students *are given opportunities for meaningful agency through problem-solving, which relate to domains that go beyond the disciplinary domain of mathematics as a school subject.* Here, we assume that commercial games can be used to create valuable learning experiences in mathematics education, which relate to the students' everyday lifeworlds and challenge the current training paradigm for learning games.

The second design principle concerns the choice and use of specific commercial games for mathematics education. Computer games are, by definition, built on algorithms and an extensive use of mathematical concepts. However, the mathematical aspects are often hidden from the player in order to ensure immersion in the game (Lowrie and Jorgensen, 2015). Based on the results from this study and our other attempts at using commercial games in mathematics education (Hanghøj et al., 2018), we find it highly important *to select and teach with games that provide direct access to specific mathematical aspects that are relevant to the mathematics curriculum.* Access to recognizable mathematical activities in a game allows students and teachers to create their own experimental conditions for inquiry-based teaching. In this study, the students' inquiry of the coordinate system in a *Minecraft* map allowed them to explore a somewhat familiar game world from new perspectives and develop meaning that was valid across various domains. Consequently, the freedom to access and explore underlying mathematical game features is a key precondition for repositioning students from disciplinary agency towards conceptual agency.

The third and final design principle concerns the complex relationship between game-related mathematical tasks and the actual experience of playing a game. One of the core in-game challenges when playing *Minecraft* is navigating the game world in order to find specific locations and avoid being lost. Our findings suggest that the students could use the game not only to learn *about* the coordinate system but also to understand the concept of coordinates *by* exploring in-game goals, such as building railroads or finding each other. This enabled the students to value not only the ability to learn mathematics by exploring *Minecraft* but also to improve their navigational skills in the game. Several of the students were able to engage in what they deemed a significant game practice from their everyday domain in a mathematically substantial way. Based on these findings, our third proposed design principle is that educators using commercial games in mathematics education should be able *to facilitate teaching that links mathematical aspects in a game to in-game challenges that are meaningful to the players*. This recommendation is in line with the study of Habgood and Ainsworth (2011), which documented the increased value of using games for learning mathematics that are intrinsically motivating in contrast to games, which are mostly based on external rewards.

In summary, the intervention created several positive findings regarding the students' newfound perspectives on and transformation of mathematical experiences, which may inform the future use of games in mathematics education. However, there were also several limitations to our study, one of which was that the analysis was based on interview data and did not incorporate a detailed analysis of actual gameplay. It can be argued that the students' switching to new conceptual perspectives mainly emerged in the interviews as reflective responses to the interviewer and that they would not have realized these conceptualizations without the interview. In this way, the validity of the findings would have benefitted from comparing the interview data more closely with observational data from the students' classroom dialogues in situ. Another limitation is that our analysis did not focus on the role of the teacher in the game-based teaching unit, which is often emphasized as crucial to students' learning experiences in terms of facilitating dialogue before, during and after gameplay (Arnseth, Hanghøj and Silseth, 2018). As our findings show, the students valued relatively different mathematical aspects of the intervention – i.e. the ability to use mathematical concepts in a meaningful way, to improve navigation skills in the game or to collaborate and reposition the social hierarchy of the math class. Arguably, these aspects are all valuable in terms of facilitating engagement and improving learning outcomes. However, the wide range of experiences among the students also suggest that it may be highly demanding for teachers to identify students' individual experiences and provide relevant feedback through dialogue. As we mentioned in the analysis, not all the students were able to clearly identify the mathematical aspects of the teaching unit. Thus, the current study could have benefitted from a closer analysis of the dialogue between the teacher and students as well as between the teacher and us, as researchers, about the perceived possibilities and challenges of using *Minecraft* in mathematics education.

On a final note, we wish to suggest directions for future research methodologies for studying how games can be used to learn mathematics. Despite few convincing results, most researchers working within this field have mainly been interested in quantitative approaches, which measure whether students become more motivated or learn more with games than with other tools or instructional approaches. However, the diversity of student perspectives and experiences in our qualitative data analysis shows that there are good reasons to be critical of instrumental approaches to games and learning, which is currently the dominant research paradigm. Our study underlines the importance of moving away from narrow measurements and asking questions such as *how* and, in particular, *what* are students learning differently when they use games in education. There is a need for researchers to explore the ways in which mathematical concepts become meaningful to students in relation to game-based learning. One future focus for in-depth studies of mathematical learning processes with games could be how dialogical reasoning occurs in students' interaction with games. As we have shown, *Minecraft* can potentially be used to positively affect students' perception of mathematical activities and development of mathematical interest. Moreover, had the game been an instrumental learning tool, it would have been impossible for the students to engage with the learning scenario in a variety of ways or for each of them to represent different meaningful ways of participation. Therefore, researchers working with games and learning should not only focus on students' ability to achieve mathematical standards or future demands. Instead, we should also pay more attention to how students' everyday experiences with games may relate to mathematical concepts and create multiple gateways for participating in and understanding mathematics education as a meaningful practice.

8. Conclusion

The objective of the study was to investigate how *Minecraft* could be used in a teaching unit to engage students in mathematics education through different forms of participation and how students experience new perspectives on mathematical knowledge across in-school and out-of-school domains. The study showed that the *Minecraft* intervention created new perspectives in the students' experience of mathematical knowledge, which they related to different in-school and out-of-school domains. The teaching unit clearly marked a change from the students' everyday experience of "doing mathematics", which they mainly described as the speedy solving of procedural tasks. Our analysis suggests that one of the main reasons for this successful recontextualization of knowledge between the game and school domains was that the students were actually able to use their knowledge of the coordinate system inside *Minecraft* as part of the teaching unit in terms of navigating the game space and overcoming meaningful challenges. Moreover, the analysis shows how the intervention motivated shifts in social relations, conceptual agency and perceptions of competence. As the findings indicate, the students were offered several possibilities for participation, which were sometimes related to understanding mathematics and other times to mastering the game. These findings stand in sharp contrast to the students' everyday experience of complying with classroom norms, e.g. listening to the teacher, following closely what happens on the blackboard and providing answers quickly. We should be careful with generalizing these findings based only on one classroom intervention. Nevertheless, we still believe that these findings call for more in-depth studies of the use of commercial games in mathematics education, where students can use mathematical knowledge to overcome meaningful challenges.

References

Al-Washmi, R., Bana, J., Knight, I., Benson, E., Afolabi, O., Kerr, A., Blanchfield, P. and Hopkins, G., 2014. Design of a math learning game using a Minecraft mod. In: C. Busch, ed. *Proceedings of the European Conference on Games Based Learning*. Reading: Academic Conferences & Publishing International Ltd., pp. 10–17.

Arnseth, H.C., Hanghøj, T. and Silseth, K., 2018. Games as tools for dialogic teaching and learning: outlining a pedagogical model for researching and designing game-based learning environments. In: H. C. Arnseth,T. Hanghøj,T. D. Henriksen, M. Misfeldt, R. Ramberg, and S. Selander eds. 2018. *Games and education: designs in and for learning*. Gaming Ecologies and Pedagogies Series, vol. 2: Brill Sense, pp. 123–139.

Bakhtin, M.M., 1981. *The dialogic imagination*. Translated by C. Emerson and M. Holquist. Austin: University of Texas Press.

Barab, S. and Squire, K., 2004. Design-based research: putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), pp. 1–14.

Boaler, J., 2015. *What's math got to do with it?: How teachers and parents can transform mathematics learning and inspire success*. London: Penguin.

Bos, B., Wilder, L., Cook, M. and O'Donnell, R., 2014. Learning mathematics through Minecraft. *Teaching Children Mathematics*, 21(1), pp. 56–59.

Braun, V. and Clarke, V., 2006. Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), pp. 77–101.

Bright, G.W., 1983. Use of a game to instruct on logical reasoning. *School Science and Mathematics*, 83(5), pp. 396–405.

Brinkmann, S. and Kvale, S., 2015. *Interviews: learning the craft of qualitative research interviewing*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Byun, J. and Joung, E., 2018. Digital game-based learning for K-12 mathematics education: a meta-analysis. *School Science and Mathematics*, 118(3–4), pp. 113–126. http://dx.doi.org/10.1111/ssm.12271.

Cobb, P., 2007. Putting philosophy to work. In: F.K. Lester Jr., ed. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, pp. 3–38.

Cobb, P., Gresalfi, M. and Hodge, L.L., 2009. An interpretive scheme for analyzing the identities that students develop in mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(1), pp. 40–68.

Devlin, K., 2011. *Mathematics education for a new era: video games as a medium for learning*. Natick, mass: AK Peters/CRC Press.

Ellison, T.L. and Evans, J.N., 2016. Minecraft, teachers, parents, and learning: what they need to know and understand. *School Community Journal*, 26(2), pp. 25–43.

Foerster, K.-T., 2017. Teaching spatial geometry in a virtual world: using Minecraft in mathematics in grade 5/6'. In: *2017 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*. Athens, Greece: IEEE, pp. 1411–1418.

Freina, L., Bottino, R., Ferlino, L. and Tavella, M., 2017. Training of spatial abilities with digital games: impact on mathematics performance of primary school students. In: J. Dias, P.A. Santos and R. C. Veltkamp. eds. *International Conference on Games and Learning Alliance*. Lisbon, Portugal, December 5–7, 2017 Genova, Italy: Springer International Publishing, pp. 25–40.

Griffin, L. and Griffin, R., 2018. Mining through maths: Minecraft play and mathematical problem solving. In: A. D. Power, ed. *Cyberpsychology and society*. London: Routledge, pp. 135–142.

Habgood, M.P.J. and Ainsworth, S.E., 2011. Motivating children to learn effectively: exploring the value of intrinsic integration in educational games. *The Journal of the Learning Sciences*, 20(2), pp. 169–206.

Hainey, T., Connolly, T.M., Boyle, E.A., Wilson, A. and Razak, A., 2016. A systematic literature review of games-based learning empirical evidence in primary education. *Computers & Education*, 102, pp. 202–223.

Hanghøj, T., Lieberoth, A. and Misfeldt, M., 2018. Can cooperative video games encourage social and motivational inclusion of at-risk students? *British Journal of Educational Technology*, 49(4), pp. 775–799.

Hanghøj, T., Misfeldt, M., Bundsgaard, J. and Fougt, S.S., 2018. Unpacking the domains and practices of game-oriented learning. In: H. C. Arnseth,T. Hanghøj,T. D. Henriksen, M. Misfeldt, R. Ramberg, and S. Selander ed. 2018. *Games and education: designs in and for learning.* Gaming Ecologies and Pedagogies Series, vol. 2: Brill Sense, pp. 29–46.

Hannula, M.S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanim, E., Lutovac, S., Kaasila, R., Middleton, J.A., Jansen, A. and Goldin, G.A., 2016. *Attitudes, beliefs, motivation and identity in mathematics education An Overview of the Field and Future Directions.* Cham: Springer.

Kazak, S., Wegerif, R. and Fujita, T., 2015. The importance of dialogic processes to conceptual development in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), pp. 105–120.

Kim, Y.R. and Park, M.S., 2018. Creating a virtual world for mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, 6(12), pp. 171-183.

Kipnis, A., 2018. Communication through playful systems: presenting scientific worlds the way a game might do. *Integrative and Comparative Biology*, 58(6), pp. 1235–1246.

Kørhsen, K.L. and Misfeldt, M., 2015. An ethnomathematical study of play in minecraft. *Nordic Research in Mathematics Education: Norma*, 14, pp. 205–214.

Lane, H.C., Yi, S., Guerrero, B. and Comins, N.F., 2017. Minecraft as a sandbox for STEM interest development: preliminary results. In: Y. Hayashi, et al. eds. 2017. *25th International Conference on Computers in Education Proceedings*, New Zealand: Asia-Pacific Society for Computers in Education, pp. 387- 397

Lowrie, T. and Jorgensen, R., 2015. *Digital games and mathematics learning: Potential, promises and pitfalls*. Dordrecht: Springer.

Mavoa, J., Carter, M. and Gibbs, M., 2018. Children and Minecraft: a survey of childrens digital play. *New Media & Society*, 20(9), pp. 3283–3303.

Moore, K., 2018. Minecraft comes to math class. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 23(6), pp. 334–341.

Nebel, S., Schneider, S. and Rey, G.D., 2016. Mining learning and crafting scientific experiments: a literature review on the use of Minecraft in education and research. *Journal of Educational Technology & Society*, 19(2), pp. 355–366.

Oldfield, B.J., 1991. Games in the learning of mathematics: 1: A Classification. *Mathematics in School*, 20(1), pp. 41–43.

Prediger, S., 2019. Theorizing in design research. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (15), pp. 5–27.

Short, D., 2012. Teaching scientific concepts using a virtual world - Minecraft. *Teaching Science: The Journal of the Australian Science Teachers Association*, 58(3), p. 55.

Tokac, U., Novak, E. and Thompson, C.G., 2019. Effects of game-based learning on students' mathematics achievement: A meta-analysis. *Journal of Computer Assisted Learning*, http://dx.doi.org/10.1111/jcal.12347.

Tromba, P., 2013. Build engagement and knowledge one block at a time with minecraft. *Learning & Leading with Technology*, 40(8), pp. 20–23.

Wegerif, R., 2006. Dialogic education: what is it and why do we need it? *Education Review*, 19(2), pp. 58-66.

Winter, V., Love, B. and Corritore, C., 2016. The bricklayer ecosystem – art, math, and code. In: J. Jeuring and J. McCarthy Eds. In: *Trends in Functional Programming in Education* (TFPIE), 2016, pp. 47–61

Kapitel 5: Computerspil i matematik

Erik Ottar Jensen, Thorkild Hanghøj og Tore Neergaard Kjellow

I dette kapitel præsenteres didaktiske tilgange samt konkrete forløb til at arbejde med computerspil i matematikundervisningen. Vores udgangspunkt er at arbejde med spil gennem en undersøgende matematikundervisning (Blomhøj, 2016), hvor samtalen mellem lærer og elever er vigtigt i forhold til at støtte elevernes undersøgelser og faglige forståelser. Vi forstår computerspil i matematikundervisningen som en ressource, der kan have bestemte faglige begrænsninger og muligheder. Computerspil er flittigt brugt i matematikfaget (Egenfeldt-Nielsen et al., 2011) men bliver primært brugt til færdighedstræning (Takeuchi & Vaala, 2014). Vi fokuserer på, hvordan man kan hjælpe eleverne til aktivt at undersøge matematiske sammenhænge i spil og på den måde skabe meningsfulde koblinger mellem spil og fag. Målet er at vise, hvordan man som lærer, kan gøre matematik vedkommende og meningsfuldt for eleven som spiller.

Vi præsenterer tre forløb med tre forskellige spil til mellemtrinnet. Det første forløb er et eksempel på, hvordan man i læringsspillet *Talmat* kan lade elever arbejde sammen to og to om at afprøve forskellige sammenhænge mellem tal og deres placering i et talsystem. Dermed får eleverne mulighed for sammen at opstille og undersøge hypoteser om, hvordan positionssystemet fungerer. Det andet forløb er et eksempel på, hvordan elever kan arbejde med koordinatsystemet i sandkassespillet *Minecraft*. I *Minecraft* kan koordinatsystemet både hjælpe spilleren til at navigere i spillets 3D-univers og danne udgangspunkt for at håndtere faglige udfordringer. Endelig ser vi i det tredje forløb nærmere på, hvordan spilleren gennem regnehistorier kan udvikle forståelser for forskellige repræsentationer af matematisk indhold i co-op actionrollespillet *Torchlight II* ved fx at arbejde med undersøgelse og brug af health potions (helbredende trylledrikke) i spillet. De tre forløb kan siges at stige i kompleksitet. I *Talmat*-forløbet er spillet designet med sigte på læring af et bestemt fagligt indhold. I *Minecraft*-forløbet fokuseres på en bestemt mekanik i et større spilunivers, mens *Torchlight II*-forløbet præsenterer en tilgang, der kan generaliseres i forhold til at undersøge forskellige former for matematisk indhold i et computerspil.

Den undersøgende tilgang til spil og matematik stiller krav til lærerens *game literacy* og *gamemastering* (se kapitel 2). Som lærer skal man kunne afkode, analysere og forstå spillets verden og spillernes handlemuligheder for at kunne skabe relevante koblinger mellem faglige mål, indhold og spilmæssige aktiviteter. Den praksisform kalder vi for lærerens *game literacy*, der kan oversættes til spilkyndighed. Derudover skal man som lærer have forståelse for spillets *centrale gameplay* (udfordringer) og spillernes samarbejdsmuligheder for at kunne facilitere faglige forløb med spil. Denne praksisform kalder vi for lærerens *gamemastering,* hvor det især er vigtigt, at læreren kan facilitere faglige samtaler med eleverne, der kobler deres spiloplevelser til matematiske begreber.

Kapitlet indleder med en introduktion til undersøgende undervisning i relation til matematiske kompetencer. Herefter følger en beskrivelse af forskellige slags computerspil der er brugt i matematikundervisningen og de dertilhørende typer af læringspotentialer. Dernæst udfolder vi ideen om at bruge spil som meningsfulde kontekster i matematikundervisning fulgt af implikationerne ved at arbejde med "rigtige" computerspil. Til sidst præsenterer vi en didaktisk model til at arbejde med computerspil i matematikundervisningen fulgt af en præsentation af de tre matematikforløb, der alle gør brug af computerspil på forskellige måder. Du kan finde nærmere beskrivelser af forløbene på www.sætskolenispil.dk.

5.1 Undersøgende matematikundervisning

I de tre forløb, vi præsenterer i dette kapitel, lægger vi op til en undersøgende, dialogisk og kontekstualiseret matematikundervisning. Det indebærer en høj grad af elevinddragelse, og at eleverne skal opleve indholdet af undervisningen som meningsfuldt i forhold til anvendelse i både spillets og fagets kontekst, og at eleverne ikke kun besvarer spørgsmål, men også stiller spørgsmål. Ligeledes kan undersøgende undervisning skabe grundlag for at eleverne kan udvikle deres matematiske kompetencer i undervisningen på forskellige måder (Michelsen et al., 2017). Specifikt forstår vi matematisk kompetence som "indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer" (Niss & Jensen, 2002, p. 43). Denne forståelse er i tråd med vores tilgang til at bruge computerspil i matematikundervisningen, da vi ser computerspillene som kontekster, der rummer muligheder for at arbejde med bestemte matematiske udfordringer. Dermed kan elever udvikle forskellige matematiske kompetencer gennem undersøgelse af konkrete spilsituationer, hvilket kan skabe større indsigt i og dermed også større mulighed for at handle hensigtsmæssigt, når spillene spilles. Vores fokus er med andre ord at give eleverne indblik i forskellige muligheder for at handle i og omkring computerspil, som kan bidrage til at eleverne udvikler deres matematiske kompetencer.

Matematikdidaktikeren Morten Blomhøj beskriver aktiviteter og handlinger udført af elever og lærere, som er karakteristiske ved undersøgende matematikundervisning (Blomhøj, 2016). Hos eleverne drejer dette sig fx om at stille spørgsmål, eksperimentere, lave hypoteser, af- eller bekræfte disse hypoteser og vurdere resultater. For lærere drejer det sig om at inspirere til undersøgelser, styre efter bestemte læringsmål, bygge videre på elevernes erfaringer, støtte elevernes oplevelse af ejerskab i forhold til matematiske problemer, opmuntre til spørgsmål og refleksion samt værdsætte fejl som et grundlag for læring. Samtidig er det sandsynligt, at undersøgelser vil udfolde sig meget forskelligt i forskellige klassekulturer. Hvis eleverne fx tror, at det er vigtigt at blive først færdig med en opgave, vil de sandsynligvis være mindre tilbøjelige til at bruge tid på at opstille hypoteser eller undersøge alternative løsninger.

Tilsvarende beskriver Pernille Pind (2015), hvordan undersøgende matematikundervisning bør appellere til nysgerrighed og kreativitet i faget og understøtte samarbejde mellem eleverne. Det er derfor væsentligt, at lærere og elever lytter til hinanden, arbejder videre på andres ideer og argumenterer for og imod andres og egne ideer. Dette kræver både en bestemt klassekultur og en stemning i klassen, hvor eleverne tør fremsætte ideer og argumenter – også selvom disse måske ikke er gennemtænkte.

Ved at anvende en undersøgende tilgang til computerspil i matematikundervisningen kan der sættes fokus på elevernes egne erfaringer med og indsigter i spil, der kommer fra en del af deres livsverden uden for skolen. Samtidig åbnes der op for, at eleverne kan forfølge deres egen matematiske undren i forhold til computerspil.

5.2. Spiltyper i matematikundervisningen

Computerspil kan ses som *systemer* (Salen & Zimmerman, 2003), der indeholder forskellige matematiske sammenhænge og potentielle handlemuligheder for spillerne. Det er ikke alle spillerens handlemuligheder i et spil, der nødvendigvis er eller kan forstås som matematiske. Tilsvarende er det heller ikke givet, at en spiller opfatter handlemulighederne i et computerspil som matematiske, eller at spilleren oplever, at en handlemulighed hænger sammen med deres daglige matematikundervisning – hvilket kan være afgørende for om en elev opfatter en given spilhandling som matematisk. Det er snarere reglen end undtagelsen at matematikken opleves som skjult i et computerspil af både lærere og elever – og i særligt grad som forskellig fra den matematik, der nævnes i en læseplan (Avraamidou et al., 2015). Selvom skudbuen for fuglene i computerspillet *Angry Birds* følger en parabels bane er det ikke sikkert, at spilleren oplever sammenhængen mellem skud og skudbue som matematisk eller som en kobling, der har noget at gøre med deres normale matematikundervisning, eller som noget matematik, der er væsentligt at forstå for at kunne spille spillet.

Vi vil i det følgende se nærmere på tre forskellige spiltyper, som man kan anvende i matematikundervisningen for at synliggøre, hvordan de kan tilbyde eleverne oplevelser af matematiske sammenhænge og forskellige matematiske handlemuligheder.

Første spiltype: Eksogene læringsspil

Den mest udbredte digitale spiltype i matematik er læringsspil som fx *Matematik i Måneby*, *Regnerace* eller *Tabeleventyr* samt gamification-platforme som Khan Academy, hvor der tildeles point for korrektopgaveløsning (Takeuchi & Vaala, 2014). Mange af de nævnte læringsspil er træningsspil, som er tilsat en fiktiv ramme, der skal gøre det sjovere for eleverne at løse lukkede færdighedsopgaver med prædefinerede svar. Sådanne spil, også kaldet *edutainment*, er kendetegnet ved et *eksogent* spildesign. Det vil sige, at der kun er en løs eller fragmenteret kobling mellem spillenes mekanikker og en faglig læringskontekst (Misfeldt & Hanghøj, 2016). For eksempel kan det være svært at se den meningsfulde sammenhæng mellem det at kunne den lille tabel og at få en dinosaurus til at løbe hurtigere, når man spiller *Regnerace*. De simple læringsspil drives primært af ydre motivation i form af belønninger som point eller adgang til nye levels. Mange af de simple læringsspil giver eleverne mulighed for at træne selvstændigt i eget tempo, men lægger sjældent op til at blive anvendt i en undervisningssituation, hvor der er en lærer til stede. De eksogene læringsspil kan derfor kritiseres for, at de kun i begrænset grad medvirker til at facilitere dyb og meningsfuld læring.

Anden spiltype: Endogene læringsspil

Der findes også læringsspil, der søger at fremme elevers aktive undersøgelser af meningsfulde sammenhænge mellem spilmekanikker og fagligt indhold. Disse spil er udviklet som *endogene* spildesign, eftersom de tilstræber korresponderende koblinger mellem spillerens handlinger og det faglige indhold. Det gælder fx *Dragon Box Algebra*-spillene, hvor spilleren gennem udfordringer med stigende kompleksitet skal lære at isolere en bestemt type objekter på den ene side af en linje og en anden type objekter på den anden side. På den måde kan spilleren gradvist udvikle en forståelse af ligninger ved at kunne isolere *x* på den ene side af et lighedstegn. *Dragon Box* lægger dermed op til at arbejde med det, som matematikdidaktikeren Brousseau kalder en "fundamental situation", da spilleren manipulerer små elementer efter en systematik, der gradvist undersøges og opdages (Misfeldt & Hanghøj, 2016). Læringskonteksten for *Dragon Box* er dog relativt lukket omkring spillets mekanikker i et abstrakt spilunivers. Dermed afhænger det faglige udbytte i høj grad af, at der er en lærer til stede, som kan sætte ord på og skabe faglige forbindelser mellem spillerens (elevens) handlinger og elevens algebraiske forståelse (Kluge & Dolonen, 2014). Senere i kapitlet vil vi se nærmere på et andet endogent læringsspil i forløbet med *Talmat*.

Tredje spiltype: Spil som komplekse systemer

Endelig findes der en tredje tilgang til computerspil i matematikundervisningen, der lægger op til at undersøge, designe og redesigne computerspil som *komplekse systemer* (Misfeldt & Hanghøj, 2016). Det kan fx ske ved, at eleverne undersøger systemerne i kommercielle computerspil eller udvikler og programmerer deres egne spil. Her er eleverne i høj grad aktive deltagere i forhold til både at afkode og omforme spilsystemer ud fra matematiske sammenhænge. Et eksempel er programmeringsredskabet Scratch, hvor elever anvender visuel programmering til at udvikle simple spilsystemer (en række eksempler på spil kodet i Scratch findes her: www.kodechamp.dk. Ved at programmere deres egne spil kan eleverne udvikle en forståelse af forskellige matematiske sammenhænge – fx hvordan variabler kan bruges til at tælle point. Derudover kan man arbejde med at analysere og forstå matematiske systemer og sammenhænge i kommercielle computerspil, som eleverne kender fra deres fritid. Det er denne systemorienterede tilgang, som ligger til grund for de to forløb med *Minecraft* og *Torchlight II*, som findes senere i kapitlet. Her afhænger det faglige udbytte i høj grad af, om læreren formår at oversætte elevernes spiloplevelser til matematikfaglige begreber og sammenhænge – og kan relatere faglige aktiviteter til elevernes udfordringer inde i spillet.

Nedenstående model sammenfatter de tre forskellige spiltyper i matematik og deres forskellige måder at skabe koblinger mellem spil og fagligt indhold på.

	Eksogene læringsspil	**Endogene læringsspil**	**Spil som komplekse systemer**
Formål	Matematisk læring gennem ydre motivation	Matematisk læring gennem realisering af fundamentale situationer	Matematisk læring gennem undersøgelse og Design/redesign af komplekse spilsystemer
Koblinger mellem spil og indhold	Fragmenteret eller manglende kobling	Korresponderende kobling	Situeret og systemisk kobling
Eksempel	Edutainment Fx *Matematik i Måneby* Gamification Fx *Khan Academy*	Fx *Dragon Box, Talmat*	Spildesignværktøj Fx *Scratch* Kommercielle spil Fx *Minecraft, Torchlight II*

Figur 5.1. Oversigt over spiltyper i matematik. Baseret på Misfeldt & Hanghøj (2016).

5.3. Computerspil som kontekst i matematikundervisningen

Et helt centralt argument i vores faglig tilgange til computerspil er, at der kan skabes forbindelser mellem computerspil og matematiklæring, som er meningsfulde for eleverne. Keith Devlin (2011), der forsker i spil og matematiklæring, beskriver dette, som at computerspil kan indlejre matematik i en virkelig kontekst og derved gøre matematikken meningsfuld. På den måde kan computerspil forstås som en *kontekst* for matematiklæring. Netop kontekstens betydning i forhold til matematiklæring er et udbredt matematikdidaktisk forskningsområde måske bedst repræsenteret gennem teorien *Realistic Mathematics Education* (RME) (Lerman, 2014). I RME er forbindelsen mellem kontekst og matematik afgørende for læring. En anden forsker i matematikdidaktik, Jo Boaler (2015), argumenterer i forlængelse af dette for vigtigheden af, hvordan matematikundervisning kontekstualiseres, dvs. at den skal gøres relevant og meningsfuld i forhold til elevernes omverden. Hun problematiserer den måde, kontekst ofte bliver brugt på i matematikundervisningen, hvor eleverne bliver nødt til at ignorere deres viden om konteksten for at løse det matematiske problem. Som eksempel nævner hun denne matematikopgave, der ignorerer den kontekstuelle viden (oversat af forfatterne):

En butik tager 20 kr. for ⅛ af en kage. Hvad koster hele kagen?

Dette spørgsmål kan kun meningsfyldt besvares på, hvis det antages at der er en proportionel sammenhæng mellem prisen på stykker af en kage og en hel kage. Hvis man har forhåndsviden omkring prisen på kager i butikker, vil det dog være normalt at forvente en form for mængderabat. En hel kage vil sjældent være prissat ud fra de individuelle stykkers pris men være prissat efter en anden sats. I forhold til de matematiske kompetencer kan opgaven relateres til den matematiske tankegangskompetence, da spørgsmålet om kagerne ikke er et realistisk matematisk spørgsmål. Dette er således ikke blot et meningsløst regnestykke i forhold til konteksten. På længere sigt vil sådanne opgaver også lære eleverne, at forhåndsviden omkring konteksten helst skal ignoreres i matematik. Boaler pointerer i den forbindelse, at en opgavekontekst kun bør bruges i matematikundervisningen, når den kræver matematisk analyse, hvor eleverne er nødsaget til at overveje variablerne i konteksten og ikke blot ignorere dem. På samme måde er det centrale ikke, hvorvidt computerspil er kunstige eller realistiske som kontekster, men hvorvidt eleverne kan leve sig ind i dem på en 'realistisk' måde. I den forstand kan man beskrive computerspil som forestillede realistiske kontekster.

Som lærer bør man derfor være opmærksom på, om eleverne har mulighed for at bruge deres viden om konteksten i forhold til de matematiske opgaver, der stilles, så de ikke er nødt til at ignorere deres viden om konteksten for at løse opgaven. I forhold til at arbejde med computerspil er Boalers argument centralt. Der findes mange forskellige computerspil, der hver på deres måde kan forstås som forskellige kontekster med varierende grad af matematisk indhold. Samtidig tillader computerspil, at spilleren kan bruge sin viden om spillet til at agere og handle succesfuldt. Dette giver et mulighedsrum for undervisning, hvor man kan arbejde med en forestillet realistisk kontekst (i et computerspil) på en måde, hvorpå elever både kan bruge deres viden om konteksten og kan udvide deres viden om konteksten gennem forståelse af de matematiske begreber, der er til stede i konteksten (Jensen & Hanghøj, 2020). Lærerens opgave består her i at tydeliggøre matematikken i det konkrete spil så eleverne opdager den og samtidig hjælpe eleverne med at forstå, hvordan matematisk handling kan være med til at gøre eleven bedre til spillet, skabe fordele og udvikle nye perspektiver på spillet.

5.4. "Rigtige" computerspil i matematikundervisningen

I dette kapitel ser vi nærmere på kontekstens betydning for at arbejde med undersøgende tilgange til spil i matematik i forhold til de "rigtige" computerspil, som mange børn spiller i deres fritid. Med ”rigtige" mener vi computerspil der er designet til underholdning og ikke til undervisning som fx *Fortnite, Among Us* eller *Minecraft*.

Computerspil er bygget af tal, algoritmer, kommandoer og grafik (fx dialogbokse) der tilsammen definerer reglerne i spillet[1]. Matematikken kan dog komme til syne gennem forskellige spilhandlinger. På den måde kan vi forstå computerspil som verdener, hvor spilleren har muligheder for at udvikle specifikke kompetencer og at disse i visse tilfælde også kan forstås som værende matematiske (Misfeldt & Hanghøj, 2016). Hvis man fx spiller actionrollespillet *Torchlight II*, kan det være relevant at undersøge, *hvorvidt forskellige bonusser er absolutte eller relative? Om en bonus fx giver 10 point mere ”rustning" eller 1% mere ”rustning". I en given situation får man da som spiller mest for pengene, hvis man opgraderer udstyr, eller hvis man køber nyt? Og hvor mange penge/mana/liv får spilleren ud af at udføre bestemte handlinger?* Alle disse spørgsmål knytter sig til matematiske elementer, som eleverne kan arbejde med. Ligeledes findes der en række elementer i spillet, der i langt mere subtil og til tider usynlig grad er styret af matematik, herunder *hvor ens avatar er placeret i forhold til spillets monstre? Hvornår er der tale om kontakt mellem to spillere? Hvordan opfører fjenderne i spillet sig over for spilleren – er de aggressive eller passive og i hvilken sammenhæng?*

I vores tilgang til computerspil og matematikundervisning er vi optagede af den mere eller mindre implicitte matematik i spillene. Det er denne matematik, der sætter rammerne for mulige handlinger i spillet og også den matematik, som spilleren kan bruge til at optimere og forstå sine spilstrategier. Gennem synliggørelse af spillets matematiske indhold og handlemuligheder kan spilleren således få nye oplevelser eller taktiske fordele i spillet. Dermed kan matematikundervisningen, når der bruges computerspil, bidrage til, at eleverne får

1 https://nrich.maths.org/1374

et nyt perspektiv på spillet og/eller faget som velkendte domæner. Ved at gøre spillet til en meningsfuld ramme for den faglige undervisning kan det bidrage med et særligt kontekstualiseret perspektiv på matematik. Her vil nogle af de elever, der oplever matematik som en abstrakt og verdensfjern disciplin, potentielt få forståelse for, at matematisk viden kan bruges i deres hverdag. Det kan give anledning til mindst to vigtige erkendelser, der kan have betydning for, hvordan eleverne opfatter og deltager i faget matematik generelt. Dels kan de opleve, at matematik kan bruges ud over matematiktimen og dermed har sammenhæng med deres omverden. Dels at det spildomæne, som de kender i forvejen, kan undersøges og begrebsliggøres gennem matematikundervisning. Dermed kan man som lærer fremme erkendelser af, at matematik ikke kun er en isoleret disciplin i skolen, men også rummer viden, som kan bruges til at give nye perspektiver på noget, der i forvejen er velkendt (Jensen & Hanghøj, 2020). Hvis en spiller beslutter sig for at bygge et bestemt hus i *Minecraft* med bestemt størrelsesforhold, bliver udfordringen på den måde situeret i en meningsfuld kontekst, der mindsker forskellen mellem at lære matematisk viden om størrelsesforhold og at anvende matematik til at løse "virkelige" problemer (Van Eck, 2015, p. 147). Vi kan sammenligne vores tilgang til computerspil med fænomenet ”theory crafting”[2], som er en betegnelse for hvordan computerspillere forsøger at analysere spil gennem matematiske forståelser af deres mekanikker for at optimere deres udbytte af spillet.

I modsætning til læringsspil er kommercielle computerspil ikke designede til at blive anvendt til matematikundervisning, hvilket nødvendiggør, at læreren skal foretage en yderligere didaktisering af spillene. Spil- og læringsforskeren James Paul Gee (2003) forstår det at spille computerspil som *situerede læringsoplevelser*, i den forstand, at læringen sker i en social kontekst (venner, fritidshjem, familie), hvor mening ikke kan løsrives fra sin kontekst. Når man spiller et computerspil uden for skolen, lærer man altså primært at spille spillet i den kontekst, som man befinder sig i. Når børn fx lærer at spille *Minecraft,* sker det ofte i et samspil mellem at se, hvad andre spillere gør på fx YouTube, at kigge søskende eller kammerater over skulderen og at spille sammen med andre. Den matematik, som spillere anvender i kommercielle computerspil, stemmer ikke nødvendigvis overens med elevernes forståelse af matematik, eller hvad det vil sige at lave matematik i skolen (Avraamidou et al., 2015). På den måde har

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Theorycraft

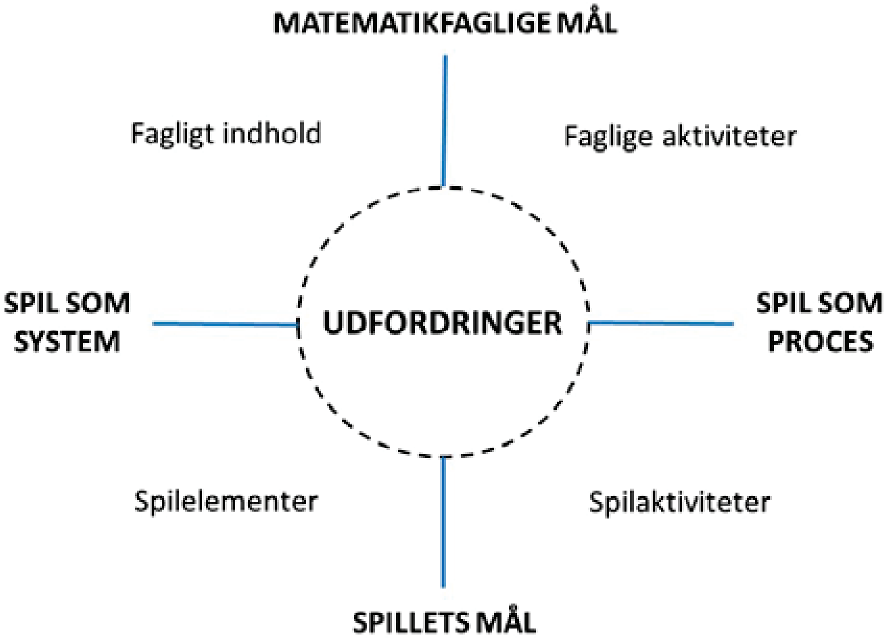
spilpraksisser, der kan se ud til at være matematiske, ikke nødvendigvis nogen forbindelse til det, som eleven/spilleren forstår som matematik. Derudover er det ikke givet, at et specifikt computerspil bevirker, at spilleren udfører bestemte matematiske handlinger. Spillerens kontekst har afgørende indvirkning på spillerens mål med at indgå i spillet og dermed også betydning for spillerens matematiske praksisser.

Matematikididaktikeren Na'ilah Suad Nasir (2002) har undersøgt matematiske praksisser blandt High School-elever og mellemtrins elever der spillede basketball. High schooleleverne, der ser sig selv som mulige kommende professionelle basketballspillere, udfører en række sofistikerede matematiske handlinger omkring basketball, hvor de udregner forskellige statistikker for at få indblik i, hvordan de placerer sig i forhold til niveau og position på holdet. Disse former for statistiske udregninger er fraværende hos mellemtrins elever. De går ikke til basketball, fordi de forventer, at de skal være professionelle, men blot for at være beskæftigede, indtil deres forældre kommer hjem, eller fordi det er deres yndlingssport. Man vil formodentligt kunne finde lignende forskelle i matematiske handlinger ved at sammenligne forskellige grupper af børn og unge i forhold til at dyrke e-sport på hobbyplan eller på eliteplan, hvor der er stor forskel på behovet for taktiske beregninger – især i forhold til spil som *CS:GO, League of Legends* eller *Dota 2*. En matematisk praksis omkring eller i et spil opstår hermed ikke alene i kraft af spillet men i et samspil mellem spillets matematiske handlemuligheder, spillernes interesser og konteksten det spilles i.

5.5. Matematisk didaktisering af computerspil

Der er stor forskel på, hvilke typer matematiske kompetencer og matematikfagligt indhold, der potentielt kan arbejdes med, når man undersøger forskellige spil. Når man planlægger forløb med computerspil i matematikundervisningen, skal man derfor vurdere, hvilket matematikfagligt indhold og hvilke matematiske kompetencer det giver mening at arbejde med i forhold til et konkret spil. Et væsentligt kriterie er, *hvorvidt den matematik, der kan arbejdes med, er relevant at bruge, når man spiller, eller kan give nye væsentlige perspektiver på spillet*. Som lærer skal man forsøge at udvikle forløb med faglige arbejdsopgaver, projekter og problemer, der er autentiske i forhold til spillets matematiske udfordringer (Van Eck, 2015). Kort sagt: Som lærer skal man ikke finde ud af, hvad der *kan* regnes på, men hvad der er *meningsfuldt at regne på* i forhold til spillerens handlinger og mål i og uden om spillet.

I det følgende præsenterer vi en spildidaktisk model (se også kapitel 2), der kan hjælpe med at skabe didaktiske koblinger mellem computerspil og matematikundervisning.



Figur 5.2. Didaktiske koblinger mellem spil og matematik.

Det centrale afsæt for modellen er *udfordringer*, som er placeret i midten. Det skyldes, at spillere/elever altid møder udfordringer i et spil, som de forsøger at klare for at vinde eller komme frem i spillet. Når man arbejder undersøgende med spil i matematik, er målet derfor *at omsætte spillets mulige udfordringer til relevante matematikfaglige udfordringer.* Derudover skelner modellen på den vandrette dimension mellem to perspektiver på *spil som system* og *spil som proces*, hvor system henviser til spillets konkrete design og proces til de måder, hvorpå eleverne/spillerne agerer i undervisningen. Systemperspektivet i øverste venstre hjørne indbefatter både det faglige indhold og de faglige produkter, som eleverne skaber gennem deres arbejde med spillet. Pointen er, at man som lærer skal have forståelse for både spildesignets matematiske potentiale, hvordan spillet kan "gøres" eller spilles i undervisningen, og hvordan man kan udvikle faglige opgaver i forlængelse heraf. Samtidig skelner modellen lodret mellem matematikfaglige mål og spilmål, der sjældent er overlappende, men ofte bevæger sig i forskellige retninger – jf. diskussionen af endogene versus eksogene koblinger mellem spil og fagligt indhold tidligere i kapitlet. Tilsammen danner de to dimensioner en model med fire aspekter, som læreren skal forholde sig til, når der planlægges spilforløb i matematik:

1. Det matematikfaglige indhold – fx at arbejde med ræsonnementskompetence
2. Spilelementer – fx spillets verden, regler og mekanikker
3. Spilaktiviteter – fx gameplay og sociale spildynamikker
4. Faglige aktiviteter – fx organisering af klassesamtaler eller gruppearbejde

De fire aspekter skal ikke forstås som en lineær sammenhæng, der skal planlægges i en bestemt rækkefølge. Tværtimod. Man kan begynde og slutte forskellige steder i modellen, og der vil være en del overlap og skiften frem og tilbage mellem de forskellige aspekter, når læreren planlægger og gennemfører et konkret forløb. Vi vælger alligevel at lave en trinvis gennemgang af de fire aspekter for at skabe overblik og tydeliggøre forskellige opmærksomhedspunkter. Samtidig kan det være en god idé indledningsvis at følge den trinvise rækkefølge første gang man anvender modellen som planlægningsredskab.

FAGLIGT INDHOLD

Det er oplagt at starte planlægningen af et undervisningsforløb med at vælge en overordnet matematisk kompetence eller et overordnet emne og derfra undersøge, hvordan forskellige spil kan indfri et bestemt fagligt mål. Hvis man har tilstrækkelig viden om spilmekanikker i forskellige spil kan dette også være et udgangspunkt, hvis man er i stand til at vurdere, hvordan spilmekanikker, matematiske mål og spiludfordringer kan kombineres. Det er dog langtfra altid tilfældet, at man som lærer på forhånd kan få øje på tydelige koblinger mellem spil og matematisk indhold. Derfor vil vi her beskrive en mere undersøgende og gradvist opbyggende tilgang til at arbejde med at kombinere faglige mål med spiludfordringer. Ideen er, at udfordringerne for spilleren skal stå helt centralt – også i det faglige arbejde.

Indledningsvis kan faglige mål rammesættes ud fra brede matematiske emner som fx geometri, sandsynlighed eller modellering, da der skal være plads til, at de forskyder sig i en videre undersøgelse af udfordringerne i konkrete spil. Medmindre man har indgående kendskab til det spil, man vil benytte, kan de faglige mål ikke fastlægges fuldstændig i den indledende planlægning, da der kan vise sig andre mål, der er mere oplagte at arbejde med. Pointen er, at man skal være opmærksom på, om arbejdet med de faglige mål forholder sig til en central udfordring for spillerne. Derfor bør læreren i starten forholde sig undersøgende til de computerspil, der skal anvendes, og være åben for deres matematiske handlemuligheder. Planlægningsfasen kan her forstås som et arbejde med at undersøge, hvordan man kan skabe meningsfulde faglige koblinger mellem matematisk indhold og mekanikkerne i det spil, som man ønsker at arbejde med. Ved at have øje for forholdet mellem det faglige indhold, spilmekanikkerne og de centrale udfordringer for spillerne kan læreren gradvist præcisere de faglige mål for undervisningsforløbet.

SPILELEMENTER

Det er vigtigt at dykke ned i selve spillet for at undersøge og forstå dets grundlæggende elementer. Det gælder både spillets verden (rumlige opbygning, navigationsmuligheder og brugergrænseflade), spillets mekanikker (dvs. handlemuligheder, både matematiske og generelle) og overordnede mål, dvs. hvordan man vinder eller kommer fremad i spillet. Denne undersøgelse sker bedst ved, at man spiller spillet. Som lærer skal man ikke nødvendigvis kunne mestre udvalgte spil på højt niveau, men det er vigtigt at udvikle en basal forståelse af spillets udfordringer og systemer – især i forhold til de matematiske regler og sammenhænge, der styrer spillerens handlemuligheder. Dette aspekt svarer til det operationelle niveau i forhold til game literacy-modellen (jf. kapitel 2), idet fokus er på at afkode spillets design. Læreren bør samtidig have for øje, hvordan spillets handlemuligheder relaterer til det matematiske faglige mål, som han eller hun begyndte med, og justere, hvis det er nødvendigt. Gennem forståelse af spillets mekanikker udvikler man dermed gradvist en forståelse for, hvilke af spillets forskellige handlemuligheder, der potentielt er *matematiske handlemuligheder*.

SPILAKTIVITETER

I dette aspekt flyttes fokus fra spillets design til selve spilsituationen – dvs. spillernes oplevelse af og udforskning af spillet i et klasserum. Dermed træder spillernes indbyrdes sociale dynamikker i forgrunden, hvilket svarer til den kulturelle dimension i game literacy-modellen (jf. kapitel 2). Det er væsentligt at undersøge, hvordan spillerne kan interagere med hinanden – både i og rundt om spillet. Det kan fx ske ved at samarbejde, konkurrere, dele viden, give respons eller skabe fælles konstruktioner. Her er det vigtigt at have fokus på, hvordan spillerne kan organisere sig i spillet og omkring spillet. Er det fx et singleplayer eller et multiplayer spil? Vil det måske kunne skabe andre former for meningsfuld dialog, hvis to elever spiller et singleplayer spil sammen fra en computer? Hvornår spiller eleverne mod hinanden eller med hinanden? Dette aspekt trækker også på lærerens evner som gamemaster (se kapitel 2), dvs. lærerens evne til at facilitere og drive et spil fremad som en fælles social arena, hvor spillerne indtager forskellige roller og funktioner. Dermed handler brugen af spil i matematik ikke kun om at opfylde specifikke faglige mål, men også om at fremme mere alment didaktiske elementer som fx motivation, samarbejde, trivsel eller kommunikation blandt eleverne. Ligeledes kan det relateres til matematikfagets formål stk. 2:

> *Elevernes læring skal baseres på, at de selvstændigt og gennem dialog og samarbejde med andre kan erfare, at matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation.*[3]

Igen skal læreren ikke være ekspert i alle de forskellige måder, som spillet kan spilles på. Det vigtigste for læreren er at udvikle en basal forståelse for spillets *gameplay*, dvs. de vigtigste valg, som spillere træffer for at komme fremad i spillet. Sagt anderledes skal man som lærer have øje for det, som spillerne oplever som de mest centrale udfordringer i spillet, og forstå hvordan udfordringerne kan – eller ikke kan – relateres til de faglige mål. Derfor er det vigtigt at interessere sig for spillernes handlinger. Nødvendige spørgsmål her er: Hvad gør spillerne for at komme frem i spillet, og hvordan kan det relateres til matematiske kompetencer? Hvilke ressourcer og hvor mange af dem er det vigtigt at have i sit inventar, når man sammen skal dræbe en boss i *Torchlight II*? Hvilken matematisk viden har man brug for i forhold til at finde hinanden i *Minecrafts* tredimensionelle rum?

Læreren skal med andre ord prøve at forstå spillernes mål og delmål, samt hvilke handlinger, strategier og taktikker der er hensigtsmæssige for at opnå dem. Målet er her at identificere potentielle muligheder for at få de faglige mål bragt i spil. Som inspiration kan man evt. kigge efter Let's Play eller Gameplay vide-

3 https://emu.dk/grundskole/matematik/formal

oer på nettet (fx på YouTube) eller lede efter online tekster på blogs, fora eller wiki'er omkring computerspillet. Det er dedikerede spillere, der har beskrevet forskellige strategier i forhold til en lang række computerspil – fx i form af byggeguides eller guides i forhold til skill rotations (til RPGs), der ofte bygger ofte på matematisk argumentation og dermed kan bruges i arbejdet med fx ræsonnementskompetencen[4].

FAGLIGE AKTIVITETER

Dette aspekt handler om at designe konkrete undervisningsaktiviteter i forening med de øvrige aspekter. Det overordnede spørgsmål læreren kan stille sig selv her, er: Hvilke matematik faglige aktiviteter kan bedst bygge videre på spillernes deltagelse i computerspillets matematiske mulighedsrum? Igen er det vigtigt at overveje faglige spilaktiviteter, der ikke kun giver mening i forhold til fagets mål, men som også potentielt udvider eller forbedrer elevernes handlemuligheder i spillet. Udfordringen for læreren er at finde de koblinger, hvor faglige aktiviteter optimalt kan forbindes med og bliver meningsfulde i forhold til spillets gameplay. Læreren søger her efter steder hvor en aktivitet, eller den indsigt aktiviteten giver, kan være relevant både for spilleren og matematisk relevant. Hvilken matematisk viden kan være relevant for spilleren? Hvordan vil tilegnelsen af den foreslåede faglige aktivitet forandre spillerens handlinger? Hvilke spilmål er mulige at opnå gennem tilegnelsen af denne matematiske viden på en forandret måde? Hvilke produkter, der viser tegn på læring, kan eleven skabe? Kan der arbejdes med evalueringsformer, der forholder sig både til spillets design og til spillerens handlemuligheder og mål.

- I forhold til at designe konkrete aktiviteter kan læreren stille følgende spørgsmål:
- Hvordan kan aktiviteten tydeliggøre spilmekanikker i forhold til matematiske regler/kompetencer/viden/færdigheder?
- Hvordan kan aktiviteten sætte spilleren i en situation, hvor spillets sociale dynamikker kan undersøges?

Hvordan kan der iscenesættes en situation eller et problem i spillet, hvor der findes hensigtsmæssige matematiske løsningsstrategier?

---

4 https://www.youtube.com/watch?v=-z3n6buLnyo

Det væsentligste i forhold til elevernes faglige udbytte er her, hvordan man som lærer kan skabe koblinger mellem fagligheden og spillets mekanik, sociale dynamikker, gameplay og kultur. Et eksempel på dette kommer fra *Minecraft*-forløbet der præsenteres senere i kapitlet. Her er det koordinatsystemet, som en måde at finde vej på, der har været i fokus. En elev beskriver sin forståelse af koordinater i *Minecraft* efter deltagelse i *Minecraft*-forløbet her:

> *… man kunne også bruge det til at finde steder hen. Ligesom et kompas bare hvor der står et sted hvor det øh, man kan lidt ligesom sige det er en adresse på en eller anden måde* (Jensen, 2017).

Igennem forløbet har denne elev altså fået en forståelse af koordinaterne i *Minecraft* som et element, der kan bruges til at beskrive en præcis placering, "*hvor der står et sted*", og sammenligner dette med konceptet adresse.

5.6. Spilforløb i matematik

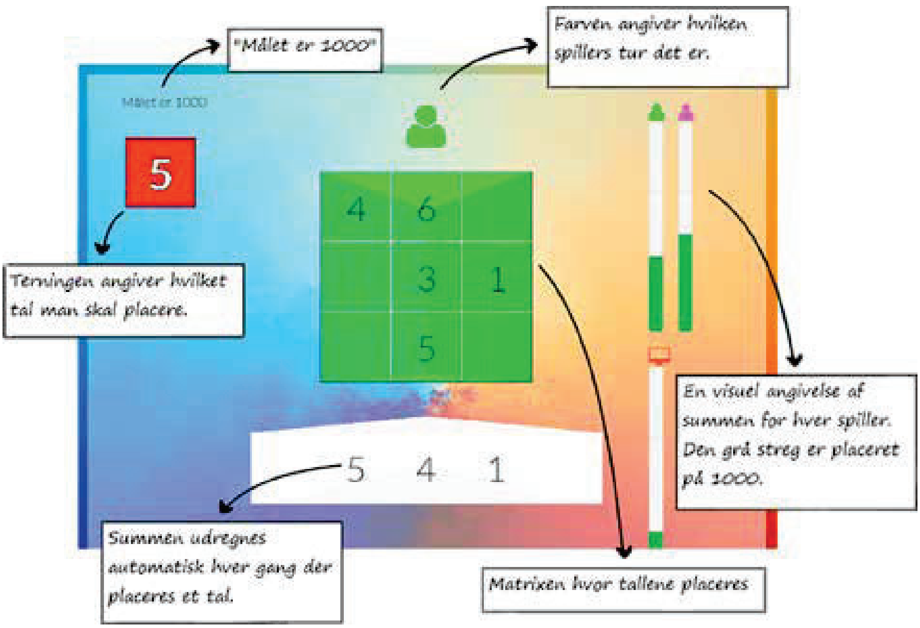
I det følgende vil vi præsentere tre eksempler på undersøgende spilforløb til matematikundervisningen. Det første forløb tager afsæt i læringsspillet *Talmat* ud fra en dialogisk rammesætning af elevernes undersøgelse af spillet og deres opstilling af hypoteser. Det andet forløb beskriver, hvordan elever kan arbejde med en undersøgende tilgang til at forstå koordinatsystemet gennem aktiviteter i *Minecraft*. Det sidste forløb præsenterer, hvordan man kan arbejde med regnehistorier i forhold til actionrollespillet *Torchlight II*. Hvert forløb sætter fokus på at skabe meningsfulde koblinger mellem spil og matematik - jf. den spildidaktiske model.

5.7. Talmat – eleven som undersøger

Talmat er et gratis læringsspil til mellemtrinnet (3.-5. klasse), der kan kategoriseres både som et puzzle game og en matematisk simulering. *Talmat* er baseret på Erik Ottar Jensens ide, udviklet i samarbejde med daværende DTU-studerende Johan Kristoffer Frølich og Lars Fischer Sjælland i samarbejde med lektor Jeppe Revall Frisvad fra DTU. (Se evt. Frølich & Sjælland (2014) for et software-teknologisk indblik i udviklingen af spillet). Spillet er designet som et *endogent* læringsspil ud fra intention om, at spilleren gennem sine handlinger skal have mulighed for at undersøge positionssystemet og øge sin forståelse af positionssystemets betydning. Hensigten med spillet er at kunne understøtte undersøgende tilgange til matematikundervisningen. Samtidig bygger spillet på en tankegang om, at elevernes faglige dialog under og efter spillet er lige så vigtig for læringsudbyttet, som selve elevernes interaktion med spillets design.

Talmat er dermed designet med henblik på at blive brugt i matematikundervisningen i tæt samspil med en lærer, som skal facilitere undervisning før og efter spillet. Dermed adskiller spillet sig fra mange eksogene læringsspil, der ofte er designede til at kunne bruges som isolerede øvelser eller repetition uafhængigt af en lærer. *Talmat* kan godt spilles som et singleplayer spil mod computeren, men det skaber bedre muligheder for faglig dialog mellem eleverne, hvis de sidder sammen to og to og spiller mod en fælles computer.

Selve spillet åbner med en introskærm, hvor spillerne kan ændre på en række forhold ved spillet: antal spillere, spillepladens størrelse, om der skal en computerspiller med og sværhedsgraden. Selve spillepladen kan ses på figur 5.3.



Figur 5.3. Gennemgang af interfacet i Talmat.

Før vi forklarer spillets mekanikker, vil vi udfordre læseren: Det er vigtigt, at du først selv spiller *Talmat*! I hvert fald et par gange før, du læser gennemgangen herunder. Under det første spil vil du formodentlig ikke forstå særligt meget af, hvad spillet går ud på. Hvis du ikke er vant til at undersøge programmer eller spil, kan du måske blive forvirret eller frustreret. Hvad skal man gøre? Hvorfor giver spillet feedback, som det gør? Hvordan vinder man? Spillet instruerer nemlig ikke spilleren i spillets formål, men forsøger at udfordre spilleren til selv at undersøge spillets formål. De fleste spillere vil efter kort tid begynde at få ideer til at forstå spillets mekanikker, og hvad man skal gøre for at vinde. Det er ikke sikkert, at ideerne er rigtige, men det giver et nyt udgangspunkt for at undersøge spillet, næste gang det spilles. På den måde danner spillerne et væld af matematiske hypoteser, der i en undervisningssituation kan forklares, beskrives og af- eller bekræftes – og som dermed lægger op til at arbejde med elevernes ræsonnementskompetence.

FAKTABOKS: *TALMAT*

Tidsramme: 2 lektioner

Klassetrin: 3.-5. klasse.

Læringsmål: At kunne undersøge, redegøre for og ræsonnere over vinderstrategier og spilmekanikker i *Talmat.* At kunne argumentere for titalssystemet som en matematisk spilmekanik i *Talmat.*

Kom i gang: Spillet spilles i en browser og kan tilgås via https://talmat.dk.

Arbejdsform: Eleverne organiseres i grupper på to ved en computer.

Forberedelse: Læreren bør have spillet spillet i hvert fald nogle gange og bør aktivt tage stilling til, hvordan elevernes undersøgelser skal faciliteres.

Udfordring: At vinde i *Talmat* gennem forståelse af positionssystemet.

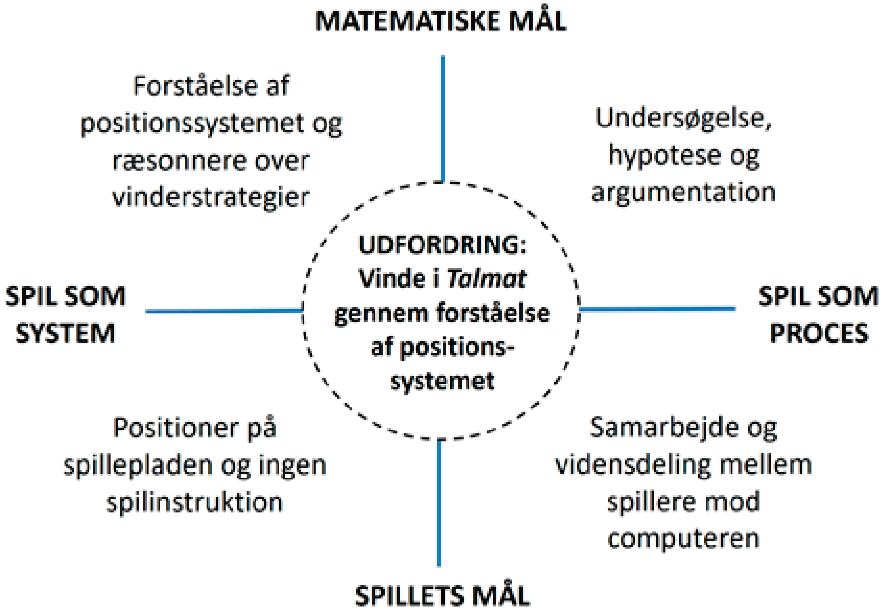
Fagligt indhold: Eleverne skal udvikle viden om naturlige tals opbygning i titalssystemet. Derudover kan de bruge *Talmat* til at undersøge og redegøre for positionssystemet som en del af spilmekanikken. Det kan enten vinkles mod problembehandlings- eller ræsonnementskompetencen gennem dialog.

Spilelementer: Spillet er simpelt og består af en geometrisk figur af varierende størrelse, som roterer, hver gang man placerer et tal på fladen.

Spilaktiviteter: Spilleren skal undersøge spillets logik og opstille hypoteser for, hvad det er der sker, når man placerer tal. Den spiller der kommer tættest på 1000, når alle tal er placeret, har vundet.

Faglige aktiviteter: Eleverne skal arbejde med at undersøge spillets mekanik. De skal så at sige regne reglerne ud ved matematisk undersøgelse og derefter kommunikere og argumentere for deres resultater.

Tegn på læring og evaluering: Er eleverne i stand til at redegøre for matematiske spilmekanikker i spillet og beskrive, hvilke matematiske ræsonnementer der ligger bag deres vinderstrategier? Evalueres fx ved, at elever laver en præsentation af vinderstrategi, spilleregler, titalssystemet eller en fornuftig handlemåde i en konkret spilsituation.



Figur 5.4. Koblinger mellem spil og matematik i Talmat forløbet.

Forklaring af spillet

Spillet går ud på at placere terningslag i en matrix, hvor tallene adderes. På figur 5.3 ses den grønne spillers spilleplade: Det er sjette tur, og den grønne spiller skal til at placere et femtal på pladen. Hver tur slår terningen et slag og angiver, hvilket tal, spillerne skal placere på deres spilleplade – på matrixen i midten af skærmen. Tallene adderes automatisk når de placeres. I rækken længst mod højre står etterne, i midten tierne og til venstre antal hundreder osv. Men det ved man ikke som spiller, når man starter spillet, og det er en af de opdagelser af matematiske karakter, man kan gøre.

Hver runde slås automatisk et tal med en terning, og spillerne placerer dette tal i matrixen efter tur. Målet for spilleren er at have summen tættest på 1000, når alle felter i matrixen er fyldt ud. En af indstillingerne, der kan ændres på, er matrixstørrelsen, hvilket også medfører, at værdien af målet kan ændre sig.

Modsat mange af de læringsspil, der er på markedet i dag, har det været en prioritet for *Talmat*, at der ikke er nogen instruktion til eleverne. De får ikke at vide, hvordan de skal spille spillet, eller hvad det går ud på. Dette giver mulighed for, at det i højere grad er spillerens egne handlinger og ræsonnementer omkring spillets mekanik, der bliver styrende for de handlemåder og strategier de vælger. For eksempel kan teksten ”*Målet er 1000*” i øverste venstre hjørne forstås på flere forskellige måder. Er det først til 1000, sidst til 1000 eller tættest på 1000? Spilleren får svar på dette ved at spille spillet og finde ud af, hvem af spillerne, der vinder. Mange elever forholder sig slet ikke til, at der står målet er 1000, før de er et stykke henne i deres undersøgelse. De fleste tror umiddelbart, at det gælder om at få flest point, dernæst om at få færrest point, før de overvejer, at det kan handle om at få et præcist antal point.

Elevernes undersøgelser af spillet kan guides gennem begreber, de kender fra matematikundervisningen. Såsom: titalssystemet, sandsynlighed og chance. Eleverne kan således bruge ord fra matematikken til at forstå spillet og opstille hypoteser omkring spillets regler. På den måde har eleverne mulighed for at indgå i en matematisk dialog med og omkring spillet.

Der vil typisk være en del elever i en klasse, der forsøger at bruge kendte begreber fra matematikundervisningen til at forsøge at forstå spillets mekanik. Har det mon noget at gøre med tabeller eller chance eller sandsynlighed eller lignende? Eleverne kan altså afprøve en hel række matematiske hypoteser i forhold til spillet i en spilsituation, hvor der er plads til at undre sig, fejle, lægge en strategi, afprøve, undersøge, opstille nye hypoteser og arbejde med ræsonnementskompetencen. Formålet med undervisningsforløbet er dermed at gøre eleven i stand til efterhånden at begå sig mere hensigtsmæssigt og reflekteret i feltet mellem spillet og matematikken. Man kan sige at eleven er i dialog med spillet, der løbende faciliterer eleverne til at reflektere og træffe kvalificerede valg, i takt med, at de mestrer elementer i spillet.

Et par ord om den computerstyrede spiller. Udover at den formodentlig vil vinde spillet de første par gange, hvor eleverne spiller mod den, har den en rolle, der fungerer på to planer. Dels er den en handlende agent i spillet. Når eleverne ikke ved hvad de skal gøre i starten af spillet, kan de orientere sig med computeren og prøve at forstå, hvorfor maskinen opfører sig, som den gør. På den måde er computeren en aktiv del af den undersøgelse, som eleverne bliver præsenteret for, der hjælper elevernes tænkning og hypoteser på vej. Den inviterer eleverne til at samarbejde i stedet for at konkurrere indbyrdes ved at være den fælles modstander, som eleverne skal slå. Et fælles tredje, som eleverne kan forsøge at vinde over. Da den understøtter, at eleverne arbejder sammen, og ikke mod hinanden, bliver det mindre væsentligt, hvem af eleverne der vinder, men om de sammen kan vinde og slå computeren. Spilmekanikken i spillet er tæt knyttet til positionssystemet som matematikfagligt område. Det er netop gennem en øget forståelse af, hvordan reglerne for positionssystemet er indlejret i spillet, at eleverne kan forbedre deres præstationer i spillet. Spillerne opfordres altså til at overveje de matematiske elementer i spillets kontekst i deres analyse, jf. Boaler (2015). Hermed adskiller *Talmat* sig fra klassiske regnespil, hvor et spil indeholder problemer eller opgaver af matematisk karakter, der ikke som sådan er knyttet til spillerens handlinger i spillet.

Intentionen med spillet i et matematikfagligt perspektiv kan forstås på to forskellige måder. Dels er det matematiske emne positionssystemet i fokus, og et mål med at spille spillet kan således være at forbedre elevernes viden og færdigheder inden for dette emne. Derudover kan spillet tilgås gennem matematisk undersøgelse, hvor eleverne kan interagere med et matematisk objekt og gennem dialog med hinanden og læreren ræsonnere sig frem til spillets mekanik. Her kan et forløb med spillet fx bruges til at arbejde med udvikling af ræsonnementskompetencen gennem undersøgelse. Forløbets didaktiske rammer kan ses gennem Brousseaus teori om didaktiske situationer. Elevernes læring opstår således i en vekselvirkning mellem selvstændigt arbejde i det didaktiske miljø *Talmat* (en a-didaktisk situation) og lærerens indgriben i situationen gennem devolution, validering og institutionalisering (didaktisk situation) (Winsløw, 2013). Forløbets kerne kan dermed ses som en vekselvirkning mellem elevens egne undersøgelser og handlinger på den ene side og lærerens indledende og efterfølgende støtte på den anden side. I forhold til elevernes forståelse af spilmekanikker i en a-didaktisk situation er der to faser der er interessante. Dels opstartsfasen, hvor eleverne ikke ved, hvordan spillet fungerer, og skal forholde sig til det. Dels når de centrale mekanikker i spiller er afdækket, og der skal findes og beskrives vinderstrategier. Heri ligger et betydeligt matematisk afklaringsarbejde. Det er en væsentlig pointe med spillet, at eleverne skal arbejde selvstændigt. De skal derfor ikke have spillet forklaret af en voksen, da dette vil undergrave at eleverne selv opstiller hypoteser om spillet.

Undervisning af ca. 1½ times varighed (5. klasse)

Et undervisningsforløb med *Talmat* kan vare fra en til flere lektioner, alt efter hvor dybdegående undersøgelser og beskrivelser, eleverne skal gennemføre. Her præsenteres et undervisningsdesign, der tager udgangspunkt i en dobbeltlektion, hvor eleverne får lov at undersøge, reflektere over og præsentere deres opdagelser. Det helt afgørende fokus i et sådant undervisningsforløb er at lade eleverne sætte ord på og begrunde deres hypoteser. Spørgsmål som: ”Hvorfor tror du det?”, ”Hvorfor gjorde du det?”, ”Hvordan kan du undersøge det?” er vigtige værktøjer, når læreren skal støtte udvikling af elevernes ræsonnementskompetence.

Når *Talmat* iscenesættes som et undersøgelseslandskab, er det en udfordring for læreren, at eleverne hver især befinder sig på forskellige niveauer i deres undersøgelser og forståelser af spillet. En beskrivelse af undervisningsforløb, hvor formålet er en matematisk undersøgelse, bør altså først og fremmest være en rettesnor og inspiration, der tilpasses den enkelte klasse og eleverne i klassen. Det er således mere hensigtsmæssigt at ramme eleverne, der hvor de er end at følge undervisningsforløbet slavisk. Husk at det er elevernes ræsonnementskompetence, der er i fokus, og ikke lærerens forklaringer: Eleverne ser nogle elementer, der opfører sig matematisk og skal arbejde sammen om at undersøge dem. Så en af de ting læreren skal understøtte, er elevernes forklaringer af hypoteser og refleksioner til hinanden. I forhold til Brousseau tilbyder spillet to a-didaktiske situationer som rummer potentiale for elevernes egen undersøgelse: forståelse af spilmekanik og udvikling af en vinderstrategi. Første situation er at finde ud af, hvordan spillet fungerer. Den næste situation er at spille, så man vinder. Situationerne skal ikke nødvendigvis tænkes lineært men i højere grad som en række hændelser der løbende sker, når eleverne arbejder og læreren går i dialog med dem.

Indledende undersøgelse af spillet (ca. 15-20 min.)

Denne del af undervisningsforløbet er elevernes første møde med spillet. Det er vigtigt, at eleverne får lov til at undersøge og handle uden for meget instruktion fra lærerens side. Eleverne skal arbejde to elever på en computer. Spillet er som standard sat op til at spille to spillere og en computer på 3 x 3-matrixen, så eleverne kan bare trykke start, når de er på introskærmen. Eleverne skal lære spillet at kende, som de selv har lyst til, så hvis de ønsker at ændre på spil indstillingerne, er det okay i denne fase. Fokus i fasen er at give eleverne mulighed for at udforske undersøge og undre sig. Læreren kan hjælpe eleverne med at italesætte den undren, der sker. Læreren kan eventuelt præsentere spillet således: ”Dette er et matematikspil. I får ikke forklaret, hvad det går ud på. I skal samarbejde om at finde ud af, hvordan spillet fungerer. I skal arbejde to og to sammen, og I må gerne snakke med jeres gruppemakker om spillet”. Lærerens rolle i denne fase er at støtte eleverne med at gå i gang og hjælpe dem med at sætte ord på deres undren og opdagelser. Efter ca. 15-20 minutter afsluttes fasen.

Sæt ord på din strategi og spillets mekanik (20-30 min.)

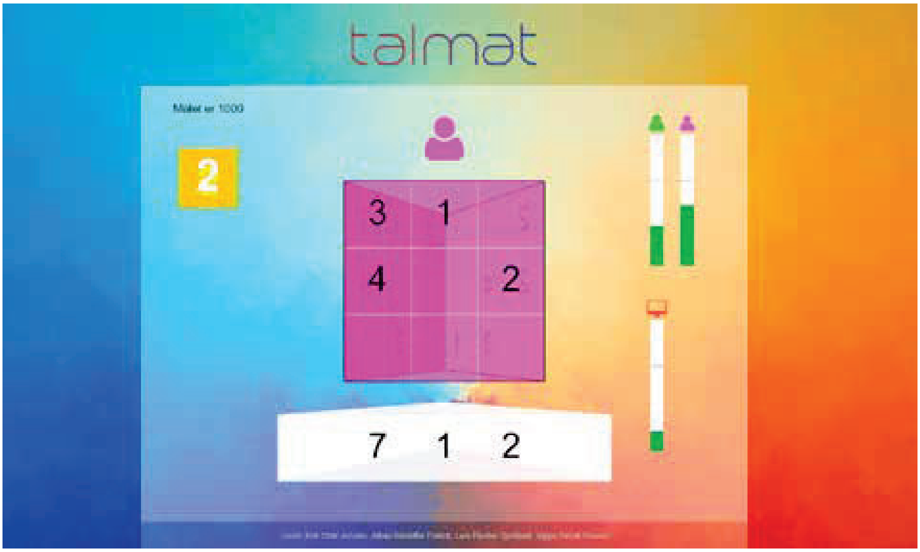
Efter den indledende undersøgelse af spillet vil der være mange elever, der har ideer om, hvordan mekanikkerne fungerer, men det vil formodentligt stadig være svært for dem præcist at sætte ord på. For at hjælpe eleverne i dialog med deres strategier skifter vi her til en bestemt indstilling på spillet. De to elever skal nu styre den samme spiller mod en computer på en 3 x 3-matrix. De kan evt. skiftes til at styre musen ved hvert spil. Denne del af undervisningsforløbet sigter mod, at eleverne skal tale sammen om, hvad de gør. De skal altså forsøge at blive enige om, hvad de gør, når de placerer deres tal, og snakke om, hvilken strategi de har. Alt efter hvor vant eleverne er til at tale sammen og arbejde sammen, skal denne del være mere eller mindre lærerstyret. Selvom det er en elev, der styrer spillet, skal de altså være opmærksomme på, om det er en fælles strategi, de følger.

Lærerens rolle bliver at understøtte de dialoger, der opstår hos eleverne eller støtte, at der opstår dialoger. Selvom eleverne har mange ideer og hypoteser om, hvordan spillet fungerer, sætter de ikke nødvendigvis ord på deres handlinger i denne fase. Derfor må læreren hjælpe eleverne med at italesætte deres strategier over for hinanden. En idé kan være at gå rundt til de enkelte grupper og spørge: ”Hvorfor var det en god idé at sætte tretallet der? Kunne det have stået et andet sted?” osv. Fasen kan starte med en mini brainstorm, hvor eleverne hjælper med at finde på gode undersøgelsesspørgsmål. For eksempel: ”Hvis vi skal forklare noget omkring det her spil, hvad kunne det så være?”.

Spørgsmål til stilladsering af undersøgelsen

- Hvilke spørgsmål har I til spillet?
- Er der noget I allerede nu har fundet ud af?
- Hvad er I stadig i tvivl om?
- Taler I sammen før I sætter et tal?
- Er I enige om at tallet skal stå der?
- Har I begge sagt, hvorfor I mener, at tallet skal stå der?
- Hvorfor mener I tallet skal stå der?
- Har I været i en lignende situation?

Som afslutning på denne fase kan man tage en kort klassesamtale ud fra et screenshot fra spillet. Det kan være svært for eleverne at sætte ord på de strategier, de bruger i generelle termer, men det kan understøtte elevernes dialog om strategierne i spillet at tage udgangspunkt i et konkret eksempel. For eksempel som vist på figur 5.5, hvor den lilla spiller skal placere en toer.



Figur 5.5. Eksempel fra Talmat.

Her kan læreren spørge, hvad der vil være godt at gøre for spilleren på billedet og hvorfor. En samtale med dette udgangspunkt kan bruges til at få indsigt i elevernes forståelse af spillet og kan give læreren mulighed for at spørge ind til elevernes strategier og høre "hvorfor", de gør, som de gør, så eleverne bliver udfordret i at ræsonnere. Læreren kan evt. have udprintet forskellige skærmbilleder fra spillet, som eleverne kan arbejde med. Det kan sætte gang i en anderledes refleksionsproces, end når eleverne sidder foran spillet på computeren, idet eleverne bliver trukket væk fra rolle som handlende spillere og ind i rollen som reflekterende spillere.

Hvordan fungerer spillet, og hvad er vinderstrategien? (20-30 min)
Sidste del af undervisningsforløbet handler om, at eleverne skal beskrive spillets mekanikker og lave deres egen fagligt begrundede vinderstrategi. Alt efter hvor vant eleverne er til at argumentere gennem skrift, tegninger eller mundtligt, kan dette gøres på forskellige måder. Formålet er, at eleverne formulerer og beskriver spillet som et matematisk system. Dette kan gøres ved, at de fx skal skrive reglerne for spillet ned og beskrive deres vinderstrategi.

Spørgsmål til at understøtte elevernes refleksion i en klassediskussion eller på gruppeniveau:

- Hvis I skal give et godt råd til at slå computeren, hvad skal det så være?
- Hvilken matematik var der i spillet?
- Hvad kan man lære af at spille spillet?
- Hvordan vinder man spillet?
- Hvordan fungere de forskellige ting i spillet? (Terningen, matrixen, det hvide felt i bunden)
- Er der nogen tal der er gode at slå? (Hvornår?)
- Er der nogle tal der er dårlige at slå? (Hvornår?)
- Skifter det, alt efter om det er starten eller slutningen af spillet?
- Er der noget, man slet ikke må gøre?
- Er der noget, der er rigtigt godt at gøre

En idé kan være at lade eleverne tage et screenshot af en situation, som de synes er speciel gunstig eller svær, og lade dem argumentere for, hvorfor de mener dette.

5.8. Minecraft – koordinatsystemet og undersøgende matematikundervisning

Minecraft er et åbent sandkassespil, hvor spilleren i høj grad selv opstiller reglerne, mens han eller hun spiller (se også kapitel 2, 3 og 4). Det følgende matematikforløb med *Minecraft* består af tre dele. Den første del er en matematisk undersøgelse af koordinatsystemet i *Minecraft*. Den næste del består af en række udfordringer, som eleverne kan løse gennem deres viden om koordinatsystemet. Den sidste del består af en designopgave, hvor eleverne skal designe udfordringer til hinanden, der kan løses ved at bruge koordinatsystemet. På bogens hjemmeside kan du finde en mere sammenfattet beskrivelse af forløbet.

FAKTABOKS: *Minecraft* i matematik

Tidsramme: 8-20 lektioner.

Klassetrin: 4.-6. klasse.

Læringsmål: Oplevelse af matematiske regler i spil. At kunne undersøge, redegøre for og ræsonnere over koordinatsystemet i *Minecraft*. At kunne beskrive koordinatsystemet som en matematisk spilmekanik. At kunne navigere efter koordinatsystemet og anvende *Minecraft* til matematisk undersøgelse.

Kom i gang: *Minecraft* kan købes i en version til skolebrug, der hedder *Minecraft: Education Edition* (*M:EE*), som giver en række fordele i forhold til at organisere eleverne. Spillet skal downloades og installeres på elevernes computere.

Arbejdsform: Eleverne organiseres med hver sin computer, i grupper af to. Ved nogle aktiviteter vil det være en fordel, hvis eleverne skiftes til at spille på en enkelt computer.

Forberedelse: Læreren skal have prøvet og lært spillet på et grundlæggende niveau og bør selv have afprøvet aktiviteterne i forløbet inde i spillet.

Udfordring: At finde rundt i *Minecraft* gennem brug af koordinatsystemet.

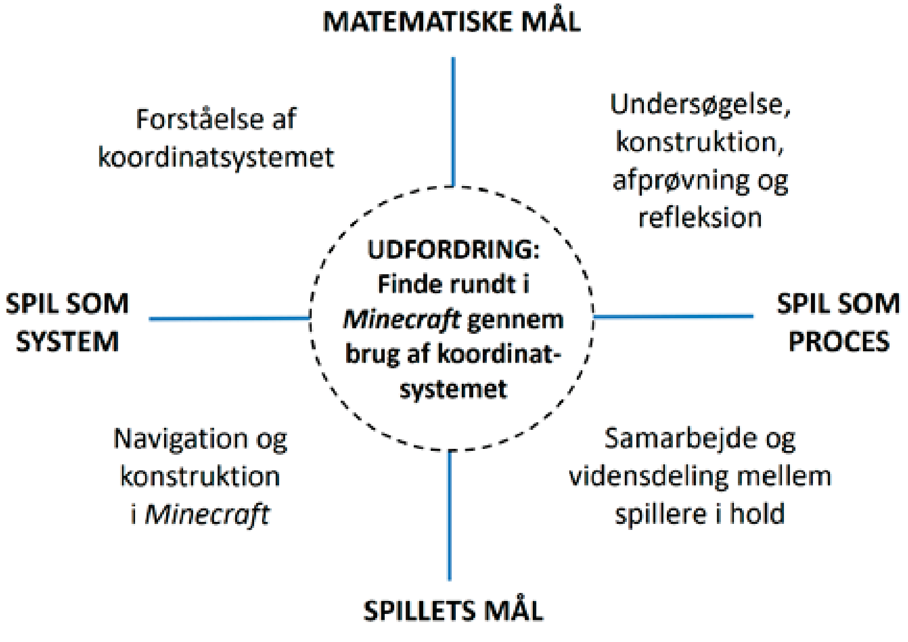
Det faglige indhold: Det matematikfaglige fokus er todelt. Dels et fokus på koordinatsystemet som faglig begreb og dels et fokus på elevernes undersøgende aktivitet.

Spilelementer: I *Minecraft* er det muligt at bygge et væld af forskellige konstruktioner og undersøge dem. Det er muligt at se ens avatars koordinater samt retning: nord, syd, øst og vest.

Spilaktiviteter: Spillet har forskellige indstillinger og måder, det kan spilles på. Udforskning af verdenen samt konstruktioner er central. Det kan være en udfordring for eleverne at navigere og finde rundt i verdenen.

Læringsaktiviteter: De faglige aktiviteter kan tage udgangspunkt i at gøre eleverne bedre til at navigere i *Minecraft*-verdenen ved at bruge koordinatsystemet.

Tegn på læring og evaluering: I forløbet kan man bruge forskellige præsentationsprogrammer (fx Padlet, Google Docs eller Word) til at lade eleverne beskrive deres undersøgelser.



Figur 5.6. Koblinger mellem spil og matematik i Minecraft-forløbet.

I diskussionen af forløbet vil vi lægge vægt på tre elementer. Først overvejelser over, hvordan man kan koble det faglige indhold til spillets mål, rum og mekanikker. Dernæst en gennemgang af, hvordan det faglige indhold kobles til gameplay og sociale spildynamikker, dvs. spillets centrale udfordringer og fælles samarbejdsmuligheder. Derefter en diskussion af, hvordan koblingerne kan komme til udtryk gennem det konkrete undervisningsforløb.

Det faglige fokus og spillets mekanikker

Det er oplagt at arbejde med undersøgende matematikundervisning i relation til *Minecraft*, idet spillet tilbyder mange muligheder for matematiske undersøgelser. I dette forløb sætter vi særligt fokus på, hvordan man kan bruge spillet som afsæt for at lære om og anvende koordinatsystemet som en del af at spille spillet. Det første trin i undersøgelsen er at forstå, at spillerens avatar, dvs. ens figur i spillet, altid befinder sig på bestemte x-, y- og z-koordinater i spillets tredimensionelle rum. Koordinaterne vises forskelligt alt afhængigt af den version af *Minecraft*, som man anvender. I *Minecraft: Education Edition* vises koordinaterne i øverste venstre hjørne af skærmen, når de er slået til i indstillingerne i World settings-menuen. Dette vil variere alt, efter hvilken version af *Minecraft*, du anvender. Søg på nettet for at finde ud af, hvordan koordinaterne tilgås i den version, du bruger.

Ud fra koordinaterne kan spilleren dermed se en repræsentation af sin avatars position og retning i form af en række tal, der bevæger sig i den ene eller anden retning, alt efter hvilken vej avataren bevæger sig. Det er dog ikke ligetil at forstå, hvad tallene betyder. Især fordi spilleren ofte vil bevæge sig langs flere akser på én gang og kun i bestemte situationer vil bevæge sig langs en enkelt akse. Der er mindst to undersøgelser, som er relevante i forbindelse med denne repræsentation af avatarens position. En undersøgelse der sigter mod at forstå spillets mekanikker, dvs. spillerens bevægelsesmuligheder i det åbne 3D-rum, og hvad de forskellige tal giver udtryk for. Samt en undersøgelse der sigter mod at forstå, hvordan mekanikken kan bruges til at give nye handlemuligheder i spillet.

I forhold til faglige og pædagogiske forudsætninger tilbyder *Minecraft* et mulighedsrum gennem den digitale verden spillet foregår i. *Minecraft* er det, man kalder et "sandkassespil". Det vil sige et spil, hvor der ikke er en traditionel lineær struktur, men hvor spilleren kan vælge, hvad der gøres og hvornår. Termen refererer til børns leg i en sandkasse, hvor der ikke er nogen regler, men legen opstår gennem de forskellige valg, barnet tager[5]. *Minecraft* er bygget til netop at facilitere spillernes valgfrihed og kan til tider minde mere om en form for simulation end et spil. Således kan spillet i dette forløb ses som et laboratorium eller en simulation, som eleverne arbejder i. Denne måde at bruge spillet på læner sig tæt op ad spillets oprindelige hensigt, der lægger op til at spilleren udforsker omgivelserne og lærer at bygge for at overleve (Duncan, 2011).

Ud over valgfriheden tilbyder *Minecraft* en verden, hvor alt er bygget op af blokke, der kan manipuleres med. En metafor for disse blokke er de pixels, der kan ses, hvis man zoomer langt nok ind på et digitalt billede. Ved hjælp af meget enkle pixels kan der skabes meget komplekse billeder, og på samme måde kan enkelte blokke i *Minecraft* bruges til at skabe alle mulige forskellige ting – fx

5 https://en.wikipedia.org/wiki/Sandbox_game

et topografisk korrekt danmarkskort[6], landet Westeros fra Game of Thrones[7] eller en model af Jorden i målestoksforhold 1:1[8]. En del blokke i *Minecraft* har forskellige funktionaliteter. Redstone kan fungere som en form for ledninger, der kan sende signaler, der kan vokse græs på jordblokke og kul eller træ kan bruges i en ovn blok. På den måde kan man ud over statiske repræsentationer af ting også lave dynamiske repræsentationer baseret på blokkenes funktionalitet (Nebel et al., 2016).

Det faglige fokus og gameplay/spildynamikker

Der er en helt central grund til, at undervisningsforløbet handler om koordinatsystemet: Det er svært at finde vej i *Minecraft*. Langt de fleste spillere vil fra tid til anden opleve, at der er steder, de ikke kan finde eller er blevet væk fra. Landskaberne i spillet kan desuden ligne hinanden i sådan en grad, at man let kan miste orienteringen. Koordinatsystemet i spillet kan bruges til at finde vej med og navigere efter, hvis man ved, hvordan man skal bruge det, men det er det de færreste børn der gør. I en afprøvning af forløbet i to 5.-klasser var der således ikke en eneste elev, der kunne navigere efter koordinatsystemet, selvom enkelte elever var bevidste om, at det eksisterede (Jensen, 2017). For øvede spillere er brug af koordinatsystemet en integreret del af at spille spillet. Hvis man fx har bygget noget bestemt i en verden, man vil dele med andre, sender man blot koordinaterne til bygningsværkerne, så andre nemt kan finde derhen.

Potentielt kan eleverne opnå nye muligheder i spillet ved at lære at navigere efter koordinatsystemet, hvilket er helt centralt for at dette forløb giver mening. Eleverne undersøger ikke bare noget matematik i en spilkontekst. De undersøger noget matematik, der potentielt har muligheden for at ændre, hvordan de kan handle i denne spilkontekst. Derudover er fokus ikke en tænkt eller abstrakt kontekst, som eleverne måske kommer til at møde i fremtiden, som fx at anlægge en terrasse eller lægge budget. Det er en kontekst, som flere elever rent faktisk oplever at befinde sig i, mange af dem flere gange om ugen. Når vi her arbejder med koordinatsystemet som en måde at navigere på i *Minecraft,* kan eleverne gennem de matematiske kompetencer forstå koordinatsystemet som

6 https://download.kortforsyningen.dk/content/geodataprodukter?field_korttype_tid_1=3615

7 https://www.youtube.com/watch?v=Hw-aVXTkTsw

8 https://www.youtube.com/watch?v=8_bW3ab8YAk

en specifik matematisk repræsentation i spillet, der kan handles med på måder, der er realistiske i forhold til, hvordan man tilgår spillet som spiller.

Vores forskning om forløbet viser, at elevernes mulighed for rent faktisk at bruge deres viden omkring koordinatsystemer i situationer i spillet er en væsentlig drivkraft for, at forløbet fungerer (Jensen & Hanghøj, 2020). Dette bliver tydeligt igennem nogle af de oplevelser, eleverne har i forhold til deres forståelse af matematik og spil. For eksempel har nogle elever ikke før overvejet, at computerspil og matematik hang sammen, eller at man kunne lære matematik af at spille computerspil. På den måde er der indikationer på, at forløbet har potentiale til at forandre, hvordan eleverne oplever sammenhængen mellem *Minecraft* og matematik, men også i forhold til computerspil mere generelt.

Lærerens game literacy

I forhold til lærerens operationelle game literacy, dvs. forståelse af spillets mekanikker og funktionaliteter, er det centralt, at læreren forstår, hvordan en spiller kan orientere sig og navigere via koordinatsystemet i *Minecraft*. Eftersom denne mekanik er i centrum for den matematiske undersøgelse, vil lærerens forståelse heraf være afgørende for, hvordan undervisningsforløbet og rammerne for undersøgelsen muliggøres. Den store grad af valgfrihed, og de frie rammer i forhold til mulige aktiviteter i spillet, gør det endnu mere nødvendigt for lærere at didaktisere elevernes spiloplevelse i forhold til faglige og sociale mål, end det er tilfældet for spil med mere lineær progression. På den måde rummer *Minecraft* et pædagogisk mulighedsrum, som det bliver nødvendigt at didaktisere, når man ønsker, at eleverne skal nå forskellige mål gennem arbejdet med spillet – jf. Brousseaus teori om didaktiske situationer (Winsløw, 2013). I forhold til den kulturelle dimension må læreren være opmærksom på, at *Minecraft* kan spilles på en række forskellige måder som fx Creative og Survival, eller ved at eleverne spiller alene eller sammen. Eleverne vil samtidig have forskellige erfaringer med *Minecraft* og forskellige forventninger til, hvordan de opfører sig i spillet og med hvilke mål.

Undersøgende matematikundervisning med Minecraft

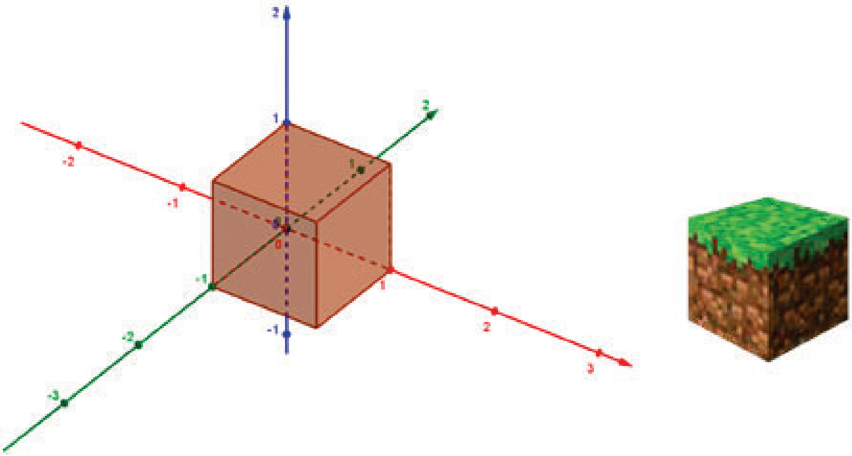
Det er vigtigt, at eleverne forud for forløbet har en faglig forståelse af koordinatsystemet som begreb/fænomen og gerne erfaringer med at kunne arbejde undersøgende. Det vil give de bedste forudsætninger for at undersøge og navigere i 3D-koordinatsystemet ud fra numeriske angivelser af deres position, der ellers kan risikere at virke overvældende for eleverne.

Hvis man selv og ens elever ikke er vant til at arbejde undersøgende i matematikundervisningen, kan dette forløb samtidig være en oplagt mulighed for, at eleverne får erfaring med det. I så fald kan man knytte de primære læringsmål i forløbet til de undersøgende aspekter og derved gøre disse mere eksplicitte for eleverne. Som lærer bør man være bevidst om, hvordan ens ageren kan understøtte eleverne med at indtage elevroller som undersøgere, så man ikke falder tilbage til en lærerstyret undervisning. Dette kan ske ved at have fokus på at fange og støtte elevernes måde at tænke på. Her skal læreren altså ikke forklare, hvordan tingene hænger sammen. I stedet kan der stilles forskellige spørgsmål til eleverne som:

- Kan det være rigtigt, at …?
- Hvorfor er du kommet frem til, at …?
- Hvad har du gjort for at nå de konklusioner?

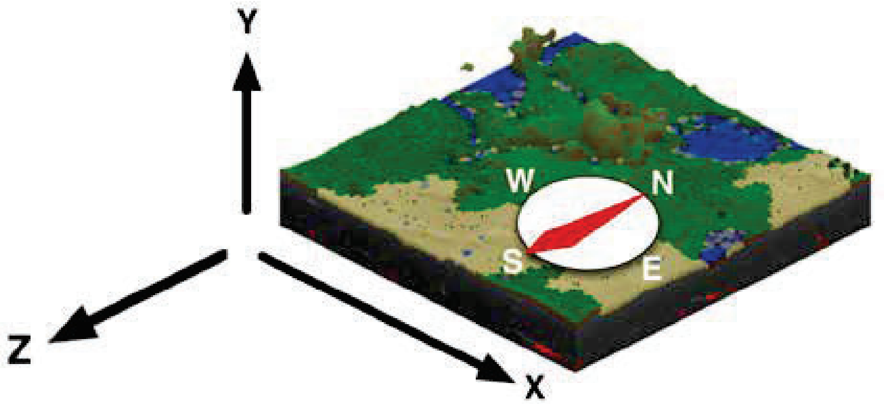
Undersøgelse af spilmekanikker

Formålet med undersøgelsen af de numeriske værdier, der repræsenterer avatarens position i koordinatsystemet er, at finde ud af, hvad reglerne for værdierne er. *Minecraft*-verdenen er bygget op, så hver blok fylder præcis én enhed på de tre akser i koordinatsystemet – se figur 5.7. Hvilket omtrent svarer til en meter



Figur 5.7. Til venstre ses en kube i et 3D koordinatsystem lavet i Geogebra. Til højre en jordblok med græs på fra Minecraft.

Akserne i *Minecraft* følger nord, syd, øst og vest. Det betyder, at værdien på x-aksen forøges, når man går fra vest mod øst, og værdien på z-aksen forøges, når man går fra nord mod syd. Y-aksen angiver vertikal placering[9] – se figur 5.8. Aksernes navne og retninger på koordinatsystemet i *Minecraft* følger reglerne for et højrehåndet koordinatsystem[10], en type af koordinatsystem, der typisk bruges i 3D-editering. Navigationen kan dog være årsag til forvirring. Især z-aksens retning kan virke kontraintuitiv i forhold til, hvordan kortretninger normalt angives med nord øverst. Ligeledes er der her en specifik orientering af koordinatsystemet, hvor andre systemer fx har z på den vertikale akse.



Figur 5.8. En repræsentation af akserne i Minecraft
http://Minecraft.gamepedia.com/Coordinates

Hvis avataren bevæger sig ti blokke direkte mod et af verdenshjørnerne nord, syd, øst, vest eller direkte op og ned, vil avatarens koordinater forskyde sig præcis ti i den retning, der bevæges. X og z udvider sig, i takt med at spilleren opdager kortet, og der genereres nyt landskab, mens y-aksen går fra 0 til 255, hvor 64 er havoverfladen.

Undersøgelsen

Undersøgelsens overordnede formål er, at få indsigt i reglerne for koordinatsystemet i *Minecraft* gennem at opleve, hvordan man kan bruge reglerne til at navigere efter, og overføre denne viden til koordinatsystemet som generelt begreb.

9 https://minecraft.gamepedia.com/Coordinates

10 https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

Der vil være stor forskel på, hvor meget og hvordan man som lærer bør stilladsere de matematiske undersøgelser i forhold til forskellige elever og klasser og deres forhåndskendskab. Det gælder ikke så meget i forhold til spillet, hvor eleverne langt hen ad vejen er på hjemmebane, men mere i forhold til at arbejde undersøgende i matematik. Her vil vi beskrive, hvordan undersøgelsen kan stilladseres på forskellige måder. Vi anbefaler dog, at læreren ikke overstilladserer undersøgelsen for eleverne, da der er en risiko for, at forløbet kan komme til at føles mere som en række opgaver, der skal laves, end en reel undersøgelse. Nedenunder præsenterer vi en række muligheder for at iscenesætte og understøtte elevernes undersøgelse. Det er ikke meningen, at alle eksemplerne skal i brug i samme klasse, men at de kan illustrere muligheder for at understøtte elevernes undersøgende aktiviteter. Hansen & Hansen (2013) kategoriserer forskellige undersøgelser i matematikundervisning fra bekræftende og strukturerede til guidede og åbne undersøgelser, hvilket kan bruges som inspiration og støtte til at tilpasse de enkelte eksempler til elevernes ønskede undersøgelseserfaringer.

Overordnet rammesætning

Ved linjerne der starter med ”x”, ”y” og ”z” er der en række tal, der bevæger sig.

- Tallene bevæger sig efter nogle helt bestemte regler. I skal undersøge, hvordan tallene bevæger sig og finde ud af reglerne.
- Når I har forstået reglerne for, hvordan tallene bevæger sig, kan I bruge dem til at finde vej med. Men hvordan kan det være?

Alt efter hvor vante eleverne er med at arbejde undersøgende, og hvordan det går med deres undersøgelser, vil eleverne kunne hjælpes på vej af en række spørgsmål. Enten i papirform eller som mundtlige indspark for læreren. I forhold til de konkrete undersøgelser, eleverne skal foretage sig, vil det være lærerens ansvar at definere den grad af frihed, som eleverne har i undersøgelserne. Næste figur viser en række af guidende spørgsmål, eleven kan stilles. I forhold til at understøtte elevernes ejerskab af undersøgelsen kan det være en idé at lade dem selv finde på arbejdsspørgsmålene – i sparring med læreren.

Spørgsmål til stilladsering af undersøgelsen

Når I har undersøgt tallene et minut, så lav et gæt og skriv det ned:

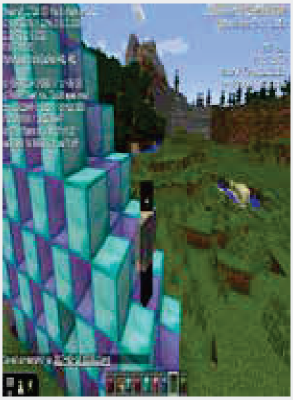
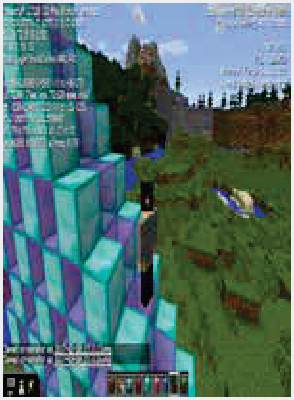
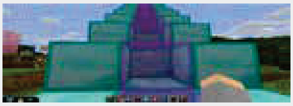
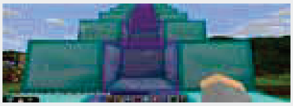
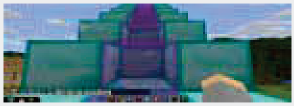
- Hvad tror du, tallene ud for x, y og z betyder?
- Hvorfor er der præcis tre?

For at forstå, hvordan tallene ændrer sig, så afprøv disse ting:

- Kan du få x til at blive større/mindre? Hvad gjorde du?
- Kan du få y til at blive større/mindre? Hvad gjorde du?
- Kan du få z til at blive større/mindre? Hvad gjorde du?
- Er der forskelle og ligheder mellem, hvordan de tre tal opfører sig?
- Kan du få den ene værdi til at vokse/blive mindre uden at de to andre værdier bevæger sig? Hvordan gjorde du?

Eleverne kan også selv finde på måder at undersøge på.

Undersøgelsen kan stilladseres yderligere gennem konstruktioner af specifikke del-undersøgelser. For eksempel ved at eleverne bygger en bestemt konstruktion i *Minecraft*, som de undersøger med en række specifikke spørgsmål for øje. En god delundersøgelse at starte med er, at lade elever bygge trapper for at undersøge y-aksen. Y-aksen er umiddelbart den akse, der er nemmest at undersøge, fordi man relativt nemt kan bevæge sig op og ned uden at de andre akser bevæger sig. Hvis man vil bevæge sig, så enten kun z eller x bevæger sig, skal man gå direkte mod et af verdenshjørnerne – fx stik nord. For at gøre det kan man gå langs en række blokke i form af en væg eller lignende. Y-aksen har derudover den fordel, at når avataren står oven på en blok, vil decimalerne efter kommaet på y-koordinaten være præcis 0. Det vil sige, at går man op af en trappe af blokke, vil y-koordinaten bevæge sig præcis én hver gang man går et trappetrin, fx 74,000 til 75,000 til 76,000. Se figur 5.9.

Første trin	Andet trin	Tredje trin
		
		

Figur 5.9. Avatar der bevæger sig op ad trappe i Minecraft med tilhørende koordinater.

Aktivitet – trappen

Byg en trappe, der er 5 blokke høj, og undersøg: Hvordan ændrer avatarens y-koordinat sig, når I går op af trappen?

Byg en trappe, der er 10 blokke høj, og undersøg: Hvordan ændrer avatarens y-koordinat sig, når I går op ad trappen?

Hvor meget vil y-koordinaten ændre sig, hvis trappen er 50 blokke høj? 100 blokke?

Hvad er reglen? Hvor meget rykker y-koordinaten sig ved hvert trin?

Når eleverne gruppevis eller i fællesskab har bestemt reglerne for y-koordinaterne, skal de finde reglerne for x og z. Dette kan være en lille smule mere vanskeligt. Men trappe-opgaven kan inspirere.

> Kan I bygge noget, der får x eller z til at opføre sig på samme måde som y-koordinaten?
> Hvordan er det anderledes end trappen?

Her kan ideen være, at de bygger en trappe, der ligger ned. Konstruktionen af et kryds der ligger ned kan ligeledes være en hjælp:

Aktivitet – kryds
I skal bygge et kryds så I både kan gå mod øst og vest og nord og syd.
Hvilken akse bevæger sig mest, når man går mod:

- **NORD**? Bliver den større eller mindre?
- **SYD**? Bliver den større eller mindre?
- **ØST**? Bliver den større eller mindre?
- **VEST**? Bliver den større eller mindre?

Hvilken viden giver dette os om koordinatsystemet?

I løbet af undersøgelsen spiller læreren en væsentlig rolle i forhold til at fastholde undersøgelsens resultater. Dette kan gøres ved at elevernes opdagelser løbende skrives ned, evt. på whiteboard, så alle eleverne kan dele hypoteser og ideer med hinanden. Et alternativ er at gøre det i grupper. Elevernes dokumentation af deres undersøgelser kan evt. foregå i *Minecraft*:

Aktivitet – regler
Hvad er reglerne for x, y og z?

Byg reglerne for koordinatsystemet i *Minecraft,* så andre kan forstå, hvordan det fungerer.

Beskriv jeres konstruktion og reglerne for koordinatsystemet i Word eller et andet program. I skal bruge screenshots.

Fortæl, hvordan I undersøgte det i *Minecraft*.

Pointen her er ikke, at eleverne skal lave alle de opgaver, der er beskrevet ovenfor. Målet med iscenesættelsen er, at få eleverne til at forstå og kunne forklare en bestemt mekanik i spillet, ikke at de slavisk skal lave en masse opgaver omkring denne mekanik. Når eleverne mener, de har forstået mekanikken, kan de prøve at forklare den gennem tekst, billeder og optagelser i stedet for at fortsætte med at lave undersøgelser af noget, som de har forstået.

En væsentlig del af koordinatsystemets anvendelighed og relevans i *Minecraft* udspringer af, at alle eleverne er til stede i samme spilverden og dermed forholder sig til et fælles koordinatsystem. Derfor er det ikke bare den enkelte elev, der kan bruge koordinatsystemet til at navigere med, men derimod alle eleverne, der kan bruge det i samarbejde med hinanden. En måde at tilgå koordinatsystemet som en *fælles undersøgelse* på er at give eleverne et specifikt koordinatsæt, som de skal finde hen til:

Aktivitet – skattejagten

I skal starte ved det sted, som tilhører jeres gruppe. Den ene skal styre avataren og den anden holder øje med avatarens koordinater. Skift undervejs. I skal gå hen til disse koordinaterne for at finde en skat:

x: 164
y: 86
z: 123

Hvad skete der, da alle grupper gik hen til de samme koordinater?
Og hvad kan man forklare om koordinatsystemet, når man ved det?

Elevernes oplevelse af, at de kan navigere efter koordinatsystemet er en central del af undersøgelsen, der ikke skal undervurderes. For nogle elever vil denne oplevelse være den allermest væsentlige i dette forløb (Jensen & Hanghøj, 2020). Opgaven med at finde et specifikt sted hen kan være en god anledning til, at læreren får et overblik over hvilke elever, der har fået en forståelse for koordinatsystemet, og hvilke der ikke har. Opgaven er på en måde "selvrettende" i og med, at det kun er de elever, der har lært at navigere efter koordinatsystemet, der finder frem til stedet på egen hånd.

Organisering

En oplagt mulighed for at introducere eleverne til at bruge koordinatsystemet som navigationsredskab er at lade hold på to spille på en computer med en avatar. Den ene er navigatør og holder øje med x-, y- og z- værdierne, mens den anden styrer avataren. Eleverne bytter hvert femte minut. Tag evt. tid og fortæl eleverne, hver gang de skal skifte.

Løsning af udfordringer

Resten af forløbet består af en række udfordringer med at bygge tunneller, broer og jernbaner ud fra bestemte mål. For eksempel kan eleverne bygge en jernbane, der skal være 100 blokke lang, hvor de skal starte i hver sin ende, og hvor de skriver deres startpunkt ned. Forløbet kan afsluttes med, at eleverne laver udfordringsopgaver til hinanden – fx skattejagter eller konstruktionsopgaver.

5.9. Torchlight II – spil og regnehistorier

Det tredje og sidste forløb tager afsæt i co-op actionrollespillet *Torchlight II*, hvor eleverne sammen skal kæmpe mod computergenererede monstre for at komme frem i spillet – se også kapitel 3 og 4 for andre forløb med spillet. *Torchlight II* er et relativt komplekst computerspil, hvor det er en klar fordel, at du som lærer har et godt kendskab til de centrale spilmekanikker i spillet i form af kamp og optimering af ressourcer – fx i form af forskellige typer våben og angreb, livspoint (health) og magisk energi (mana). Lærerens erfaringer med spillets mekanikker vil således gøre det nemmere at formidle opgaver og vejlede eleverne, når de skal arbejde med at undersøge udvalgte matematiske sammenhænge i spillet. Hvis læreren ikke direkte kender til *Torchlight II,* kan man eventuelt trække på erfaringer fra lignende co-op actionrollespil som fx *Diablo* eller *Path of Exile*. Ellers anbefaler vi, at man som lærer minimum tilbringer en times tid med at nedkæmpe monstre i spillet, før man for alvor går i gang med at tænke spillet ind i undervisningen.

På bogens hjemmeside kan du finde et eksempel på et samlet forløb med *Torchlight II* til matematik. Her vil uddybe nogle af eksemplerne på, hvordan man kan arbejde med matematiske aktiviteter i forhold til spillet. Fokus er specifikt på arbejdet med den matematiske repræsentationskompetence gennem oversættelser mellem forskellige repræsentationer fra *Torchlight II* til regnehistorier, modeller og aritmetiske udtryk, der afspejler matematiske spilmekanikker. Regnehistorier, der tager udgangspunkt i spil, er interessante, fordi de kan understøtte opdagelsen af matematik i en elevrelevant kontekst (Pind, 2015). Således kan arbejdet med regnehistorier være med til at undersøge matematikken i de valg, som eleverne reelt kan komme til at stå i, når de spiller *Torchlight II*. Regnehistorier forstås her som sproglige beskrivelser af situationer fra en spilverden, der involverer matematikfaglige elementer fx i form af regneudtryk, tal eller geometriske figurer. I *Torchlight II* indgår en række forskellige matematiske mekanikker, som repræsenteres gennem spillet. Dermed forstår vi oversættelsen af spilmekanikkerne til regnehistorier som et arbejde med at oversætte mellem forskellige typer af matematiske repræsentationer. For at denne oversættelse skal forblive relevant for eleven, som spiller, skal eleverne arbejde med de spilmekanikker, der rent faktisk er i spillet. Det kræver, at læreren sætter sig grundigt ind i spillet for at kunne guide eleverne i deres arbejde med at optimere deres spil ved at arbejde med de bagvedliggende matematiske forhold.

Repræsentationskompetencen kombineret med regnehistorier bidrager med en række fordele i forhold til at arbejde undersøgende med matematikken i *Torchlight II*. Pernille Pind (2015) beskriver regnehistorier som en opgavetype, der kan bruges til at arbejde med forbindelsen mellem matematikken og virkeligheden. De kan tage udgangspunkt i alle former for matematikord, tal og regnestykker og indeholder spørgsmål, der kan løses ved hjælp af matematik og kan differentieres efter den enkelte elevs niveau. Når eleverne selv formulerer regnehistorier, øges deres bevidsthed om, hvad ordene i historien betyder. Det er en god idé, at elever der laver regnehistorier, altid selv prøver at løse dem som de første. Her opdager eleverne ofte ting ved deres regnehistorie, der skal ændres, fordi de måske har valgt tal der er for svære, eller andet der gør opgaven alt for vanskelig eller let (Pind, 2015).

Regnehistorierne i forløbet forstås som repræsentationer af dele af spillet, der er blevet oversat til tekst. Derfor er det relevant at arbejde med at analysere og vurdere elevernes regnehistorier ud fra spillets kontekst. For eksempel i hvilken grad regnehistorierne afspejler de matematiske problemstillinger, der eksisterer i spillet, og i hvilken grad historierne giver mulighed for at reflektere over bedre valg i spillet. I relation til de matematiske kompetencer (Niss & Jensen, 2002) kan der spørges, om arbejdet med regnehistorierne hjælper eleverne med at få overblik over og handle med indsigt og parathed i spillets sammensatte situationer, som rummer matematiske problemstillinger eller udfordringer. Med andre ord, om eleverne kan forklare og begrunde deres valg i specifikke spilsituationer matematisk. I en elevs arbejde med regnehistorier kommer repræsentationskompetencen til syne gennem arbejdet med at skrive, oversætte og vælge fokus for regnehistorien. Arbejdet kan evalueres ved at vurdere, hvor godt historien repræsenterer de matematiske udfordringer, spillerne møder i spillet.

Dette forløb er tænkt som en introduktion til at arbejde med matematiske mekanikker i computerspil gennem repræsentationskompetencen. Der vil kunne arbejdes med en større dækningsgrad af repræsentationskompetencen, hvis eleverne ikke kun arbejder med regnehistorier, men i højere grad selv vurderer og vælger, hvilke repræsentationer de vil bruge ud fra repræsentationernes karakteristika. For eksempel kan en grafisk repræsentation af brugen af *health potions* (livgivende trylledrikke) måske være bedre til at vise forskelle end en regnehistorie. Andre matematiske kompetencer end repræsentationskompetencen kan vægtes højere i undervisningsforløbet, fx tankegangskompetencen i forhold til at genkende og opstille matematiske spørgsmål eller ræsonnementskompetencen i forhold til at eksperimentere med valg i spillet, lave hypoteser og argumentere.

Forløbet fungerer bedst, hvis læreren afsætter to-tre timers undervisningstid i starten af forløbet, hvor eleverne kan få lov til at spille *Torchlight II*, så de sammen kan opleve spillets udfordringer og at have fælles fremdrift i spillet. Formålet er, at eleverne får direkte oplevelser af at løse udfordringer i spillet; derfor er det også vigtigt, at eleverne løbende igennem forløbet spiller *Torchlight II* i deres grupper. Forløbet kan med fordel kombineres med et danskforløb om at producere guides til *Torchlight II*, jf. kapitel 4 samt et fokus på at fremme elevernes samarbejde, jf. kapitel 3.

FAKTABOKS: *Torchlight II* i matematik

Tidsramme: 8-12 lektioner – min. to lektioner reel spilletid i opstarten.

Klassetrin: 4.-6. klasse.

Læringsmål: At eleverne skal videreudvikle deres repræsentationskompetencer ved at oversætte matematikholdige spilsituationer til regnehistorier og at fortolke andres regnehistorier i forhold til en spilsituation og træffe valg om denne.

Kom i gang: *Torchlight II* kan købes via Steam, Runic Games eller Good Old Games. Skal downloades. Gratis demo. Læs mere på www.sætskolenispil.dk.

Arbejdsform: Der er en opdeling mellem når eleverne arbejde med computeren, og når de arbejder med regnehistorier i relation til spillet. Eleverne spiller i grupper på tre-fem; regnehistorierne kan laves i mindre grupper.

Forberedelse: Læreren bør som minimum have spillet en times tid. Det er en fordel at have set Let's Play videoer om *Torchlight II* på YouTube eller have læst på https://torchlight.fandom.com/wiki/Torchlight_II for at få yderligere indblik i spillets systemer.

Udfordring: Forstå matematik i spilsystemer og optimer taktikker i *Torchlight II*.

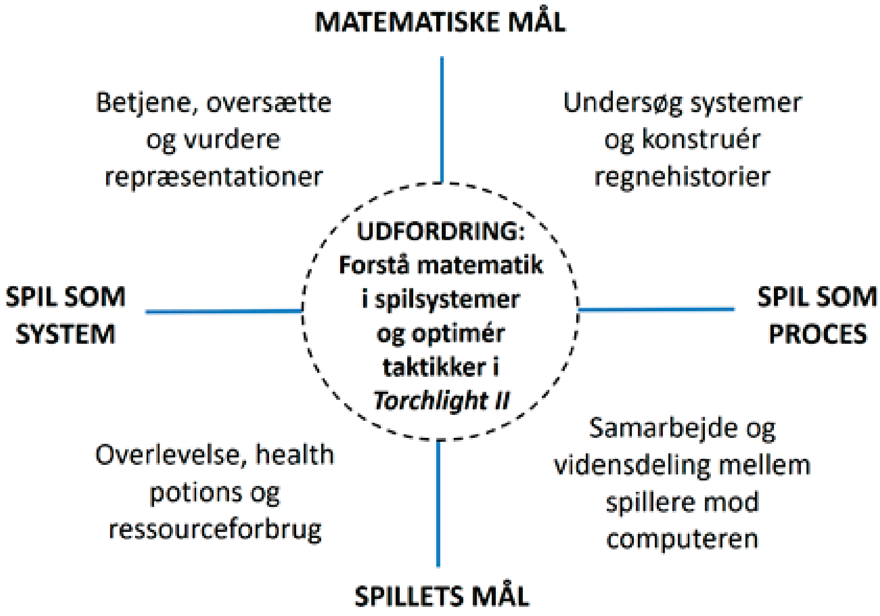
Det faglige indhold: At arbejde med repræsentationskompetencen, oversætte mellem repræsentationer og vurdere repræsentationer.

Spilelementer: *Torchlight II* er et action- og rollespil, hvor spilleren kæmper sig igennem en fantasiverden for at forhindre ødelæggelsen af denne verden. Spilleren kan udforske verdenen og kæmpe mod forskellige monstre, der giver *experience* og *loot*, når de besejres. De fire klasser (berserker, embermage, engineer og outlander) som spilleren kan vælge mellem har forskellige "skill trees", dvs. forskellige fordelinger af færdigheder. Spillet har desuden en række systemer, der alle vekselvirker – fx i form af liv, magi, guld eller experience. Igennem spillet kan spilleren påvirke de forskellige systemer for at forsøge at optimere sine chancer for at vinde eller at optimere en bestemt spillestil, som kan give fordele i kampen mod monstrene.

Spilaktiviteter: Spillet kan spilles individuelt eller som multiplayer. I dette forløb spiller eleverne multiplayer i grupper med tre-fem spillere. Sværhedsgraden sættes på højeste niveau, da dette giver den største udfordring for eleverne. Det nødvendiggør, at eleverne samarbejder, og gør det også mere nødvendigt for eleverne at optimere deres spillestil gennem forståelse af systemerne i spillet og gruppens fælles taktik. Hvis spillet spilles på en sværhedsgrad, der er for let, er det ikke nødvendigt at samarbejde eller optimere sin spillestil i særlig stor grad.

Faglige aktiviteter: De faglige aktiviteter tager udgangspunkt i repræsentation af spilmekanikkerne i *Torchlight II*. Der er en vekselvirkning mellem at spille spillet og lave regnehistorier omkring spillet, hvor spillet repræsenteres og undersøges. Udgangspunktet er, at arbejdet med en anden repræsentation af spillet kan give en anden forståelse af spillet, som kan ændre elevernes måde at spille på. Samtidig kan spillet udgøre en meningsfuld ramme til at forstå, hvad matematisk viden kan bruges til.

Tegn på læring og evaluering: Når eleverne selv producerer regnehistorier kan produktet bruges til evaluering og give læreren indblik i elevens overvejelser. Der kan især kigges efter kvaliteten af koblingen mellem historie og spiludfordring.



Figur 5.10. Koblinger mellem spil og matematik i relation til Torchlight II.

Kernen i forløbet er, at eleven skal *undersøge spilhandlinger, der kan optimeres vha. matematik for at kunne tage bedre og mere kvalificerede valg i spillet*. *Torchlight II* kan i princippet spilles, uden at man laver matematiske overvejelser og ræsonnementer. Men når eleverne spiller på den højeste sværhedsgrad, Elite, møder de massiv modstand og dør på stribe. Derfor bliver det relevant for eleverne at optimere deres spil så meget som muligt for at overleve og klare spillets udfordringer. Denne optimering kan fx ske gennem forskellige matematiske analyser af spillet. Hvis man spiller på for lav sværhedsgrad, bliver spilleren hjulpet så meget, at det bliver unødvendigt at inddrage matematiske overvejelser for at optimere vinderstrategien.

Ved en høj sværhedsgrad bliver det primære fokus for spillerne *at overleve, at få liv og ikke miste liv, at give skade og ikke modtage skade*. Den helt centrale undersøgelse i forløbet handler om at forstå spillets overlevelsesmekanikker ud fra en matematisk synsvinkel med henblik på, at eleverne kan optimere deres måde at spille på. Eleverne må derfor gerne prøve at dø mange gange i spillet, da de fordele, spillerne kan opnå ved at forstå de matematiske sammenhænge i spillet, dermed bliver større og mere tydelige for spillerne. Brugen af spillet på den sværeste sværhedsgrad stilladserer således elevernes forståelse for nødvendigheden af overlevelse gennem velbegrundede valg i spillet. Dermed højner det også elevernes forståelse for, hvordan deres arbejde med matematiske ræsonnementer kan hjælpe dem som spillere med at overleve længere tid i spillet.

Matematiske problemstillinger i Torchlight II

I computerspil er der ofte flere forskellige mekanikker, som kan undersøges matematisk. Derfor er det vigtigt at vælge en væsentlig problemstilling i *Torchlight II*, der kan repræsenteres via en regnehistorie. Fokus for sådan en problemstilling bør afhænge af, hvordan der kan skabes meningsfulde koblinger mellem matematiske kompetencer/emner og spillets regler, mekanikker samt udfordringer.

Health potions i Torchlight II

Health potions er livgivende trylledrikke, der fylder avatarens health (liv) op. Potions kan købes i byen i forskellige størrelser og kan findes i kister og krukker eller droppes af monstre når de dør. Spillerne bruger health potions i kamp for at undgå at deres liv forsvinder og kommer ned på 0 – hvilket vil betyde, at de dør og skal respawne (genoplive) i byen.

I Torchlight II vises spillerens beholdning af liv gennem en health bowle.

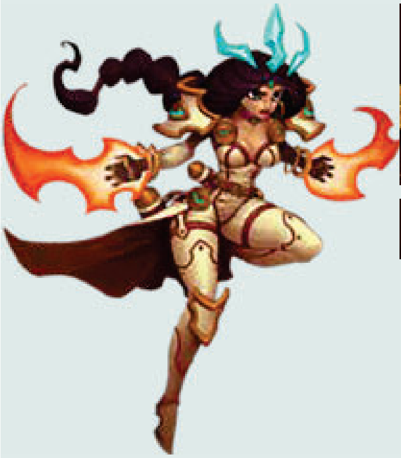
For at vurdere hvor meget liv spilleren har tilbage, mens spillet er i gang, bliver vi nødt til at foretage konkrete skøn af vores health beholdning uden at kunne se konkrete tal. Hvis spilleren fx har 471 health (se billede), fylder en almindelig health potion ca. ¼ af bowlen op hvert sekund (112,5/471 = 0,24). Den store health potion fylder ca. halvdelen af bowlen hvert sekund (225/471= 0,48). Vi ved også, at den champion, vi spiller mod, skader os omkring 200 hvert andet sekund. Det er altså ca. 100 skade i sekundet, hvilket udgør lidt under en femtedel af bowlen (100/471= 0,21).

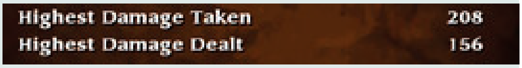
Et oplagt sted at arbejde med matematiske overvejelser til at optimere spiloplevelsen i *Torchlight II* er health potions, eftersom alle spillere, uanset hvilke andre valg de ellers træffer i spillet, er afhængige af at blive healet for ikke at dø. Igennem spillet møder spillerne kontinuerligt større og mere effektive health potions. De fleste spillere vil automatisk købe de største health potions, men de er også de dyreste. Det kan på kort sigt være en god strategi, men eftersom det guld, spillerne skal betale for health potions, er en knap ressource i spillet, har det stor taktisk betydning, hvordan man bruger sit guld. Spillerne risikerer meget hurtigt at løbe tør for både guld og health potions, hvis de kun køber de største, de kan få. Desuden kan guld bruges til at købe mange andre vigtige varer i spillet som fx våben og rustninger, der også har stor indflydelse på spillernes mulighed for at overleve de udfordringer, der venter dem. Derfor er spørgsmål som "Hvordan får jeg mest for mit hårdt optjente guld?" og "Hvordan øger vi vores chance for overlevelse gennem optimering af vores ressourceforbrug?" meget relevante for elevernes oplevelse af matematikken i *Torchlight II*.

For at øge forståelsen af de konkrete matematiske sammenhænge i spillet omkring health potions præsenterer vi her en eksemplarisk regnehistorie, der kan bruges som intro til forløbet. I regnehistorien står en *embermage* over for en champion, som er en særlig stærk fjende. Spillerens medspillere er døde, hvilket betyder at de er *respawnet* i begyndelsesbyen. Så længe der er én spiller i live på banen, kan medspillerne teleportere sig tilbage til denne spiller fra startbyen. Hvis alle spillere dør kan de kun teleportere sig til bestemte steder i spillet, hvilket betyder, at de bliver sat et godt stykke tilbage i deres spil.

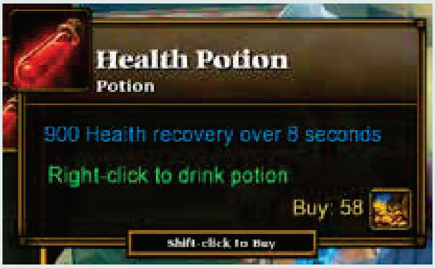
Regnehistorien tager udgangspunkt i den bestemte spilmekanik, som styrer, at der er forskellige størrelser af potions, der kan heale spillerens avatar på forskellige måder. Her skal medtænkes, at de forskellige potions har forskellige priser, da en stor health potion er betydeligt dyrere end en almindelig health potion. Så hvis spilleren kan finde situationer, hvor han kan slippe afsted med at bruge en almindelig health potion, vil spilleren kunne spare guld i det lange løb og dermed undgå ressourcespild.

Regnehistorie om health potions





Forestil dig, at denne level 6 *embermage* er din avatar. Som du kan se, har du 471 i total health. Du har to health potions med dig, en almindelig Health Potion og en Big Health Potion:



Du er alene i en kamp med en champion. Alle på dit team er døde. Champion'en skader dig omkring 200 hit points, hver gang han rammer dig. Han er heldigvis langsom, og hans *attack speed* er næsten to sekunder. Hvis han rammer dig tre gange i træk er du død, og dine medspillere kan ikke længere teleportere til dig. I stedet skal I allesammen løbe hele vejen fra byen. Efter at han har fået to slag ind på dig, trænger han dig op i en krog. Du har intet valg ud over at kæmpe. Du har nu kun 71 ud af dine 471 hit points tilbage. Hvilken health potion drikker du? Hvorfor?

I forbindelse med denne opgave kan eleven gøre sig forskellige overvejelser. Et tænkt elevsvar kunne se sådan ud:

Elevsvar

Det kommer an på, om jeg er parat til at drikke en potion, lige da fjenden har angrebet, og jeg kun har 71 health tilbage. Hvis jeg kan nå det, vælger jeg den lille potion, da jeg så kan nå at regenerere 225 health, inden han slår mig igen. Så har jeg 225 + 71 health, når han rammer mig næste gang. Og de næste seks sekunder (da der jo er gået to af de otte sekunder det tager for en health potion at fylde op) regenererer jeg 12,5 mere health, end fjenden skader mig. 112,5 - 100 = 12,5. Hvis jeg drikker den lille for sent, altså så der kun er et sekund inden jeg bliver ramt igen, dør jeg. For så har jeg kun 71 + 112,5 = 183,5 health når han angriber igen.

Nu hvor jeg har tænkt det igennem, og jeg ved, hvor meget tid vi taber, hvis jeg dør, inden mit hold kan teleportere til mig, ville jeg nok vælge en stor potion. Det minimerer risikoen for at time det forkert. Også selvom det let kunne ende med at være spild af ressourcer. Hvis en af mine kammerater nåede at teleportere til mig, ville jeg nok vælge den lille. Fremover vil jeg nok sørge for at købe både store og små potions og sørge for at have hotkeys (genvejstaster) til begge.

Som elevsvaret indikerer, er der en række hensyn og forudsætninger, der kan influere det konkrete valg, samtidig med, at der kan ræsonneres matematisk for, hvilke valg, der bedst sikrer spillerens overlevelse.

I det videre arbejde skal eleverne lave andre regnehistorier om health potions. Specifikke kriterier for regnehistorierne kan hjælpe med at strukturere elevernes arbejde. En opgave kunne fx være at beskrive en situation, hvor det er tydeligt, at det vil være optimalt at bruge enten en stor health potion eller en almindelig health potion. Eller beskrive en situation, hvor det ikke betyder noget, hvilken potion, spilleren bruger. Dette kan kombineres med et krav om specifikke matematiske repræsentationer i regnehistorien. For eksempel at eleverne i deres historie (eller svar) skal bruge regneudtryk eller en tegning af situationen, som indeholder nogle af de involverede tal. Efterfølgende skal eleverne beskrive, hvordan arbejdet med regnehistorierne har givet dem ny viden om konteksten, og hvordan den viden kan bruges til at forbedre deres brug af health potions i spillet. Det gøres ved at eleverne lægger en strategi for, hvordan de vil købe og bruge health potions, næste gang de er i spillet.

Spørgsmål til opfølgende samtale:

- Har I lært noget nyt om health potions?
- Hvilke ting ud over health potions påvirker jeres healing (*health regeneration*) i spillet?
- Er der nogen af jer der tænker I kommer til at købe og bruge health potions anderledes næste gang I skal spille?
- Har I opdaget andet nyt om spillet?
- Har I gjort jer tanker om hvilke andre ting i spillet det kunne give mening at undersøge?

Alle spørgsmålene følges op med yderligere hv-spørgsmål: Hvad? Hvordan? Hvorfor?

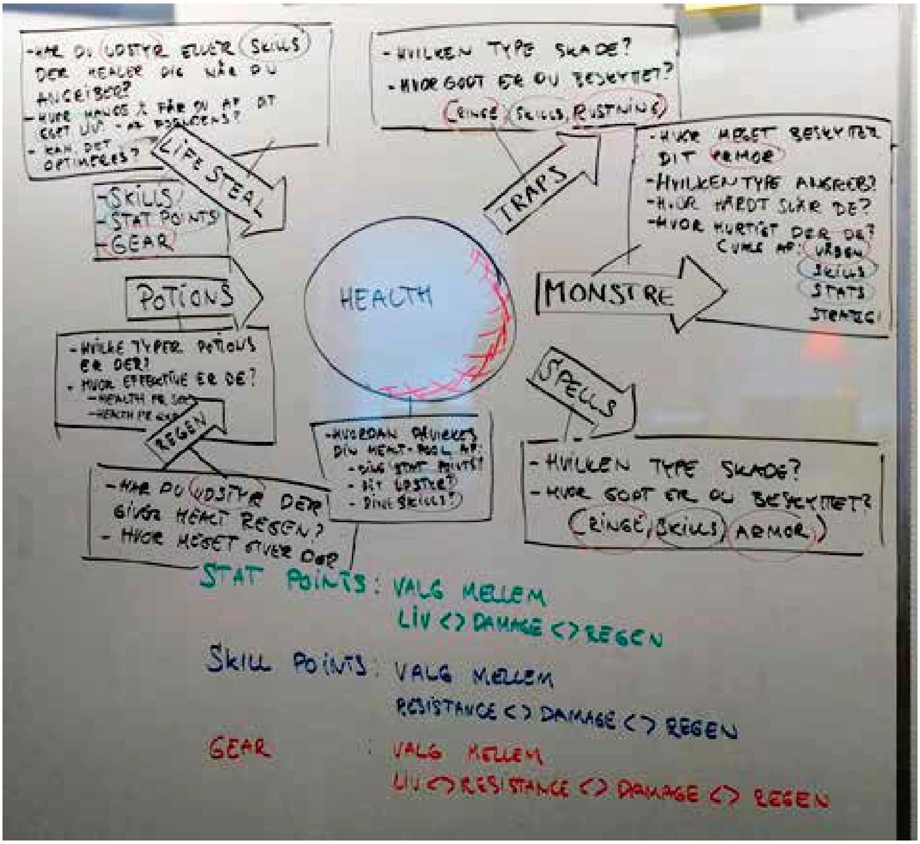
Vi har set mange eksempler på, at elever ændrer strategi i *Torchlight II* på baggrund af analyser lavet i matematiktimerne. Det gælder lige fra eksemplet ovenover, hvor en elev vurderer regenerationshastigheden i forhold til sin totale health, over elever, der begynder at købe flere størrelser af health potions, til elever der aktivt regner på, hvordan de hurtigst får de rigtige *stats* til at *equippe* nyt *gear* med høje *stat requirements*. Vi har også set eksempler på elever, der har lavet generelle strategiændringer, som fx Ella, der efter at have tegnet en model over health-systemet i *Torchlight II*, besluttede sig for at påvirke sin health ved at angribe fjenderne med *health steal* i stedet for at være forsigtig og forsøge at undgå at blive ramt. Som Ella sagde: "*Jeg tror jeg vil prøve at være lidt mere vild næste gang vi spiller*". Det var gået op for hende, at der er mange måder at påvirke health-systemet på, og at hun muligvis ville få mere ud af at spille aggressivt, og både øge tab af health, og tilstrømning af health, samtidig med at hun fik flere XP og hjalp sit hold mere.

De mange måder, hvorpå spillere kan ændre deres tilgang til spillet er interessante i forhold til at støtte de elever, der oplever matematikfaget som abstrakt, verdensfjernt og uanvendeligt i deres hverdag – jf. også afsnit 5.3. Boaler (2015) pointerer, at en kontekst der inddrages i matematikundervisningen, bør støtte eleverne i at bruge deres domæneviden om konteksten. Tilsvarende beskriver Gravemeijer og Cobb (2006), hvordan evnen til at bruge domænespecifik viden om konteksten bør ses som en integreret del af matematiklæring i kontekst. Gennem regnehistorierne kan eleverne opleve, at matematik er til stede og giver muligheder for at handle i computerspil og dermed ud over matematiktimerne. Koblingen mellem viden om spilkonteksten med matematisk viden kan være med til at gøre matematik til et mere virkelighedsnært fænomen. Som en lærer fra pilotprojektet til Sæt skolen i spil beskrev det: "*Eleverne har fundet ud af, at matematik kan beskrive hverdagsting*". Vi har flere gange set lærere og elever få denne type af erkendelser, når vi har arbejdet med computerspil i matematik i 5. og 6. klasse. Elevernes mulighed for at opdage, at sådanne valgmuligheder eksisterer, er væsentlige i forhold til at styrke elevernes oplevelse af matematik som en meningsfuld viden og kunnen. Samtidig kan der være stor variation blandt elever i deres interesser for og oplevelse af, hvad der er meningsfulde valg i forhold til computerspil.

Forløbets progression

Del 1: Spil *Torchlight II* i to-tre timer i hold af tre-fem spillere. Giv eleverne en grundlæggende introduktion til spillet, og sæt sværhedsgraden til Elite-niveau.

Del 2: Brug WALT og WALF (se kapitel 2) til sammen at tegne forskellige modeller for spillet i relation til de forskellige matematiske mekanikker fx health, mana, opgradering af udstyr, evner osv. Inddrag repræsentationerne i klassesamtaler til at udvikle et fælles sprog om, hvad der er udfordrende i spillet. Tag udgangspunkt i health-systemet og tegn på tavlen ud fra læreren og elevernes viden om hvordan udvalgte spilmekaniker i systemet fungerer. Se eksemplet herunder som inspiration.



En illustration af udvalgte spilmekanikker i Health-systemet i Torchlight II.

Del 3: Forløbet tager udgangspunkt i den eksemplariske regnehistorie, hvor eleverne skal tage stilling til, hvilke health potions der skal købes. Man kan vælge at lade eleverne arbejde med den eksemplariske regnehistorie eller en anden historie som læreren har lavet, hvilket kan støtte eleverne. En eksemplarisk opgave kan have den effekt, at eleverne senere bare kopierer eksemplet med få ændringer hist og her. Pernille Pind beskriver, at fordelen ved at starte med et velgennemtænkt eksempel er, at eleverne bliver fortrolige med opgaveformen og at en næsten kopiering alligevel rummer en nærlæsning og refleksion over sig til ordene, som går et skridt dybere end bare løsning af en regnehistorie, som læreren har lavet (Pind, 2015).

Del 4: Her udvikler eleverne selv regnehistorier. Når eleverne selv skal lave regnehistorier om health-systemet kan eksemplet vist i illustrationen ovenfor være med til at strukturere elevernes regnehistorier. Denne tegnede model, som læreren selv kan lave i forhold til bestemte fokuspunkter, bliver en måde at afgrænse spillet på i forhold til de matematiske mekanikker. Lærere og elever kan sammen bruge modellen til at vurdere og udvælge specifikke elementer der skal repræsenteres i elevernes regnehistorier. Hvilket område er det fx relevant at lave regnehistorier omkring, og hvilke dele af spillet skal medtænkes for at regnehistorien er relevant for at forstå spillet? Man kan starte med at læreren udleverer en række screenshots fra spillet, der opridser spilsituationer og lade eleverne lave historier herudfra. En anden mulighed er at lade elevernes egne erfaringer og handlinger i spillet danne afsæt for historierne. Dette gøres ved, at der i en spilsession sættes fokus på, at eleverne skal indsamle screenshots eller fotos af specifikke spilsituationer. For eksempel hver gang eleverne kommer i en situation, hvor de skal bruge health potions. Når de er færdige med spilsessionen, skal de bruge et af deres screenshots eller fotos som udgangspunkt for at skrive en regnehistorie. Endelig kan fokus for regnehistorier struktureres ud fra elevernes egne undersøgelser af spillet, fx ved at de lægger bestemte strategier i forhold til indkøb og brug af health potions og beskriver situationer, hvor strategierne virker.

Afslutningsvis kan der arbejdes med, at eleverne vælger andre mekanikker i spillet, der kan laves om til regnehistorier eller andre hensigtsmæssige repræsentationsformer. Ville det fx være nemmere at forstå de matematiske sammenhænge mellem potions og overlevelse, hvis de var repræsenteret grafisk med linjer? Her følger en række spørgsmål, som kan hjælpe læreren og eleverne på vej i forhold til at finde et udgangspunkt for en regnehistorie eller et delsystem i spillet.

Spørgsmål til stilladsering af elevernes egne regnehistorier:

- Hvilke udfordringer er der i spillet?
- Hvordan holder spilleren sig bedst i live?
- Hvilke matematiske sammenhænge forestiller I jer kan hjælpe jer med at spille spillet?
- Beskriv en situation fra spillet, hvor matematik kan være en hjælp eller give fordele.
- Hvilken matematik er interessant i forhold til at klare noget bestemt eller overleve i spillet?

Når man som lærer arbejder med at skabe en tegnet repræsentation af matematiske systemer omkring spillet, kan klassesamtalen tage udgangspunkt i forskellige matematiske spørgsmål, der kan stilles om lige præcis denne situation.

- Er der noget i den her situation, som vi kan beskrive og repræsentere matematisk?
- Hvad er det for nogle matematiske spørgsmål, som vi kan stille?
- Hvad kan vi regne på, som kan gøre det nemmere for os at spille?
- Kan vi gøre det nemmere at vælge mellem [indsæt valg]?

Der er forskellige ressourcer og systemer, der kan arbejdes med i *Torchlight II*. Det gælder fx *mana* (magisk ressource), forskellige items og våben eller mulighed for opgradering af elevernes avatarer. Som inspiration findes der en hjemmeside med en "item database", hvor man kan simulere, hvordan forskellige opgraderinger kommer til at påvirke ens spiller i *Torchlight II*: https://tidbi.ru/eng/index.html. Her kan eleverne fx undersøge, hvad det gør ved deres HP/Hit Points (livskraft) når de sætter deres *skill points* i *vitality*. Eleverne kan også arbejde med at formulere de matematiske sammenhænge som funktioner. De kan så bruge deres resultater til at fremskrive skills og planlægge, hvor de lige nu skal sætte deres point for på sigt at opnå deres mål mest optimalt. På bogens hjemmeside findes der flere eksempler på matematikopgaver, som er udviklet til *Torchlight II* som en del af Sæt skolen i spil-projektet.

En klassisk måde at afslutte et regnehistorieforløb på er at lade klassen lave et fælles kompendium af deres historier og lade dem løse hinandens opgaver. Alternativt kan der laves cafèrunder, hvor små grupper af elever løser hinandens historier. Forløbet kan også bruges som afsæt for at eleverne undersøger og skriver historier om matematik i andre spil som de selv spiller i fritiden som *The Sims*, *Fortnite* eller *FIFA*.

5.10. Generelt om spil og matematik

Da alle computerspil på den ene eller anden måde er bygget op af systemer og spilmekanikker, som er styret af bestemte algoritmer, er det oplagt at inddrage computerspil i matematikundervisningen. Det er dog vigtigt som lærer at forholde sig til, hvor meget tid man skal bruge på selv at undersøge, afdække og gennemskue spilmekanikkernes matematikfaglige indhold/potentiale – og hvordan det potentiale kan synliggøres over for eleverne og relateres til fagets mål. Hvis ikke man som lærer har en grundlæggende forståelse af spillets mål og underliggende mekanikker, er det svært at iscenesætte matematikaktiviteter, der reelt er meningsfulde i forhold til spillets udfordringer. Potentialet for at anvende computerspil i matematikundervisningen er stort, men at det kræver, at læreren har den fornødne game literacy (spilkyndighed) og er i stand til at identificere, synliggøre og iscenesætte relevante matematiske sammenhænge i forhold til de konkrete spil, som der anvendes. Der er dog hjælp at hente, hvis man dykker ned i de mange online fora, der findes til forskellige spil. Et godt sted at starte med at lede efter denne type information er på sociale medier som for eksempel Reddit eller de spil leksikoner (wikis), der især findes til mange af de større computerspil.

RESUMÉ

Dette ph.d.-projekt undersøger, hvordan elevers oplevelser af at deltage i matematikundervisning med spil kan skabe læringsmæssige muligheder og begrænsninger.

Data er indsamlet gennem to forskningsprojekter: Sæt skolen i spil og Spilbaseret læring i det 21. århundrede. I denne kontekst bruger jeg pragmatisme og design-based research til at deltage i to interventioner i matematikundervisningen i forskellige 5.-klasser med det analoge spil Hungry Higgs og det digitale spil Minecraft.

Projektet anvender scenariedidaktik, John Deweys læringsteoretiske perspektiv og Erving Goffmans spilforståelse til at undersøge, hvordan elever kobler (og ikke kobler) faglige indsigter med deres hverdagserfaringer og oplevelser af at deltage i matematikundervisningen.

Projektet konkluderer, at elevers oplevelser som sociale deltagere i matematikundervisning med spil, både kan understøtte og bremse faglige indsigter. Derfor bør fremtidig forskning i spil, læring og matematikundervisning, der sigter mod at forstå læringspotentialer i nyere digitale og analoge spilformater, interessere sig for, hvordan elever oplever at deltage socialt i disse spil.

ISSN (online): 2794-2694
ISBN (online): 978-87-7573-778-9

AALBORG UNIVERSITETSFORLAG